МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

3. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Основные формулы

- Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами q_1 и q_2 в вакууме

$$\mathbf{F_{12}} = k\,(q_1 q_2 / r^3)\mathbf{r_{21}}\,,$$

где $\mathbf{F_{12}}$ – сила, действующая на первый заряд со стороны второго; k – коэффициент пропорциональности (в международной системе единиц $k=1/(4\pi\varepsilon_0)= 9\cdot 10^9$ Нм^2/Кл^2); $\mathbf{r_{21}}$ – радиус-вектор, проведенный от второго заряда к первому (r - модуль радиус-вектора).

- Напряженность и потенциал поля точечного заряда q

$$\mathbf{E} = k\,(q/r^3)\mathbf{r}\,, \qquad \varphi = k\,q/r\,,$$

где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор, проведенный от заряда к точке поля, в которой определяются его характеристики (r - модуль радиус-вектора).

- Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов Q_i (принцип суперпозиции)

$$\mathbf{E} = \Sigma\, \mathbf{E_i}\,, \qquad \varphi = \Sigma\varphi_i\,,$$

где $\mathbf{E_i}$ и φ_i - напряженности и потенциалы полей, создаваемых точечными зарядами q_i в данной точке пространства.

- Связь вектора напряженности и потенциала электрического поля

$$\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\nabla\varphi.$$

- Поток вектора напряженности сквозь произвольную замкнутую поверхность равен суммарному заряду, заключенному внутри этой поверхности, деленному на ε_0.

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \Sigma q_i /\varepsilon_0.$$

- Работа сил поля по перемещению заряда q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку поля с потенциалом φ_2

$$A = q\,(\varphi_1 - \varphi_2)$$

и не зависит от формы пути.

- Электрическая ёмкость:

  уединенного проводника

$$C = q / \varphi ;$$

конденсатора

$$C = q / (\varphi_1 - \varphi_2) ,$$

где q – заряд, сообщенный проводнику (конденсатору); $(\varphi_1-\varphi_2)$ – разность потенциалов на обкладках конденсатора.

- Ёмкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0\, \varepsilon\, S / d ,$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора; d – расстояние между ними; ε – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами.

- Ёмкость системы конденсаторов:

а) при параллельном соединении конденсаторов

$$C = \sum C_i ;$$

б) при последовательном соединении конденсаторов

$$1/C = \sum (1/ C_i) .$$

- Энергия заряженного конденсатора

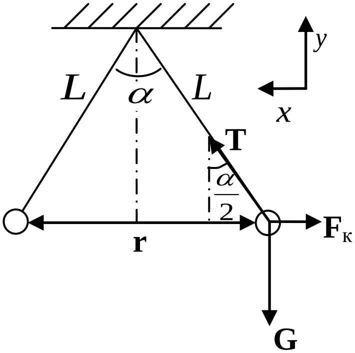
$$W = qU/2 = CU^2/2 = q^2/ (2C).$$

Закон Кулона

З - 1

Два шарика одинакового радиуса и массы подвешены на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q_0=4\cdot10^{-7}$ Кл они оттолкнулись друг от друга так, что нити разошлись на угол 60°. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика L = 20 см.

Решение



Заряд, сообщенный шарикам, распределяется между ними поровну, так как шарики имеют одинаковые радиусы. Поэтому заряды шариков

$$q_1 = q_2 = q_0/2.$$

Поскольку шарики заряжаются одноименными зарядами, то они будут отталкиваться друг от друга до тех пор, пока не наступит состояние равновесия. На каждый шарик действуют силы: **T–** натяжения нити, **G**–тяжести и $\mathbf{F}_k$– кулоновская (см. рисунок).

Условие равновесия **T+F**$_к$+**G** = 0.

Выберем оси координат и спроецируем силы на оси **X** и **Y**.

$$\begin{cases} T\sin\frac{\alpha}{2} = F_k; \\ T\cos\frac{\alpha}{2} = mg. \end{cases}$$

Разделив почленно, получим $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{F_k}{mg}$, откуда следует

$m = \dfrac{F_k}{g \cdot tg\frac{\alpha}{2}}$. Кулоновская сила равна $F_k = \dfrac{k\frac{q_0}{2}\frac{q_0}{2}}{r^2}$,

где r – расстояние между шариками. Его можно найти по формуле

$$r = 2L\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{(см. рисунок).}$$

Подставляя полученные выражения в формулу массы шарика, получим

$m = \dfrac{kq_0^2}{4 \cdot 4L^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot g}$, где $k=9\cdot10^9$ м/ф. После вычислений получим

$$m = \frac{9\cdot10^9 \cdot 16\cdot10^{-14}}{4\cdot4\cdot0{,}04\cdot0{,}25\cdot0{,}58\cdot9{,}8} = 1{,}6\cdot10^{-3}\ \text{кг}.$$

З - 2

В вершинах квадрата со стороной a=10 см помещены точечные заряды по $(1/3)\cdot10^{-7}$ Кл каждый. Найдите величину и направление напряженности электрического поля в центре квадрата, если знаки зарядов следующие:

а) ++++, **б)** +–+– , **в)** ++–– , а также потенциал в центре квадрата в указанных случаях.

Решение

В нашем случае поле создается несколькими зарядами, поэтому напряженность электрического поля определяется по принципу суперпозиции $\mathbf{E} = \Sigma\, \mathbf{E_i}$,

где $\mathbf{E_i}$ - напряженность поля каждого заряда в отдельности. Покажем на рисунке направление каждого вектора $\mathbf{E_i}$ и направление результирующего вектора $\mathbf{E}$. Модуль вектора $\mathbf{E_i}$ определяется по формуле $E_i = k\dfrac{q_i}{r_i^2}$,

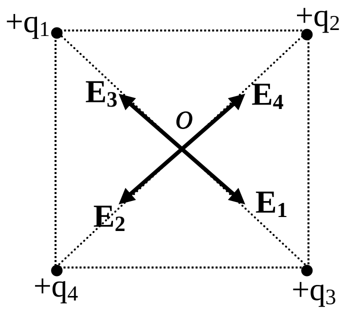
где q_i - заряд, r_i - расстояние от заряда до рассматриваемой точки; $k=9\cdot10^9$ м/ф – коэффициент пропорциональности в системе единиц СИ.

Вектор $\mathbf{E_i}$ направлен по прямой, соединяющей заряд и данную точку. Направление $\mathbf{E_i}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд, помещенный в эту точку.

а) Центр квадрата находится на пересечении его диагоналей. Так как все заряды одинаковы по абсолютной величине и расстояния от каждого заряда до рассматриваемой точки одинаковы, то $E_1 = E_2 = E_3 = E_4$ и

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 = 0,$$

так как векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_4$ направлены по одной прямой в противоположные стороны.



Потенциал электрического поля, созданного несколькими зарядами, равен алгебраической сумме потенциалов полей от отдельных зарядов

$$\varphi = \Sigma\varphi_i.$$

Потенциал поля точечного заряда определяется по формуле

$$\varphi_i = k\frac{q_i}{r_i},$$

где r_i равно половине диагонали квадрата.

В данном случае $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4$ и $\varphi_\Sigma = 4\cdot k\dfrac{q\sqrt{2}}{a}$.

После вычисления получим $\varphi_\Sigma = 4 \cdot 9 \cdot 10^9 \dfrac{(1/3) \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}41}{10^{-1}} = 1{,}7 \cdot 10^4$ В.

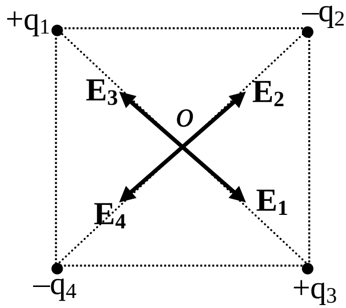
б) В данном случае

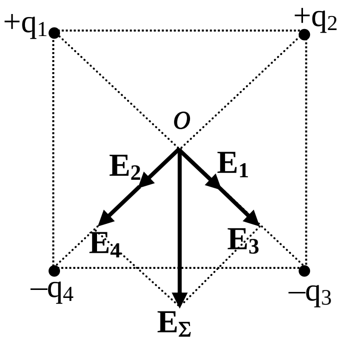
$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4 = 0 \text{ и}$$

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_3 = -\varphi_4.$$

Поэтому $\mathbf{E}_\Sigma = 0$;

$$\varphi_\Sigma = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 = 0.$$





в) В данном случае

$$E_1 + E_3 = E_2 + E_4 = k\frac{2q}{r_i^2}.$$

Модуль результирующего вектора определяется по теореме Пифагора

$$E_\Sigma = \sqrt{(E_1 + E_3)^2 + (E_2 + E_4)^2};$$

$$\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{k}\frac{2q}{\mathbf{r}^2}\sqrt{2}.$$

После вычисления получим

$$E = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot (1/3) \cdot 10^{-7} 1{,}41}{0{,}01} = 8{,}5 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

$$\varphi_\Sigma = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = 0.$$

Ответ: а) $E = 0$; $\varphi = 1{,}7 \cdot 10^4$В; б) $E = 0$; $\varphi = 0$; в) $E = 8{,}5 \cdot 10^4$В/м; $\varphi = 0$.

Применение теоремы Остроградского-Гаусса для расчета электрических полей

3 - 3

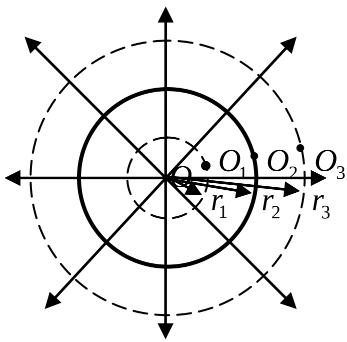
Сплошной эбонитовый шар радиусом R=5 см имеет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью ρ = 10 нКл/м^2. Определить напряженность электрического поля в точках: 1) на расстоянии r_1 = 3 см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии r_2 = 10 см от центра сферы. Построить график зависимости E(r). Диэлектрическая проницаемость среды ε =3.

Решение

Из центра шара проводим силовые линии. По расположению силовых линий поле заряженного шара можно считать симметричным. Поэтому для расчета поля можно применить теорему Остроградского-Гаусса для электрического поля в диэлектрике.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = q/\varepsilon\varepsilon_0 \ ,$$

где $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \Phi$ - поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность S; q – алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри этой поверхности; ε – диэлектрическая проницаемость среды; ε_o– константа (в международной системе единиц СИ $\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ ф/м).



Через точки O_1, O_2, O_3 проводим вспомогательные поверхности таким образом, чтобы напряженность поля во всех точках поверхности была одинакова и силовые линии были бы перпендикулярны поверхности. В нашем случае таким требованиям удовлетворяет сферическая поверхность. В этом случае поток вектора **E** можно рассчитать по формуле

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = E \cdot S,$$

где S – площадь поверхности сферы ($S = 4\pi r^2$).

1. Для точки O_1: $\Phi_1 = E_1 4\pi r_1^2$; заряд $q_1 = \rho V_1$,

где ρ - объемная плотность заряда; V_1 - объем части шара, заключенной внутри сферы, проходящей через точку O_1 ($V_1 = 4\pi r_1^3/3$). Тогда получим

$$E_1 4\pi r_1^2 = (4/3)\pi r_1^3 \rho/\varepsilon_o\varepsilon, \text{ откуда}$$

$$E_1 = \rho \cdot r_1/3\varepsilon_o\varepsilon.$$

Подставляя числовые данные, получим

$$E_1 = \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 3} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 = 3{,}77 \text{ В/м}.$$

2. На поверхности сферы происходит переход из одной среды в другую. Поэтому напряженность поля E_2 для точек, находящихся от центра на расстоянии r=R внутри шара, вычисляется по формуле

$$E_2 = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0 \varepsilon},$$

для точек с r = R вне шара – по формуле

$$E_2' = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0},$$

так как вне шара ε = 1.

