ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г. И. Носова»

Кафедра физики

ФИЗИКА
Методические указания для студентов-заочников

Магнитогорск, 2003

УДК 531

Методические указания для студентов-заочников./ Б.Б.Богачева, И.Ю.Богачева, З.Н.Ботнева, А.А.Долматова, Ю.М.Дубосарская, Е.М.Курбацкая, Л.А.Литичевская, Н.И.Лукашенко, Ю.Б.Малкова, А.А.Николаев, Н.С.Подкорытова, Е.П.Селезнева, С.Г.Шевченко. Магнитогорск. МГТУ, 2003 – 154 с.: ил.

Под редакцией А.А.Николаева

Рецензенты: В. К. Белов
Ю. И. Савченко

Оглавление

А. Кинематика материальной точки и абсолютно твердого тела

Основные формулы

• Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором **r**

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где **i, j, k** – единичные векторы направлений; x, y, z- координаты точки.

• Средняя скорость перемещения

$$\langle\mathbf{v}\rangle = \Delta\mathbf{r}/\Delta t,$$

где $\Delta\mathbf{r}$ – вектор перемещения точки за интервал времени Δt.

Средняя скорость движения:

$$\langle v\rangle = \Delta s/\Delta t,$$

где Δs – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

• Мгновенная скорость материальной точки

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

где $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$- проекции вектора скорости на оси координат.

• Модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

• Среднее ускорение материальной точки

$$\langle\mathbf{a}\rangle = \Delta\mathbf{v}/\Delta t,$$

где $\Delta\mathbf{v}$ - приращение вектора скорости материальной точки за интервал времени Δt..

• Мгновенное ускорение материальной точки

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

где $a_x = d\,v_x/dt$, $a_y = d\,v_y/dt$, $a_z = d\,v_z/dt$ - проекции вектора ускорения на оси координат.

• Проекции вектора ускорения на касательную и нормаль к траектории:

$$a_\tau = dv/dt, \quad a_n = v^2/R,$$

где v – *модуль* вектора скорости точки, R – радиус кривизны траектории в данной точке.

• Модуль вектора ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

• Путь, пройденный точкой

$$s = \int_0^t v dt,$$

где v - *модуль* вектора скорости точки.

- Угловая скорость и угловое ускорение абсолютно твердого тела

$$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\varphi}/dt, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$$

где $d\boldsymbol{\varphi}$ - вектор угла поворота абсолютно твердого тела относительно оси вращения ($d\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - аксиальные векторы, направленные вдоль оси вращения).

- Связь между линейными и угловыми величинами при вращении абсолютно твердого тела:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \qquad a_n = \omega^2 R, \qquad a_\tau = \varepsilon R$$

где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор рассматриваемой точки абсолютно твердого тела относительно произвольной точки на оси вращения, R - расстояние от оси вращения до этой точки.

А-1

Радиус-вектор частицы изменяется по закону: $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Найти: 1) вектор скорости $\mathbf{v}$; 2) вектор ускорения $\mathbf{a}$; 3) *модуль* вектора скорости v в момент времени t = 2с; 4) путь, пройденный телом за первые 10 секунд.

Решение:

По определению:

1) вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$;

2) вектор ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = 2\mathbf{i}$;

3) Т.к. $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$, то модуль вектора скорости $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

В нашем случае $v_x = 2t; v_y = 2;$, поэтому, при t = 2с,

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}46 м/с.$$

4) По определению пути $s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$, где $t_1 = 0$, $t_2 = 10$ с, а $v = 2\sqrt{t^2 + 1}$,

тогда путь за первые 10 с: $s = \int_0^{10} 2\sqrt{t^2+1}dt =$

$$2\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right)\Bigg|_0^{10} \approx 103.5\text{м}.$$

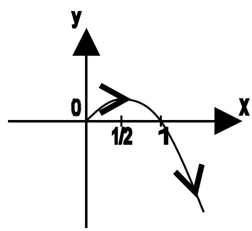
А-2

Точка движется в плоскости XOY по закону: $x = 2t$; $y = 3t(1 – 2t)$; Найти:1) уравнение траектории $y = f(x)$ и изобразить ее графически; 2)вектор скорости **v** и 3) ускорения **a** в зависимости от времени; 4)момент времени t_0, в который вектор ускорения **a** составляет угол $\pi/4$ с вектором скорости **v**.

Решение:

1) Запишем зависимость x и y от t и исключим время t:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t(1-2t) \end{cases}$$



из первого уравнения $t = x/2$, тогда

$$y = 3x(1-x)/2 = -1{,}5x^2 + 1{,}5x,$$

т.е. траектория движения – парабола.
Начало движения в т. О (при t=0 – x=0, y=0).
С увеличением времени координата x растет,
а координата y при t > 0,5 и x > 1 – отрицательна.

2) Вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$, где $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ - проекции вектора скорости на оси координат.
В нашем случае $v_x = dx/dt = 2$, $v_y = dy/dt = (3-12t)$, вектор скорости

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + (3 - 12t)\mathbf{j}.$$

3) Вектор ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$,
где $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ - проекции вектора ускорения на оси координат. В нашем случае $a_x = dv_x/dt = 0$, $a_y = dv_y/dt = -12$(м/с^2).

Поэтому $\mathbf{a} = -12\mathbf{j}$, а модуль $a = 12$ м/с^2.

4) Момент времени t_0 найдем из скалярного произведения **v** и **a**:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v\cdot a\cdot\cos\alpha = v_x a_x + v_y a_y.$$

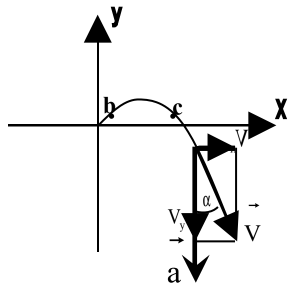
По условию $\alpha=\pi/4$, модули скорости и ускорения равны по определению:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \text{ и } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Тогда $\sqrt{4 + (3 - 12t_0)^2} \cdot 12 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = (3 - 12t_0) \cdot (-12)$,

откуда $4 + (3 - 12t_0)^2 = 2 \cdot (12t_0 - 3)^2$ или $2 = \pm(12t_0 - 3)$.
Решение последнего уравнения дает два значения для t_0:

$$t_{01} = (5/12)\text{с и } t_{02} = (1/12)\text{с}.$$



Первому – соответствует точка **c** на нисходящей части траектории, где угол между векторами **v** и **a** равен $\alpha=\pi/4$, что совпадает с условием задачи.

Второе значение – лишнее. Его появление обусловлено возведением в квадрат и последующим извлечением квадратного корня при решении исходного уравнения. Этому моменту времени соответствует точка **b** на восходящей части траектории, где угол между векторами **V** и **a** равен $\alpha=3\pi/4$.

А-3

Точка движется так, что вектор её скорости **V** меняется со временем по закону $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ (м/с). Найти:1) модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ за первые 2с её движения; 2) модуль скорости в момент времени t=2с.

Решение:

1) Так как вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, то $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ и

$$\Delta\mathbf{r} = \int_0^t (\mathbf{v})\,dt = \int_0^t (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})dt = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

Модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}| = ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2)^{1/2} = (t^2 + t^4 + t^6)^{1/2}$

при t=2с $|\Delta\mathbf{r}| = (4 + 16 + 64)^{1/2} = 9{,}1$ м.

2) Модуль вектора скорости $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$.

При t=2с $|\mathbf{v}| = (1 + 16 + 144)^{1/2} \approx 12{,}7$ м/с.

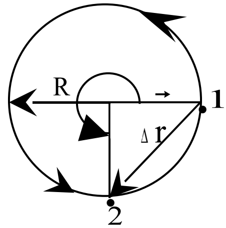
А-4

За промежуток времени t=10c частица прошла 3/4 окружности радиусом R=160см. Найти: 1) среднюю скорость движения <v>; 2)модуль средней скорости перемещения $|\langle \mathbf{v} \rangle|$; 3) модуль среднего вектора полного ускорения $|\langle \mathbf{a} \rangle|$, если частица двигалась из состояния покоя с постоянным тангенциальным ускорением a_τ.

Решение:

1) По определению, средняя скорость движения $\langle V \rangle = S/\tau$,
где S - путь, пройденный телом за время τ. В нашем случае $S=3\pi R/2$, а $\tau = t = 10$ с, тогда

$$\langle v \rangle = S/\tau = 3\cdot 3{,}14\cdot 1{,}6/2\cdot 10 \approx 0{,}75 \text{ (м/с)}.$$



2) По определению, средняя скорость перемещения

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \Delta \mathbf{r}/\tau,$$

где $\Delta\mathbf{r}$ – вектор перемещения тела за время τ.
Модуль средней скорости перемещения
$|\langle \mathbf{v} \rangle| = |\Delta \mathbf{r}|/\tau$. Из рисунка $|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{2}$ R.

