

Кафедра физики

# Механика: лабораторный практикум по физике

г. Магнитогорск 2011 г

УДК

Рецензент

Составители:

Оценка погрешностей измерений: Леднов А.Ю.

Лабораторная работа №1: Мельцер-Шафран Л.В., Кочкин Ю.П.

Лабораторная работа №3: Лисовская М. А., Раскужина И.В., Савченко Ю.И. Мельцер-Шафран Л.В.

Лабораторная работа №3А: Кочкин Ю.П.

Лабораторная работа №4: Савинова Н.А., Леднов А.Ю.

Лабораторная работа №5: Астапов Е.Н., Машкин А.Г., Мельцер-Шафран Л.В.

Лабораторная работа №7: Ботнева З.Н.

Технический редактор Солнцев А. Ю.

Механика: лабораторный практикум по физике для студентов всех специальностей. Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2011. ....с.

Лабораторный практикум составлен в соответствие с программой курса общей физики для высших учебных заведений. По каждой из описываемых работ, он содержит изложение физических основ, методики и последовательности проведения лабораторного эксперимента и обработки получаемых экспериментальных данных. Практикум рекомендуется студентам всех специальностей МГТУ дневного и заочного отделений.

УДК

© ГОУ ВПО «МГТУ», 2011

© Астапов Е.Н., Ботнева З.Н., Кочкин Ю.П., Леднов А.Ю.,

Лисовская М. А., Машкин А.Г., Мельцер-Шафран Л.В.,

Раскужина И.В., Савинова Н.А., Савченко Ю.И., 2011

## СОДЕРЖАНИЕ

**ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ  
ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.....4**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ  
СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ  
.....12**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ  
ИНЕРЦИИ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА.  
ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА .....24**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ  
ИНЕРЦИИ ТЕЛ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА.....35**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. ИССЛЕДОВАНИЕ  
ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ  
НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ.....41**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ  
ХАРАКТЕРИСТИК ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ  
ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА .....51**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ  
ЗВУКА В ВОЗДУХЕ МЕТОДОМ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ.....60**

# ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

## Введение

Физика – это наука о природе. Она изучает простейшие и наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и закономерности ее движения. В основе своей физика – наука экспериментальная: все ее законы и теории исходят и опираются на экспериментальные данные, полученные в результате измерений.

Вопросами измерений занимается метрология: наука об измерениях, методах, средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности. Постулаты метрологии:

- У объекта исследования существует определенная характеризирующая объект измеряемая величина и ее истинное значение  $x_{ист}$ .
- Истинное значение  $x_{ист}$  в момент измерения постоянно.
- Существует несоответствие измеряемой величины ее истинному значению.

Истинное значение в экспериментальных измерениях найти невозможно, т.к. любое измерение сопровождается появлением погрешности и, следовательно, имеет некоторую неопределенность. Но по результатам измерений  $x_{ист}$  можно оценить с определенной вероятностью.

Если проведены  $N$  раз измерения некоторой физической величины  $x_{ист}$ , в которых получены значения  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ , то в первом приближении истинное значение измеряемой величины можно определить как среднее значение:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i, \quad (1)$$

где  $x_i$  - результат  $i$ -го измерения.

Среднее значение можно рассматривать как наиболее вероятное значение измеряемой величины. При  $N \rightarrow \infty$  среднее значение  $\bar{x} \rightarrow x_{ист}$ . Отклонение измеряемой величины от истинного значения называют погрешностью измерения:

$$\Delta x_i = x_{ист} - x_i. \quad (2)$$

Однако понятно, что число измерений  $N$  всегда ограничено. Поэтому истинное значение измеряемой величины оценивают рассчитывая так называемый доверительный интервал  $\Delta x$ , в который с заданной вероятностью  $P$  входит  $x_{ист.}$

## 1. Классификация погрешностей измерений

### 1.1. По характеру проявления

**Случайная погрешность** - составляющая погрешности результата измерения, которая изменяется случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проводимых с одинаковой тщательностью, одной и той же физической величины.

Причины, приводящие к появлению случайных погрешностей, разнообразны. Они могут иметь как объективный, не зависящий от экспериментатора, характер (изменение температура в процессе измерений, изменение напряжение в электрической цепи, несовершенство методики измерения, конструктивные особенности экспериментальной установки и т.д.), так и субъективный (неопытность экспериментатора, его реакция на наблюдаемое, внимание, психологический настрой и др.). Случайные погрешности имеют неизвестные экспериментатору значения и отличаются в отдельных измерениях; их значения неодинаковы даже для измерений, сделанных в совершенно одинаковых условиях.

При многократных измерениях обычно случайные погрешности одинаковой величины и разные по знаку встречаются с вероятностью, подчиняются нормальному распределению. Поэтому говорят, что измеряемая величина распределена с плотностью вероятности подчиняющейся нормальному закону распределения. Функция плотности вероятности для нормального распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{S_x \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2 \cdot S_x^2}\right).$$

где  $\bar{x}$  - среднее значение измеряемой величины,

$S_x$  - среднеквадратическое отклонение измеряемой величины.

Графическое изображение нормальной функции плотности вероятности приведено на рисунке 1.

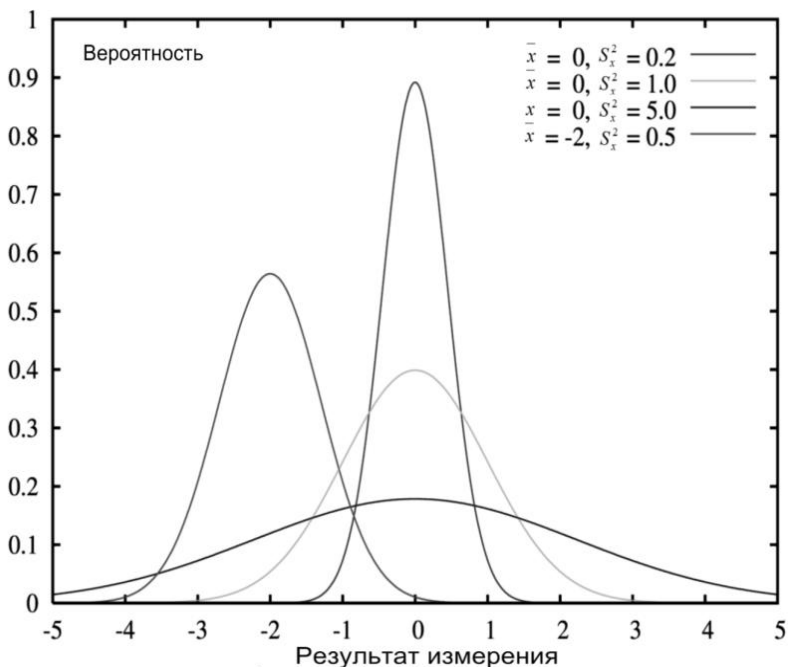


Рис.1.

**Систематическая погрешность** – составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины. Например, если при измерении размера предмета обыкновенной линейкой отсчет производится от края линейки, а не от ее нулевого значения, то измеряемая величина будет систематически занижаться. Если измерение силы тока производится не отрегулированным амперметром со смещенным начальным положением стрелки «вправо» (в сторону делений шкалы), то измеряемые значения будут систематически завышаться. Систематическая погрешность может быть исключена из результатов измерений введением поправки.

**Промех или грубая погрешность** – погрешность, возникшая вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности измеряющей аппаратуры. Грубые погрешности должны быть исключены из дальнейшей обработки; для этого существует несколько известных критериев и способов [1].

## 1.2 По форме представления (расчета)

### 1.2.1. Абсолютная погрешность

Абсолютная погрешность – погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины (отклонение измеренного значения от истинного). Она определяется формулой (2), из которой следует, что  $\Delta x$  может иметь как положительные, так и отрицательные значения.

При ограниченном числе измерений (реальная практика измерений), когда  $x_{ист} \approx \bar{x}$ , для оценки абсолютной погрешности используется выражение:

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i \quad (3)$$

В практике расчета погрешностей эксперимента иногда используют понятие средней абсолютной погрешности:

$$\bar{\Delta x} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \dots + |\Delta x_N|}{N} = \frac{1}{N} \sum_1^N |\Delta x_i|, \quad (4)$$

где  $|\Delta x_i|$  - модуль абсолютной погрешности в  $i$ -ом измерении.

Абсолютная погрешность сама по себе не определяет точность измерения. Например, погрешность измерения некоторого вольтметра составляет 0,2 В. Этим вольтметром были произведены измерения напряжения на двух источниках тока: аккумулятора с э.д.с. 36 В и батарейки с э.д.с. 0,5 В. Понятно, что в первом случае измерения будут достаточно точными, а во втором – позволят лишь судить о порядке измеряемой величины.

### 1.2.2 Относительная погрешность

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности измерения к измеренному значению величины:

$$\varepsilon_i = \frac{|\Delta x_i|}{x_i} \quad \text{или} \quad \varepsilon_i = \frac{|\Delta x_i|}{\bar{x}} \quad (5)$$

где  $\varepsilon_i$  - относительная погрешность в  $i$ -ом измерении.

Относительную погрешность обычно выражают в процентах. Эта погрешность, в отличие от абсолютной, дает некоторое представление о

точности измерения, т.к. она сравнивает абсолютную погрешность с измеряемым значением. Например, при измерении напряжения на аккумуляторе (см. выше п. 1.2.1.) относительная погрешность составит

$$\varepsilon = \frac{0,2}{36} 100 \% = 0,56\% , \text{ а для батарейки - } \varepsilon = \frac{0,2}{0,5} 100 \% = 40 \% .$$

### 1.2.3. Среднеквадратическое отклонение

Среднеквадратическое отклонение - величина, которая описывает разброс измеренных значений  $x_i$  относительно среднего значения  $\bar{x}$  и рассчитывается по формуле:

$$S_x = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_N^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (6)$$

или

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_N^2}{(N-1)N}} = \sqrt{\frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}{(N-1)N}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} , \quad (7)$$

где  $S_x$  - среднеквадратическое отклонение каждого отдельного измерения;

$S_{\bar{x}}$  - среднеквадратическое отклонение измерения среднего значения.

### 1.2.4 Доверительный интервал

Доверительный интервал - интервал значений  $x$  от  $(\bar{x} - \delta x)$  до  $(\bar{x} + \delta x)$ , в котором с заданной вероятностью  $P$  находится истинное значение  $x_{ист}$  измеряемой величины. Здесь

$$\delta x = t \cdot \frac{S_x}{\sqrt{N}} = t \cdot S_{\bar{x}} , \quad (8)$$



где  $t$  – коэффициент Стьюдента. Это табличная величина (см. таблицу 1), значение которой определяется числом измерений  $N$  и доверительной вероятностью  $P$  (вероятность, с которой по результатам измерений оценивается истинное значение).

Таблица 1

Значения коэффициента Стьюдента

Число измерений $N$	Доверительная вероятность $P$					
	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
2	1,38	3,08	6,31	12,7	31,8	63,7
3	1,06	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
4	0,98	0,98	2,35	3,18	4,54	5,84
5	0,94	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
6	0,92	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
7	0,90	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
8	0,90	1,42	1,89	2,36	3,00	3,50
9	0,90	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
10	0,88	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
15	0,54	1,35	1,76	2,15	2,62	2,98
20	0,53	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86

Окончательный результат экспериментальных измерений и последующих расчетов погрешностей может быть представлен следующим образом:

$$x = \bar{x} \pm \delta x \quad (9)$$

Надо отметить, что сравнение найденной экспериментально физической величины с табличным (или расчетным, или теоретическим) значением может быть проведено только по найденному доверительному интервалу: если табличная величина попадает в доверительный интервал, то экспериментальное и табличное значения совпадают.

Покажем смысл доверительного интервала на **примере**. Предположим, что в  $N=6$  измерениях производилось экспериментальное определение ускорения свободного падения  $g$ . По результатам измерений были рассчитаны:

- среднее значение  $\bar{g} = 9,7 \text{ м/с}^2$  (по формуле (1));

- среднеквадратическая погрешность  $S_g = 0,2 \text{ м/с}^2$  (по формуле (6) или (7));

- по таблице 1 для  $P = 0,95$  и  $N = 6$  найден коэффициент Стьюдента  $t = 2,57$  ;

- рассчитан доверительный интервал  $\delta x = 0,2 \text{ м/с}^2$  (по формуле 8).

Окончательный результат записывается в виде  $g = 9,7 \pm 0,2 \text{ м/с}^2$  и трактуется следующим образом: по результатам измерений с вероятностью 95% можно утверждать, что истинное значение ускорения свободного падения находится в интервале от 9,5 до 9,9  $\text{м/с}^2$ . Полученный результат совпадает с табличным, т.к. табличное значение  $g_{\text{табл}} = 9,8 \text{ м/с}^2$  входит в доверительный интервал.

## 2. Обработка результатов измерений

Способы обработки экспериментальных данных, приведенные в данном пособии, можно использовать только в случае нормального распределения погрешностей эксперимента. В большинстве случаев, в том числе и в лабораторных работах, выполняемых в курсе общей физики, экспериментальные данные подчиняются нормальному распределению.