Подставляя числовые данные, получим:

$$E_2 = \frac{10 \cdot 10^{-9} 5 \cdot 10^{-2} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 3} = 6{,}28 \text{ В/м},$$

$$E_2' = \frac{10 \cdot 10^{-9} 5 \cdot 10^{-2} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{3} = 18{,}8 \text{ В/м}.$$

3. Для точек, лежащих на сфере с радиусом r_3, теорема Остроградского-Гаусса записывается следующим образом:

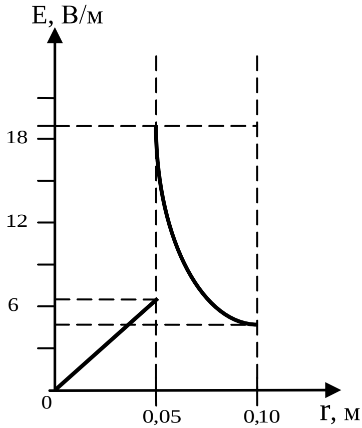
$$E_3 4\pi r_3^3 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}, \text{ где } \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = q_{\text{шара}},$$

так как вспомогательная поверхность охватывает весь шар.

Отсюда следует $E_3 = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_3^2}$.

Сделаем вычисления

$$E_3 = \frac{10 \cdot 10^{-9} 125 \cdot 10^{-6} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{-2}} = 4{,}71 \text{ В/м}.$$



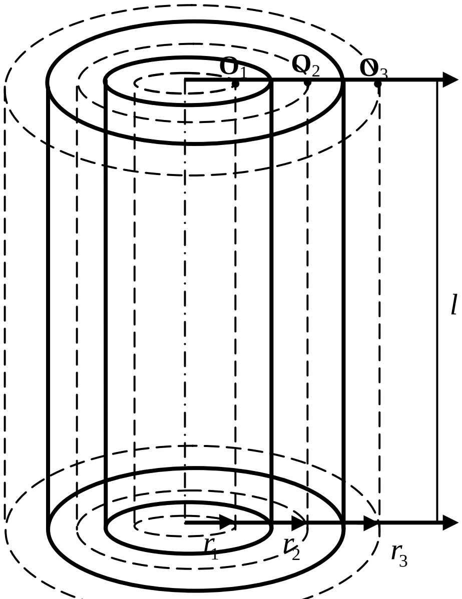
Ответ: E_1= 3,77 В/м, E_2= 6,28 В/м, E_2'= 18,8 В/м, E_3= 4,71 В/м.
График зависимости E(r) представлен на рисунке.

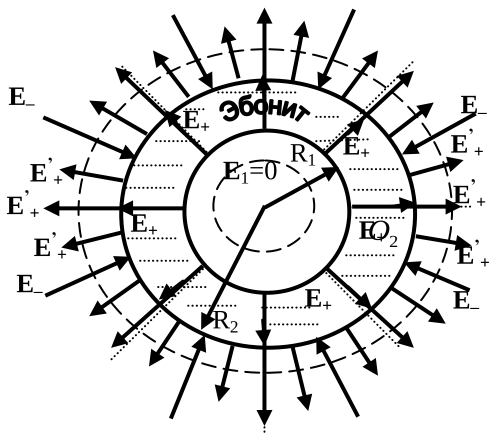
3 - 4

Две длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусом R_1=2 см и R_2=4 см несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями τ_1=1 нКл/$м^2$ и τ_2=–0,5 нКл/$м^2$. Пространство между трубками заполнено эбонитом (ε =3). Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях r_1=1 см, r_2=3 см, r_3=5 см от оси трубок. Построить график зависимости E от r.

Решение

Проведем силовые линии электрических полей заряженных трубок. На рисунке справа показаны поперечное сечение трубок – внутренней радиуса R_1 и внешней – радиуса R_2, а также схема расположения силовых линий полей, созданных распределенными по поверхности трубок зарядами.





Символами: $\mathbf{E}_+$ – обозначено поле положительно заряженной внутренней трубки в заполненном эбонитом пространстве между трубками; $\mathbf{E}'_+$ – поле этой же трубки во внешнем пространстве; $\mathbf{E}_-$ – поле заряженной отрицательно внешней трубки. По расположению силовых линий поля трубок можно считать симметричными и для расчета напряженности поля применить теорему Остроградского-Гаусса

$\oint\limits_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = q/\varepsilon\varepsilon_0$, где $\oint\limits_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = \Phi$ – поток вектора напряженности **E** электрического поля через замкнутую поверхность S;

q – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри этой поверхности;

$1/\varepsilon_o = 4\pi\cdot 9\cdot 10^9$ м/ф – const в системе единиц СИ.

Через точки O_1, O_2, O_3 проведем вспомогательные поверхности таким образом, чтобы они были симметрично расположены относительно заряженных тел и силовые линии были перпендикулярны этим поверхностям. Таким требованиям удовлетворяют цилиндрические поверхности, коаксиальные данным трубкам. Тогда поток вектора **E** через замкнутую поверхность цилиндра можно представить в виде суммы потоков вектора **E** через боковую поверхность цилиндра и его основания

$$\oint\limits_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = \oint\limits_{S_{бок}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} + 2\oint\limits_{S_{осн}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = E\cdot S_{бок} = E\cdot 2\pi r\cdot \ell ,$$

где потоки через основания цилиндра $\oint\limits_{S_{осн}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = 0$, так как векторы **E** и $d\mathbf{S}_{осн}$ взаимно перпендикулярны ($\mathbf{E}\perp d\mathbf{S}_{осн}$);

$S_{бок} = 2\pi r\cdot\ell$ – площадь боковой поверхности цилиндра.

Следовательно, теорема Остроградского-Гаусса запишется таким образом

$$E\cdot 2\pi r\cdot\ell = \tau\cdot\ell/\varepsilon\varepsilon_o,$$

где $\tau\cdot\ell = q$ – заряд внутри замкнутой поверхности цилиндра.

1. Для точки O_1: $r_1 < R_1$,

$$E_1 2\pi r_1 \ell = 0,$$

так как поверхность не охватывает заряда. Отсюда следует, что $E_1 = 0$.

2. Для точки O_2: $R_1 < r_2 < R_2$,

$$E_2 2\pi r_2 \ell = \frac{\tau_1 \ell}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Вспомогательная поверхность охватывает заряд, находящийся на внутренней трубке. Отсюда следует, что

$$E_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \frac{1\cdot 10^{-9}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}}{2\pi\cdot 3\cdot 3\cdot 10^{-2}} = 200\ \text{В/м}.$$

3. Для точки O_3: $r_3 > R_2$. Вспомогательная поверхность охватывает заряды на обеих трубках, $\varepsilon = 1$.

$$E_3 2\pi r_3 \ell = \frac{(\tau_1 + \tau_2)\,\ell}{\varepsilon\varepsilon_0},$$ следовательно

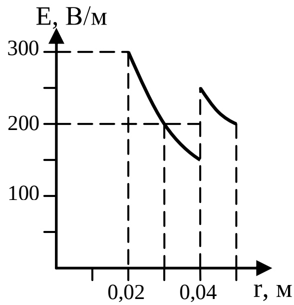
$$E_3 = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{2\pi\varepsilon_0 r_3} = \frac{(1-0{,}5)\cdot 10^{-9}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}}{2\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}} = 180\ \text{В/м}.$$

Для построения графика нужно рассчитать напряженность поля в точках, находящихся на поверхности трубок, по формулам:

$E_4 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}$ – напряженность поля на поверхности внутренней трубки, радиус которой R_1;

$E_4' = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$ – на поверхности внешней трубки внутри диэлектрика;

$E_5 = \dfrac{(\tau_1 + \tau_2)}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$ – снаружи.



Подставляя числовые данные, получим:

$$E_4 = \frac{10^{-9}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}}{2\pi\cdot 3\cdot 2\cdot 10^{-2}} = 300\ \text{В/м};$$

$$E_4' = \frac{10^{-9}\cdot 2\cdot 9\cdot 10^{9}}{3\cdot 4\cdot 10^{-2}} = 150\ \text{В/м};$$

$$E_5 = \frac{0{,}5\cdot 10^{-9}\cdot 2\cdot 9\cdot 10^{9}}{4\cdot 10^{-2}} = 225\ \text{В/м}.$$

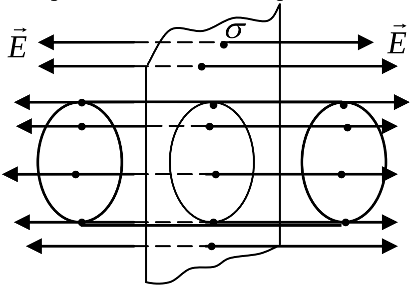
3 - 5

Электрическое поле создано двумя бесконечными плоскостями, несущими одинаковый, равномерно распределенный по площади, заряд

(σ=1 нКл/м²). Определить напряженность поля: 1) между плоскостями; 2) вне плоскостей. Построить график изменения напряженности поля вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

Решение

Напряженность поля, создаваемого двумя плоскостями, можно определить по принципу суперпозиции **E** = **E**$_1$ + **E**$_2$, где **E**$_1$ – напряженность поля первой и **E**$_2$ – второй плоскостей.

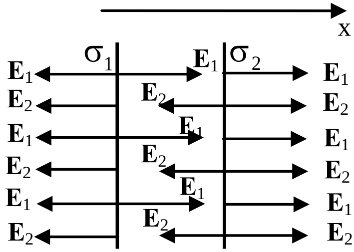


Напряженность поля, создаваемого одной заряженной плоскостью, можно определить, используя теорему Остроградского-Гаусса, так как поле плоскости является симметричным (см. рисунок). Для расчета **E** построим вспомогательную поверхность таким образом, чтобы она была симметрична относительно плоскости и силовые линии были бы перпендикулярны к ней. В данном случае такой поверхностью является цилиндр, образующие которого перпендикулярны плоскости, а основания ей параллельны. Теорема Гаусса в данном случае имеет вид

$$E \cdot 2S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0},$$

где $E \cdot 2S$ - поток вектора **E** через основания; S – площадь основания; σS - заряд внутри вспомогательной поверхности. Отсюда следует

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$



Изобразим на рисунке поле двух плоскостей:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon\varepsilon_0}; \; E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$ так

как $\sigma_1 = \sigma_2$, то $E_1 = E_2$.

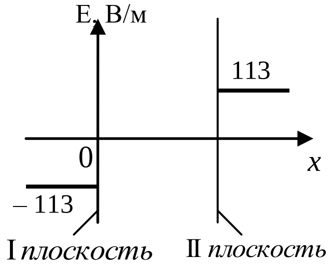
Напряженность поля:

1) между плоскостями

$$E = E_1 - E_2 = 0;$$

2) вне плоскостей

$$|E| = E_1 + E_2 = \frac{2\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$



После вычислений получаем

$$|E| = \frac{10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{9}}{1} = 113 \text{ В/м.}$$

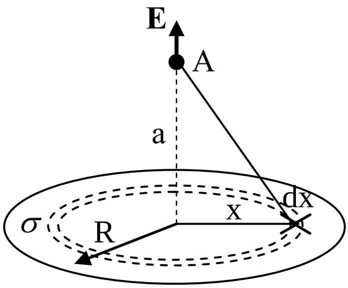
График представлен на рисунке.