Тогда $|\langle \mathbf{v} \rangle| = |\Delta \mathbf{r}|/\tau = \sqrt{2}\, R/\tau = 1{,}4\cdot 1{,}6/10 \approx 0{,}22$(м/с).

3) По определению, средний вектор полного ускорения $\langle \mathbf{a} \rangle = \Delta \mathbf{V}/\tau$,
где $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ - изменение вектора скорости за время τ.

Модуль среднего вектора полного ускорения

$$|\langle \mathbf{a} \rangle| = |\Delta \mathbf{v}|/\tau = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|/\tau = V_2/\tau \text{ (по условию } V_1=0).$$

Так как по условию тангенциальное ускорение a_τ = const, то модуль $V_2 = a_\tau\cdot\tau$; пройденный частицей путь $S = a_\tau\cdot\tau^2/2$, откуда $a_\tau = 2S/\tau^2$. Тогда $|\langle \mathbf{a} \rangle| = V_2/\tau = a_\tau\cdot\tau/\tau = a_\tau = 2S/\tau^2 = 3\pi R/\tau^2 = 3\pi\cdot 1{,}6/100 \approx 0{,}15$ (м/с^2).

А-5

Твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону

$$\varphi = 6t - 2t^3 \text{(рад)}.$$

Найти: 1) среднюю угловую скорость $\langle\omega\rangle$ как функцию от t; 2) среднее значение углового ускорения в промежутке времени от 0 до остановки; 3)угловое ускорение в момент остановки; 4) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии r=0,2м от оси вращения в момент времени t=0,5с.

Решение:

1) По определению, средняя скорость вращения

$$\langle\omega\rangle = \Delta\varphi/\Delta t = (\varphi_t - \varphi_0)/t.$$

По условию задачи $\varphi_t = 6t - 2t^3$; $\varphi_0 = 0$, поэтому $\langle\omega\rangle = (6 - 2t^2)$рад/с.

2) По определению, среднее ускорение

$$\langle\varepsilon\rangle = \Delta\omega/\Delta t ,$$

где $\Delta\omega$ - изменение угловой скорости за время $\Delta t = t_{ост} - t_0 = t_{ост}$.

Момент остановки $t_{ост}$ найдем из условия $\omega_{мгн} = 0$.

По определению

$$\omega_{мгн} = d\varphi/dt .$$

В нашем случае

$$\omega_{мгн} = d\varphi/dt = 6 - 6t^2 = 0,$$

откуда $t_{ост} = 1$с, а $\langle\varepsilon\rangle = (\omega_{ост} - \omega_0)/t_{ост} = (0 - 6)/1 = -6$ (рад/с^2).

3) По определению, угловое ускорение

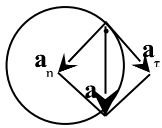
$$\varepsilon = d\omega/dt = -12t .$$

В момент остановки ($t_{ост} = 1$ с) ускорение равно $\varepsilon_{ост} = -12$ рад/с^2.

4) Полное ускорение находится как векторная сумма двух взаимно перпендикулярных ускорений: тангенциального и нормального ($\mathbf{a}_\tau$ и $\mathbf{a}_n$), связанных с угловыми характеристиками вращательного движения следующим образом:

$$\mathbf{a}_\tau = \varepsilon R\cdot\boldsymbol{\tau} \text{ и } \mathbf{a}_n = \omega^2 R\cdot\mathbf{n},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ единичные векторы касательной и нормали к траектории движения точки.



Модуль полного ускорения :

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2} =$$

$$= \sqrt{(-12\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2)^2 + ((6 - 6\cdot 0{,}5^2)\cdot 0{,}2)^2} = 4{,}2(м/с^2).$$

А-6

Точка движется в плоскости XOY по закону:

$$x = 5\sin\omega t; \quad y = 5(1-\cos\omega t).$$

Найти: 1) путь, пройденный телом за 6с; 2) угол между векторами скорости v и ускорения $\mathbf{a}$; 3) траекторию движения $y=f(x)$.

Решение:

1) Путь, пройденный точкой: $s = \int v dt$, где v- *модуль* вектора скорости точки, определяемый как $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

По условию задачи $x = 5\sin\omega t$; $y = 5(1-\cos\omega t)$, поэтому

$$v_x = dx/dt = 5\omega\cos\omega t; \quad v_y = dy/dt = 5\omega\sin\omega t;$$

$$v = \sqrt{(5\omega\cos\omega t)^2 + (5\omega\sin\omega t)^2} = 5\omega \text{ (м/с)}.$$

Тогда путь, пройденный телом за 6 секунд

$$S = \int_0^t 5\omega\, dt = 5\omega t\Big|_0^6 = 30\omega \text{ (м/с)}.$$

2) Для нахождения угла между векторами скорости **v** и ускорения **a** воспользуемся скалярным произведением векторов **V** и **a**:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v\cdot a\cos\varphi, \text{ откуда } \cos\varphi = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})/(v\cdot a).$$

В координатном представлении скалярное произведение:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v_x a_x + v_y a_y,$$

где $a_x = dV_x/dt = -5\omega^2\sin\omega t$; $a_y = 5\omega^2\cos\omega t$.

Модуль вектора ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5\omega^2$.

При подстановке в формулу для $\cos\varphi$, получим:

$$\cos\varphi = \frac{-25\omega^3\sin\omega t\cos\omega t + 25\omega^3\sin\omega t\cos\omega t}{5\omega\cdot 5\omega^2} = 0$$

Поэтому $\varphi = \pi/2$.

3)Чтобы найти траекторию движения материальной точки, выразим из уравнений движения $\sin\omega t = x/5$ и $\cos\omega t = 1 - y/5$.

Возведя в квадрат полученные уравнения и сложив их почленно, получим траекторию движения:

$$x^2/25 + (1 - y/5)^2 = 1 \text{ или } x^2 + (5 - y)^2 = 25.$$

Траектория движения - окружность.

Б. Динамика материальной точки и абсолютно твердого тела

Основные формулы

• Основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона):

$$d\mathbf{p}/dt = \Sigma\, \mathbf{F}_i \quad \text{или} \quad m\mathbf{a} = \Sigma\, \mathbf{F}_i\,,$$

где $\Sigma\, \mathbf{F}_i$ - геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку, m - масса, **a -** ускорение и **p** = m**v -** импульс материальной точки (частицы).

• Работа и мощность силы **F**:

$$A = \int \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int F_s\, ds, \quad P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F_s\cdot v,$$

где $F_s = F\cdot\cos\alpha$ – проекция силы **F** на направление вектора перемещения d**r**; α – угол между направлениями вектора силы **F** и вектора перемещения d**r**; ds – модуль вектора перемещения d**r**; **v** и v – вектор скорости частицы и его модуль.

• Приращение кинетической энергии частицы

$$T_2 - T_1 = A,$$

где $T = mv^2/2$ - кинетическая энергия частицы; A – работа ***результирующей всех сил***, действующих на частицу.

• Работа консервативных сил поля равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле: $A = U_1 - U_2$.

• Механическая энергия частицы

$$E = T + U\ .$$

• Потенциальная энергия:

а) упруго деформированной пружины

$$U = k\, x^2 /2\ ,$$

где k – жесткость пружины; x – абсолютная деформация;

б) гравитационного взаимодействия

$$U = -\,\gamma(m_1\cdot m_2/r),$$

где γ – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между ними (тела рассматриваются как материальные точки);

в) тела массы m, находящегося в однородном поле силы тяжести

$$U = mgh$$

где g – ускорение свободного падения (напряженность гравитационного поля); h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой.

- Закон изменения импульса системы частиц:

$$d(\Sigma\, \mathbf{p}_i)\, /dt\ = \mathbf{F}_\Sigma\ ,$$

где $\mathbf{p}_i$ - импульс одной из частиц системы; $\mathbf{F}_\Sigma = \Sigma \mathbf{F}_j$ - результирующая всех ***внешних*** сил $\mathbf{F}_j$.

- Момент силы **F** , действующей на тело, относительно оси вращения *z*:

$$M_z = F_\perp l,$$

где $F_\perp$ - проекция силы **F** на плоскость, перпендикулярную оси вращения z, *l* – плечо силы **F** (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

- Момент инерции тела относительно произвольной оси вращения:

$$I = \int r^2\, dm,$$

где r – расстояние элемента тела массы dm от оси вращения.