Обработку измерений и построение графиков удобно производить с помощью специализированных компьютерных математических программ: MatLab, MathCad или электронных таблиц Excel. Примеры обработки результатов лабораторных работ с применением программы Excel вы можете найти в учебном пособии профессора кафедры физики Белова В. К. [1].

### 2.1. Прямые многократные измерения

Прямыми называют измерения, при которых результаты измерений получают непосредственно из показаний средств измерения. Примеры: измерение длины линейкой, измерение времени секундомером, измерение силы тока амперметром и т. д.

В этом случае обработка результатов измерений производится по формулам (1) – (9), приведенным выше в разделе 1.

## 2.2. Косвенные измерения

Косвенные измерения – измерения физической величины  $Z$ , результат которых находят на основании прямых измерений других физических величин:  $x_1, x_2, x_3 \dots$ . То есть, когда  $Z=f(x_1, x_2, x_3 \dots)$ .

Пример: измерение ускорения тела с использованием рабочей формулы  $a = \frac{2S}{t^2}$ , когда расстояние  $S$  и время  $t$  определяются в прямых измерениях, а ускорение – в косвенных.

В этом случае среднеквадратическое отклонение измеряемой величины рассчитывается по формуле:

$$S_Z = \sqrt{\left(\frac{dZ}{dx_1}\right)^2 \cdot S_{x_1}^2 + \left(\frac{dZ}{dx_2}\right)^2 \cdot S_{x_2}^2 + \dots}, \quad (10)$$

где  $S_{x_1}$  и  $S_{x_2}$  - среднеквадратические отклонения прямых измерений величин  $x_1$  и  $x_2$ , рассчитываемых по формулам (6) и (7).

Определенная таким образом  $S_Z$  может быть использована для расчета доверительного интервала по формуле (8).

### Библиографический список

1. Белов В.К. Метрологическая обработка результатов физического эксперимента: Учеб.пособие. 3-е изд., перераб. и доп. Магнитогорск: МГТУ, 2004. 121с.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ

Цель работы: проведение экспериментального определения скорости полета пули с использованием законов сохранения импульса, механической энергии и момента импульса.

### Вариант 1. Определение скорости полета пули на баллистическом маятнике

*Описание лабораторной установки и оборудования*

Баллистический маятник – это коробка 1, заполненная пластилином, подвешенная на четырех длинных нитях (на рисунке 1.1 нити изображены не в масштабе).

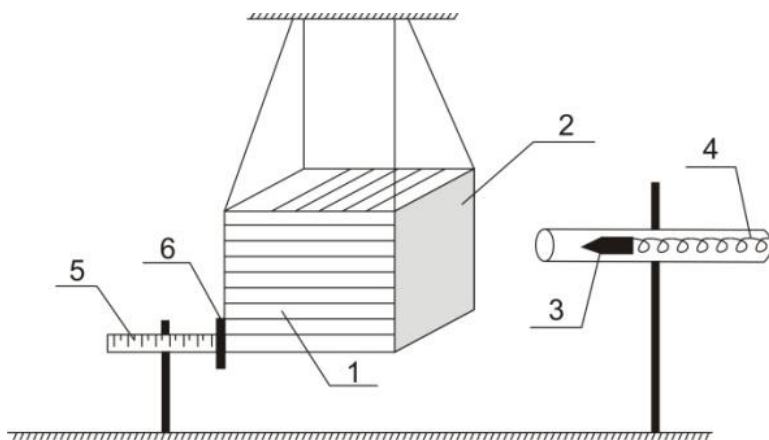


Рис.1.1

Боковая поверхность пластилина 2 открыта, так что там может застревать пуля 3, выстреливаемая из пружинного пистолета 4. После выстрела маятник вместе с пулей отклоняется на некоторый угол и передвигает движок 6, установленный на линейке 5. Масса пули значительно меньше массы маятника, поэтому угол отклонения мал. Массу маятника можно увеличивать, вкладывая в коробку металлические пластины известной массы.

Для описания физических процессов в данной лабораторной работе используются следующие законы:

1. Закон сохранения импульса: Если на систему тел не действуют внешние силы (такая система называется **замкнутой**) или их векторная сумма равна нулю, то суммарный импульс системы остается постоянным.

$$\text{Если } \sum \vec{F}_i = 0, \text{ то } \sum \vec{p}_i = \text{const.}$$

Если сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю проекция всех сил на какое-либо направление, то сохраняется проекция суммарного импульса на это направление.

$$\text{Если } \sum F_{xi} = 0, \text{ то } \sum p_{xi} = \text{const.}$$

2. Закон сохранения механической энергии: Если в замкнутой системе между телами действуют только консервативные силы (силы упругости, тяжести, кулоновские), то полная механическая энергия системы (сумма кинетических и потенциальных энергий всех тел) остается постоянной.

Если в системе есть диссипативная сила (трение, пластическая деформация), то уменьшение полной механической энергии равно работе этой силы. Часть механической энергии, равная работе диссипативной силы, переходит при этом в тепловую энергию.

Далее мы покажем, как применить эти законы сохранения в данном лабораторном эксперименте, и как использовать полученные уравнения, для определения скорости полета пули.

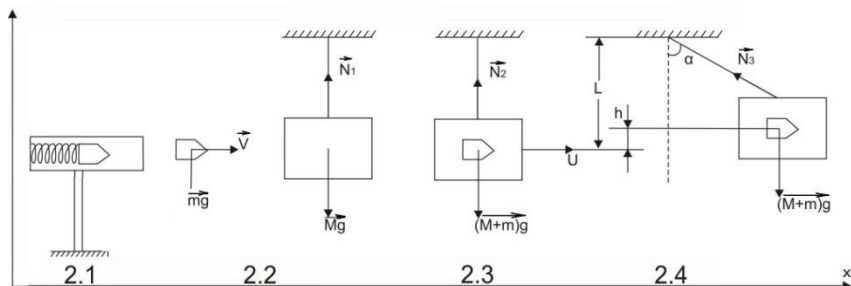


Рис.1.2

На рисунке 1.2 показаны последовательные состояния системы «пуля + маятник» после выстрела:

2.1. Пружина пистолета сжата, пуля лежит в стволе. Полная механическая энергия  $E_1$  равна потенциальной энергии  $E_{П1}$  сжатой пружины. Кинетическая энергия системы  $E_{K1} = 0$ .

2.2. Пуля после выстрела летит к маятнику. Полная энергия системы равняется кинетической энергии пули:

$$E_2 = E_K(\text{пули}) = \frac{m \cdot V^2}{2}.$$

Импульс системы равен импульсу пули:

$$p_2 = m \cdot V.$$

где  $m$  - масса пули,

$V$  - скорость пули.

В нашем рассмотрении мы пренебрегаем небольшой вертикальной составляющей скорости, возникающей из-за действия силы тяжести.

2.3. Пуля застряла в маятнике (неупругий удар). Маятник, получив удар, приобретает скорость  $U$  и начинает отклоняться от положения равновесия. Часть кинетической энергии пули уходит на работу по деформации пластины. Полная механическая энергия уменьшилась и стала равной:

$$E_3 = E_K(\text{пуля} + \text{маятник}) = \frac{(m + M) \cdot U^2}{2}.$$

Импульс системы:

$$p_3 = (m + M) \cdot U,$$

где  $M$  - масса маятника;

$U$  - скорость маятника сразу после удара пули.

2.4. Маятник с пулей отклонился на угол  $\alpha$ , центр тяжести поднялся на высоту  $h$ . Кинетическая энергия в верхней точке равна нулю. Полная энергия состоит только из потенциальной:

$$E_4 = (m + M) \cdot g \cdot h.$$

Из рисунка 2.4 :  $\cos \alpha = \frac{L-h}{L}$ ,

$$h = L \cdot (1 - \cos \alpha) = 2 \cdot L \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

При малых углах ( $\alpha < 10^0$ ) можно считать:  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2 \cdot L}$ ,

Тогда

$$h = \frac{d^2}{2 \cdot L} \quad (1.1)$$

Рассмотрим состояния 2.2 и 2.3 (до и после удара). Полная энергия при переходе от 2.2 к 2.3 не сохраняется, однако сохраняется импульс системы в проекции на горизонтальное направление, т.к. проекции силы тяжести и силы натяжения нити (внешние силы) на это направление равны нулю:

$$p_2 = p_3 \text{ или } m \cdot V = (m + M) \cdot U,$$

отсюда

$$V = \frac{m + M}{m} \cdot U. \quad (1.2)$$

Рассмотрим состояние 2.3 и 2.4. Поскольку сила трения на маятник не действует, то по закону сохранения энергии  $E_3 = E_4$ ,

или

$$\frac{m + M}{2} \cdot U^2 = (m + M) \cdot g \cdot h.$$

Отсюда

$$U = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \quad (1.3)$$

Подставив (1.1) в (1.3) и (1.3) в (1.2) получим:

$$V = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot d. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) используется для экспериментального определения скорости полета пули  $V$  в данной лабораторной работе.

*Порядок выполнения работы и обработки экспериментальных данных*

1. Записать данные установки ( $m$ ,  $M$ ,  $L$ ) в таблицу 1.1.
2. Сжать пружину пистолета и вложить пулю в ствол до касания с пружиной.
3. Установить пистолет против центра мишени, установить движок на линейку до касания с маятником и заметить его положение по шкале.
4. Произвести выстрел; проследить, чтобы пуля застряла в маятнике. Записать величину смещения движка  $d$ .
5. Вернуть движок обратно, зарядить пистолет и произвести следующий выстрел из того же положения (не сдвигать пистолет). Всего произвести  $N=10-20$  выстрелов, по указанию преподавателя. Занести результаты измерений в таблицу 1.1.
6. Рассчитать среднее значение смещения  $\langle d \rangle$  и по формуле (7) на стр.8 среднее квадратичное отклонение  $S_{\langle d \rangle}$ . Занести их в таблицу 1.1.
7. Вычислить среднюю скорость пули по формуле:

$$\langle V \rangle = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \langle d \rangle$$

8. Используя величину  $S_{\langle d \rangle}$ , полученную в п.6, вычислить доверительный интервал определения скорости пули по формуле:

$$\delta V = t_{P,N} \cdot \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot S_{\langle d \rangle},$$

где  $t_{P,N}$  - коэффициент Стьюдента, который находится по таблице 1 на стр. 9 (доверительная вероятность  $P$  задаётся преподавателем),

$N$  - число измерений.

9. Записать окончательный результат в виде:

$$V = \langle V \rangle \pm \delta V .$$



Помните, что все числовые значения физических величин в отчете должны иметь единицы измерения в СИ (метры, секунды, килограммы). Не забывайте указывать их при записи результатов измерения в таблицу и при их обработке.

Таблица 1.1

Данные установки	Номер выстрела	Смещение движка $d_i$	Среднее смещение $\langle d \rangle$	Отклонение $d_i - \langle d \rangle$	Среднее квадратическое отклонение среднего смещения
$m =$ $M =$ $L =$	1	$d_1$	$\langle d \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N}$	$d_1 - \langle d \rangle$	$S_{\langle d \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (d_i - \langle d \rangle)^2}{N(N-1)}}$
	2	$d_2$		$d_2 - \langle d \rangle$	
	3	$d_3$		$d_3 - \langle d \rangle$	
	.	.		.	
	.	.		.	
	$N$	$d_N$		$d_N - \langle d \rangle$	

10. По указанию преподавателя эксперимент можно провести ещё раз, увеличив массу маятника. В этом случае сравните два значения скорости полёта пули и сделайте выводы.

### *Вопросы для контроля*

1. Что такое механическая энергия? Сформулируйте закон её сохранения и условия, при которых он выполняется.

2. Приведите примеры сил, дающих разные виды потенциальной энергии. Какие из них присутствуют в данной работе?

3. Какие величины имели кинетическая и потенциальная энергия системы «пуля+маятник» в различные моменты опыта?

4. Для каких моментов времени в данном эксперименте можно применять закон сохранения механической энергии, а для каких нельзя и почему?

5. Сформулируйте закон сохранения импульса и условия, при которых он выполняется.

6. Может ли сохраняться проекция импульса на какое-либо направление в пространстве, если полный импульс не сохраняется?

7. Для каких моментов времени в данном эксперименте можно применять закон сохранения импульса, а для каких нельзя и почему?

### Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс общей физики: т.1.- М.: «Наука», 1977, §24, §27
2. Трофимова Т.И. Курс физики.- М.: «Высшая школа», 1998, §9, §13

#### Вариант 2. Определение скорости полета пули на крутильно-баллистическом маятнике

##### Описание лабораторной установки и оборудования

Для выполнения данного лабораторного эксперимента используется так называемый крутильно-баллистический маятник, устройство которого показано на рисунке 2.1.