Расчет напряженности и потенциала электрических полей, созданных непрерывным распределением зарядов

З - 6

Тонкий диск радиуса R равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ. Найти напряженность и потенциал поля в точке A, лежащей на оси диска на расстоянии a от него.

Решение



Чтобы найти потенциал в точке A, надо применить принцип суперпозиции полей. Разобьем диск на элементарные кольца шириной dx. Площадь кольца радиуса x равна $2\pi x dx$, а заряд кольца - $\sigma \cdot 2\pi x dx$. Потенциал поля кольца равен сумме потенциалов, созданных всеми его точечными элементами. Последние равноудалены от точки A на расстояние $\sqrt{a^2 + x^2}$ и создают поле в точке A с потенциалом

$$d\varphi = \frac{\sigma \cdot 2\pi x dx}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Интегрируя полученное выражение, определим потенциал диска

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + R^2} - a \right).$$

Из соображений симметрии ясно, что вектор напряженности **E** направлен в точке A вдоль оси диска. Рассматривая величину “a” как переменную, получим

$$E = -\frac{d\varphi}{da} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right).$$

Работа по перемещению заряда в электростатическом поле

З - 7

Поле создано зарядами q_1=(10/3)·10^{-9}Кл и q_2= –(10/3)·10^{-9}Кл, расстояние между которыми a=8 см, расстояние точки А от заряда q_1 – b=6 см (см. рисунок). Определить работу электрических сил по перемещению заряда q=10^{-9}Кл из точки А в точку В.

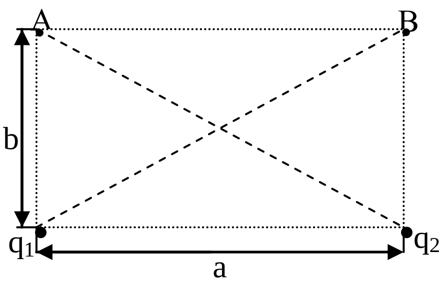
Решение

Работа по перемещению электрического заряда из точки А в точку В

$$A = q(\varphi_A - \varphi_B),$$

где q – переносимый заряд; φ_A и φ_B – потенциалы поля в точках А и В.

Потенциал электрического поля в точке А равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых зарядами q_1 и q_2 в данной точке



$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 .$$

Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом в какой-либо точке, равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где q – заряд, создающий поле; r – расстояние от заряда до данной точки. Следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 b};\ \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+b^2}},$$

и потенциал поля в точке А равен $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$

Потенциал поля в точке В равен $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{q_2}{b}\right).$

Тогда работа по перемещению заряда q из точки А в точку В в поле зарядов q_1 и q_2 равна

$$A = \frac{q\cdot(q_1 - q_2)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

После вычислений получим

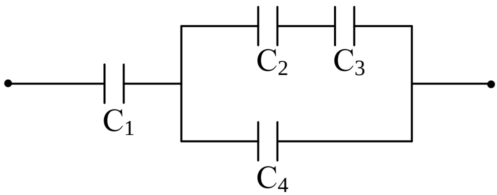
$$\mathrm{A}=\frac{10^{-9}4\pi\cdot 9\cdot 10^{-9}}{4\pi}\left(\frac{10}{3}+\frac{10}{3}\right)\frac{10^{-9}}{10^{-2}}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{\sqrt{8^2+6^2}}\right)=4\cdot 10^{-7}\text{ Дж.}$$

Ответ. $\mathrm{A}=4\cdot 10^{-7}$ Дж.

Электроёмкость. Конденсаторы

3 - 8

Конденсаторы с ёмкостями C_1=2 мкФ, C_2=2 мкФ, C_3=3 мкФ, C_4=1 мкФ соединены так, как показано на рисунке. Разность потенциалов на обкладках четвёртого конденсатора U_4=100 В. Найти заряды и разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора, а также общий заряд и разность потенциалов батареи конденсаторов.



Решение

Заряд на обкладках конденсатора C_4 можно определить по формуле

$$q_4 = C_4 U_4.$$

Конденсаторы C_2 и C_3 соединены последовательно, поэтому заряды на этих конденсаторах одинаковы. Эти конденсаторы присоединены параллельно к конденсатору C_4. Следовательно, суммарное напряжение на этих конденсаторах равно $U_2+U_3=U_4$. Заряды на этих конденсаторах можно найти по формуле

$$q_2=q_3=C'U_4,$$

где C'- общая ёмкость второго и третьего конденсаторов.

$$\frac{1}{C'}=\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}, \text{ откуда } C'=\frac{C_2\cdot C_3}{C_2+C_3}\ .$$

Тогда

$$q_2=q_3=(C_2C_3)U_4/(C_2+C_3).$$

Конденсатор C_1 присоединён к группе конденсаторов C_2, C_3 и C_4 последовательно. Тогда заряд на этом конденсаторе будет равен суммарному заряду

$$q_1 = q_2 + q_4 .$$

Зная заряды, можно найти напряжение на каждом конденсаторе:

$$U_1=q_1/C_1;\ U_2=q_2/C_2;\ U_3=q_3/C_3.$$

Общий заряд батареи будет равен q_1. Напряжение на зажимах батареи равно $U=U_1+U_4 = U_1+U_2+U_3$.

Подставляя числовые данные, получим:

$$q_4 = 1\cdot 10^{-6}\cdot 100 = 10^{-4}\,\text{Кл};$$

$$q_2 = q_3 = \frac{2\cdot 3\cdot 10^{-12}}{(2+3)\cdot 10^{-6}}\cdot 100 = 1{,}2\cdot 10^{-4}\,\text{Кл};$$

$$q_1 = 1{,}2\cdot 10^{-4} + 1\cdot 10^{-4} = 2{,}2\cdot 10^{-4}\,\text{Кл};$$

$$U_2 = \frac{1{,}2\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-6}} = 60\ \text{В};\ U_3 = \frac{1{,}2\cdot 10^{-4}}{3\cdot 10^{-6}} = 40\ \text{В};$$

$$U_1 = \frac{2{,}2\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-6}} = 110\ \text{В};\quad U=110+60+40=210\ (\text{В}).$$

Ответ: $q_1=2{,}2\ 10^{-4}$ Кл, $U_1=110$ В; $q_2=1.2\ 10^{-4}$ Кл, $U_2=60$ В; $q_3=1.2\ 10^{-4}$ Кл, $U_3=40$ В; $q_4=10^{-4}$ Кл; $U=210$ В.

3 - 9

Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин $S=100$ см^2 и расстоянием между ними $d_1=1$ мм заряжен до $U=100$ В. Затем пластины раздвигают до расстояния $d_2=25$ мм. Найти энергию конденсатора до и после раздвижения пластин и произведённую при этом работу, если конденсатор перед раздвижением пластин: а) не отключается от источника; б) отключается от источника.

Решение

а) Если конденсатор не отключается от источника, то напряжение на пластинах конденсатора поддерживается постоянным и равным ЭДС источника. При раздвижении пластин конденсатора его емкость уменьшается.

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d.$$

Следовательно, уменьшается и заряд на пластинах конденсатора

$$\Delta q = (\Delta C)U = \varepsilon\varepsilon_0 S(1/d_2 - 1/d_1)U,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость (ε =1); ε_o= $8{,}85\cdot10^{-12}$Кл/В·м – электрическая постоянная; S – площадь пластин конденсатора; d_1 – первоначальное, d_2 – конечное расстояния между пластинами.

Количество заряда Δq необходимо перенести с положительно заряженной пластины конденсатора на отрицательно заряженную пластину против направления ЭДС источника. Это перемещение заряда производится за счет работы внешних сил и частично компенсируется уменьшением энергии конденсатора

$$A_{вншн} = -\Delta q\cdot\varepsilon + \Delta W,$$

где $\varepsilon = U$ – ЭДС источника, $\Delta W = W_2 - W_1$ – изменение энергии конденсатора в результате раздвижения его пластин.

До раздвижения пластин энергия конденсатора равна

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot U_1^2}{2 \cdot d_1} .$$

Энергия конденсатора после раздвижения пластин

$$W_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot U_1^2}{2 \cdot d_2} ,$$

где d_2- расстояние между пластинами после их раздвижения. Тогда

$$A_{вншн} = -\varepsilon_0 S(1/d_2-1/d_1)U^2 + \varepsilon_0 SU^2(1/d_2-1/d_1)/2 ,$$

откуда $A_{вншн} = \varepsilon_0 S\, U^2\, (1/d_1-1/d_2)/2.$

Подставляя числовые данные, получим:

$$W_1 = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot100\cdot10^{-4}\cdot10^{4}}{2\cdot10^{-3}} = 4{,}42\cdot10^{-7}\,Дж ;$$

$$W_2 = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot100\cdot10^{-4}\cdot10^{4}}{2\cdot25\cdot10^{-3}} = 1{,}77\cdot10^{-8}\,Дж ;$$

$$A_{вншн} = 4{,}42\cdot10^{-7} - 1{,}77\cdot10^{-8} = 42{,}43\cdot10^{-8}(Дж) = 4{,}24\cdot10^{-7}(Дж).$$

б) Если конденсатор отключается от источника, то заряд на пластинах остаётся постоянным, так как система замкнутая. В этом случае энергию удобно выражать через заряд. Энергия после раздвижения пластин равна

$$W_2=q^2/(2C_2) ,$$

где $q = C_1U_1$– заряд конденсатора до отключения источника.

Тогда конечную энергию конденсатора можно выразить через его начальную энергию $W_2 = \dfrac{C_1^2 U_1^2}{2C_2} = W_1 \dfrac{C_1}{C_2} = W_1 \dfrac{d_2}{d_1}$.

Работа по раздвижению пластин

$$A = W_2 - W_1 = W_1(d_2 - d_1)/d_1.$$

Подставляя числовые данные, вычислим энергию после раздвижения пластин и произведённую при этом работу.

$$W_2 = 4{,}42 \cdot 10^{-7}\,\frac{25}{1} = 1{,}11 \cdot 10^{-5}\,\text{Дж};$$

$$A = 1{,}11 \cdot 10^{-5} - 4{,}42 \cdot 10^{-7} = 111 \cdot 10^{-7}\,\text{Дж} = 106{,}6 \cdot 10^{-7}\,\text{Дж}.$$

Ответ**:** а) W_1=4,42 10^{-7} Дж; W_2=1,77 10^{-8} Дж; A= 4,24 10^{-7} Дж;

б) W_1=4,42 10^{-7} Дж; W_2=1,11 10^{-5} Дж; A= 1,07 10^{-5} Дж.