- Момент импульса тела, вращающегося вокруг оси симметрии:

$$\mathbf{L} = I\, \boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения тела, имеющего момент инерции I относительно этой оси.

- Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела:

$$\mathbf{M}\, dt = d\, \mathbf{L}\ = d\, (I\, \boldsymbol{\omega}),$$

где **M** – результирующий момент сил, действующих на тело в течение промежутка времени dt.

- Работа и мощность момента силы:

$$A = \int \mathbf{M}\, d\boldsymbol{\varphi}, \qquad P = \mathbf{M}\boldsymbol{\omega},$$

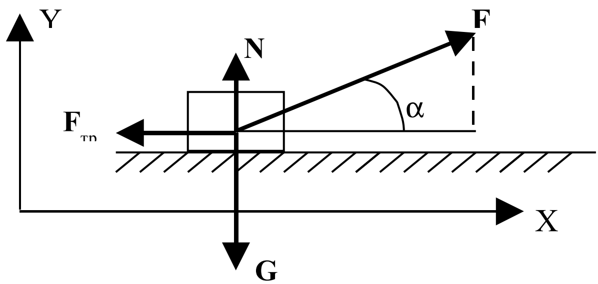
где $d\boldsymbol{\varphi}$ - вектор угла поворота, $\boldsymbol{\omega}$ - вектор угловой скорости тела.

Б-1

Брусок массой m = 5 кг тянут по горизонтальной поверхности, прикладывая силу F = 20 Н под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. При этом брусок за время $\tau = 2$ с изменил свою скорость от v_0=2,4 м/с до v=7,8 м/с, двигаясь равноускоренно. Найти коэффициент трения μ бруска о поверхность.

Решение:

Изобразим силы, действующие на брусок, и оси координат :



Запишем II закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{F}$$

Спроецируем это уравнение на оси X и Y:

OX: $ma = F\cos\alpha - F_{тр};$

OY: $0 = N - mg + F\sin\alpha.$

Т.к. $F_{тр} = \mu N$, а $a = (v - v_0)/t$, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m\dfrac{v - v_0}{t} = F\cos\alpha - \mu N \\ N + F\sin\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

Выразим N из второго уравнения:

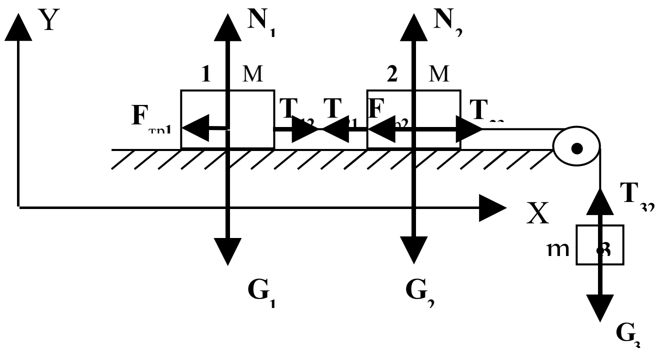
$$N = mg - F\sin\alpha.$$

Тогда, подставив N в первое уравнение и решив его относительно μ, получим:

$$\mu = \frac{F\cos\alpha - m\dfrac{v - v_0}{t}}{mg - F\sin\alpha} = \frac{20\cdot\cos 30^\circ - 5\dfrac{7{,}8 - 2{,}4}{2}}{5\cdot 9{,}8 - 20\sin 30^\circ} = 0{,}1$$

Б-2

По горизонтальной поверхности движутся два тела (1 и 2) одинаковой массы M = 2 кг, соединенные нитью между собой и с телом 3 массы m = 1,5 кг. Нити, связывающие тела, нерастяжимы и невесомы. Коэффициенты трения между телами 1 и 2 и поверхностью – μ_1 = 0,1 и μ_2 = 0,15. Найти: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) натяжение нити между телами 1 и 2; 3) натяжение нити, на которой весит тело массы m; 4) давление на ось блока.



Решение:

Силы, действующие на каждое из трех тел, показаны на рисунке в условии задачи.

Запишем IIзакон Ньютона для каждого тела:

$$\begin{cases} M\mathbf{a_1} = \mathbf{G_1}+\mathbf{N_1}+\mathbf{F}_{тр1}+\mathbf{T_{12}} \\ M\mathbf{a_2} = \mathbf{G_2}+\mathbf{N_2}+\mathbf{F}_{тр2}+\mathbf{T_{21}}+\mathbf{T_{23}} \\ m\mathbf{a_3} = \mathbf{G_3}+\mathbf{T_{32}} \end{cases}$$

Т.к. нити и блок невесомы, то по Ш закону Ньютона

$$|\mathbf{T_{12}}| = |\mathbf{T_{21}}| = T_1, \text{ и } |\mathbf{T_{23}}| = |\mathbf{T_{32}}| = T_2.$$

Т.к. нити нерастяжимы, то

$$|\mathbf{a_1}| = |\mathbf{a_2}| = |\mathbf{a_3}| = a .$$

Спроецируем эти уравнения на оси X и Y:

OX: $\begin{cases} Ma = T_1 - F_{тр1} \\ Ma = T_2 - T_1 - F_{тр2} \end{cases}$ OY: $\begin{cases} 0 = N_1 - G_1 \\ 0 = N_2 - G_2 \\ -ma = T_2 - G , \end{cases}$

где $G_1=G_2= Mg$; $G = mg$; $F_{тр1}= \mu_1 N_1 = \mu_1 Mg$; $F_{тр2}= \mu_2 N_2 = \mu_2 Mg$.

Тогда система трех уравнений примет вид:

$$\begin{cases} T_1 - \mu_1 Mg = Ma \\ T_2 - T_1 - \mu_2 Mg = Ma \\ mg - T_2 = ma \end{cases}$$

1) После сложения уравнений получим выражение для определения ускорения системы трех тел:

$$a = g\frac{m - (\mu_1 + \mu_2)M}{2M + m} = 9{,}8\frac{1{,}5 - (0{,}1 + 0{,}15)\cdot 2}{4 + 1{,}5} \approx 1{,}8(м/с^2).$$

2) Натяжение нити между телами 1 и 2.

$$T_1 = M(a + \mu_1 g) = 2(1{,}8 + 0{,}1\cdot 9{,}8) = 5{,}56(Н).$$

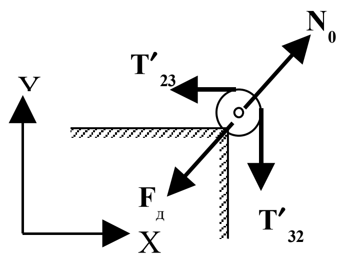
3) Натяжение нити между телами 2 и 3

$$T_2 = m(g - a) = 1{,}5(9{,}8 - 1{,}8) = 12(Н).$$

4) Для нахождения силы давления на ось блока учтем, что

$$\mathbf{T'_{23}} + \mathbf{T'_{32}} + \mathbf{N_0} = 0,$$

где $\mathbf{T'_{23}}$, $\mathbf{T'_{32}}$ – силы, действующие на блок со стороны нитей, $\mathbf{N_0}$ – сила давления оси на блок, равная по модулю и противоположно направленная силе давления $\mathbf{F}_д$ блока на ось блока (по III закону Ньютона).



Поскольку $T'_{23} = T_{23}$ и $T'_{32} = T_{32}$ (по III закону Ньютона), но $T_{23} = T_{32} = T_2$, то в проекциях на оси X и Y получим:

$$OX: \quad -T_2 + N_0\cos 45° = 0;$$

$$OY: \quad -T_2 + N_0\sin 45° = 0.$$

Откуда $\quad N_0 = \sqrt{2}\,T_2;$

Поэтому

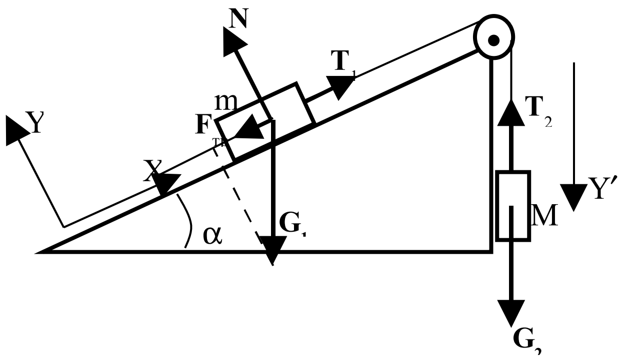
$$F_д = N_0 \approx 1{,}41\cdot 12 = 16{,}82\ (Н).$$

Б-3

Грузы массой m и M связаны невесомой и нерастяжимой нитью. Угол наклона плоскости к горизонту равен α. Коэффициент трения груза m о плоскость равен μ.. Найти ускорение груза M.