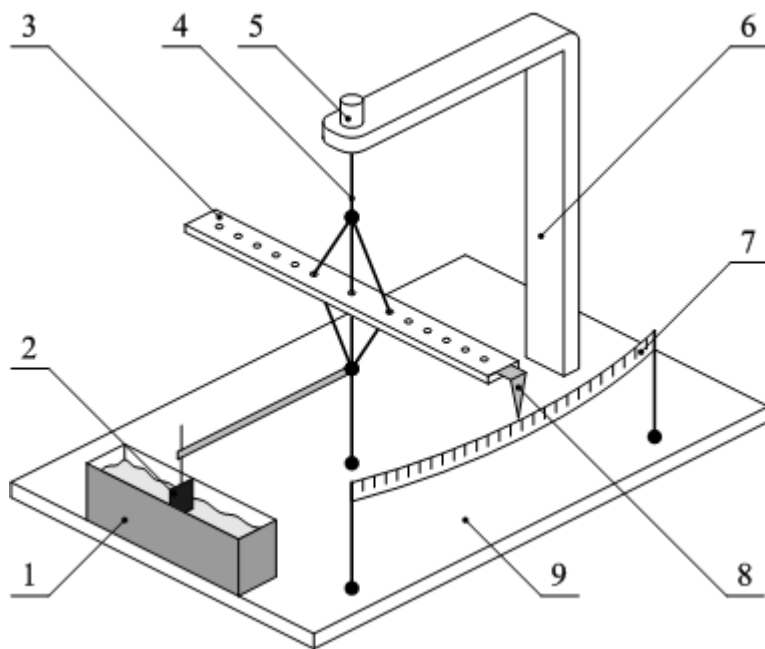


Рис.2.1.

Основной рабочей частью маятника является пластина 3 которая в горизонтальном положении жестко прикреплена к вертикальной упругой проволоке 4. Проволока 4 является осью колебаний пластины маятника,

она нижним концом закреплена на основании 9 установки, а верхний конец удерживается стойкой 6 с винтом 5, который предназначен для регулировки натяжения проволоки 4. В процессе эксперимента пластина 3 маятника совершает горизонтальные колебания. Отклонение колеблющегося маятника от положения равновесия можно фиксировать по шкале 7 с помощью стрелки 8.

Вдоль пластины маятника выполнены симметрично оси колебаний отверстия, с помощью которых фиксируются грузы, помещенные на пластину (цилиндры, стержни и др.).

Для определения скорости полета пули на пластине маятника симметрично закрепляются две одинаковые пластилиновые мишени. Пружинный заряженный пулей пистолет, закрепленный в штативе, устанавливаются горизонтально в плоскости пластины маятника на расстоянии 1-2 см от мишени, направляя его в центр мишени. После выстрела пуля застревает в мишени, и маятник отклоняется на некоторый угол, величина которого фиксируется по шкале 7.

Для исследования затухающих колебаний крутильно-баллистического маятника (см. л. р. №5) используется тормозящая пластина 2, которая на рычаге прикреплена к пластине маятника 3 и для изменения силы сопротивления, действующей на маятник, погружается на разную глубину в жидкость, залитую в сосуд 1.

#### *Общие сведения. Физические основы эксперимента*

После выстрела из пистолета летящая к мишени (к маятнику) пуля имеет момент импульса относительно оси вращения маятника равный

$$L_n = m \cdot V \cdot r , \quad (2.1)$$

где  $m$  - масса пули,

$V$  - скорость полета пули,

$r$  - кратчайшее расстояние от оси вращения до линии, вдоль которой движется пуля, или расстояние от оси вращения до мишени (см. рисунок 2.2).

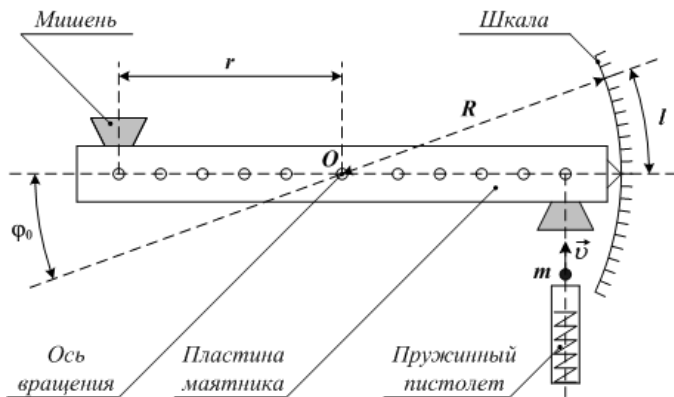


Рис.2.2

В результате абсолютно неупругого удара пули маятник вместе с застрявшей в нем пулей получает угловую скорость  $\omega$ . Общий момент импульса маятника с пулей в этот момент времени (сразу после удара) равен

$$I_n \cdot \omega + I_M \cdot \omega = (I_n + I_M) \cdot \omega,$$

где  $I_n \cdot \omega$  - момент импульса пули,

$I_M \cdot \omega$  - момент импульса маятника,

$I_n$  и  $I_M$  - моменты инерции пули и маятника.

По закону сохранения момента импульса (см. [1 - 3]):

$$m \cdot V \cdot r = (I_n + I_M) \cdot \omega \quad (2.2)$$

После соударения маятник поворачивается и его ось (упругая проволока) закручивается. При этом его начальная кинетическая энергия  $\frac{(I_n + I_M) \cdot \omega^2}{2}$  переходит в потенциальную энергию упруго закручива-

емой проволоки  $\frac{f \cdot \varphi_0^2}{2}$ . По закону сохранения энергии (см. [1 - 3]):

$$\frac{(I_n + I_m) \cdot \omega^2}{2} = \frac{f \cdot \varphi_0^2}{2}, \quad (2.3)$$

где  $f$  - коэффициент упругости проволоки,

$\varphi_0$  - максимальный угол закручивания проволоки (угол поворота маятника).

Если решить систему уравнений (2.2) и (2.3) при условии, что  $I_n \ll I_m$ , получим:

$$V = \frac{\varphi_0}{m \cdot r} \sqrt{I_m \cdot f}. \quad (2.4)$$

Момент инерции маятника  $I_m$  целесообразно экспериментально определять через период  $T$  его колебаний (см. формулу (9) в лабораторной работе №3А) :  $I = \frac{f}{4\pi^2} T^2$ , а угол поворота маятника  $\varphi_0$  - через

смещение  $l$  стрелки по шкале прибора :  $\varphi_0 = \frac{l}{R}$  (где  $R$  - радиус кривизны шкалы маятника). Если подставить эти выражения в (2.4), то после алгебраических преобразований окончательно получим:

$$V = \frac{f \cdot T}{2\pi \cdot R \cdot r \cdot m} \cdot l = k \cdot l \quad (2.5)$$

Здесь  $k = \frac{f \cdot T}{2\pi \cdot R \cdot r \cdot m}$  - некоторая постоянная величина в одной

серии измерений скорости полета пули.

Формула (2.5) используется для экспериментального определения скорости полета пули в данной лабораторной работе.

*Порядок выполнения работы и обработки экспериментальных данных*

1. Установите на пластину маятника симметрично две мишени на максимально возможном расстоянии  $r$  от оси вращения (по указанию преподавателя).

2. Измерьте  $t$  время  $N = 20-30$  колебаний маятника (по указанию преподавателя) и вычислите период колебаний:  $T = \frac{t}{N}$ .

3. Закрепите в штативе горизонтально на уровне пластины маятника пистолет, зарядите его и установите на расстоянии 1-2 см от мишени, направив его перпендикулярно пластине маятника

4. Произведите выстрел и измерьте максимальное отклонение  $l$  стрелки пластины маятника по шкале прибора.

5. Повторите п.4  $n = 6-10$  раз (по указанию преподавателя). Полученные данные занесите в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

№	$l$	$\langle l \rangle$	$S_l$
1			
2			
3			
.....			

6. Рассчитайте среднее значение отклонения  $\langle l \rangle$  и среднюю квадратическую погрешность его определения  $S_l$  по формуле (6) стр.8:

$$S_l = \sqrt{\frac{((l) - l_1)^2 + ((l) - l_2)^2 + \dots}{n - 1}}$$
 Полученные данные занесите в таблицу 2.1.

7. Рассчитайте по формуле (2.5) среднее значение скорости пули  $\langle V \rangle = k \cdot \langle l \rangle$ .

8. Рассчитайте среднюю квадратическую погрешность определения скорости  $S_V = k \cdot S_l$  и доверительный интервал  $\delta V = t \cdot \frac{S_V}{\sqrt{n}}$ , где  $t$  -

коэффициент Стьюдента, значение которого находится по таблице 1 стр.9 (доверительная вероятность  $P$  определяется преподавателем).

9. Запишите окончательный результат в виде  $V = \langle V \rangle \pm \delta V$ , проанализируйте его и сделайте вывод.

#### *Вопросы для контроля*

1. Что такое «крутильно-баллистический маятник»? Как он устроен, как на нем выполняется данная лабораторная работа?

2. Сформулируйте законы сохранения момента импульса и механической энергии и условия их выполнения.

3. Запишите в формульном виде законы сохранения момента импульса и механической энергии для баллистического маятника и пули в данном лабораторном эксперименте; поясните все величины, входящие в эти выражения. Для каких моментов времени записаны эти законы?

4. Продемонстрируйте вывод рабочей формулы, которая используется для экспериментального определения скорости полета пули в данной работе.

5. Объясните смысл полученных Вами экспериментальных данных.

#### *Библиографический список*

1. Савельев И.В. Курс общей физики.- Издательство «Наука», 1977. §24, 29.

2. Трофимова Т.И. Курс физики.- Издательство «Высшая школа», 1997. §13, 19.

3. Ивлиев А.Д. Физика: Учебное пособие. - СПб.: Издательство «Лань», 2008. § 1.4.2, §1.4.3.

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА. ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА

Цель работы: определение моментов инерции тел, экспериментальная проверка свойства аддитивности момента инерции и теоремы Штейнера.

*Описание лабораторной установки и оборудования*

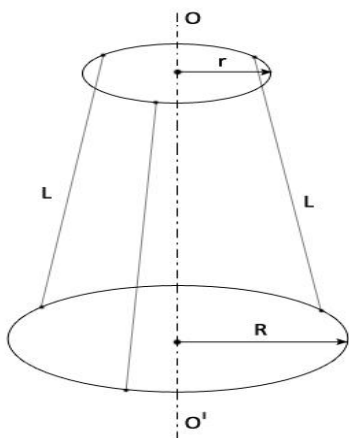


Рис.1.

Установка (рисунок 1) состоит из круглой нижней платформы радиусом  $R$  и массой  $m$ , подвешенной тремя нитями длиной  $L$  к верхней платформе меньшего радиуса  $r$ . Верхняя платформа закреплена в центре так, что её можно поворачивать вокруг оси симметрии  $OO'$ . Для выполнения эксперимента используют тела различной формы, которые размещают на нижней платформе. Для измерения времени используется секундомер.

*Общие сведения Физические основы эксперимента*

Момент инерции тела  $I$  – это физическая величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении. Для точечного тела массой  $m$ , вращающегося по окружности радиусом  $r$ , момент инерции определяется формулой:

$$I = m \cdot r^2. \quad (1)$$

В соответствие с этим для тела с бесконечно малой массой  $dm$ :

$$dI = dm \cdot r^2 \quad (2)$$



Момент инерции любого тела можно рассчитать, используя выражение (2). Для этого тело «разбивают» на микрообъемы с массами  $dm$ . Считая каждый из таких микрообъемов точечным телом, находят момент инерции  $dI$  каждого из них по формуле (2) и все  $dI$  суммируют:

$$I = \int dI = \int dm \cdot r^2 \quad (3)$$

Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через центр тяжести, определяются:

а) для стержня

$$I_{CT} = \frac{1}{12} m_{CT} l^2 . \quad (4)$$

б) для диска

$$I_D = \frac{1}{2} m_D r^2 . \quad (5)$$

в) для кольца

$$I_k = \frac{1}{2} m_k (R_1^2 + R_2^2), \quad (6)$$

где  $m_D$  - масса диска;

$r$  - радиус диска;

$m_k$  - масса кольца;

$R_1$  - внутренний радиус кольца;

$R_2$  - внешний радиус кольца;

$m_{CT}$  - масса стержня;

$l$  - длина стержня.

Момент инерции  $I$  тела относительно произвольной оси определяется суммой момента инерции  $I_y$  тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела и произведения массы тела на квадрат расстояния  $a$  между этими осями, согласно **теореме Штейнера**:

$$I = I_y + ma^2 . \quad (7)$$

Экспериментально момент инерции тела можно определить с помощью крутильного маятника (рисунок 1). Если верхнюю платформу повернуть на ма-

лый угол, то нижняя платформа будет совершать крутильные колебания вокруг оси  $OO'$ .

Пренебрегая силами трения в системе, можно считать постоянной полную механическую энергию. В точке максимального закручивания платформа поднимается на высоту  $h$ , при этом полная энергия равна потенциальной энергии

$$E_{II} = mgh,$$

где  $m$  - масса платформы.

При прохождении положения равновесия платформа движется с максимальной угловой скоростью  $\omega_m$ , при этом полная энергия равна кинетической

$$E_K = \frac{I\omega_m^2}{2},$$

где  $I$  - момент инерции платформы.