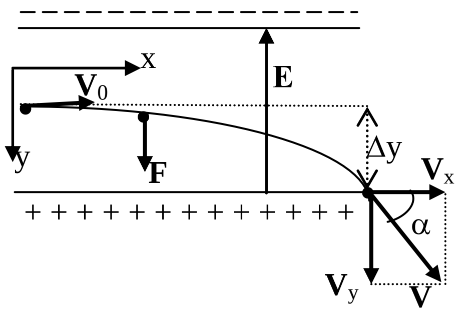
Движение заряженных частиц в электрическом поле

З - 10

Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинкам со скоростью $V_0=10^7$ м/с. Напряжённость поля в конденсаторе E=100 В/см, длина конденсатора l=5 см. Найти: 1) силу, действующую на электрон в электрическом поле конденсатора; 2) ускорение, с которым движется электрон в поле конденсатора; 3) время движения электрона внутри конденсатора; 4) отклонение электрона полем конденсатора; 5) величину и направление скорости электрона при вылете его из конденсатора.

Решение

Попадая в конденсатор, электрон будет притягиваться к положительно заряженной пластине. Электрическое поле конденсатора будет действовать на электрон с силой



$$\mathbf{F} = (-e)\mathbf{E},$$

где $(-e)$ - заряд электрона;
E – напряженность электрического поля конденсатора.

В направлении этой силы электрон получает ускорение

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = (-e)\mathbf{E}/m,$$

где m- масса электрона.

Движение электрона внутри конденсатора можно разложить на два движения: одно – по инерции, равномерное со скоростью V_0, направленное вдоль оси X параллельно пластинам конденсатора; другое – равноускоренное в направлении оси Y перпендикулярно пластинам.

За время своего движения электрон отклоняется от своего первоначального направления на расстояние

$$\Delta y = \frac{at^2}{2},$$

где t – время движения электрона внутри конденсатора.

$$t = \frac{\ell}{V_0},$$

где ℓ – длина пластин конденсатора.

Траекторией движения электрона внутри конденсатора является парабола. Скорость электрона при вылете из конденсатора направлена по касательной к траектории и может быть вычислена по формуле

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

где $V_x=V_0$; $V_y=at$ и составляет с первоначальным направлением движения угол α.

$$tg\alpha = \frac{V_y}{V_x}.$$

Подставляя в формулы числовые данные, получим:

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4 = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\ \text{Н};$$

$$a = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 1{,}76 \cdot 10^{15}\ \text{м/с}^2; \qquad t = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{10^7} = 5 \cdot 10^{-9}\ \text{с};$$

$$\Delta y = \frac{1{,}76 \cdot 10^{15} \cdot 25 \cdot 10^{-18}}{2} = 22 \cdot 10^{-3}\ \text{м} = 2{,}2\ \text{см};$$

$$V = \sqrt{10^{14} + 1{,}76^2 \cdot 10^{30} \cdot 25 \cdot 10^{-18}} = 1{,}33 \cdot 10^7\ \text{м/с};$$

$$tg\alpha = \frac{1{,}76 \cdot 10^{15} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{10^7} = 0{,}88, \qquad \alpha = 41°20'.$$

Ответы: $F=1{,}6\cdot10^{-15}$ Н; $a=1{,}75\cdot10^{15}$ м/с^2; $t=5\cdot10^{-9}$ с; $\Delta y=2{,}2$ см;
$V=1{,}33\cdot10^7$ м/с; $\alpha=41°20'$.

И. МАГНИТОСТАТИКА

Основные формулы

- Индукция магнитного поля, созданного элементом тока (I$d\mathbf{l}$) в точке на расстоянии $\mathbf{r}$ от него (закон Био–Савара–Лапласа)

$$d\mathbf{B} = (\mu\mu_0/4\pi)\,[(Id\mathbf{l})\,\mathbf{r}]/r^3.$$

- Принцип суперпозиции магнитных полей

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i \quad \text{или} \quad \mathbf{B} = \int d\mathbf{B}\ .$$

- Индукция магнитного поля:

а) бесконечно длинного прямого проводника с током на расстоянии r от него

$$B = \mu\mu_0 I / (2\pi r);$$

б) отрезка проводника с током

$$B = (\mu\mu_0/ 4\pi)\ I/r\ (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 – углы между направлениями тока в проводнике и соответствующими радиус-векторами $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$, проведенными от концов отрезка к точке, в которой определяется магнитное поле;

в) в центре кругового витка радиуса R с током

$$B = \mu_0 I / (2R).$$

- Сила Лоренца

$$\mathbf{F}_Л = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\ \mathbf{B}]\ .$$

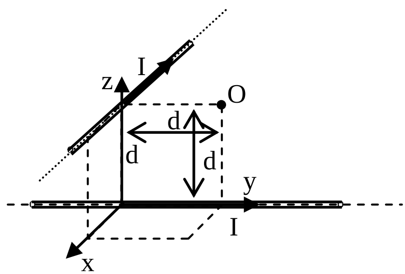
- Сила Ампера

$$d\mathbf{F}_A = [(I\,d\mathbf{l})\ \mathbf{B}]\ .$$

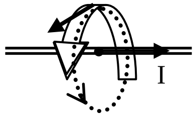
Магнитное поле постоянного тока (поле прямого тока)

И - 1

По двум длинным прямолинейным проводам, находящимся в воздухе на расстоянии d=8 см перпендикулярно друг другу, текут токи I=10 А каждый. Определить индукцию **B** магнитного поля, создаваемого токами в точке О, равноудаленной от обоих проводников (см. рисунок).



Решение



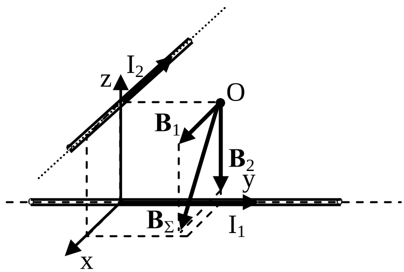
Направление вектора индукции **B** магнитного поля, созданного элементом проводника с током I, определяется в соответствии с правилом буравчика.

Индукция **B** магнитного поля в т. О определяется по принципу суперпозиции

$$\mathbf{B}_\Sigma = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$$

где $\mathbf{B}_1$– вектор индукции магнитного поля, созданного током I_1 первого проводника;

$\mathbf{B}_2$– вектор индукции магнитного поля, созданного током I_2 второго проводника.



Таким образом, векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ взаимно перпендикулярны. Поэтому модуль вектора индукции результирующего магнитного поля определяется по теореме Пифагора

$$B_\Sigma = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}\,.$$

С учетом того, что токи, протекающие в двух проводниках, одинаковы, а также точка О, в которой определяется магнитная индукция, расположена на одинаковом расстоянии от проводников, то B_1=B_2=B и

$$B_\Sigma = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2B^2} = B\sqrt{2}\,.$$

Индукция магнитного поля, созданного током I бесконечно длинного прямого проводника в точке, расположенной на расстоянии r от проводника, определяется соотношением

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r},$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная в системе единиц СИ;

μ – магнитная проницаемость среды.

Отсюда следует

$$B_\Sigma = \frac{\sqrt{2}\mu\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{\sqrt{2}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10}{2\pi\cdot 8\cdot 10^{-2}} = 35 \text{ мкТл.}$$

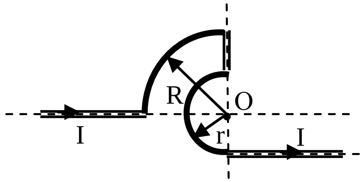
(Для воздушной среды магнитная проницаемость μ = 1.)

Ответ. B_Σ = 35 мкТл.

Магнитное поле постоянного тока (поле изогнутого проводника)

И - 2

Бесконечно длинный проводник изогнут так, как это изображено на рисунке. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого в точке О током I = 80 А, текущим по проводнику. Принять r = R/2, где R=1 м.

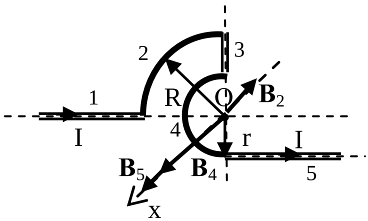


Решение

Магнитная индукция $\mathbf{B}_\Sigma$ в т. О определяется по принципу суперпозиции $\mathbf{B}_\Sigma=\Sigma\mathbf{B}_i$.

Разобьём проводник на 5 частей: два прямолинейных участка проводника (1 и 5), одним концом уходящих в бесконечность; участок 2 – четверть окружности радиусом R; отрезок (3); участок 4 – полуокружность радиуса r=R/2. Тогда вектор индукции $\mathbf{B}_\Sigma$ результирующего магнитного поля

$$\mathbf{B}_\Sigma=\Sigma\mathbf{B}_i=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_3+\mathbf{B}_4+\mathbf{B}_5,$$



где $\mathbf{B}_i$ – магнитные индукции полей в точке О, создаваемых токами, текущими соответственно по каждому из этих участков проводника.

Индукции $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_3$ магнитных полей токов первого и третьего участков равны нулю, так как токи в этих участках направлены вдоль оси, проходящей через точку О; вектор $\mathbf{B}_2$ в точке О направлен, в соответствии с правилом буравчика, перпендикулярно плоскости чертежа, от нас, а векторы $\mathbf{B}_4$ и $\mathbf{B}_5$ – перпендикулярно плоскости чертежа, к нам. Таким образом, не равные нулю векторы магнитной индукции $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_4$, $\mathbf{B}_5$, направлены параллельно оси x, перпендикулярной плоскости чертежа, и модуль вектора индукции $\mathbf{B}_\Sigma$ результирующего магнитного поля равен

$$B_\Sigma = -B_2 + B_4 + B_5,$$

где знак «–» перед B_2 означает, что этот вектор направлен против направления оси x.

Магнитная индукция второго участка B_2 определяется по формуле для магнитной индукции в центре кругового проводника радиуса R с током I.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}\ .$$

С учетом того, что магнитная индукция B_2 создана четвертью кругового проводника, выражение приобретает вид.

$$B_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R}\ .$$

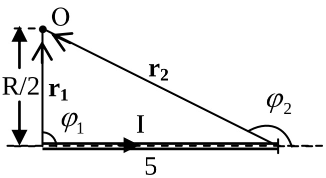
Магнитная индукция B_4 четвертого участка, являющегося полуокружностью радиуса R/2, определяется также.

$$B_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\cdot R/2}\ .$$

Магнитная индукция B_5, созданная током I отрезка проводника (5), определяется по формуле

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Для данного участка r_0=R/2; с учетом того, что проводник (5) полубесконечный:



$\varphi_1 = \pi/2$ и $\cos\varphi_1 = 0$;

$\varphi_2 = \pi$ и $\cos\varphi_2 = -1$.

Тогда
$$B_5 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\cdot R/2}.$$

Результирующая магнитная индукция B_Σ поля в точке O

$$B_\Sigma = B_4 + B_5 - B_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\cdot R/2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi\cdot R/2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R}\ .$$

Подставив числовые значения, получим результирующую магнитную индукцию B_Σ= 53,75 мкТл.

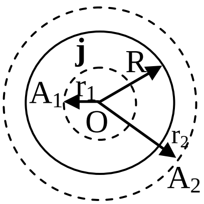
И - 3

По сплошному бесконечному цилиндрическому проводнику радиуса R течет ток плотности **j** . Рассчитать индукцию магнитного поля внутри и вне проводника.

Решение

Используем теорему о циркуляции вектора индукции **B**.