Решение:

Покажем силы, действующие на тела, и запишем II закон Ньютона для каждого тела:



$$\mathbf{F}_{тр} + \mathbf{N} + \mathbf{G_1} + \mathbf{T_1} = m\mathbf{a_1}$$
$$\mathbf{G_2} + \mathbf{T_2} = M\mathbf{a_2}$$

Спроецируем первое уравнение на оси X и Y, а второе – на ось Y′. Учитывая, что $|\mathbf{a_1}| = |\mathbf{a_2}| = a$ (нить нерастяжима), а $|\mathbf{T_1}| = |\mathbf{T_2}| = T$ (нить и блок невесомы), получим:

$$\begin{cases} -F_{тр} - mg\sin\alpha + T = ma \\ N - mg\cos\alpha = 0 \\ Mg - T = Ma \end{cases} \qquad F_{тр} = N\mu = \mu mg\cos\alpha,$$

т.к. $N = mg\cos\alpha$.

После подстановки $F_{тр}$ в первое уравнение, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} ma = -\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha + T \\ Ma = Mg - T \end{cases}$$

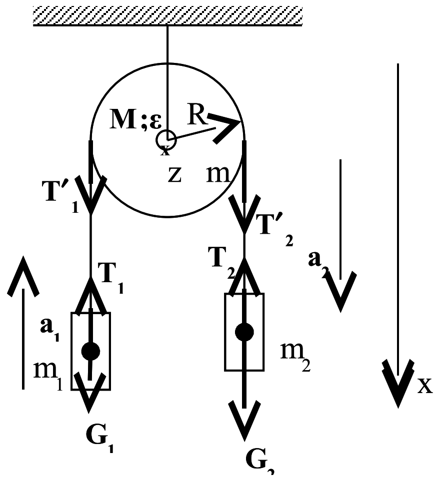
откуда: $$a = \frac{Mg - mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{m + M}.$$

Б-4

Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу m = 80г, перекинута тонкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1=100г и m_2 = 200г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением и массой нити пренебречь.

Решение:

На рисунке показаны силы, действующие на движущиеся тела. При этом тела с массами m_1 и m_2 движутся поступательно, диск вращается вокруг неподвижной оси z.



Запишем основные законы динамики поступательного и вращательного движения:

$$\begin{cases} \mathbf{G_1} + \mathbf{T_1} = m_1\mathbf{a_1} \\ \mathbf{G_2} + \mathbf{T_2} = m_2\mathbf{a_2} \\ \mathbf{M_1} + \mathbf{M_2} = I\varepsilon \end{cases}$$

В проекциях на ось X и ось Z, учитывая, что нити нерастяжимы, поэтому $a_1 = a_2 = a$, и, согласно Ш закону Ньютона и переносу сил натяжения вдоль механических связей к месту их закрепления, модули $T_1 = T'_1$, $T_2 = T'_2$, получим систему трех уравнений:

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_2 R - T_1 R = I_z \varepsilon \end{cases}$$

Натяжения T_1, и T_2 выразим из первых двух уравнений:

$$T_1 = m_1(a + g)$$

$$T_2 = m_2(g - a)$$

Полученные выражения подставим в третье уравнение:

$$R(m_2(g - a) - m_1(a + g)) = I_z\varepsilon \ .$$

Момент инерции диска относительно оси Z:

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 ;$$

угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$.

После подстановки в последнее уравнение, имеем:

$$m_2g - m_2a - m_1a - m_1g = ma/2,$$

откуда

$$a=g(m_2-m_1)/(m_2+m_1+m/2)=9{,}8\cdot 0{,}1/0{,}34=2{,}88\ м/с^2.$$

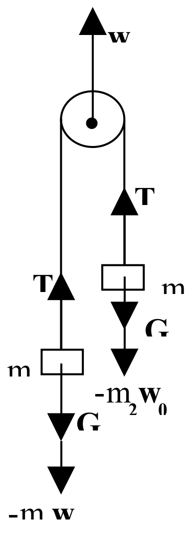
Силы инерции

Б - 5

Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы с массами m_1 и m_2. Кабина начинает подниматься с ускорением $\mathbf{w_0}$. Пренебрегая трением, массами блока и нити, найти ускорение груза m_1 относительно кабины, а также относительно шахты лифта.

Решение

Рассмотрим движение тел относительно кабины лифта.



Кабина является неинерциальной системой отсчета, так как движется с ускорением $\mathbf{w_0}$ относительно шахты. В неинерциальной системе отсчета на каждое тело действует сила инерции

$$\mathbf{F_i} = -m\mathbf{w_0}.$$

Запишем II закон Ньютона для тел m_1 и m_2:

$$m_1\mathbf{a_1} = \mathbf{G_1} + \mathbf{T_1} + \mathbf{F_{i\,1}}$$

$$m_2\mathbf{a_2} = \mathbf{G_2} + \mathbf{T_2} + \mathbf{F_{i\,2}}\ .$$

Вследствие нерастяжимости нити ускорения тел равны по модулю и направлены противоположно друг другу:

$$\mathbf{a_1} = -\ \mathbf{a_2}.$$

Вследствие невесомости блока силы натяжения нитей равны друг другу:

$$\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2} = \mathbf{T}.$$

Силу тяжести $\mathbf{G}$ можно выразить как произведение массы тела m на напряженность гравитационного поля $\mathbf{g}$ (численно равной ускорению свободного падения).

С учетом всех указанных обстоятельств система уравнений примет вид:

$$m_1\mathbf{a} = m_1\mathbf{g} + \mathbf{T} - m_1\mathbf{w_0}$$

$$-m_2\mathbf{a} = m_2\,\mathbf{g} + \mathbf{T} - m_2\mathbf{w_0}.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим ускорение первого тела относительно кабины лифта:

$$\mathbf{a} = (m_1 - m_2)(\mathbf{g} - \mathbf{w_0})/(m_1 + m_2).$$

Ускорение первого тела относительно шахты лифта равно:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{w_0} = ((m_1 - m_2)\mathbf{g} + 2m_2\mathbf{w_0})/(m_1 + m_2).$$

В. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса

Основные формулы

• Если в системе тел действуют только консервативные силы (силы, работа которых зависит только от начального и конечного положения тел и не зависит от формы пути), то полная механическая энергия системы остается постоянной:

$$E_{мех} = \Sigma\, T_i + \Sigma\, U_i = \text{const},$$

где T_i и U_i – кинетическая и потенциальная энергии одной из частиц системы.

• Если система тел является замкнутой, т.е. сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то суммарный импульс системы тел остается постоянным:

$$\mathbf{P}_\Sigma = \Sigma\, m_i\,\mathbf{v}_i = \Sigma\,\mathbf{p}_i = \text{const},$$

где $\mathbf{p}_i = m_i\,\mathbf{v}_i$ - импульс одной из частиц системы.

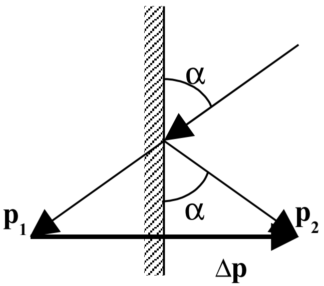
• Если суммарный момент внешних сил, действующих на систему тел, равен нулю, то суммарный момент импульса системы тел остается постоянным:

$$\mathbf{L}_\Sigma = \Sigma\,\mathbf{L}_i = \Sigma\,(I\,\boldsymbol{\omega})_I\,.$$

В-1

Шарик массой m = 100 г ударился о стенку со скоростью v = 5 м/с и отскочил от нее с той же скоростью. Определить импульс, полученный стенкой, если до удара шарик двигался под углом $\alpha = 60$ ° к плоскости стенки.

Решение:



Изменение импульса шарика произошло при взаимодействии его со стенкой. По третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{сш} = -\mathbf{F}_{шс}$. По второму закону Ньютона $\mathbf{F}=\Delta\mathbf{p}/\Delta t$, поэтому $\Delta\mathbf{p}_{стенки} = -\Delta\mathbf{p}_{шарика}$. Иными словами импульс, полученный стенкой, равен изменению импульса шарика с обратным знаком.

Найдем изменение импульса шарика: $\Delta\mathbf{p}_{шарика} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.

Импульс $\Delta\mathbf{p}_{стенки}$, переданный стенке, направлен в сторону, противоположную $\Delta\mathbf{p}_{шарика}$, а его модуль равен $|\Delta\mathbf{p}_{шарика}|$.