По закону сохранения энергии:  $mgh = \frac{I\omega_m^2}{2}$ .

Из этого уравнения получим:

$$I = \frac{2mgh}{\omega_m^2} \quad (8)$$

Так как малые колебания можно считать гармоническими, то колебания нижней платформы проходят по закону:

$$\varphi = \varphi_m \sin \frac{2\pi t}{T},$$

где  $\varphi_m$  - максимальный угол поворота;

$T$  - период колебаний.

Угловая скорость:  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_m \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} = \omega_m \cos \frac{2\pi t}{T}$ .

То есть

$$\omega_m = \varphi_m \frac{2\pi}{T}. \quad (9)$$

Из геометрических соображений [1]:

$$h = \frac{rR\varphi_m^2}{2L}. \quad (10)$$

Тогда из (8), (9) и (10):

$$I = \left( \frac{gRr}{4\pi^2 L} \right) mT^2 = kmT^2, \quad (11)$$

где  $k = \frac{gRr}{4\pi^2 L}$ . (12)

Используя формулу (11) можно рассчитать момент инерции, как ненагруженной платформы  $I_0$ , так и нагруженной платформы  $I$ . Пользуясь свойством аддитивности момента инерции, момент инерции тела на платформе  $I_{\text{тела}}$  рассчитывается как:

$$I_{\text{тела}} = I - I_0. \quad (13)$$

*Порядок выполнения работы и обработка экспериментальных данных*

*Задание 1. Определение момента инерции тел*

1. Занести данные установки ( $L$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $m_0$ ) в таблицу 1 и по заданию преподавателя параметры тел (для диска – массу  $m_D$  и радиус  $r$ , для кольца – массу кольца  $m_k$ , его внутренний  $R_1$  и внешний  $R_2$  радиусы, для стержня – массу  $m_{CT}$  и длину  $l$ ) в таблицу 2.

2. Поворотом верхней платформы вывести нижнюю ненагруженную платформу из положения равновесия так, чтобы она совершала крутильные колебания с амплитудой 5-10°. Измерить время  $t$  полных  $50 \div 100$  колебаний и внести в таблицу 1.

3. Повторить пункт 2 для платформы с телом (стержень, кольцо или диск), помещенным в центр платформы.

4. Вычислить периоды колебаний  $T_0$  (ненагруженной платформы), и  $T_1$  (нагруженной платформы) по формуле  $T = \frac{t}{n}$ ,

где  $n$  – число колебаний.

5. Рассчитать  $k$  по формуле (12).

6. Рассчитать момент инерции ненагруженной платформы

$$I_0 = km_0 T_0^2$$

7. Рассчитать относительную погрешность измерения момента инерции ненагруженной платформы  $\frac{\Delta I_0}{I_0} = 2 \frac{\Delta T_0}{T_0}$  и записать в таблицу 1.

Так как измерение проводится однократно, то погрешность  $\Delta T_0$  определяется исходя из погрешности измерительного прибора. то есть в данном случае секундомера.

8. Вычислить абсолютную погрешность измерения момента инерции ненагруженной платформы  $\Delta I_0 = \frac{2\Delta T_0 \cdot I_0}{T_0}$  и записать в таблицу 1.

9. Рассчитать момент инерции нагруженной платформы по формуле :

$$I_1 = k(m_0 + m_T) \cdot T_1^2$$

где  $m_0$  - масса платформы,  $m_T$  - масса тела.

10. Рассчитать относительную погрешность измерения момента инерции нагруженной платформы  $\frac{\Delta I_1}{I_1} = 2 \frac{\Delta T_0}{T_1}$  .

11. Вычислить абсолютную погрешность измерения момента инерции нагруженной платформы:  $\Delta I_1 = \frac{2\Delta T_0 \cdot I_1}{T_1}$  .

12. Пользуясь свойством аддитивности, рассчитать момент инерции тела  $I_{эксп} = I_1 - I_0$  .

13. Рассчитать абсолютную погрешность измерения момента инерции тела  $\Delta I_{эксп} = \frac{\Delta I_1 + \Delta I_0}{I_1 - I_0}$  и записать в таблицу 2.

14. Используя формулы (4), (5), (6) рассчитать теоретическое значение момента инерции тела  $I_{теор}$  .

15. Рассчитать относительную погрешность определения момента инерции тела по отношению к теоретической по формуле:

$$\varepsilon = \frac{I_{\text{теор}} - I_{\text{эксп}}}{I_{\text{теор}}} \cdot 100\%$$

16. Результаты занести в таблицу 2.

17. Проанализировать результаты и сделать выводы.

Таблица 1

Параметры установки	$n$	$t, c$	$T_{o,c}$	$I_o, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$\frac{\Delta I_o}{I_o}$	$\Delta I_o$
$L, \text{ м}$ $R, \text{ м}$ $r, \text{ м}$ $m_o, \text{ кг}$						

Таблица 2

Параметры тел	$n$	$t, c$	$T_{I,c}$	$I_{\text{эксп}}, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$I_{\text{теор}}, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta I_{\text{эксп}}$	$\varepsilon, \%$
стержень $l, \text{ м}$ $m_{\text{ст}}, \text{ кг}$							
ДИСК $r, \text{ м}$ $m_{\text{д}}, \text{ кг}$							
КОЛЬЦО $R_1, \text{ м}$ $R_2, \text{ м}$ $m_{\text{к}}, \text{ кг}$							

*Задание 1а. Определение момента инерции тел*

1. Занести данные установки ( $L, R, r, m_o$ ) в таблицу 1а и по заданию преподавателя параметры тела, с которым будет проводиться эксперимент (для диска – массу  $m_{\text{д}}$  и радиус  $r$ , для кольца - массу коль-

ца  $m_k$ , его внутренний  $R_1$  и внешний  $R_2$  радиусы, для стержня – массу  $m_{CT}$  и длину  $l$ ), в таблицу 2а.

2. Поворотом верхней платформы вывести нижнюю ненагруженную платформу из положения равновесия так, чтобы она совершала крутильные колебания с амплитудой  $5-10^\circ$ .

Измерить время  $t$  полных  $N=10$  колебаний ненагруженного маятника  $n=8-10$  раз и внести в таблицу 1а.

3. Повторить пункт 2 для платформы с телом (стержень, кольцо или диск), помещенным в центр платформы. Полученные данные занести в таблицу 2а.

4. Для каждого измерения рассчитайте период колебаний  $T = \frac{t}{N}$  и средние значения периода колебаний ненагруженного  $\langle T_o \rangle$  и нагруженного маятника  $\langle T \rangle$ . Данные расчетов занесите в таблицы 1а и 2а.

5. По формуле 6 (стр.7) рассчитайте средние квадратические погрешности  $S_o$  и  $S_T$  определения  $T_o$  и  $T$ . Полученные данные занесите в таблицы 1а и 2а.

6. Рассчитать  $k$  по формуле (12).

7. Рассчитать и занести в таблицу 1а среднее значение момента инерции ненагруженной платформы:

$$\langle I_o \rangle = k m_o \langle T_o \rangle^2$$

8. Рассчитать и занести в таблицу 2а среднее значение момента инерции нагруженной платформы:

$$\langle I \rangle = k (m_o + m_T) \langle T \rangle^2$$

где  $m_o$  - масса платформы,  $m_T$  – масса тела.

9. Пользуясь свойством аддитивности, рассчитать момент инерции тела  $I_{эксн} = \langle I \rangle - \langle I_o \rangle$  и занести его в таблицу 2а.

10. По формуле  $S = \sqrt{S_o^2 + S_T^2}$  найдите среднюю квадратическую ошибку определения  $I_{эксн}$ .

11. Используя формулу (8) на стр.8 рассчитайте доверительный интервал  $\delta I$  определения  $I_{\text{экс}}$ .

12. Окончательный результат экспериментального определения момента инерции тел запишите в виде:  $I = I_{\text{экс}} \pm \delta I$ .

13. Рассчитайте теоретическое значение момента инерции исследуемого тела по одной из формул (4), (5), (6) и сравните его с экспериментальным.

14. Проанализируйте полученные результаты и сделайте выводы.

Таблица 1а

Ненагруженный маятник

Параметры установки	$n$	$t, c$	$T_o, c$	$\langle T_o \rangle, c$	$\langle I_o \rangle, кг \cdot м^2$	$S_o$
$L, м$	1					
$R, м$						
$r, м$		...				
$m_o, кг$	10					

Таблица 2а

Нагруженный маятник

Параметры тел	$n$	$t, c$	$T, c$	$\langle T \rangle, c$	$\langle I \rangle, кг \cdot м^2$	$I_{\text{экс}}, кг \cdot м^2$	$S_T$
стержень $l, м$ $m_{\text{ст}}, кг$	1						
диск $r, м$ $m_{\text{д}}, кг$							
КОЛЬЦО $R_1, м$ $R_2, м$ $m_{\text{к}}, кг$	10						

*Задание 2. Проверка свойства аддитивности момента инерции*

1. Записать в таблицу 3 массу платформы  $m_0$ , массу кольца и параметры установки.
2. Установить одно кольцо в центре платформы и измерить время  $50 \div 100$  полных колебаний. Занести результат в таблицу 3.
3. Вычислить период колебания по формуле  $T_o = \frac{t}{n}$ ,  
где  $n$  – число колебаний.
4. Пункты 1-3 повторить для двух и трех колец, одновременно установленных в центре платформы.
5. Рассчитать  $k$  по формуле (12)
6. Рассчитать моменты инерции нагруженной платформы по формуле

$$I = k(m_0 + b \cdot m_k)T^2,$$

где  $b$  – количество колец ( $b = 1, 2, 3$ ), установленных на платформе. Полученные данные занести в таблицу 3.

7. Построить график зависимости  $I(b)$  (рисунке 2). Продолжив график до пересечения с осью  $I$ , найти момент инерции ненагруженной платформы  $I_0$ . Определить по графику  $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ .
8. Все результаты занести в таблицу 3.
9. Проанализировать результаты расчетов и сделать выводы.

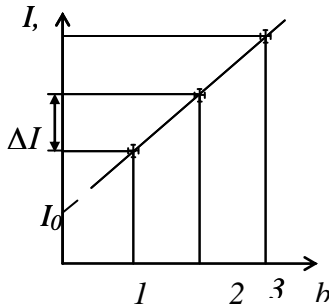


Рис.2.



Таблица 3

Параметры кольца и установки	кол-во колец	$n$	$t, c$	$T_o, c$	$I, кг \cdot м^2$	$I_o, кг \cdot м^2$	$\Delta I_1$	$\Delta I_2$	$\Delta I_3$
$D_k, м$	1								
$d_k, м$									
$m, кг$									
$L, м$	2								
$R, м$									
$r, м$	3								
$m_o, кг$									

*Задание 3. Исследование зависимости момента инерции тела от расстояния между его центром инерции и осью вращения (проверка теоремы Штейнера)*

1. Определить момент инерции ненагруженной платформы, выполнив пункты 1, 2, 3, 7, 8 задания 1.
2. Измерить параметры тел, с которыми будет производиться эксперимент (по указанию преподавателя). Для дисков – массу  $m_d$  и радиус  $r$ , для стержней – массу  $m_{CT}$  и длину  $l$ . Занести данные в таблицу 4.
3. Поместить тела симметрично относительно центра платформы на минимальное расстоянии  $a$ . Занести значения  $a$  в таблицу 4.
4. Измерить время 10 ÷ 50 полных колебаний и занести в таблицу 4.
5. Последовательно увеличивая расстояние  $a$ , для каждого из них выполнить пункт 4. Занести данные в таблицу 4.
6. Для каждого  $a$  вычислить периоды колебаний по формуле

$$T = \frac{t}{n}.$$

7. Рассчитать моменты инерции нагруженной платформы по формуле для каждого случая

$$I = k(m_o + b \cdot m_T)T^2,$$

где  $b$  - количество тел, расположенных на платформе;

$m_o$  - масса платформы;

$m_T$  - масса тела.

8. Пользуясь свойством аддитивности, рассчитать для каждого  $a$  момент инерции тел:  $I_{\text{д\ddot{a}в}} = \frac{I - I_0}{b}$ . Занести данные в табл. 4.

9. Построить графики зависимости  $I_{\text{тел}}(a)$ ,  $I_{\text{тел}}(a^2)$ .

10. Проанализировать полученные данные и сделать выводы по работе.

Таблица 4

Параметры тел	$a, м$	$n$	$t, с$	$T, с$	$I, кг \cdot м^2$	$I_{\text{тел}}, кг \cdot м^2$	$I_{\text{теор}}, кг \cdot м^2$	$\varepsilon, \%$
стержень								
$l, м$								
$m_{\text{ст}}, кг$								
диск	.							
$r, м$	.							
$m_{\text{д}}, кг$	.							

### Вопросы для контроля

1. Что такое момент инерции тела? В чем состоит смысл этой физической характеристики?
2. Как вычисляется момент инерции тела относительно точки и относительно оси?
3. Сформулируйте теорему Штейнера. В каком случае ее применяют?
4. Каков характер зависимости момента инерции от расстояния, на котором находится тело от оси вращения?
5. Как экспериментально определяется момент инерции тела в данной лабораторной работе?
6. Какие законы сохранения применяются для вывода расчетных формул?