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I .$$



Рассмотрим точку A_1, расположенную на расстоянии r_1 от оси проводника. Проведем окружность радиуса r_1 с центром O на оси проводника. Сумма токов, охватываемая этой окружностью, равна $j \cdot \pi r_1^2$. Учтем, что окружность является силовой линией. Вследствие симметрии модуль вектора индукции одинаков во всех точках окружности и направлен по касательной, следовательно

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \oint_l B d\ell \cos\alpha = B_1 \ell = B_1 2\pi \cdot r_1 \quad (\cos\alpha = 1).$$

Итак, $$B_1 2\pi r_1 = \mu_0 j \pi r_1^2 ,$$

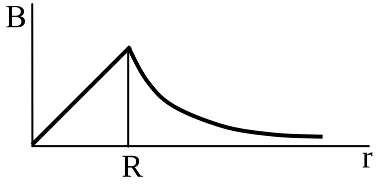
откуда $$B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 j r_1 .$$

Рассмотрим точку A_2, расположенную на расстоянии $r_2 > R$ от оси проводника. По теореме о циркуляции находим

$$B_2 2\pi r_2 = \mu_0 j \pi R^2 ,$$

откуда $$B_2 = \frac{\mu_0 j R^2}{2 r_2} .$$

График зависимости B от r представлен на рисунке.



Сила Ампера

И - 4

Между полюсами электромагнита создается магнитное поле с индукцией B=0,1 Тл. По проводу длиной L=7 см, размещенному под углом $\alpha=30^0$ к направлению магнитного поля, течет ток I=70 А. Найти силу F, действующую на провод со стороны магнитного поля.

Решение

На элемент длины d**L** проводника с током I в магнитном поле с индукцией **B** действует сила Ампера

$$d\mathbf{F}=[Id\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}].$$

Направление этой силы определяется по правилу векторного произведения: вектор d**F** направлен перпендикулярно плоскости векторов Id**L** и **B** так, чтобы из конца вектора δ**F** поворот от вектора (Id**L**) к вектору **B** был виден против часовой стрелки.

Модуль силы Ампера вычисляется по формуле

$$dF= IdL\cdot B\cdot\sin\alpha,$$

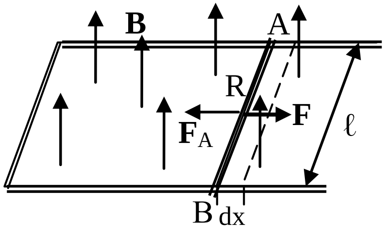
где α – угол между направлением тока и вектором **B**.

Модуль силы Ампера, действующей на весь проводник,

$$F = IB\int_0^L \sin\alpha\, dL = IBL\sin\alpha = 70\cdot 0{,}1\cdot 0{,}07\cdot 0{,}5 = 0{,}245\,(H).$$

И - 5

По П-образному проводнику, расположенному в горизонтальной плоскости, может скользить без трения перемычка АВ длиной ℓ, массой m и сопротивлением R. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией **B**, направленном вертикально. В момент времени t = 0 на перемычку начали действовать постоянной горизонтальной силой **F** и перемычка начала перемещаться вправо. Найти зависимость скорости перемычки от времени. Индуктивность контура и сопротивление П-образного проводника пренебрежимо малы.



При перемещении перемычки на расстояние dx = v·dt площадь контура возрастает на dS = ℓ·dx , что вызывает изменение магнитного потока

$$d\Phi = B \cdot dS .$$

В контуре возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot \ell \frac{dx}{dt} = B\ell v .$$

По цепи пойдет ток

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{B\ell v}{R},$$

который, согласно правилу Ленца, своим магнитным полем должен мешать изменению магнитного потока, поэтому на перемычку будет действовать сила Ампера, направленная против внешней приложенной силы **F.**

$$F_A = IB\ell = \frac{\varepsilon_i}{R} B\ell = \frac{B^2\ell^2 v}{R}.$$

Применив II закон Ньютона для описания движения перемычки, получим

$$ma = F - F_A \quad \text{или} \quad m\frac{dv}{dt} = F - \frac{B^2\ell^2 v}{R}.$$

Разделив переменные, проинтегрируем полученное уравнение

$$\int\limits_0^v \frac{dv}{F - \frac{B^2\ell^2}{R} v} = \int\limits_0^t \frac{dt}{m};$$

$$\frac{-R}{B^2\ell^2} \ln\left| F - \frac{B^2\ell^2}{R} v \right|_0^v = \frac{t}{m},$$

откуда зависимость скорости перемычки от времени имеет вид

$$v = \frac{RF}{B^2\ell^2}(1 - \exp(-\frac{B^2\ell^2}{mR}t)).$$

Сила Лоренца

И - 5

Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 1 кВ, влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению его движения. Индукция магнитного поля B = 1,19 мТл. Найти радиус R окружности, по которой движется электрон, период обращения T и момент импульса L электрона. (Действием силы тяжести можно пренебречь.)

Решение

На движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля действует сила Лоренца

$$\mathbf{F}_Л = q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}],$$

где q – заряд частицы; **v** – её скорость; **B** – индукция магнитного поля.

Направление силы Лоренца определяется по правилу векторного произведения: вектор силы $\mathbf{F}_л$, действующей на положительно заряженную движущуюся частицу, направлен перпендикулярно плоскости векторов **v** и **B** так, чтобы из конца вектора силы $\mathbf{F}_л$ поворот от вектора скорости **v** к вектору магнитной индукции **B** был виден против часовой стрелки.

Примечание. Для отрицательно заряженной частицы направление силы $\mathbf{F}_л$ противоположно направлению силы $\mathbf{F}_л$, действующей на положительно заряженную движущуюся частицу.

Модуль силы Лоренца

$$F_Л = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

где α - угол, образованный вектором скорости движущейся частицы и вектором магнитной индукции. Поскольку начальная скорость электрона перпендикулярна вектору магнитной индукции, то $\sin\alpha = 1$ и траектория электрона лежит на плоскости. По второму закону Ньютона сила Лоренца сообщает электрону нормальное ускорение

$$mv^2/R = q \cdot v \cdot B,$$

где q – заряд; v - скорость и m - масса электрона; B – магнитная индукция; R – радиус кривизны траектории.

Отсюда выразим радиус кривизны траектории R

$$R = mv/qB.$$

Период обращения электрона по окружности

$$T = 2\pi R/v = 2\pi m/qB.$$

Электрон приобретает кинетическую энергию за счет работы, совершаемой ускоряющим электрическим полем

$mv^2/2 = qU_{уск.}$, откуда импульс электрона $mv = (2mqU_{уск.})^{1/2}$.

Момент импульса электрона

$$L = mvR = (mv)^2/qB = (2mqU_{уск.})/qB.$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$R = mv/qB = (2mU_{уск.}/q)^{1/2}/B = (2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^3/1{,}6\cdot 10^{-19})^{1/2}/1{,}19\cdot 10^{-3} \cong 9\text{ см};$$

$$T = 2\pi m/qB = 2\cdot 3{,}14\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}/1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}19\cdot 10^{-3} = 3\cdot 10^{-8}\text{ с};$$

$$L = 2mU_{уск.}/B = 2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^3/1{,}19\cdot 10^{-3} = 1{,}53\cdot 10^{-24}\text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

И – 6

Однородный проводящий стержень длиной L=1м вращается относительно одного из своих концов с угловой скоростью $\omega=2\pi$ рад/с в горизонтальной плоскости. Определить разность потенциалов на концах стержня, если вертикальная составляющая магнитного поля Земли в данном месте $B_n = 10^{-5}$ Тл.

Решение

Пусть направление вращения - по часовой стрелке. При вращении в стержне происходит перераспределение электронов и возникает электрическое поле с напряженностью

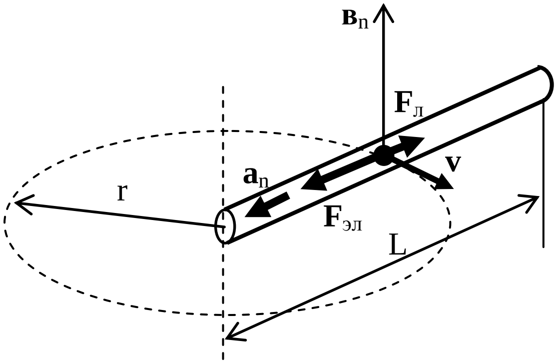
$$\mathbf{E_r} = -\,\mathbf{grad}\,\varphi,$$

направленной вдоль стержня к оси вращения. На электрон действуют электрическое и магнитное поля с силами сумма которых, согласно второго закона Ньютона :

$$\mathbf{F_л} + \mathbf{F_{эл}} = m\mathbf{a_n}, \quad \text{где}$$

$\mathbf{F_л} = -e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, $\mathbf{F_{эл}} = -e\mathbf{E_r}$, $\mathbf{a_n}$- вектор нормального ускорения, модуль которого $a_n=\omega^2 r$, $v = \omega r$ - модуль вектора скорости электрона,

B – вектор индукции магнитного поля, модуль которого. В системе координат, связанной со стержнем:



$$-e\left(-grad\varphi\right)-evB_n=ma_n$$

или

$$e\frac{d\varphi}{dr}-evB_n=m\omega^2 r\,.$$

Разность потенциалов на концах стержня :

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ed\varphi=\int_0^L\left(e\omega rB_n+m\omega^2 r\right)dr$$

$$\Delta\varphi_{1,2}=\frac{\omega L^2 B_n}{2}+\frac{m\omega^2 L^2}{2e}\,,$$

где первое слагаемое – разность потенциалов, возникшая в результате действия магнитного поля, а второе слагаемое – разность потенциалов, как результат действия сил инерции в неинерциальной системе отсчета связанной со стержнем.

$$\Delta\varphi_{1,2}=3{,}14\cdot 10^{-5}B+112{,}15\cdot 10^{-12}B\approx 31{,}4\text{мкВ}..$$

К. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Основные формулы

- Закон Ома:

а) для однородного участка цепи $\quad I=\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=\dfrac{U}{R}$;

б) для неоднородного участка цепи $\quad I=\dfrac{(\varphi_1-\varphi_2)\pm\varepsilon_{12}}{R}$;

в) для замкнутой (полной) цепи $\quad I=\dfrac{\varepsilon}{R+r}$,

где $(\varphi_1-\varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи;
U – напряжение на участке цепи;
ε_{12} – ЭДС источников тока, входящих в участок цепи;
ε - ЭДС всех источников тока замкнутой цепи;
R – сопротивление внешнего участка цепи, r – внутреннее сопротивление источника тока.

- Сопротивление однородного проводника постоянного сечения

$$R = \rho l / S ,$$

где ρ - удельное сопротивление вещества проводника; l – длина проводника; S – площадь его поперечного сечения .

- Сопротивление системы проводников:

а) $R = \sum R_i$ – при последовательном соединении проводников;

б) $1/ R = \sum (1/ R_i)$ – при параллельном соединении проводников.

- Первое правило Кирхгофа

$$\sum I_i = 0 ,$$

т.е. алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

- Второе правило Кирхгофа

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_I ,$$

т.е. алгебраическая сумма напряжений $U_i = I_i R_i$ на всех участках произвольного замкнутого контура разветвленной цепи равна алгебраической сумме электродвижущих сил источников в этом контуре.

- Работа тока на участке цепи

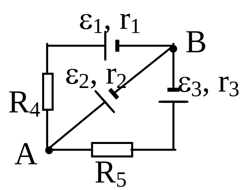
$$A = I U t = I^2 R t = (U^2/ R) t.$$

- Закон Джоуля–Ленца

$$Q = I^2 R t ,$$

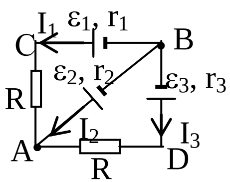
где Q – количество теплоты, выделяющейся в проводнике за время t.