Из рисунка следует:

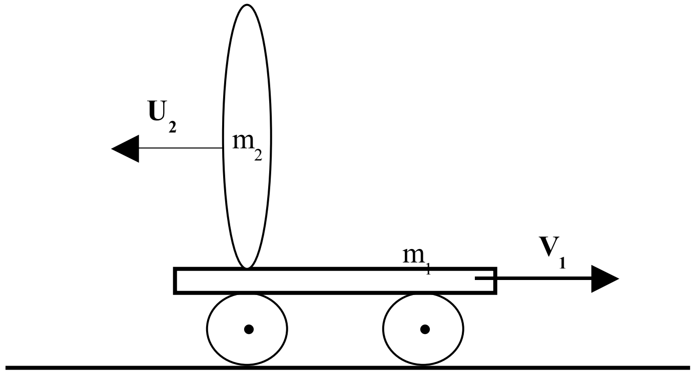
$|\Delta\mathbf{p}_{стенки}| = 2\ p \sin\alpha = 2\ m\ V \sin\alpha = 2\cdot 0{,}1\cdot 5\cdot 0{,}86 = 0{,}86$ кг·м/с.

В-2

На тележке, свободно двигающейся горизонтально со скоростью V_1=3 м/с, находится человек. Человек прыгает в сторону, противоположную направлению движения тележки. После прыжка скорость тележки стала равной U_1 = 4 м/с. Определить горизонтальную составляющую скорости U_{2X} человека при прыжке относительно тележки. Масса тележки m_1 = 210 кг, масса человека m_2 = 70 кг.

Решение:

Так как сумма сил, действующих на тела системы человек – тележка, равна нулю, то система человек – тележка замкнута, поэтому импульс системы сохраняется. В результате прыжка человек отрывается от тележки и система перестаёт быть замкнутой, поскольку теперь сила тяжести, действующая на человека, ничем не скомпенсирована. Однако сумма горизонтальных проекций всех действующих сил остаётся равной нулю и, следовательно, горизонтальная проекция импульса системы продолжает сохраняться.



До взаимодействия горизонтальная проекция импульса системы человек – тележка равен

$$P_{1X} = (m_1 + m_2)\, V_1;$$

после взаимодействия –

$$P_{2X} = m_1 U_1 + m_2(U_1 - U_{2X}).$$

Так как $P_{1X} = P_{2X}$, т.е. $(m_1 + m_2)\, V_1 = m_1\, U_1 + m_2\, (U_1 - U_{2X})$, то

$$U_{2X} = (m_1 + m_2)(U_1 - V_1)/m_2\ .$$

После подстановки числовых данных получим

$$U_{2X} = (210 + 70)\cdot(4 - 3)/70 = 4 \text{ м/с}\ .$$

В-3

Горизонтально расположенная платформа, имеющая форму диска, может вращаться вокруг вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол φ повернётся платформа, если человек пойдёт вдоль края платформы и, обойдя её, вернётся в исходную точку? Масса платформы M=240 кг, масса человека m=60 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Решение:

На систему человек – диск действуют сила тяжести и реакция опоры. Моменты этих сил относительно вертикальной оси Z равны нулю, поэтому проекция момента импульса L_Z системы на ось Z сохраняется. Первоначально $(L_Z)_1 = 0$, т.к. система человек – диск покоится.

Если человек пойдёт по краю платформы со скоростью V относительно диска, он приобретёт момент импульса относительно диска $(L_Z)_{чел} = mVR$. В то же самое время диск приобретёт момент импульса $(L_Z)_Д = I\omega$ относительно неподвижной оси, где I – момент инерции диска, ω- его угловая скорость.

Для системы человек – диск закон сохранения L_Z относительно неподвижной оси примет вид:

$$0 = I\omega + mR(V + \omega R),$$

где $(V + \omega R)$ – линейная скорость человека относительно оси вращения диска.

Момент инерции диска $I = MR^2/2$, скорость человека относительно края платформы $V = 2\pi R/t$, где t – время обхода человеком платформы.

После подстановки I и V и преобразований получим

$$MR^2\omega/2 + mR^2\omega = -(2m/t)\,\pi R^2,$$

откуда

$$\omega = -2\pi\, m/(M/2 + m)\cdot t$$

Т.к. угловая скорость вращения платформы $\omega = \varphi/t$, то

$$\varphi = -2\pi m/(M/2 + m) = -2\pi\cdot 60/(240/2 + 60) = -2\pi/3.$$

Минус означает, что поворот осуществляется в сторону, противоположную ходу человека.

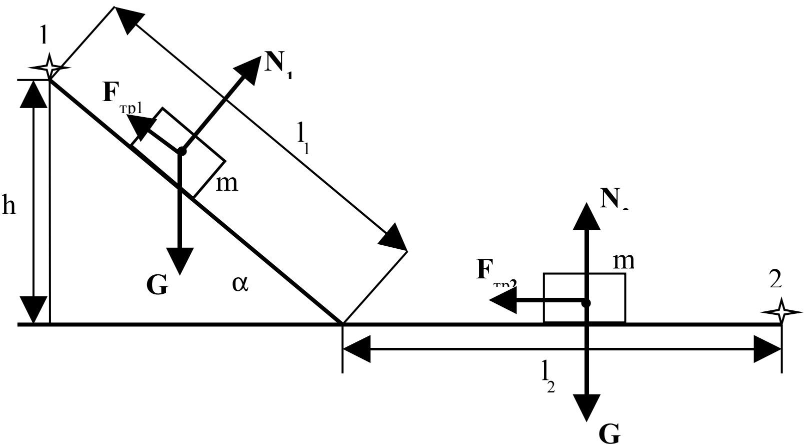
В-4

Брусок скользит с наклонной плоскости длиной l_1=42 см и высотой h=7 см и далее по горизонтальной плоскости на расстояние l_2=142 см, после чего останавливается. Определить коэффициент трения, считая его везде одинаковым.

Решение:

Закон изменения механической энергии утверждает, что изменение полной энергии тела равно работе диссипативных сил, действующих на него.

Примем уровень горизонтальной плоскости соответствующим нулевой потенциальной энергии.



Т.к. тело остановилось в т. 2, то $E_2 = 0$; энергия в начальном положении 1 – $E_1 = mgh$. Поэтому изменение энергии :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = - mgh.$$

$$\Delta E = A_{дисс}; \;\; A_{дисс} = -F_{тр1}\, l_1 - F_{тр2}\, l_2;$$

$$F_{тр1} = \mu N_1 = \mu\, mg \cos \alpha;$$

$$F_{тр2} = \mu N_2 = \mu\, mg \,.$$

После подстановки всех величин в закон изменения энергии, получим

$$mgh = \mu\, mg\, l_1 \cos \alpha + \mu\, mg\, l_2 \text{, где } l_1\cos\alpha = (l_1^2 - h^2)^{1/2},$$

$$\text{откуда } \mu = h/((l_1^2 - h^2)^{1/2} + l_2) = 0{,}038.$$

В-5

Шар массой m_1 = 5 кг движется со скоростью V_1 = 1м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой m_2 = 2 кг. Определить скорости U_1 и U_2 шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

Решение:

Для нахождения скоростей шаров после удара применим закон сохранения импульса и механической энергии.

$$\begin{cases} m_1\mathbf{V}_1 = m_1\mathbf{U}_1 + m_2\mathbf{U}_2 \\ \dfrac{m_1V_1^2}{2} = \dfrac{m_1U_1^2}{2} + \dfrac{m_2U_2^2}{2} \end{cases}$$

После преобразования имеем

$$\begin{cases} m_1(V_1 - U_1) = m_2U_2 \\ m_1(V_1^2 - U_1^2) = m_2U_2^2 \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим соотношение между скоростями

$$V_1 + U_1 = U_2.$$

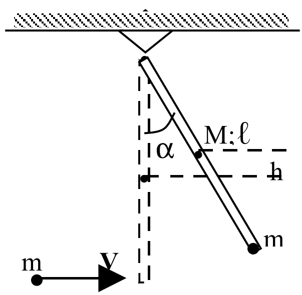
Если заменить в первом уравнении U_2, то получим уравнение для нахождения U_1

$$U_1 = \frac{V_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}.$$

Вычисления дают результаты: $U_1 = \dfrac{1(5-2)}{5+2} = 0{,}43$ м/с; $U_2 = 1{,}43$ м/с.

В-6

Однородный стержень длиной ℓ=1м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец ударяет пуля массой m=7 г, летящая перпендикулярно стержню и его оси вращения, и застревает в нем. Определить массу M стержня, если в результате попадания пули он отклонился на угол $\alpha=60^0$. Принять скорость пули V=360м/с. Считать M»m.