### Библиографический список

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. . «М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ», 2002. 560 с. §42.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. М. «Наука», 1989. 416 с. §31, 32.
3. Трофимова Т.И. Курс физики. М. «Высшая школа», 1997. 542 с. §16.

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА

Цель работы: подтверждение экспериментальным путем теоретических формул для расчета моментов инерции тел различной формы и характера зависимости момента инерции тела от расстояния до оси вращения.

#### *Описание лабораторной установки и оборудования*

Лабораторный эксперимент выполняется на крутильно-баллистическом маятнике, описание которого приведено в лабораторной работе №1. Для исследований используются грузы в виде цилиндров или стержней (по указанию преподавателя) с известными массами, геометрические размеры которых измеряются линейкой или штангенциркулем. Для измерения периодов колебаний используется секундомер.

#### *Общие сведения. Физические основы эксперимента*

Момент инерции тела  $I$  – это физическая величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении. Для точечного тела массой  $m$ , вращающегося по окружности радиусом  $r$ , момент инерции определяется формулой:

$$I = mr^2. \quad (1)$$

В соответствие с этим для тела с бесконечно малой массой  $dm$ :

$$dI = dm \cdot r^2. \quad (2)$$

Момент инерции любого тела можно рассчитать, используя выражение (2). Для этого тело «разбивают» на микрообъемы с массами  $dm$ . Считая каждый из таких микрообъемов точечным телом, находят момент инерции  $dI$  каждого из них по формуле (2) и все  $dI$  суммируют:

$$I = \int dI = \int dm \cdot r^2 \quad (3)$$

Реализуя изложенную методику расчета, можно найти формулы моментов инерции различных тел (см., например, [1], §39, или [2] §16). Например, если ось вращения является осью симметрии и проходит через центр масс тела, то:

$$\text{для цилиндра } I = \frac{1}{2} mR^2,$$

$$\text{для стержня } I = \frac{1}{12} ml^2,$$

$$\text{для шара } I = \frac{2}{5} mR^2,$$

где  $m$  – масса тела,  $l$  – длина стержня,  $R$  – радиус цилиндра или шара.

Если ось вращения не проходит через центр масс тела, то операция (3) позволяет получить выражение, которое называют теоремой Штейнера:

$$I = I_c + m \cdot a^2, \quad (4)$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно произвольной оси вращения;

$I_c$  – момент инерции этого же тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной;

$a$  – расстояние между осями.

В данной лабораторной работе два одинаковых тела, момент инерции которых измеряют, помещают симметрично на пластине 3 (см. рисунке 2.1 на стр.18) крутильно-баллистического маятника. В процессе колебаний пластины выполняется закон сохранения энергии: максимальная кинетическая энергия маятника  $W_{\max}^k$ , которую он имеет в момент прохождения положения равновесия, равна максимальной потенциальной  $W_{\max}^n$  в положении наибольшего отклонения:

$$W_{\max}^k = W_{\max}^n \quad (5)$$

Если представить физические выражения для кинетической энергии вращающегося тела и потенциальной энергии упруго деформированной проволоки (оси маятника), то выражение (5) примет вид:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{f\varphi_0^2}{2}, \quad (6)$$

где  $I$  - момент инерции маятника;

$\omega_0$  - максимальная угловая скорость маятника (при прохождении им положения равновесия);

$f$  - коэффициент упругости проволоки при кручении;

$\varphi_0$  - максимальный угол поворота маятника.

Допустим, что колебания маятника совершаются по гармоническому закону:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad (7)$$

где  $\varphi$  - угол поворота в момент времени  $t$ ,

$T$  - период колебаний.

Из этого выражения дифференцированием можно найти закон изменения угловой скорости  $\omega$  маятника:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right] = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Отсюда следует, что максимальное значение угловой скорости при  $\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 1$  равно:

$$\omega_0 = \varphi_0 \frac{2\pi}{T}. \quad (8)$$

Подставим найденное выражение (8) в (6) и после алгебраических преобразований получим:

$$I = \frac{f}{4\pi^2} T^2. \quad (9)$$

Это выражение используется для экспериментального определения моментов инерции тел в данной лабораторной работе.

*Порядок выполнения работы и обработки экспериментальных данных*

*Задание 1. Определение моментов инерции тел*

1. Измерьте  $n = 5 - 10$  раз (по указанию преподавателя) время  $N = 10$  колебаний ненагруженного маятника (амплитуда колебаний маятника здесь и далее должна быть небольшой: до  $\sim 10^\circ$ ).

2. Два одинаковых тела, момент инерции которых вы определяете в данном эксперименте, поместите симметрично на пластину маятника на определенном расстоянии  $a$  от оси вращения (по указанию преподавателя).

3. Измерьте  $n$  раз время  $N = 10$  колебаний нагруженного маятника.

4. Данные полученных измерений занесите в таблицу 1

Таблица 1

Ненагруженный маятник					Нагруженный маятник				
№	$t$	$T_o$	$\langle T_o \rangle$	$S_o$	№	$t$	$T$	$\langle T \rangle$	$S_T$
1									
2									
3									
·									
·									
·									

Для каждого измерения рассчитайте период колебаний  $T = \frac{t}{N}$  и

средние значения периода колебаний ненагруженного  $\langle T_o \rangle$  и нагруженного маятника  $\langle T \rangle$ . По формуле (6) на стр.8 рассчитайте средние квадратические погрешности  $S_o$  и  $S_T$  определения  $T_o$  и  $T$ . Полученные данные занесите в таблицу 1.

5. Найдите по формуле (9) средние значения моментов инерции ненагруженного  $\langle I_o \rangle = \frac{f}{4\pi^2} \langle T_o \rangle^2$  и нагруженного  $\langle I_n \rangle = \frac{f}{4\pi^2} \langle T \rangle$  маятника.

6. По формуле  $\langle I_{эксн} \rangle = \langle I_n \rangle - \langle I_o \rangle$  рассчитайте среднее экспериментальное значение момента инерции исследуемых тел.

7. По формуле  $S = \sqrt{S_o^2 + S_T^2}$  найдите среднюю квадратическую ошибку определения  $I_{экс}$ .

8. Используя формулу (8) на стр.7 рассчитайте доверительный интервал определения  $I_{эксн}$ :  $\delta I = t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ . Коэффициент Стьюдента для этого можно найти в таблице 1 на стр.9, доверительная вероятность  $P$  определяется преподавателем.

9. Окончательный результат экспериментального определения момента инерции тел запишите в виде:  $I_{эксн} = \langle I_{эксн} \rangle \pm \delta I$ .

10. Рассчитайте по теореме Штейнера теоретическое числовое значение момента инерции исследуемых тел и сравните его с экспериментальным.

11. Проанализируйте полученные результаты и сделайте выводы.

### *Задание 2. Проверка теоремы Штейнера*

1. Измерьте  $t_o$  время 20 – 30-ти (по указанию преподавателя) полных колебаний ненагруженного маятника (амплитуда колебаний маятника при этом и в дальнейшем должна быть небольшой: до  $\sim 10^\circ$ ).

2. Найдите по полученным данным период колебаний  $T_o = \frac{t_o}{N}$  и по формуле (9) рассчитайте  $I_o$  - момент инерции ненагруженного маятника.

3. Поместите на пластину маятника два одинаковых тела симметрично относительно оси колебаний на минимальном расстоянии  $a$  и измерьте это расстояние.

4. Измерьте  $t$  время 10-15 (по указанию преподавателя) полных колебаний нагруженного маятника.

5. Последовательно увеличивая расстояние «а» от оси вращения до тела выполните для каждого  $a$  пункт 4.

6. Полученные в п. 3 – 5 данные занесите в таблицу 2.

Таблица 2

№	$a$	$t$	$T$	$I_n$	$I_m$
1					
2					
3					
4					
.....					

7. Вычислите для каждого  $a$  период колебаний нагруженного маятника  $T$  и по формуле (9) его момент инерции.  $I_n$ . Все полученные данные занесите в таблицу 2.

8. Вычислите для каждого «а» момент инерции тел, находящихся на платформе как  $I_m = I_n - I_o$ . Полученные данные занесите в последний столбец таблицы 2.

9. Постройте графики зависимостей  $I_m(a)$  и  $I_m(a^2)$ .

10. Проанализируйте полученные результаты и сделайте выводы о выполнимости теоремы Штейнера.

### Вопросы для контроля

1. Что такое момент инерции тела? В чем состоит смысл этой физической характеристики? Аналогом какой величины в поступательном движении является момент инерции?

2. Как вычисляется момент инерции точечного тела? Как можно найти момент инерции большого тела?

3. Сформулируйте теорему Штейнера и укажите смысл всех величин, которые в нее входят. Каков характер зависимости момента инерции от расстояния, на котором находится тело от оси вращения?

4. Какие законы и уравнения используются для вывода рабочей формулы в данной работе. Как они записываются?



### Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1.- М.: «Наука». 1977.416 с.
2. Трофимова Т.И. Курс физики.- М.: «Высшая школа». 1997. 542 с.

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Цель работы: Проверка основного закона динамики вращательного движения. Определение момента инерции тела.

#### Описание лабораторной установки и оборудования

В лабораторной работе используется маятник Обербека (рисунок 1), комплект из 4 одинаковых цилиндров с винтами, секундомер, линейка для определения высоты, линейки – шаблоны, штангенциркуль, шесть гирек.

Вращающаяся часть маятника состоит из горизонтального вала, на который насажен шкив (1). На шкив намотана нить (2). К шкиву крепится толстостенная втулка с четырьмя спицами (3). На спицы можно надевать цилиндры (4) одинаковой массы, которые крепятся к спицам с помощью винтов. Нить перекинута через дополнительный шкив (6) и к нижнему концу нити привязано чашка (5), в которую помещают грузы различной массы (рисунок 1).

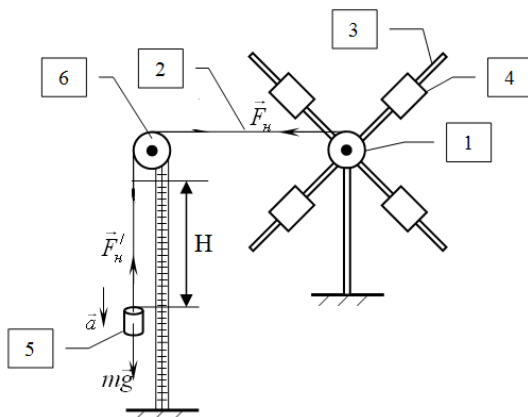


Рис.1.

**Вращательное движение** – вид механического движения абсолютно твёрдого тела, при котором его точки описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Центры всех окружностей лежат при этом на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям окружностей и называемой осью вращения. Ось вращения может располагаться внутри тела и за его пределами.

**Угловая скорость** – изменение углового пути в единицу времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

где  $\varphi$  - угловой путь (угол поворота тела вокруг своей оси). Вектор угловой скорости направлен по оси вращения в соответствии с правилом правого винта (буравчика).

**Угловое ускорение**  $\varepsilon$  - изменение угловой скорости тела в единицу времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Угловое ускорение  $\varepsilon$  связано с линейным ускорением  $\vec{a}$ :

$$\varepsilon = \frac{a}{R}, \quad (1)$$

где  $a$  - линейное ускорение,

$R$  - радиус кривизны траектории движения.

**Моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$**  (рисунок 2) называют вектор, равный векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}$ , который определяет положение точки приложения си-

лы, на вектор силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}].$$

Модуль вектора  $\vec{M}$  равен

$$M = rF \sin \alpha \quad (2).$$

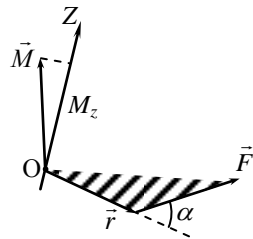


Рис.2.

**Моментом силы относительно оси Z** называют проекцию на эту ось вектора  $\vec{M}$ , определенного относительно произвольной точки O данной оси (рисунок 2).

**Момент инерции тела** - это величина, характеризующая распределение масс в теле и являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении. Моментом инерции тела относительно оси Z называется величина, определяемая равенством:

$$I_z = \int_V \rho r^2 dV, \quad (3)$$

где  $r$  – расстояние от оси Z,

$\rho$  – массовая плотность,

$V$  – объем тела.

Для точечного тела массой  $m$ , вращающегося по окружности радиусом  $r$ :

$$I = m \cdot r^2.$$

Момент инерции – величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

**Момент импульса точечного тела** – векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$ , определяющего положение точки, на вектор импульса  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Для вращающегося твердого тела относительно оси вращения:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

**Динамический закон**, который используется для описания движения вращающегося тела, называется основным законом динамики вращательного движения. Он может быть записан следующим образом:

$$\Sigma \vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (4.1)$$

$$\Sigma \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (4.2)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Sigma \vec{M}}{I}, \quad (4.3)$$

где  $\Sigma M$  – суммарный (результатирующий) момент сил, действующих на тело,

$I$  – момент инерции вращающегося тела.