К - 1



Определить силу тока, текущего через элемент ε_2, если ε_1=1 В, ε_2 =2 В, ε_3 =3 В, r_1=1 Ом, r_2=0,5 Ом, r_3=1/3 Ом, R_4=1 Ом, R_5=1/3 Ом.

Решение



Сначала нужно выбрать произвольно направления токов в ветвях. Если ошиблись в выборе направления какого-нибудь тока, то в окончательном решении этот ток получится отрицательным, если выбрали правильное направление тока, то он получится положительным.

Применим первый закон Кирхгофа для узлов электрической цепи

$$\Sigma\, I_i = 0,$$

т.е.– сумма токов в узле равна нулю. (Правило знаков: токи, подходящие к узлу, можно считать положительными, отходящие от узла – отрицательными.)

В данной схеме два узла A и B. Для узла A по первому закону Кирхгофа получим

$$I_1+I_2+I_3=0.$$

Применим второй закон Кирхгофа

$$\Sigma(IR)_i = \Sigma\, \varepsilon_i,$$

т.е. алгебраическая сумма падения напряжения вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников тока.

Он справедлив для замкнутых контуров. Для применения второго закона Кирхгофа необходимо выбрать (произвольно) направление обхода контуров. (Выберем направление обхода контуров против часовой стрелки.) Падение напряжения на i-м сопротивлении берётся со знаком “+”, если направление тока на нем совпадает с направлением обхода, и со знаком “–”, если направление тока противоположно направлению обхода. ЭДС источника тока считается положительной, если обход идёт от знака “–” к “+” внутри источника тока.

В данной схеме таких контуров три: ACBA, ABDA, ACBDA.

В контуре ABCA два источника с ЭДС ε_1 и ε_2 и три сопротивления (r_1, r_2, R_4). ε_1– положительна, а ε_2 – отрицательна.

$$I_1(r_1+R_4) - I_2r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Для контура ADBA

$$I_2r_2 - I_3(r_3+R_5) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Запишем полученную систему уравнений

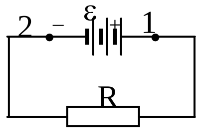
$$\begin{cases} I_1+I_2+I_3=0; \\ I_1(r_1+ R_4) - I_2r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \\ I_2r_2 - I_3(r_3 + R_5) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3. \end{cases}$$

Решая систему, получим $I_1= -0{,}625$ А, $I_2= -0{,}5$ А, $I_3= 1{,}125$ А.

Токи I_1 и I_2 отрицательны, это значит, что их направления выбраны ошибочно. Ток I_3 – положительный, следовательно, его направление выбрано верно.

К - 2

Аккумулятор с ЭДС ε=2,6 В замкнут на внешнее сопротивление R и даёт ток I=1,0 А. При этом разность потенциалов между полюсами аккумулятора U=2,0 В. Найти тепловую мощность, выделяемую в аккумуляторе, и мощность, которую развивают в нём электрические силы.



Решение

Количество тепла Q, выделяемое в батарее при прохождении в ней тока I, найдём по закону Джоуля - Ленца

$$Q = I^2 \cdot r \cdot t,$$

где r – внутреннее сопротивление батареи. Внутреннее сопротивление r батареи определим по закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \text{ откуда } r = \frac{\varepsilon - U}{I},$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2 = I \cdot R$ – падение напряжения во внешней цепи.

Тепловая мощность, выделяемая в аккумуляторе,

$$P_1 = Q/t = I^2(\varepsilon - U)/I = I(\varepsilon - U).$$

Работу электрических сил внутри аккумулятора определим по формуле

$$A = -U \cdot I \cdot t\ .$$

Знак минус отражает то обстоятельство, что положительные заряды движутся внутри аккумулятора от меньшего потенциала φ_2 к большему – φ_1, т.е. против электрических сил. При этом положительную работу $A_{стр}$ совершают сторонние силы, перемещая заряды внутри аккумулятора.

Мощность, развиваемая электрическими силами внутри аккумулятора,

$$P_2 = -\frac{UIt}{t} = -UI.$$

Произведём вычисления:

$$P_1 = I(\varepsilon - U) = 1 \cdot (2{,}6 - 2) = 0{,}6 \text{ Вт};$$

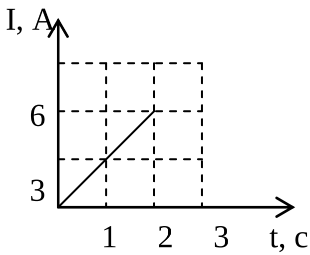
$$P_2 = -UI = -2 \cdot 1 = -2 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P_1 = 0{,}6$ Вт; $P_2 = -2$ Вт.

К – 3

Сила тока в проводнике сопротивлением R=20 Ом нарастает в течение времени Δt=2 с по линейному закону от I_0=0 до $I_к$=6 А. Определить теплоту Q_1, выделившуюся в этом проводнике за первую секунду, и Q_2 – за вторую секунду, отношение Q_1/Q_2, а также заряд, прошедший по проводнику за время Δt=2 с.

Решение



Закон Джоуля-Ленца для переменного тока справедлив для бесконечно малого интервала времени и записывается в виде

$$dQ = I^2Rdt,$$

где сила тока I является функцией времени $I = k\cdot t$.

Коэффициент пропорциональности k, характеризующий скорость изменения силы тока, равен

$$k = \Delta I/\Delta t = 6/2 = 3 \text{ (А/с)}.$$

Тогда закон Джоуля - Ленца примет вид

$$dQ = k^2Rt^2dt .$$

Полное количество теплоты, выделившееся в данном проводнике за конечный интервал времени Δt, вычислим как интеграл

$$Q = k^2R\int_{t_2}^{t_1} t^2dt = \frac{1}{3}k^2R\left(t_2^3 - t_1^3\right).$$

Произведём вычисления

$$Q_1 = \frac{1}{3}3^2 \cdot 20(1-0) = 60 \text{ Дж}; \qquad Q_2 = \frac{1}{3}3^2 \cdot 20(8-1) = 420 \text{ Дж}.$$

Следовательно, $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{420}{60} = 7$, т.е. за вторую секунду выделилось теплоты в семь раз больше, чем за первую.

Заряд, прошедший по проводнику за время Δt,

$$q = \int_0^{\Delta t} I\cdot dt = \int_0^{\Delta t} kt\cdot dt = \frac{k\cdot\Delta t^2}{2} = \frac{3\cdot 2^2}{2} = 6 \text{ (Кл)}.$$

Ответ: Q_1= 60 Дж; Q_2= 420 Дж; Q_2/Q_1 =7; q = 6 Кл.

Л. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Основные формулы

- Поток индукции магнитного поля сквозь контур

$$\Phi = \mathbf{B}\,\mathbf{S} \qquad \text{или} \qquad \Phi = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{S}\ .$$

- Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$A = I\,\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ - поток магнитной индукции, пересеченной проводником при его движении.

- ЭДС индукции, возникающей в замкнутом контуре при всяком изменении потока магнитной индукции сквозь площадь, ограниченную этим контуром

$$\varepsilon = -\, d\Phi/dt\ .$$

- ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon = -\, L\, dI/dt\ ,$$

где L – индуктивность (коэффициент самоиндукции) контура.

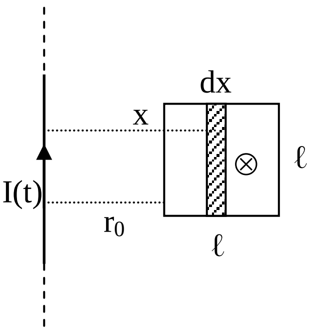
- Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0\, \mu\, n^2 l\, S\ ,$$

где μ - магнитная проницаемость сердечника; n - число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; l – длина соленоида; S – площадь его поперечного сечения.

- Энергия магнитного поля контура с током

$$W = L\, I^2/2.$$



Л - 1

В плоскости квадратной рамки с сопротивлением R=7 Ом и стороной ℓ=20 см параллельно одной из сторон лежит прямой, бесконечно длинный, проводник на расстоянии r_0 = 20 см от ближайшей стороны. Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = \alpha\cdot t^3$, где α=2 А/с. Определить силу тока в рамке в момент времени t = 10 с.

Решение

Ток в рамке возникает в результате появления в ней ЭДС индукции за счет изменения магнитного потока сквозь плоскость рамки. Магнитное поле в плоскости рамки создается током в прямом, бесконечно длинном, проводнике, расположенном параллельно одной из сторон рамки.

Индукция магнитного поля **B**, созданного бесконечным прямым проводником с током I(t) на расстоянии x от него, равна

$$B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x}.$$

Найдем поток вектора магнитной индукции **B** сквозь плоскость рамки.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int\limits_{r_0}^{r_0+\ell} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot \ell \cdot dx = \frac{\mu_0 \alpha t^3 \ell}{2\pi} \ln(1 + \frac{\ell}{r_0}).$$

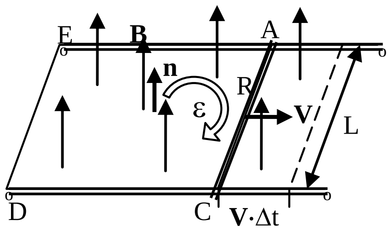
Так как магнитный поток с течением времени изменяется, то в рамке возникает ЭДС индукции и появляется ток

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = 3\frac{\mu_0 \alpha t^2 \ell}{2\pi R} \ln(1 + \frac{\ell}{r_0}) =$$

$$= \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 0{,}2}{2\pi \cdot 7} \ln 2 \cong 0{,}24 \text{ A}.$$

Л - 2

Перемычка AC длиной L и сопротивлением R движется по короткозамкнутым проводящим рельсам со скоростью **V** в плоскости, перпендикулярной силовым линиям однородного магнитного поля, индукция которого **B**. Определить ЭДС электромагнитной индукции и силу тока, возникающих в контуре.



Решение

По закону Фарадея - Ленца ЭДС электромагнитной индукции определяется формулой

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

За время dt площадь, ограниченная контуром ACDE, увеличивается на

$$dS = LVdt,$$

что приводит к изменению потока вектора магнитной индукции **B**, пронизывающего площадь **S** на величину

$$d\Phi = \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = B\cdot dS\cdot \cos\alpha,$$

где α - угол между **B** и вектором нормали **n** к площади контура. В нашем случае $\alpha = 0$ и $\cos\alpha = 1$.

Таким образом $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BLVdt}{dt} = -BVL.$

Знак минус показывает, что магнитное поле индукционного тока противодействует изменению магнитного потока. В нашем случае ток пойдет по перемычке от А к С. Ток по закону Ома

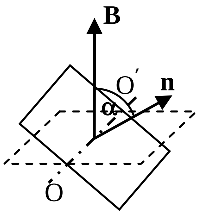
$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{BLV}{R}.$$

Замечание. В случае разомкнутого контура электродвижущая сила равна разности потенциалов на концах движущегося проводника.

Л - 3

В однородном магнитном поле с индукцией **B** равномерно вращается рамка с угловой скоростью **ω.** Площадь рамки S. Ось вращения перпендикулярна к силовым линиям магнитного поля. Определить ЭДС индукции в рамке.

Решение



Поток Ф магнитной индукции **B** сквозь плоскость рамки **S** по определению равен

$$\Phi = \mathbf{BS} = BS\cos\alpha,$$

где α – угол между вектором магнитной индукции **B** и нормалью к плоскости рамки.