Решение:

При ударе выполняется закон сохранения момента импульса относительно оси вращения, т.е.

$$m \cdot V \cdot \ell = I_{ст} \cdot \omega \text{ (при } M » m).$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через конец стержня

$$I_{ст} = M \cdot \ell^2/3 \text{ ,}$$

поэтому угловая скорость стержня после удара станет равна

$$\omega = \frac{3mV}{M\ell} \text{ .}$$

Кинетическая энергия стержня переходит в потенциальную энергию в поле силы тяжести, т.е.

$$\frac{I_{ст}\omega^2}{2} = Mgh \text{ ,}$$

где h – высота поднятия центра тяжести стержня.

Из рисунка видно, что

$$h = \ell(1 - \cos\alpha)/2 \text{ .}$$

После подстановки получим

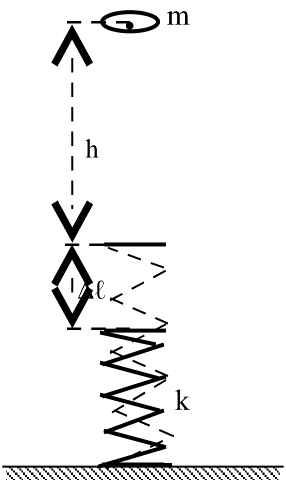
$$M = mV\sqrt{\frac{3}{\ell g(1 - \cos\alpha)}} \text{ .}$$

Вычисления: $M = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 360\sqrt{\frac{3}{1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5}} = 1{,}97$ кг.

В-7

Если на верхний конец вертикально расположенной спиральной пружины положить груз, то пружина сожмется на $\Delta\ell_0$=3мм. На сколько сожмет пружину тот же груз, упавший на неё с высоты h=8 см?

Решение:



При падении с высоты h, тело, сжимая пружину, опустится дополнительно на $\Delta\ell$. Потенциальная энергия тела в гравитационном поле перейдет в энергию упруго деформированной пружины:

$$mg(h+\Delta\ell) = k(\Delta\ell)^2/2.$$

В положении равновесия сила тяжести компенсируется силой упругости, т.е.

$$mg = k\Delta\ell_0,$$

где k – коэффициент жесткости пружины.

Заменяя в первом равенстве mg его значением из второго равенства, получим

$$k\Delta\ell_0\,(h+\Delta\ell) = k(\Delta\ell)^2/2,$$

откуда

$$(\Delta\ell)^2 - 2\Delta\ell_0\,(\Delta\ell) - 2\Delta\ell_0\,h = 0$$

Решая данное уравнение относительно $\Delta\ell$, получим два корня:

$$\Delta\ell_{1,2} = \Delta\ell_0 \pm ((\Delta\ell_0)^2 + 2\Delta\ell_0\,h)^{1/2}.$$

Условию задачи соответствует значение $\Delta\ell>0$, откуда

$$\Delta\ell = 3 + (9 + 2\cdot3\cdot80)^{1/2} \approx 25 \text{ мм} = 25\cdot10^{-3} \text{ м}.$$

Г. Механические колебания

Основные формулы

- Уравнение гармонических колебаний и его решение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

где x – смещение колеблющейся точки относительно положения равновесия; A, ω_0, φ_0 - соответственно амплитуда, собственная угловая частота и начальная фаза колебаний; $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент времени t .

- Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармоническое колебание

$$v = dx/dt = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),\ a = d^2x/dt^2 = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- Период малых колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

где L = I / (ma) – приведенная длина физического маятника, I – момент инерции колеблющегося тела относительно оси вращения, a – расстояние от центра масс маятника до оси вращения.

- Уравнение затухающих колебаний и его решение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0;$$

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A_0 - начальная амплитуда, $\beta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания,

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - круговая частота, $\theta = \frac{\pi}{\lambda}$ - добротность,

$\lambda = \beta T$ - логарифмический декремент затухания.

- Уравнение вынужденных колебаний и его решение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$

$$x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

$$a = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \varphi\beta^2\omega^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Резонансная круговая частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Г-1

Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\ \mathrm{Sin}(\omega_0 t + \varphi_0)$ так, что в начальный момент времени смещение x_0=4см, а скорость V_0=10 см/с. Определить амплитуду А и начальную фазу φ_0 колебаний, если их период Т=2с.

Решение:

Уравнение колебания $x(t) = A\ \mathrm{Sin}(\omega_0\, t + \varphi_0)$, где $x(t)$ – смещение в любой момент времени t, поэтому смещение в момент времени t=0 будет иметь вид $x_0 = A \sin \varphi_0$.

Скорость материальной точки V есть производная от смещения x(t) по времени t, т.е.

$$V = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

При t=0, $V = V_0 = A\omega_0 \cos\varphi_0$. Круговая частота $\omega_0=2\pi/T$, поэтому

$$V_0 = A(2\pi/T)\cos\varphi_0.$$

Для нахождения амплитуды А выразим $\sin\varphi_0$ и $\cos\varphi_0$:

$$\begin{cases} \sin\varphi_0 = x_0/A \\ \cos\varphi_0 = V_0 \cdot T/(2\pi A). \end{cases}$$

После возведения в квадрат каждого уравнения и их сложения, получаем уравнение относительно амплитуды А.

$$1 = \frac{x_0^2}{A^2} + \frac{V_0^2 \cdot T^2}{4\pi^2 \cdot A^2}, \text{ откуда}$$

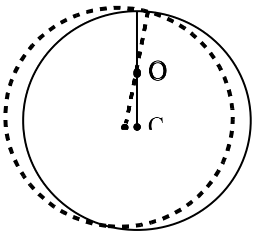
$$A = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot x_0^2 + V_0^2 \cdot T^2}{4\pi^2}} = \frac{\sqrt{4\pi^2 \cdot 16 + 100 \cdot 4}}{2\pi} = 5(\text{см}) \cdot$$

$$\varphi_0 = \arcsin(x_0/A) = \arcsin(4/5) \approx 51^{\circ}$$

Г-2

Определить период малых гармонических колебаний диска радиусом R=40 см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

Решение:



Для нахождения периода колебаний физического маятника воспользуемся формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

где $a = R/2$ – расстояние от оси вращения O до центра тяжести диска C; $I = mR^2/2 + ma^2$ – момент инерции диска относительно данной оси вращения (по теореме Штейнера).

После подстановки a и I в формулу периода, имеем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5R + 0{,}25R}{0{,}5g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}4}{0{,}5 \cdot 9{,}8}} = 1{,}55c.$$

Г-3

Гиря массой 0,5 кг подвешена к пружине, жёсткость которой k=32Н/м и совершает затухающие колебания. Определить их период в двух случаях: 1) амплитуда уменьшилась в два раза за время, в течение которого произошло 88 колебаний; 2) за время двух колебаний амплитуда уменьшилась в 20 раз.

Решение:

Период затухающих колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$, где

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{32}{0{,}5}} = 8\,\dfrac{рад}{с}$ - частота собственных колебаний.

Закон изменения амплитуды колебаний от времени:

$$A = A_0 e^{-\beta t} \text{ или } \ln\frac{A_0}{A} = \beta t.$$

Учтём, что t=NT, тогда $\ln\dfrac{A_0}{A} = \beta NT$, откуда $\beta = \dfrac{\ln A_0 / A}{NT}$.

Подставим β в формулу периода колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\dfrac{\ln A_0 / A}{NT}\right)^2}}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и выразим период затухающих колебаний:

$$T = \frac{\sqrt{4\pi^2 - \left(\dfrac{\ln A_0 / A}{N}\right)^2}}{\omega_0}.$$

Произведем вычисления:

$$T_1 = \frac{\sqrt{4 \cdot 3{,}14^2 + \left(\dfrac{\ln 2}{88}\right)^2}}{8} = 0{,}78 \text{ с};$$

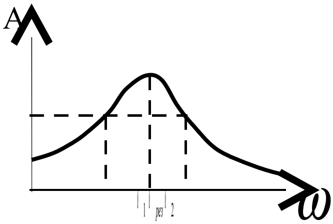
$$T_2 = \frac{\sqrt{4 \cdot 3{,}14^2 + \left(\dfrac{\ln 20}{2}\right)^2}}{8} = 0{,}81 \text{ с}.$$

При вычислении T_1 величиной $\left(\dfrac{\ln 2}{88}\right)^2$ можно пренебречь ввиду её малости по сравнению с $4\pi^2$.

Г- 4

Амплитуды смещения вынужденных колебаний при частотах ω_1=400 рад/с и ω_2=600 рад/с равны между собой. Найти частоту, при которой амплитуда смещения максимальна.

Решение.



Резонансная частота определяется формулой

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

ω_0 -собственная частота,

β -коэффициент затухания.