По существу основной закон динамики вращательного движения – это второй закон Ньютона, записанный через кинематические и динамические характеристики вращательного движения для вращающегося тела.

Проверка соотношений (4) может быть проведена экспериментально с помощью маятника Обербека.

Если в чашку 5 (рисунок 1) положить груз массой  $m$ , то под действием силы натяжения нити  $F_n$  начнет вращаться с ускорением  $\varepsilon$ , а груз двигаться вниз с ускорением  $a$ . Для равноускоренного движения

$$a = \frac{2H}{t^2},$$

где  $H$  – расстояние, которое проходит груз от начальной(самой верхней) точки движения, до конечной (самой нижней) точки, когда нить полностью размотается со шкива 1 (рисунок 1),

$t$  – время движения груза.

Тогда угловое ускорение маятника:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2H}{r \cdot t^2}, \quad (5)$$

где  $r$  – радиус шкива.

Второй закон Ньютона для груза  $m$  в проекциях на вертикальную ось:

$$mg - F_n = ma.$$

Отсюда  $F_n = m(g - a) = m\left(g - \frac{2H}{t^2}\right)$  и момент силы натяжения

нити, действующей на маятник:

$$M_n = F_n \cdot r = mgr\left(1 - \frac{2H}{g \cdot t^2}\right) \quad (6)$$

В оси маятника действует сила трения, которая создает тормозящий момент  $M_{mp}$  (остальными силами сопротивления, например аэродинамическими, действующими на все тела маятника, будем пренебрегать). Действие силы трения ведет к уменьшению механической энергии маятника. Поэтому после достижения грузом самой нижней точки, он движется замедленно вверх (т.к. маятник по инерции вращается) и поднимается на высоту  $h$  (в момент остановки маятника). Причем  $h < H$ . Уменьшение потенциальной энергии груза за все время движения  $mgH - mgh$  равно работе силы трения  $A = M_{mp} \cdot \varphi$ , где  $\varphi$  -угловой путь, пройденный маятником:  $\varphi = \frac{H + h}{r}$ .

По закону сохранения энергии:  $M_{mp} \cdot \varphi = (mgH - mgh)$ . Откуда

$$M_{mp} = \frac{mg(H - h)}{\varphi} = mgr \frac{(H - h)}{(H + h)} \quad (7)$$

Суммируя выражения (6) и (7) найдем результирующий момент сил, действующих на маятник:

$$M = M_n - M_{mp} = mgr \left( 1 - \frac{2H}{g \cdot t^2} - \frac{H - h}{H + h} \right) \quad (8)$$

Условия проведения эксперимента на маятнике Обербека в данной лабораторной работе таковы, что в последнем выражении дробь  $\frac{2H}{g \cdot t^2} \ll 1$  (несколько сотых долей %). Поэтому если ей пренебречь, то упрощенно результирующий момент сил может быть найден как

$$M = \frac{2mgr}{\frac{H}{h} + 1} \quad (8')$$

Из (4) следует, что если разделить (8) на (5), то можно найти выражение для определения момента инерции вращающегося маятника:

$$I = mr^2 \left[ \frac{gt^2 h}{H(H-h)} - 1 \right] \quad (9)$$

Таким образом, выражения (5), (8), (9) позволяют найти экспериментально на маятнике Обербека все основные физические величины, входящие в основной закон динамики вращательного движения.

*Порядок выполнения работы и обработки экспериментальных данных*

*Задание 1. Проверка основного закона динамики вращательного движения*

1. Наденьте на спицы маятника 4 цилиндрических груза и установите их вплотную к шкиву маятника. Измерьте расстояние  $a_1$  от центра оси вращения маятника до центра цилиндра.

2. Отметьте на вертикальной линейке верхнее начальной и нижнее конечное положение чашки, по их разности найдите величину  $H$ .

3. Положите в чашку груз массой  $m_1 = 50$  г и приведите маятник в начальное состояние, когда чашка с грузом находится в начальном верхнем положении.

4. Отпустите груз и измерьте время  $t_1$  его движения с высоты  $H$  до нижней точки и высоту  $h_1$  его последующего подъема.

5. Операции п.3 и 4 проделайте для грузов с массами  $m_2 = 100$  г,  $m_2 = 150$  г,  $m_2 = 200$  г. Полученные данные занесите в таблицу 1.

6. Последовательно 3-4 (по указанию преподавателя) раза увеличивая расстояние  $a$  цилиндрических грузов относительно оси вращения маятника ( $a_2, a_3 \dots$ ) для каждого из них выполните п.3-5. Полученные данные занесите в таблицу 1.

7. Для каждой горизонтальной строки таблицы 1 по формулам (5) и (8) или (8') рассчитайте значения углового ускорения маятника  $\varepsilon$  и результирующего момента сил  $M$ , действующих на него. Полученные данные занести в таблицу 1.

8. Постройте графики зависимости  $\varepsilon$  от  $M$  в одной координатной системе для каждого  $a_i$ . Проанализируйте полученные данные.

9. Постройте графики зависимости  $\varepsilon$  от  $M$  в одной координатной системе для каждого  $a_i$ . Проанализируйте полученные данные.

Таблица 1

$a$	$m$	$t$	$h$	$\varepsilon$	$M$	$tg \alpha = I/I$	$I$
$a_1$	$m_1$	$t_1$	$h_1$				
	$m_2$	$t_2$	$h_2$				
	$m_3$	$t_3$	$h_3$				
	$m_4$	$t_4$	$h_4$				
$a_2$							
.....							

10. Для каждого графика найдите тангенсы их наклона (как следует из (4) это величина, обратная моменту инерции маятника  $I$ ) и по ним вычислите для каждого  $a_i$  момент инерции  $tg \alpha = I/I$ . Полученные данные занесите в таблицу 1.

11. Постройте графики в координатах  $\varepsilon - I$  и  $\varepsilon - I/I$  и проанализируйте их.

Примечание: построение графиков рекомендуется проводить в программе Microsoft Excel, где можно получить математическое уравнение линии тренда (уравнение регрессии) и, в частности, числовые значения  $tg \alpha$ .

12. Проанализируйте все полученные экспериментальные данные и сделайте вывод о выполнимости основного закона вращательного движения в данном лабораторном эксперименте.

### Задание 2. Определение моментов инерции тел

1. Первая серия измерений производится на ненагруженном маятнике. Отметьте на вертикальной линейке начальное верхнее и конечное нижнее положение чашки 5 (рисунок 1) и по их разности найдите высоту  $H$ .

2. В чашку поместите груз массой  $m$  (по указанию преподавателя). Приведите маятник в начальное состояние, когда чашка с грузом находится в верхнем положении.

3. Отпустите чашку и измерьте время  $t_1$  движения груза до конечного нижнего положения и последующую высоту подъема  $h_1$  (в момент остановки маятника).

4. Измерения по п.3 проведите 6 -10 раз (по указанию преподавателя). Все полученные данные занесите в таблицу 2.

Таблица 2

№	$t$	$\langle t \rangle$	$S_t$	$h$	$\langle h \rangle$	$S_h$	$\langle I_o \rangle$	$S_{I_o}$
1	$t_1$			$h_1$				
2	$t_2$			$h_2$				
3	$t_3$			$h_3$				
...	.....			.....				

5. Рассчитайте средние значения  $\langle t \rangle$  и  $\langle h \rangle$ , подставьте их в формулу (9) и рассчитайте среднее значение момента инерции ненагруженного маятника  $\langle I_o \rangle$ . Все полученные данные занесите в таблицу 2.

6. По формуле (6) стр.7 рассчитайте средние квадратические погрешности  $S_t$  и  $S_h$  измерений  $\langle t \rangle$  и  $\langle h \rangle$ . Полученные данные занесите в таблицу 2.

7. Рассчитайте среднюю квадратическую погрешность  $S_{I_o}$  измерения момента инерции маятника. Для этого используется формула (10) стр.11, которая для данного эксперимента принимает вид

$S_{I_o} = \sqrt{\left(\frac{dI_o}{dt}\right)^2 \cdot S_t^2 + \left(\frac{dI_o}{dh}\right)^2 \cdot S_h^2}$ . Если в нее подставить (9), то после преобразований получим:

$$S_{I_o} = mg \left( \frac{r \langle t \rangle}{H + \langle h \rangle} \right)^2 \cdot \sqrt{\left[ \frac{2 \langle h \rangle}{\langle t \rangle} \left( 1 + \frac{\langle h \rangle}{H} \right) \right]^2 \cdot S_t^2 + S_h^2} \quad (10)$$



8. Установите на спицах маятника на равных расстояниях  $a$  (по указанию преподавателя) 4 цилиндрических груза. Расстояние  $a$  отсчитывается от центра оси вращения до центра груза.

9. Для нагруженного маятника проведите измерения, описанные в п. 3,4.

10. В соответствии с п.5-7 найдите среднее значение момента инерции нагруженного маятника  $\langle I_H \rangle$  и среднюю квадратическую погрешность определения этой величины  $S_{I_H}$ .

11. Вычислите момент инерции грузов как  $\langle I_G \rangle = \langle I_H \rangle - \langle I_o \rangle$ .

12. Вычислите среднюю квадратическую погрешность определения  $I_G$  по формуле:  $S_{I_G} = \sqrt{S_{I_o}^2 + S_{I_H}^2}$ .

13. По формуле (8) стр.8 найдите доверительный интервал  $\delta I_G$  (при этом доверительная вероятность определяется преподавателем).

14. Окончательно экспериментальное значение момента инерции грузов запишите в виде:

$$I_G = \langle I_G \rangle \pm \delta I_G \quad (11)$$

15. Вычислите по теореме Штейнера теоретическое значение момента инерции грузов:  $I_{TEOP} = 4 \cdot [I_C + m_G \cdot a^2]$ , где  $m_G$  - масса каждого груза,  $I_C$  - момент инерции груза относительно оси, проходящей через его центр:

$$I_C = m_G \cdot \left[ \frac{D^2 + d^2}{16} + \frac{\ell^2}{12} \right],$$

где  $D$  и  $d$  - внешний и внутренний диаметры цилиндра,  
 $\ell$  - длина цилиндра.

Если в Вашем эксперименте  $a$  достаточно велико (больше 15 см), то  $I_C \ll m_G \cdot a^2$  и тогда  $I_{TEOP} = m \cdot a^2$ .

16. Сравните теоретическое расчетное и экспериментальное (11) значения моментов инерции грузов и сделайте вывод.

### *Вопросы для контроля*

1. Какое движение называется вращательным?
2. Что называют угловой скоростью и угловым ускорением?
3. Что такое момент силы, момент инерции, момент импульса?
4. Сформулируйте и запишите теорему Штейнера.
5. Что такое «основной закон динамики вращательного движения» и как он записывается математически?
6. Какова зависимость углового ускорения тела от момента приложенных к нему сил и момента инерции тела?
7. Как на маятнике Обербека могут быть определены угловое ускорение, момент действующих сил и момент инерции?

### *Библиографический список*

1. Иродов И.Е. Механика. Основные законы.-5-е изд., испр.- М. Лаборатория Базовых Знаний, 2000.- 320с., §.....
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1,- М. Наука, 1977.- 416с., §36, 38, 39, 43.
3. Трофимова Т.И. Курс физики.- М.: «Высшая школа», 1985.- 432с., § 16, 18.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: Изучение зависимости амплитуды затухающих колебаний маятника от времени и вычисление характеристик затухающих колебаний.

### *Описание лабораторной установки и оборудования*

Для изучения затухающих колебаний в данной работе используется физический маятник (рисунок 5.1). Его масса, в отличие от математического маятника, не сосредоточена в одной точке, а распределена по объёму тела.

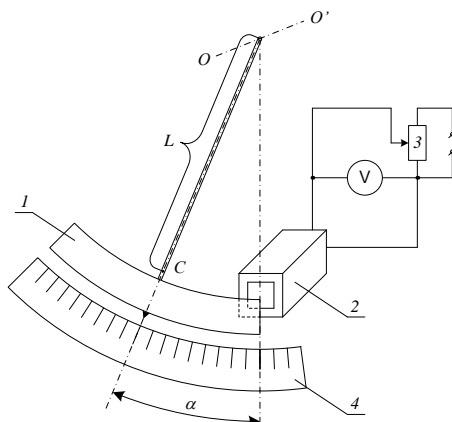


Рис.5.1.

Установка, используемая в работе, состоит из следующих частей:

- 1 – маятник, состоящий из закругленной алюминиевой пластины и стержня, соединяющего пластину с осью вращения  $OO'$ ;
- 2 – электромагнит, полюса которого расположены на небольшом расстоянии от плоскости колебаний;
- 3 – потенциометр, которым можно регулировать напряжение на электромагните и, следовательно, напряжённость создаваемого магнитного поля;
- 4 – закруглённая линейка (шкала) для измерения амплитуды колебаний маятника.