При вращении рамки поворачивается и вектор **n** нормали к ее поверхности. Угол поворота связан с угловой скоростью $\alpha = \omega t$ (при равномерном вращении). Тогда $\Phi = BS\cos\omega t$.

ЭДС электромагнитной индукции равна

$\varepsilon_i = -\,d\Phi/dt = BS\omega \sin \omega t$. Максимальная ЭДС $\varepsilon_{max} = BS\omega$.

Замечание. Если в рамке N витков, то $\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t$.

Учесть также связь угловой скорости и частоты вращения $\omega = 2\pi n$.

Л – 4

Проволочный контур сопротивлением R помещен в однородное магнитное поле. Определить заряд, прошедший по контуру при быстром изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром от Φ_1 до Φ_2. Контур содержит N витков провода.

Решение

При изменении магнитного потока в каждом витке возникает электродвижущая сила индукции

$\varepsilon_i = -\,d\Phi/dt$, а в N витках $\varepsilon_i = -\,N(d\Phi/dt)$.

При этом по контуру течет ток

$$I = \varepsilon_i/R.$$

Но с другой стороны

$$I = dq/dt,$$

где dq – заряд, прошедший за малое время dt по контуру. Таким образом

$$dq/dt = -(N/R)(d\Phi/dt) \text{ или}$$

$$dq = -N\,d\Phi/R.$$

После интегрирования получим

$$q = N\,(\Phi_1 - \Phi_2)/R.$$

Примечание. Поскольку $\Phi = \mathbf{BS} = BS\cos\alpha$, то изменение магнитного потока может быть вызвано изменением любой из величин **B** (индукции), **S** (площади) или α – угла между направлением векторов **B** и **S**.

Л – 5

Соленоид представляет собой катушку с плотной намоткой проводом. Площадь поперечного сечения катушки S, её длина ℓ, число витков – N. а) Найти индуктивность соленоида; б) Определить ЭДС самоиндукции, возникающую при изменении тока в катушке со скоростью dI/dt.

Решение

а). Рассмотрим соленоид, длина которого значительно больше его поперечных размеров, так что его можно в первом приближении считать бесконечно длинным.

При протекании по нему тока I внутри соленоида возбуждается магнитное поле, индукция которого равна $B = \mu\mu_0 In$, где μ - магнитная проницаемость материала сердечника, n – число витков провода на единицу длины. Магнитный поток через каждый виток равен $\Phi = \mathbf{BS}$, а полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом,

$$\Psi = N\Phi = n\ell BS = \mu\mu_0 n^2 \ell SI,$$

где ℓ – длина соленоида, а $n\ell = N$ – полное число витков. Таким образом, магнитный поток Ψ пропорционален силе тока $\Psi = LI$. Коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью соленоида. Итак:

$$LI = \mu\mu_0 n^2 \ell SI,$$

откуда $L = \mu\mu_0 n^2 \ell S = \mu\mu_0 SN^2/\ell$,

где S – площадь сечения соленоида; в случае неферромагнитного сердечника $\mu=1$; $\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная в системе СИ.

б). Ток в катушке создает магнитное поле с индукцией **B** и каждый виток пронизывается магнитным потоком $\Phi = \mathbf{BS}$. При изменении магнитного потока возникает ЭДС самоиндукции, равная по закону Фарадея - Ленца,

$$\varepsilon_{си} = N\varepsilon_i = N(-d\Phi/dt) = -d\Psi/dt,$$

где $\Psi = N\Phi = LI$ – поток магнитной индукции, сцепленный со всеми витками соленоида (потокосцепление); L – индуктивность соленоида.

Следовательно

$$\varepsilon_{си} = -\ d\Psi/dt = -\ L\cdot dI/dt,$$

где dI/dt – скорость изменения тока в катушке.

Л - 6

В катушке индуктивностью 0,2 Гн ток возрастал по закону $I=0{,}1\cdot t^2$. Найти ЭДС самоиндукции и энергию магнитного поля в катушке в момент времени t = 3 с.

Решение

ЭДС самоиндукции находится по закону

$$\varepsilon_{си} = -\ L\cdot dI/dt,$$

где dI/dt – скорость изменения тока.

В данном случае

$dI/dt = 0{,}2\cdot t$. Тогда $\varepsilon_{си} = -\ L\cdot 0{,}2\cdot t = -\ 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 3 = -\ 0{,}12$ В.

Энергия магнитного поля, созданного в катушке индуктивности током I, определяется формулой

$$W = LI^2/2.$$

Подставляя численные значения величин, получим

$$W = \frac{L \cdot (0{,}1 \cdot t^2)^2}{2} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}01 \cdot 3^4}{2} = 81 \cdot 10^{-3}\text{Дж}.$$

Л - 7

Цепь состоит из источника постоянной ЭДС, сопротивления R и катушки с индуктивностью L. Установить закон изменения тока в момент включения и выключения рубильника.

Решение

В момент включения и выключения рубильника изменяется магнитное поле в катушке, что приводит к появлению ЭДС самоиндукции и индукционного тока. Согласно правилу Ленца направление индукционного тока такое, что созданное им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока. В момент выключения рубильника магнитное поле в катушке уменьшается, поэтому возникает индукционный ток того же направления, что и ток источника, чтобы, согласно правилу Ленца, препятствовать уменьшению магнитного поля. При выключении источника тока в цепи действует ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_{si} = -\,d\Psi/dt = -\,L \cdot dI/dt.$$

По закону Ома

$$IR = -\,L \cdot dI/dt.$$

Разделим переменные и проинтегрируем это дифференциальное уравнение

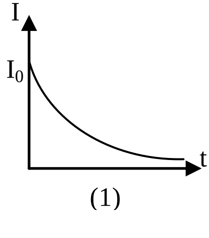
$$\int_{I_0}^{0} \frac{dI}{I} = \int_0^t \left(-\frac{R}{L}\right)dt; \quad \ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t; \text{ откуда}$$

$$I = I_0 e^{-(R/L)t}. \tag{1}$$

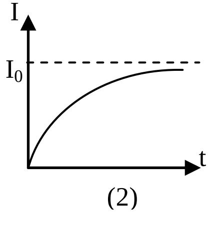
При замыкании цепи индукционный ток идет навстречу току от источника, поэтому

$$I = I_0 - I_0 e^{-(R/L)t}. \tag{2}$$

Графическая зависимость токов размыкания (1) и замыкания (2) от времени приведена на графиках:



(1)



(2)

Л – 8

Соленоид с индуктивностью L=0.1 Гн и сопротивлением $R=2\cdot10^{-2}$ Ом замыкается на источник ЭДС ε_0=2 В, внутреннее сопротивление которого ничтожно мало. Какой заряд пройдет через соленоид за первые 5 с после замыкания цепи.

Решение

После замыкания цепи в соленоиде возникает ЭДС самоиндукции $\varepsilon_{си}$, в результате чего ток в цепи возрастает постепенно. По второму закону Кирхгофа

$$\mathrm{IR} = \varepsilon_0 + \varepsilon_{си} = \varepsilon_0 - \mathrm{L}\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}}, \text{ откуда } \quad I = \frac{\varepsilon_0}{R}(1 - \exp(-\frac{R}{L}t))..$$

Заряд, прошедший по проводнику за время dt, равен

$$\mathrm{dQ} = \mathrm{I}\cdot\mathrm{dt} = \frac{\varepsilon_0}{R}(1 - \exp(-\frac{R}{L}t))\cdot dt.$$

Проинтегрировав это выражение по времени, получим

$$\mathrm{Q} = \int_0^\tau \frac{\varepsilon_0}{\mathrm{R}}(1 - \exp(-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{t}))\mathrm{dt} = \frac{\varepsilon_0}{\mathrm{R}}(\mathrm{t} + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\exp(-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{t}))\Big|_0^\tau =$$

$$= \frac{2}{2\cdot10^{-2}}(5 + \frac{0{,}1}{2\cdot10^{-2}}(\exp(-\frac{2\cdot10^{-2}}{0{,}1}5) - 1)) = 184 \text{ Кл.}$$

М. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

- Скорость света в среде

$$v = c / n,$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления среды.

- Оптическая длина пути световой волны

$$L = n\,l,$$

где l – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

- Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_1 - L_2.$$

- Связь разности фаз колебаний $\Delta\varphi$ с оптической разностью хода Δ волн

$$\Delta\varphi = 2\pi\,(\Delta/\lambda).$$

- Условие максимумов интенсивности света при интерференции

$$\Delta = \pm\, k\, \lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

- Условие минимумов интенсивности света при интерференции

$$\Delta = \pm(2\,k + 1)\, \lambda/2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

- Условие минимумов интенсивности света при дифракции от щели, на которую падает нормально плоская волна

$$a \sin\varphi = \pm\, k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

условие максимумов

$$a \sin\varphi = \pm(2k + 1)\, \lambda/2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где a – ширина щели; φ - угол дифракции; k – порядок спектра; λ - длина падающей волны.

- Условие главных максимумов интенсивности света при дифракции на дифракционной решетке

$$d \sin\varphi = \pm\, k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где d – период дифракционной решетки.

- Закон Брюстера

$$\mathrm{tg}\, \alpha_Б = n_{21}\,,$$

где $\alpha_Б$ – угол падения, при котором отразившийся от диэлектрика свет полностью поляризован; $n_{21}=n_2/n_1$ – показатель преломления второй среды относительно первой.

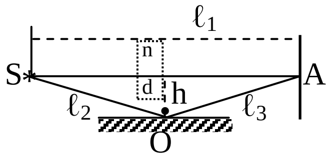
- Закон Малюса $\qquad I = I_0 \cos^2\varphi,$

где I_0 – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; φ - угол между плоскостью поляризации падающего света и плоскостью пропускания анализатора.

М - 1

В точку А экрана от точечного источника S монохроматического света длиной волны λ=0,5 мкм приходят два луча: непосредственно от источника – луч SA и от зеркала, параллельного лучу SA (см. рисунок). Расстояние от источника до экрана l_1=1 м, расстояние от луча SA до плоскости зеркала h =2 мм. Определить: а) что будет наблюдаться в точке А экрана – усиление или ослабление интенсивности света; б) как изменится интенсивность света в точке А, если на пути луча SA перпендикулярно ему поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку (n=1,55) толщиной d=6 мкм.

Решение



В точке А происходит наложение двух волн: прямой, прошедшей путь SA, равный ℓ_1, и отраженной от зеркала в точке О, прошедшей путь SOA, равный $(\ell_2 + \ell_3)$. Так как эти две волны являются частями одной волны, испущенной источником S, то они являются когерентными; поэтому при сложении этих волн возникает интерференционная картина.

Усиление или ослабление интенсивности в той или иной точке экрана зависит от числа m полуволн, укладывающихся на оптической разности хода Δ

$$m = \Delta/(\lambda/2).$$

Если m-целое четное, то интенсивность будет максимальной; если m-целое нечетное, то интенсивность минимальна. При дробном m происходит или частичное усиление (если m ближе к четному числу) или частичное ослабление.

а) Оптическая длина пути световой волны $L=n\ell$, где ℓ-геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

Оптическая разность хода будет складываться из двух частей. Геометрической разности $\Delta = (\ell_2+\ell_3) - \ell_1$ (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности хода - $\lambda/2$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении в точке О от оптически более плотной среды (поверхность зеркала).