Условие равенства амплитуд:

$$\frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta_1^2\omega_1^2}} = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\beta_1^2\omega_2^2}},$$

где f - характеристика вынуждающей силы .

Возведем обе части в квадрат и проведем преобразования:

$$\omega_0^4 - 2\omega_0^4\omega_1^2 + \omega_1^4 + 4\beta_1^2\omega_1^2 = \omega_0^4 - 2\omega_0^4\omega_2^2 + \omega_2^4 + 4\beta_1^2\omega_2^2,$$

получим

$$\omega_0^2 - 2\beta^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2},$$

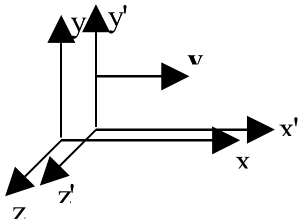
откуда

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{400^2 + 600^2}{2}} = 5{,}1 \cdot 10^2 \text{ рад/с.}$$

Д. Элементы теории относительности

Основные формулы

В специальной теории относительности рассматриваются только инерциальные системы отсчета. Во всех задачах считается, что движение системы отсчета K' со скоростью v относительно системы отсчета K происходит вдоль общей оси x, x', а оси y, y' и z, z' параллельны. Система отсчета K условно принята за неподвижную.



- Релятивистское сокращение длины стержня:

$$l = l_0\sqrt{1 - (v/c)^2}\ ,$$

где l_0 – длина стержня в системе отсчета K' , относительно которой стержень покоится (собственная длина). Стержень параллелен оси x' ; l – длина стержня, измеренная в системе K, относительно которой он движется со скоростью v; c – скорость света.

- Релятивистское замедление хода часов:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\ ,$$

где Δt_0 – интервал времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы отсчета K' , измеренный по часам этой системы (собственное время движущихся часов); Δt - интервал времени, измеренный по часам системы K.

- Релятивистский импульс:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\ ,$$

где m - релятивистская масса:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\ ,$$

m_0 – масса покоя.

- Полная энергия релятивистской частицы:

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + T\ ,$$

где T – кинетическая энергия частицы; $m_0 c^2 = E_0$ – энергия покоя.

- Связь полной энергии с импульсом релятивистской частицы:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 .$$

- Связь кинетической энергии с импульсом релятивистской частицы:

$$p^2 c^2 = T(T + 2 m_0 c^2) .$$

Д - 1

Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95% скорости света. Во сколько раз его релятивистская масса больше массы покоя? Во сколько раз его кинетическая энергия больше энергии покоя?

Решение:

Зависимость релятивистской массы тела m от скорости V его движения даётся уравнением:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ,$$

а зависимость кинетической энергии тела E от скорости V его движения уравнением:

$$T = E_0[(1 - (v/c)^2)^{-1/2} - 1],$$

где m_0 - масса покоя тела (частицы), E_0- энергия покоя тела, c- скорость света ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с), $V=0,95 \cdot c$.

Отсюда определим искомые отношения:

$$m/m_0 = (1 - (0,95)^2)^{-1/2} = 3,2 \text{ раза},$$

$$T/E_0 =[(1 - (v/c)^2)^{-1/2} -1] = 3,2 - 1 = 2,2 \text{ раза}.$$

Е. Молекулярное строение вещества. Уравнение состояния газа. Процессы

Основные формулы

- Количество вещества тела (число молей)

$$\nu = N / N_A \ ,$$

где N – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т.п.), составляющих тело ($N=\nu N_A=(m/\mu)N_A$); N_A – число Авогадро.

- Молярная масса вещества

$$\mu = m / \nu \qquad \text{или} \qquad \mu = m_0 N_A,$$

где m – масса однородного тела, m_0 – масса структурного элемента этого тела.

- Молярная масса смеси газов

$$\mu_{см} = \Sigma\, m_i / \Sigma \nu_i \ ,$$

где m_i - масса *i* – го компонента смеси; ν_i– число молей (количество вещества) *i* – го компонента смеси.

- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона – Менделеева)

$$PV = \nu\, RT \qquad \text{или} \qquad PV = (m/\mu)\, RT,$$

где P – давление газа, V – его объем, T – термодинамическая температура, R – молярная газовая постоянная, $\nu = (m/\mu)$ – число молей вещества.

- Опытные газовые законы:

а) закон Бойля – Мариотта (изотермический процесс –T = const, m = const)

$$P\, V = \text{const};$$

б) закон Гей-Люссака (изобарный процесс – P = const, m = const)

$$V/T = \text{const};$$

в) закон Шарля (изохорный процесс – V = const, m = const)

$$P/T = \text{const}.$$

- Закон Дальтона:

$$P_{см} = \Sigma\, P_i \ ,$$

где $P_{см}$ – давление смеси газов, P_i – парциальное давление *i* – го компонента смеси.

- Наиболее вероятная, средняя и средняя квадратичная скорости молекул:

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}},$$

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где k – постоянная Больцмана, m_0 – масса молекулы, $R = kN_A$ – универсальная газовая постоянная, μ – молярная масса, N_A– число Авогадро.

Е-1

В баллоне объёмом V=15л находится аргон при температуре T_1 = 300K и под давлением P_1 = 600кПа. Когда из баллона было взято некоторое количество газа, давление в баллоне понизилось до P_2 = 400кПа, а температура установилась T_2=360K. Определить: массу Δm аргона, взятого из баллона; плотность аргона ρ_2, при температуре T_2.

Решение:

1) Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона, применив его к начальному и конечному состоянию газа:

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu}RT_1 \quad \text{и} \quad P_2V = \frac{m_2}{\mu}RT_2 \quad ,$$

где m_1 и m_2 – массы аргона, соответственно в начальном и конечном состоянии; μ – молярная масса газа; R –газовая постоянная. Тогда

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{V\mu}{R}\cdot\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right).$$

Проведём вычисления:

$$\Delta m = \frac{15\cdot 10^{-3}\cdot 40\cdot 10^{-3}}{8{,}31}\cdot\left(\frac{6\cdot 10^5}{300} - \frac{4\cdot 10^5}{260}\right) = 0{,}033\text{кг}.$$

2) По определению, плотность вещества – это масса, содержащаяся в единице объёма, то есть:

$$\rho = m/V = P\mu/RT, \text{ откуда}$$

$$\rho_2 = \frac{P_2\mu}{RT_2} = \frac{4\cdot 10^5\cdot 40\cdot 10^{-3}}{8{,}31\cdot 260} = 7{,}4 \text{ кг/м}^3.$$

Е-2

Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения $\langle E_п\rangle$ и среднее значение суммарной кинетической энергии молекулы водяного пара $\langle E\rangle$ при температуре T = 600 K. Найти также кинетическую энергию W поступательного движения всех молекул пара, содержащего количество вещества ν=1 кмоль.

Решение:

Молекула воды (H_2O)- трёхатомная, т.е. число степеней свободы i=6, из них поступательному движению соответствуют 3 степени свободы. Поэтому средняя энергия, обусловленная поступательным движением молекулы водяного пара, равна:

$$< E_п > = \frac{3}{2}kT = 1{,}5 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 600 = 1{,}24 \cdot 10^{-20}\text{Дж.}$$

Так как общее число степеней свободы молекулы известно (i=6), найдём среднее значение её полной кинетической энергии:

$$< E > = \frac{6}{2}kT = 2{,}48 \cdot 10^{-20}\text{Дж.}$$

Число всех молекул вещества

$$N = N_A \nu \ ,$$

где N_A- число Авогадро; ν - количество молей вещества.

Кинетическая энергия W поступательного движения всех молекул пара.

$$W = <E_п>N = <E_п>N_A\nu = 1{,}24 \cdot 10^{-20} 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 10^3 = 7{,}46 \text{ МДж.}$$

Ж. Термодинамика

Основные формулы

- Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A \ ,$$

где Q – теплота, сообщенная термодинамической системе; ΔU – изменение внутренней энергии системы; A – работа, совершенная системой против внешних сил.

- Средняя кинетическая энергия:

а) приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$<E_i> = (1/2)\ kT;$$

б) поступательного движения молекул

$$<E_{пост}> = (3/2)\ kT;$$

в) приходящаяся на все степени свободы (суммарная энергия молекулы)

$$<E_{полн}> = (i/2)\ kT,$$

где i – число степеней свободы (i = 3 – для одноатомного газа, i = 5 – для двухатомного газа, i = 6 – для многоатомного газа)

- Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N <E_{полн}> = N\ (i/2)\ kT = (i/2)\ (m/\mu)\ RT,$$

где N – полное число молекул газа, $R = N_A \cdot k$ – молярная газовая постоянная.

- Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = (m/\mu)\, C_v\, \Delta T,$$

где $C_v = (i/2)\, R$ – молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме.