Данный физический маятник характеризуется величинами:

- момент инерции маятника  $I$  ;
- масса маятника  $m$  ;
- расстояние  $L$  от центра тяжести маятника  $C$  до оси вращения.

*Общие сведения Физические основы эксперимента*

Отведённый из положения равновесия маятник совершает колебания, амплитуда которых уменьшается со временем из-за действия сил трения и сопротивления воздуха. При включении электромагнита возникает дополнительная сила сопротивления, основанная на явлении электромагнитной индукции. Пластина маятника, двигаясь в магнитном поле, пересекает его силовые линии. При этом в ней наводятся вихревые токи Фуко, которые, в свою очередь, взаимодействуют с полем магнита. Таким образом, возникает тормозящая сила согласно правилу Ленца, пропорциональная скорости движения пластины. Регулируя ток через электромагнит, можно менять величину магнитного поля, а значит и быстроту уменьшения амплитуды колебаний.

Если маятник вывести из положения равновесия, отклонив его на угол  $\alpha$ , то действующие на него сила тяжести  $\vec{P} = m\vec{g}$  и сила реакции опоры  $\vec{T}$  образуют результирующую силу  $\vec{F}$ , которая по модулю равна (см. рисунок 5.2):

$$F = mg \cdot \sin \alpha .$$

Это, так называемая, «возвращающая сила», которая при любом смещении маятника направлена к положению равновесия.

Момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $OO'$  :

$$M_I = -mgL \cdot \sin \alpha . \tag{1}$$

Знак «минус» показывает, что сила  $\vec{F}$  направлена противоположно смещению маятника.

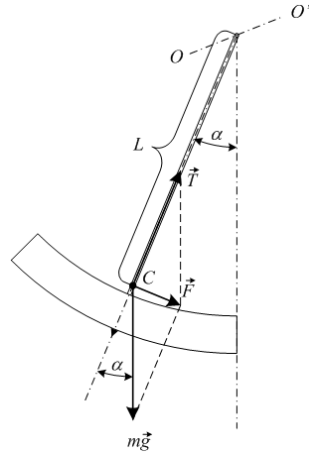


Рис.5.2

При движении маятника на него будет действовать сила торможения со стороны магнитного поля, пропорциональная его угловой скорости, и создающая тормозящий момент:

$$M_2 = -k \frac{d\alpha}{dt} = -k\omega, \quad (2)$$

где  $k$  - коэффициент сопротивления движению маятника;

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} - \text{угловая скорость маятника.}$$

Применим основной закон динамики вращательного движения:

$$M_\Sigma = I\varepsilon, \quad (3)$$

где  $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  - угловое ускорение,

$I$  - момент инерции маятника,

$M_\Sigma$  - суммарный момент сил, действующих на маятник.

Закон (3) в нашем случае с учётом (1) и (2) запишется в виде:

$$-mgL \cdot \sin \alpha - k \frac{d\alpha}{dt} = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

При малых  $\alpha < 0,175$  рад ( $\alpha < 10^\circ$ ):  $\sin \alpha \approx \alpha$ , тогда второй закон динамики можно записать в виде:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{I} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{mgL}{I} \cdot \alpha = 0. \quad (4)$$

Введем обозначения:  $\frac{k}{2I} = \beta$  и  $\frac{mgL}{I} = \omega_0^2$ .

В результате выражение (4) приобретает вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) при условии слабого затухания ( $\omega_0^2 > \beta^2$ ) имеет вид:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (6)$$

Поскольку смещение  $x$ , измеряемое по линейке (шкале), пропорционально углу отклонения маятника, то уравнение (6) можно записать в виде:

$$x = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = A(t) \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (7)$$

где  $A(t)$  – амплитуда колебаний в зависимости от времени,

$A_0$  – начальная амплитуда,

$\varphi_0$  – начальная фаза,

$\beta$  – коэффициент затухания,

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний,

$\omega_0$  – собственная частота колебаний (при отсутствии затухания).

Графики функции (7) для двух разных значений коэффициента затухания  $\beta_2 > \beta_1$  выглядят следующим образом (рисунок 5.3(а) и рисунок 5.3(б)).

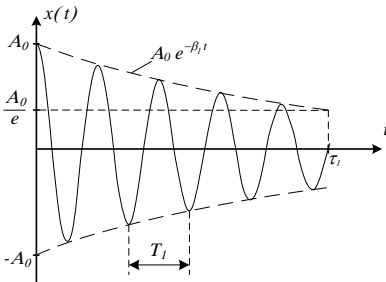


Рис.5.3(а).

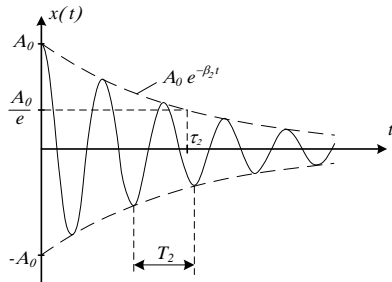


Рис.5.3(б).

Пунктирные огибающие показывают зависимость амплитуды от времени и описываются формулой:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}. \quad (8)$$

Для  $\beta_3 > \beta_2 > \beta_1$  зависимости амплитуды от времени изображены на рисунке 5.4.

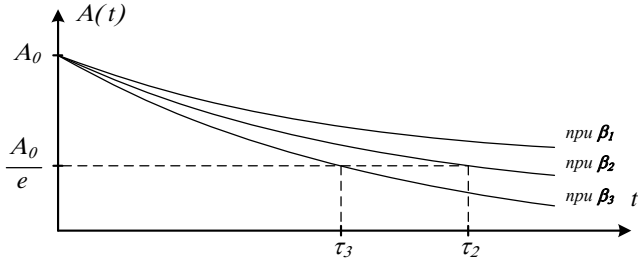


Рис.5.4.

Наряду с коэффициентом  $\beta$  используют и другие параметры, характеризующие уменьшение амплитуды:

1. Время релаксации: время, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e = 2,7$  раз (см. рисунок 5.3 и рисунок 5.4):

$$\tau = \frac{1}{\beta} . \quad (9)$$

2. Логарифмический декремент затухания - величина, обратная числу колебаний  $N_e$  в течение которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз:

$$\delta = \frac{1}{N_e} = \beta T , \quad (10)$$

где  $T$  - период колебания.

3. Добротность - величина, которая определяет уменьшение энергии колеблющегося тела за период колебаний:

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi \cdot N_e . \quad (11)$$

Из формулы (8) следует, что величина натурального логарифма отношения  $\frac{A_0}{A(t)}$  является линейной функцией времени:  $\ln\left(\frac{A_0}{A(t)}\right) = \beta t$ .

Заменив  $t = TN$ , получим:  $\ln\left(\frac{A_0}{A(N)}\right) = \beta TN$ , или:  $\ln\left(\frac{A_0}{A(N)}\right) = \delta N$ .

Здесь  $T$  – период колебаний,  $N$  – число колебаний, совершенных к моменту времени  $t$ .

Графики функций  $\ln\left(\frac{A_0}{A(N)}\right) = \delta N$  изображены на рисунке 5.5 для

$\beta_3 > \beta_2 > \beta_1$ . Из рисунка видно, что  $\operatorname{tg} \varphi = \delta = \frac{1}{N_e}$ , где  $\varphi$  – угол наклона прямой на графике.

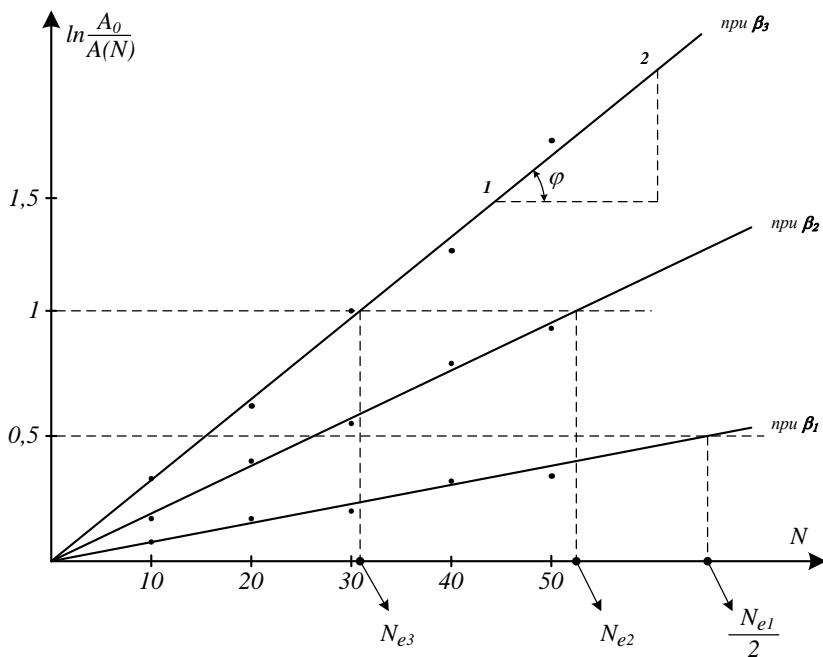


Рис.5.5.



*Порядок выполнения работы и обработки экспериментальных данных*

1. Во время первого эксперимента электромагнит отключен (напряжение питания электромагнита  $U = 0$  В). Маятник отводят от положения равновесия на величину  $A_0 = 6 - 8$  см (по заданию преподавателя) и отпускают. Далее один человек считает количество полных колебаний («туда-сюда»), другой фиксирует амплитуду через каждые 5 или 10 колебаний; полученные значения заносятся в таблицу 1. Общее число отсчитываемых колебаний задаётся преподавателем.

2. Измерить время 20 - 30 полных колебаний и записать в соответствующую графу таблицы 1.

3. Повторить пункты 1. и 2. при включенном электромагните, с напряжением  $U_2$  и  $U_3$  (например,  $U_1 = 0$ ,  $U_2 = 10$  В,  $U_3 = 20$  В).

Таблица 1

Экспериментальные данные

Напряже- ние на электро- магните	Амплитуда	Число колебаний $N$						$t, c$
		0	10	20	30	40	50	
$U_1 = 0$ В	$A(N)$							
	$\ln\left(\frac{A_0}{A(N)}\right)$							
$U_2 =$ В	$A(N)$							
	$\ln\left(\frac{A_0}{A(N)}\right)$							
$U_3 =$ В	$A(N)$							
	$\ln\left(\frac{A_0}{A(N)}\right)$							

Обработка результатов:

4. Вычислите периоды  $T$  колебаний по формуле  $T = \frac{t}{N}$  и занесите в таблицу 2.

5. Для каждого измерения вычислите величину  $\ln\left(\frac{A_0}{A(N)}\right)$  и занесите в таблицу 1 для трёх серий экспериментов с  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ . Постройте графики, соответствующие каждой серии экспериментов в координатах  $\ln\left(\frac{A_0}{A(N)}\right)$  от  $N$  (см. рисунок 5.5).

6. На каждой прямой возьмите произвольно 2 точки и вычислите логарифмический декремент затухания по формуле:  $\delta = tg\varphi$ ; или найдите  $N_e$ , соответствующее  $\ln\left(\frac{A_0}{A(N)}\right) = I$  и вычислите логарифмический декремент затухания по формуле:  $\delta = \frac{I}{N_e}$  (рисунок 5.5). Результаты занесите в таблицу 2.

7. Вычислите по формулам (9), (10), (11) коэффициент затухания, время релаксации и добротность и занесите в таблицу 2.

8. Проанализируйте, как изменяются характеристики затухающих колебаний в зависимости от силы сопротивления, действующей на маятник, и сделайте вывод.

Таблица 2

Характеристики затухающих колебаний маятника

Напряжение на электромагните	$T$	$N_e$	$\delta$	$\beta$	$\tau$	$Q$
$U_1 = 0$ В						
$U_2 =$ В						
$U_3 =$ В						

## Дополнение к лабораторной работе №5

Лабораторный эксперимент по изучению изменения амплитуды затухающих колебаний может быть выполнен на крутильно-баллистическом маятнике (см. описание в лабораторной работе №1, вариант 2). Колебания этого маятника происходят в горизонтальной плоскости под действием момента силы упругости проволоки – оси колебаний, на которой он закреплен:

$$M_{\text{упр}} = -f \cdot \alpha,$$

где  $f$  - коэффициент упругости проволоки.

Торможение маятника осуществляется пластиной, которая может погружаться на разную глубину  $h$  в воду.

Описание затухающих колебаний крутильно-баллистического маятника проводится так же, как изложено на страницах 52-56 настоящей инструкции; уравнение колебаний имеет вид (7) и (8).

Лабораторный эксперимент и обработка экспериментальных данных, проводится в последовательности пунктов 1 – 8 (стр....). при этом глубина погружения тормозящей пластины  $h$  задается преподавателем (обычно  $h = 0$  см, 1 см, 2 см, 3 см).