Так как $$\ell_2 = \ell_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\ell_1^{\,2} + (2h)^2},$$

то $$(\ell_2 + \ell_3) - \ell_1 = \ell_1\sqrt{1+\left(\frac{2h}{\ell_1}\right)^2} - \ell_1 = \ell_1\left(\sqrt{1+\left(\frac{2h}{\ell_1}\right)^2} - 1\right).$$

Величина $(2h/\ell_1) \ll 1$, поэтому для вычисления корня можно воспользоваться приближенной формулой $(1+a)^{1/2} \approx 1+a/2$ (если $a \ll 1$). Применив ее, получим

$$(\ell_2 + \ell_3) - \ell_1 \approx \ell_1\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2h}{\ell_1}\right)^2 - 1\right) = \frac{2h^2}{\ell_1}.$$

Тогда оптическая разность хода

$$\Delta = (\ell_2 + \ell_3) - \ell_1 + \frac{\lambda}{2} = \frac{2h^2}{\ell_1} + \frac{\lambda}{2}.$$

Зная Δ, найдем

$$m=\Delta/(\lambda/2) = 4h^2/\lambda\ell_1+1 = 4\cdot4\cdot10^{-6}/0,5\cdot10^{-6}\cdot1+1= 33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке A наблюдается минимум интенсивности.

б) Стеклянная пластинка толщиной d, поставленная на пути луча SA, изменит оптическую длину пути.

Теперь оптическая длина пути L будет складываться из геометрической длины пути ℓ_1-d и оптической длины пути nd луча в самой пластинке, т.е.

$$L=(\ell_1-d)+nd = \ell_1+(n–1)d.$$

Оптическая разность хода лучей

$$\Delta = (\ell_2+\ell_3)–L+\lambda/2 = (\ell_2+\ell_3)–\ell_1–(n–1)d+\lambda/2.$$

Зная Δ, найдем

$$m = \Delta/(\lambda/2) = 4h^2/\lambda\ell_1+1–2(n–1)d/\lambda =$$
$$= 33–2\cdot0,55\cdot6\cdot10^{-6}/0,5\cdot10^{-6} = 19,8.$$

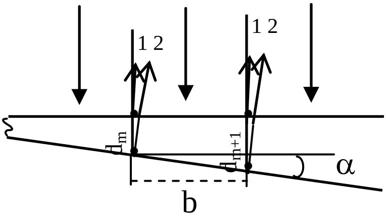
Число половин длин волн в этом случае оказалось дробным, но ближе к целому четному числу 20, чем к целому нечетному числу 19. Из этого следует, что в точке A будет частичное усиление.

М - 2

На стеклянный клин (n=1,5) с преломляющим углом $\alpha=40''$ нормально падает монохроматический свет с длиной волны λ=600 нм. Определить в интерференционной картине расстояние между двумя соседними минимумами.

Решение

Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается от его верхней и нижней граней (см. рисунок). Так как угол клина мал, то отраженные лучи 1 и 2 практически параллельны.



Отраженные лучи когерентны и на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы. Условие минимума для клина запишется в общем случае

$$2dn\cos\beta+\frac{\lambda}{2}=(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где (m=0,1,2,..,)– целые числа; d-толщина клина в месте темной полосы, соответствующей номеру m; β – угол преломления; $\Delta_{доп}=\lambda/2$ – дополнительная разность хода, обусловленная отражением световой волны 1 от оптически более плотной среды (поверхности клина).

Угол падения, согласно условию, равен нулю.

Тогда условие минимума запишется в виде

$$2dn=m\lambda, \text{ откуда } d=\frac{m\lambda}{2n},$$

и для соседних полос $d_m=\frac{m\lambda}{2n}$; $d_{m+1}=\frac{(m+1)\lambda}{2n}$.

Из рисунка видно, что $\sin\alpha=\frac{d_{m+1}-d_m}{b}$.

Так как преломляющий угол клина очень мал, то $\sin\alpha\approx\alpha$. Поставив в формулу для угла α значения толщин d_{m+1} и d_m, получим

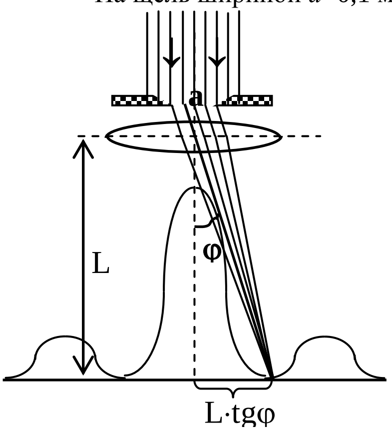
$$\alpha=\frac{(m+1)\lambda-m\lambda}{2bn}=\frac{\lambda}{2bn}, \text{ откуда}$$

$$b=\frac{\lambda}{2n\alpha}=\frac{6\cdot10^{-7}\cdot2{,}06\cdot10^{5}}{2\cdot1{,}5\cdot40}=1{,}03 \text{ мм.}$$

(Угол α выражается в радианах. Известно, что 1 рад=$(2{,}06\cdot10^{5})''$.)

М - 3

На щель шириной *a*=0,1 мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника (λ=0,6 мкм). Определить ширину *l* центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии L=1 м.



Решение

Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности (см. рисунок).

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ, определяемыми условием

$$a \cdot \sin\varphi = \pm k\lambda,$$

где k – порядок минимума, который в нашей задаче равен единице; *a* – ширина щели; λ – длина волны падающего света.

Расстояние между двумя минимумами на экране определим по чертежу $$\ell = 2L \cdot \mathrm{tg}\varphi.$$

При малых углах $\mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, поэтому $\ell \approx 2L \cdot \sin\varphi = 2L\dfrac{k\lambda}{a}$.

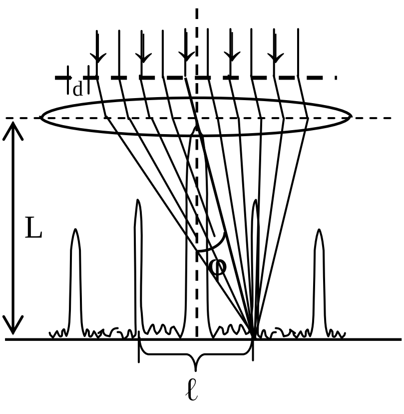
Произведем вычисления, получим ℓ=1,2 см.

М - 4

На дифракционную решетку нормально к её поверхности падает параллельный пучок света с длинной волны λ=0,5 мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на L=1 м. Расстояние между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, ℓ=20,2 см. Определить: 1) постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на 1 см; 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Решение

Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий каждому дифракционному максимуму, связаны соотношением



$$d \cdot \sin\varphi = k\lambda,$$

где k - порядок спектра, а в случае монохроматического света – порядок максимума.

В условии задачи k=1, $\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi$ (при малых углах отклонения). Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\ell}{2L}.$$

Тогда условие максимума запишется $d \cdot \frac{\ell}{2L} = \lambda$, откуда постоянная дифракционной решетки

$$d = \frac{2L\lambda}{\ell} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}}{20{,}2 \cdot 10^{-2}} = 4{,}95 \cdot 10^{-6}\,\text{м}.$$

Число штрихов на 1 см найдем по формуле

$$n = \frac{1}{d} = \frac{1}{4{,}95 \cdot 10^{-6}} = 2{,}02 \cdot 10^{5}\,\text{м}^{-1} = 2{,}02 \cdot 10^{3}\,\text{см}^{-1}.$$

Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение k_{max}, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей не может превышать 90^0.

Из условия максимума для дифракционной решетки запишем

$$k_{max} = \frac{d}{\lambda}\sin\varphi = \frac{4{,}95 \cdot 10^{-6}}{0{,}5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1 = 9{,}9.$$

Число k обязательно должно быть целым. В то же время, оно не может быть равным 10, так как при этом значении sin φ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно $k_{max}=9$.

Общее число максимумов, наблюдаемых слева и справа от центрального максимума, равно $2k_{max}$. Если учесть также центральный максимум, получим общее число максимумов $N=2k_{max}+1=19$.

Для определения угла φ_{max} отклонения лучей, соответствующих k_{max}, выразим $\sin\varphi_{max}$ этого угла из условия максимума дифракционной решетки.

$$\sin\varphi_{max} = \frac{k_{max}\lambda}{d}. \text{ Отсюда } \varphi_{max} = \arcsin\left(\frac{k_{max}\lambda}{d}\right).$$

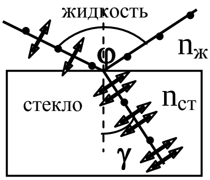
Подставляя значения всех величин, получим $\varphi_{max}=65{,}4^0$.

М - 5

Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света образует угол $\varphi=97^0$ с падающим пучком. Определить показатель преломления жидкости, если отраженный свет максимально поляризован. Абсолютный показатель преломления стекла $n_{ст}=1{,}5$.

Решение

Согласно закону Брюстера, пучок света, отраженный от диэлектрика, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному показателю преломления, т.е. tg $\alpha = n_{21}$, где n_{21} – показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).



Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления. Следовательно, tg $\alpha = n_{21} = n_2/n_1$.

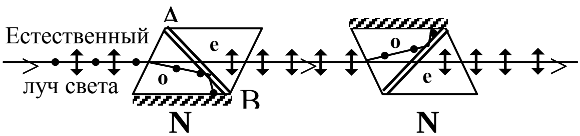
Так как угол падения равен углу отражения, то $\alpha = \varphi/2 = 97/2 = 48{,}5^o$, откуда $n_1 = \dfrac{n_2}{tg48{,}5^0} = \dfrac{1{,}5}{1{,}13} = 1{,}33.$

М - 6

Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет $\varphi=60^0$. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность I_0 естественного света: 1) при прохождении через один николь N_1; 2) при прохождении через оба николя (коэффициент поглощения света в николе k=0,05). Потери на отражение света не учитывать.

Решение

1. Естественный луч света, падающий на входную грань призмы



Николя (см. рисунок), расщепляется в результате двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (главного сечения). Плоскость колебаний обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок света (о) в результате полного отражения от границы АВ отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок (е) проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения.

Таким образом, интенсивность света, прошедшего через первую призму Николя, равна

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1-k).$$

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность I_0 естественного света, падающего на первый николь, на интенсивность I_1 поляризованного света, вышедшего из первого николя.

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2I_0}{I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k} = \frac{2}{0{,}95} = 2{,}1.$$

Таким образом, интенсивность уменьшится в 2,1 раза.

2. Плоскополяризованный пучок света интенсивности I_1 падает на второй николь N_2 и также расщепляется на два пучка различной интенсивности: (о) и (е). Обыкновенный пучок полностью поглощается призмой, поэтому интенсивность его нас не интересует.

Интенсивность I_2 необыкновенного пучка, вышедшего из призмы N_2 , определяется законом Малюса (без учета поглощения света во втором николе).

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi,$$

где φ - угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке I_1 и плоскостью пропускания николя N_2.

Учитывая потери интенсивности света при поглощении во втором николе, получаем

$$I_2 = I_1 (1-k) \cos^2 \varphi.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_2 света, прошедшего систему из двух николей

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k)\cos^2\varphi} = \frac{I_0}{\frac{1}{2} I_0 (1-k)^2 \cos^2\varphi} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2\varphi}.$$

Произведем вычисления $\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-0{,}05)^2 \cos^2 60^0} = 8{,}86.$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.