### Вопросы для контроля

1. Какие колебания называются гармоническими, свободными, вынужденными, затухающими?
2. Какая система называется физическим маятником, а какая математическим?
3. Почему колебания маятника в данной работе будут затухающими, даже при выключенном электромагните?
4. Запишите уравнения затухающих и незатухающих колебаний, сравните их.
5. Как амплитуда затухающих колебаний зависит от времени и от числа колебаний?
6. Что такое собственная частота колебаний?
7. Каков физический смысл величин:  $A_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\omega$ ,  $T$ ,  $\beta$ ,  $N_e$ ,  $\tau$ ,  $Q$  в этой работе? Как они меняются с ростом  $U$ ?
8. Как меняются характеристики затухающих колебаний  $A_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\omega$ ,  $T$ ,  $\beta$ ,  $N_e$ ,  $\tau$ ,  $Q$  если один из параметров данного физического

маятника:  $I$ ,  $m$ ,  $L$ ,  $k$  увеличится (либо уменьшится) при фиксированных значениях оставшихся?

9. Для чего, в данной работе, графики строят в логарифмическом масштабе?

### *Библиографический список*

1. Савельев И.В. Курс общей физики, Т.2. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, §61, §62, §65, §66, §67, §73.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2010 – §6.1, §6.2.
3. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. - §140, §141, §142, §146.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ МЕТОДОМ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ**

Цель работы: изучение закономерности образования стоячей волны и ее использование для экспериментального определения скорости звука.

### *Описание экспериментальной установки и оборудования*

Экспериментальная установка представляет собой (рисунок 1) металлическую трубу 1 с двумя, находящимися в ней, металлическими поршнями: неподвижным 2 и подвижным 5.

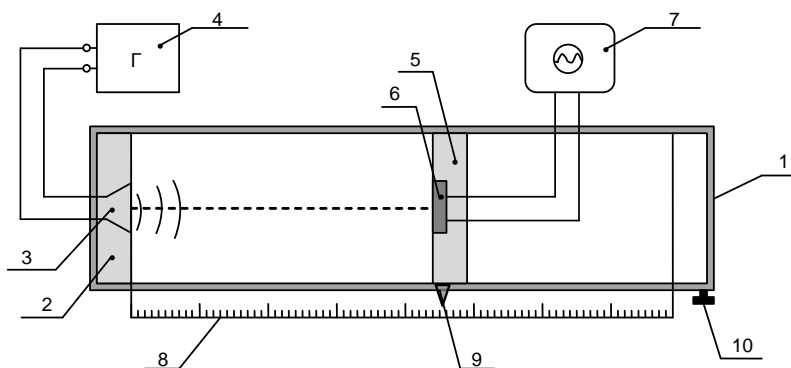


Рис.7.1.

В неподвижный поршень вмонтирован динамик 3 – источник звука, который питается от генератора звуковой частоты 4. В подвижный поршень с внутренней стороны его поверхности вмонтирован приемник звука – микрофон 6, сигнал с которого подается на электронный осциллограф 7. Подвижный поршень снабжен указателем 9 и может перемещаться вдоль трубы с помощью привода 10. Положение поршня фиксируется указателем 9 по шкале 8. В металлической трубе воздух, в котором необходимо определить скорость распространения звука методом стоячей волны.

*Общие сведения. Физические основы эксперимента*

При непрерывной работе источника звука в трубе лабораторной установки наблюдается распространение двух встречных волн: прямой от источника звука и обратной от отражающего поршня 5. Эти волны накладываются друг на друга во всем пространстве от источника до отражателя и интерферируют. Рассмотрим результат их интерференции в некоторой точке  $M$ , находящейся на расстоянии  $x$  от источника звука (см. рисунок 2а).

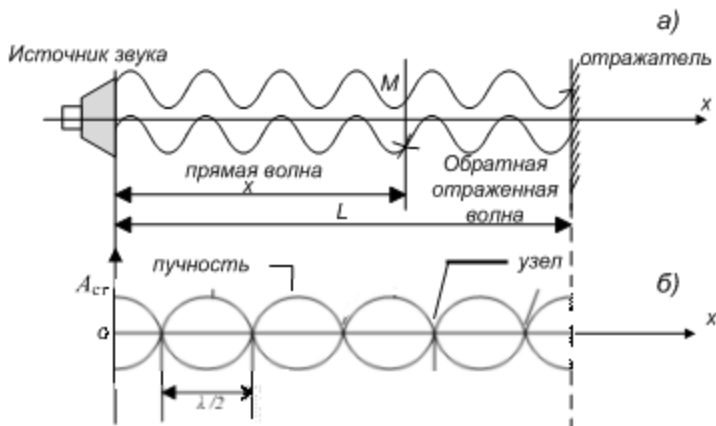


Рис.7.2.

Уравнение прямой волны, пришедшей в точку  $M$ :

$$\xi_1 = A \sin \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right] \quad (1)$$

Уравнение обратной волны:

$$\xi_2 = A \sin \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (2L - x) - \pi \right], \quad (2)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – смещения точек среды от положения равновесия.

$A$  – амплитуда колебания точек среды,

$\omega$  – циклическая частота колебаний точек среды,

$\lambda$  – длина волны (расстояние между ближайшими точками волны, колеблющимися в одинаковой фазе),

$L$  – расстояние от источника звука до отражателя,

$x$  и  $(2L - x)$  – расстояния, пройденные от источника звука до точки  $M$  прямой и обратной волнами соответственно.

введенное в уравнение (2) « $\pi$ », учитывает тот факт, что при отражении волны от более плотной среды (что имеет место в данной лабораторной установке), фаза ее колебаний изменяется на противоположную (на  $\pi$ ) [1].

Уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\xi_2 = -A \sin \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (2L - x) \right] \quad (2')$$

Результирующие колебания в точке  $M$  найдем как  $\xi_{\text{рез}} = \xi_1 + \xi_2$ , то есть сложением уравнений (1) и (2'). С учетом того, что  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ , в результате сложения и алгебраических преобразований получим:

$$\xi_{\text{рез}} = 2A \sin 2\pi \cdot \frac{L-x}{\lambda} \cdot \cos \left( \omega t - 2\pi \frac{L}{\lambda} \right), \quad (3)$$

где  $2A \cdot \sin 2\pi \frac{L-x}{\lambda} = A_{\text{рез}}$  – амплитуда результирующих колебаний.

Образованная в результате интерференции волна называется стоячей. Выражение (3) – это уравнение стоячей волны, в нем  $A_{\text{рез}}$  называется амплитудой стоячей волны.

Из уравнения (3) стоячей волны вытекает, что все точки волны совершают колебания с одинаковыми частотами  $\omega$  с амплитудой, зависящей от координаты  $x$  рассматриваемой точки. В точках, где амплитуда

стоячей волны  $A_{\text{рез}} = 0$ , реализуется минимум интерференции. Такие точки в стоячей волне называются узлами. Следовательно, для узлов выполняется условие  $2\pi \frac{L-x}{\lambda} = n\pi$ , (где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) отсюда координаты узлов можно записать так:

$$X_{\text{узел}} = L - n \frac{\lambda}{2} \quad (4)$$

Из (4) определим расстояние между соседними узлами:

$$\Delta X = X_n - X_{n-1} = \left[ L - n \frac{\lambda}{2} \right] - \left[ L - (n-1) \frac{\lambda}{2} \right] = \frac{\lambda}{2}$$

В точках стоячей волны, где  $A_{\text{рез}} = 2A$  – максимальна, образуются так называемые пучности. Их координаты можно найти из условия  $\sin 2\pi \frac{L-x}{\lambda} = 1$ , или  $2\pi \frac{L-x}{\lambda} = (2n+1) \frac{\pi}{2}$ . Отсюда

$$X_{\text{пучн}} = L - (2n+1) \frac{\lambda}{4}. \quad (5)$$

Расстояние между соседними пучностями не трудно найти из (5):

$$\Delta X = \frac{\lambda}{2}.$$

График амплитуды стоячей волны в зависимости от положения  $x$  рассматриваемой точки среды от источника звука представлен на рисунке 26.

Если подвижный поршень 5 лабораторной установки (рисунок 1) установить первоначально вплотную к источнику звука 3, а затем постепенно перемещать его, удаляя от источника звука, то всякий раз, когда расстояние между ними будет равно  $L = K \frac{\lambda}{2}$ , (где  $K = 1, 2, \dots$ ) в воздушном пространстве будет образована стоячая волна (рисунок 26). Осциллограф на экране в этот момент будет фиксировать максимальную амплитуду колебаний.

Если эти положения поршня фиксировать по шкале 8, то можно найти расстояния между соседними узлами стоячей волны  $\frac{\lambda}{2}$  и, следова-

тельно, найти длину звуковой волны  $\lambda$ . Зная длину волны  $\lambda$ , можно вычислить скорость звука в воздухе:

$$V = \lambda \nu, \quad (6)$$

где  $\nu$  – частота колебаний мембраны динамика 3, происходящих с частотой звукового генератора.

### *Порядок выполнения работы и обработки экспериментальных данных*

1. Включить установку и дать прогреться генератору и электронному осциллографу в течение 5 – 10 минут.

2. Ручками «яркость», «фокус», «смещение  $x$ », «смещение  $y$ » сделать картинку на экране осциллографа нужной яркости, четкости и расположить ее в центре экрана. Ручки «усиление» по вертикали поставить на максимальное усиление.

3. Нажатием кнопки на панели звукового генератора установить заданную преподавателем частоту  $\nu_1$ .

4. Получить на экране осциллографа неподвижную и неискаженную синусоиду.

5. С помощью привода 10 установить поршень 5 на начало шкалы 8 прибора.

6. Перемещая поршень 5 вдоль шкалы, отметить его положения  $X_1, X_2, \dots$  и т.д., при которых на экране осциллографа получают неподвижные синусоиды с максимальной амплитудой, уточняя каждый раз эти точки движения поршня вправо – влево. Полученные значения  $X_i$  занести в таблицу 1.

7. Определить длины волн как удвоенное расстояние между соседними положениями поршня  $X_1, X_2, \dots$ :  $\lambda_1 = 2(X_2 - X_1)$ ,  $\lambda_2 = 2(X_3 - X_2)$ , ... и так далее. Полученные данные занести в таблицу 1.

8. Рассчитывать среднее значение  $\langle \lambda \rangle$  и среднее и среднее квадратическое отклонение  $S_\lambda$  (по формуле (6) на стр.8):

$$S_\lambda = \sqrt{\frac{(\langle \lambda \rangle - \lambda_1)^2 + (\langle \lambda \rangle - \lambda_2)^2 + \dots}{n - 1}},$$

где  $n$  - число измерений длины волны из таблицы 1.



Полученные данные занести в таблицу 1.

Таблица 1

№	Положение $X_i$ (координата) поршня	$\lambda$ , м	$\langle \lambda \rangle$ , м	$S_\lambda$
1				
2				
3				
4				
.....	.....			

9. Рассчитать среднее значение скорости звука  $\langle V \rangle = v_1 \langle \lambda \rangle$ , а так же среднее квадратическое отклонение для скорости звука  $S_V = v_1 S_\lambda$  и доверительный интервал по формуле (8) на стр.8:

$\delta V = t \cdot \frac{S_V}{\sqrt{n}}$ . Доверительная вероятность  $P$ , необходимая для этого расчета, определяется преподавателем. Коэффициент Стьюданта – из таблицы 1 на стр. 9.

10. Записать окончательно найденные в эксперименте значения скорости звука, как  $V_1 = \langle V_1 \rangle \pm \delta V$ .

11. Выполнить пункты (1 – 10) для другой звуковой частоты  $\nu_2$  (по указанию преподавателя) и найти соответствующую ей скорость звука  $V_2$ .

12. Рассчитать теоретическое значение скорости звука по формуле

$$V_{\text{теор}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где  $\gamma = 1,4$  – коэффициент Пуассона для воздуха;

$R = 8,31$  Дж/моль·К – газовая постоянная.

$M = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль – молекулярная масса воздуха;

$T$  – температура воздуха (определяется по термометру в лаборатории).

13. Сравнить полученные значения  $V_1$ ,  $V_2$ , и  $V_{\text{теор}}$  и сделать выводы.

#### *Вопросы для контроля*

1. Что такое волна? Каков механизм образования механических волн?
2. Какие виды волн вы знаете? В чем их различие?
3. Что представляет собой звуковая волна? Каков механизм образования звука в газах?
4. Запишите уравнение волны и поясните его смысл и смысл всех величин, входящих в него.
5. Как и от чего зависит скорость звука?
6. Как образуется стоячая волна? Выведите уравнение стоячей волны.
7. Отчего и как зависит амплитуда стоячей волны?
8. Что такое пучность и узел стоячей волны?
9. Как определяются координаты пучностей и узлов? Каково расстояние между ближайшими (соседними) пучностями, узлами?
10. Каковы отличия стоячей волны от бегущей?
11. Какие устройства создают бегущую звуковую волну в данной работе?

#### *Библиографический список*

1. Астахов В.А. Курс физики, Т1. Механика. Кинетическая теория материи.- М.: Наука. 1977. §7.4.
2. Трофимова Т.И. Курс физики.- М.: Высшая школа, 1990. §§ 153-157.
3. Савельев И.В. Курс общей физики, Т2.- М.: Наука. 1978. §§ 99,102.