- Работа, совершаемая газом

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV .$$

- Уравнения адиабатного процесса (процесса, происходящего без теплообмена с окружающей средой):

$$P\, V^{\gamma} = \text{const} \quad \text{или} \quad T\, V^{\gamma - 1} = \text{const} \quad \text{или} \quad T^{\gamma}\, P^{1 - \gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = C_p / C_v = (i + 2) / i$ – показатель адиабаты; $C_p = (i + 2)\, R / 2$ – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.

- Изменение энтропии

$$\Delta S = \int_{A}^{B} \frac{\delta Q}{T} \;,$$

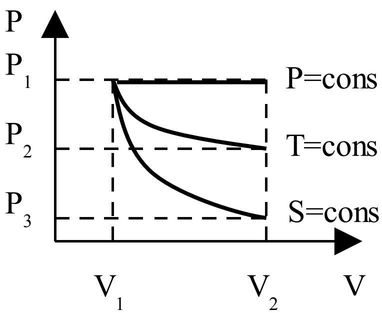
где A и B – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состояниям системы. В равновесном процессе интегрирование не зависит от пути перехода из A в B.

Ж-1

Азот объёмом V_1=10л находится под давлением P=1атм. Найти изменение давления, работу расширения, изменение внутренней энергии при увеличении объёма азота до V_2=20л: а) изобарически, б) изотермически, в) адиабатически.

Записать первое начало термодинамики для этих процессов.

Решение:



Решение задачи удобно начинать с графического изображения зависимости давления газа от его объёма P=f(V).Работа любого процесса определяется $A = \int_{V_1}^{V_2} PdV$ и равна площади, ограниченной кривой P(V), крайними ординатами и осью абсцисс.

1) Изобарический процесс (P=const).

Работа расширения

$$A = P\left(V_2 - V_1\right) = 10^5\left(2\cdot 10^{-2} - 10^{-2}\right) = 1000 \text{ Дж.}$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\cdot C_V\left(T_2 - T_1\right).$$

Так как $C_V=(i/2)R$ – молярная теплоёмкость при постоянном объёме; m/μ – число молей; i – число степеней свободы (i=5 для молекулы азота);

$$\text{и} \qquad P\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T = A\text{, то}$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{i}{2}P\left(V_2 - V_1\right) = \frac{5}{2}A = 2{,}5\cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Согласно первому началу термодинамики, теплота Q, передающаяся газу, равна сумме изменения внутренней энергии ΔU и работе A, поэтому

$$Q=A + \Delta U =1000 + 2500 = 3500 \text{ Дж.}$$

2) Изотермический процесс (T=const).

Из уравнения Бойля-Мариотта

$$P_1V_1 = P_2V_2\text{, поэтому}$$

$$P_2= P_1V_1/V_2=10^5\cdot 10^{-2}/2\cdot 10^{-2}= 0{,}5\cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Изменение давления $\Delta P = P_2 - P_1 = -0{,}5\cdot 10^5$ Па.

Работа газа при изотермическом процессе

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\frac{m}{\mu}RT}{V}dV = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} =$$

$$= P_1V_2\ln\frac{V_2}{V_1} = 10^5\cdot 10^{-2}\ln 2 = 690\text{Дж}$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R \Delta T.$$ Так как $\Delta T=0$, то и $\Delta U=0$.

Первое начало для изотермического процесса будет иметь вид

$$Q = A.$$

<u>3) Адиабатический процесс (процесс, идущий без теплообмена – Q = 0).</u>

Давление газа и объём при адиабатическом процессе связаны уравнением Пуассона: $P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} = const$, где $\gamma = C_p/C_v =(i + 2)/I =(5+2)/5 = 1,4$.
Для нашей задачи:

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 10^5 \cdot (0,5)^{1,4} = 0,38 \cdot 10^5 \text{Па};$$

$$-\Delta P = P_1 - P_2 = 10^5 - 0,38 \cdot 10^5 = 0,62 \cdot 10^5 \text{Па}.$$

Работа при адиабатическом расширении $A = -\Delta U$ т.к. Q = 0.

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2).$$

T_1 и T_2 выразим из уравнения Менделеева - Клапейрона.

$$\frac{m}{\mu} T_1 = \frac{P_1V_1}{R} \qquad \frac{m}{\mu} T_2 = \frac{P_2V_2}{R}$$

$$A = \frac{C_V}{R}\left(P_1V_1 - P_2V_2\right) = \frac{i}{2} \cdot \left(P_1V_1 - P_2V_2\right) =$$

$$= \frac{5}{2}(10^5 \cdot 10^{-2} - 0,38 \cdot 10^5 2 \cdot 10^{-2}) = 600\text{Дж}.$$

Ж-2

С идеальным 2-х атомным газом в количестве ν=2 моля проводили следующие процессы: 1) изохорически нагрели так, что абсолютная температура увеличилась в 2раза; 2) изобарически охладили до первоначальной температуры; 3) изотермически сжали так, что объём уменьшился в 2 раза; 4) адиабатически расширили от температуры T_1 до T_2. Найти изменение энтропии в этих процессах.

Решение:

Изменение энтропии определяется формулой

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T}$$

где δQ – бесконечно малое количество теплоты.

1) При изохорическом процессе V=const

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_V dT,$$

где $\frac{m}{\mu} = 2$ – количество молей, $C_V = \frac{i}{2}R$ - молярная теплоёмкость, i – число степеней свободы молекулы (i=5 для двухатомной молекулы).

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\frac{m}{\mu} C_V}{T} dT = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_2}{T_1} = 2\frac{5}{2} 8{,}31 \ln 2 = 28{,}6 \text{Дж} / \text{К}.$$

2) При изобарическом процессе P=const

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_P dT,$$

где $C_p = \frac{i+2}{2}R$ – молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

$$\Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\frac{m}{\mu} C_P}{T} dT = \frac{m}{\mu} C_P \ln\frac{T_2}{T_1} = 2\frac{7}{2} 8{,}31 \ln 2 = 40 \text{Дж} / \text{К}.$$

3) При изотермическом процессе T=const

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = (m/\mu)RT \ln(V_2/V_1).$$

$$\Delta S_3 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T} = \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1} = 2 \cdot 8{,}31 \cdot \ln 2 = 11{,}5 \text{Дж} / \text{К}.$$

1) При адиабатном процессе δQ=0 и ΔS=0.

Ж-3

Найти изменение ΔS энтропии при превращении льда ($t = -20^0$C) массы m=10 г в пар ($t_п = 100^0$C).

Решение:

Изменение энтропии при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

При переходе из одного агрегатного состояния в другое, общее изменение энтропии складывается из её изменений в отдельных процессах.

При нагревании льда от T до T_0 (T_0- температура плавления)

$$\Delta S_1 = \int_T^{T_0} \frac{mC_л dT}{T} = mC_л \ln\frac{T_0}{T},$$

где $C_л$=2,1 кДж/кгК – удельная теплоёмкость льда.

$$\Delta S_1=10^{-2}\cdot 2,1\cdot 10^3\ln(273/253)=1,60 \text{ Дж/К}.$$

При плавлении льда $$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{m\lambda}{T_0},$$

где λ=0,33 МДж/кг – удельная теплота плавления.

$$\Delta S_2=10^{-2}\cdot 0,33\cdot 10^6/273=12,09 \text{ Дж/К}.$$

При нагревании воды от T_0 до $T_п$

$$\Delta S_3 = \int_{T_0}^{T_П} \frac{mC_В dT}{T} = mC_В \ln\frac{T_п}{T_0},$$

где $C_В$= 4,19 кДж/кгК – удельная теплоёмкость воды.

$$\Delta S_3=10^{-2}\cdot 4,19\cdot 10^3\cdot \ln(373/273)=13,08 \text{ Дж/К}.$$

При испарении воды при температуре $T_п$

$$\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_{ï}} = \frac{mr}{T_{ï}},$$

где r = 2,26 МДж/кг удельная теплота парообразования.

$$\Delta S_4=10^{-2}\cdot 2,26\cdot 10^6/373=60,6 \text{ Дж/К}.$$

Общее изменение энтропии

$$\Delta S= \Delta S_1+ \Delta S_2+ \Delta S_3+ \Delta S_4= 87,37 \text{ Дж/К}.$$

Длина свободного пробега и число столкновений молекулы

Ж - 4

Найти среднее число столкновений Z в единицу времени молекул азота и среднюю длину λ свободного пробега молекулы при давлении P=53,33кПа и температуре $t = 27^0$C.

Решение:

Среднее число столкновений молекул в единицу времени определяется формулой:

$$Z = \sqrt{2}\pi\sigma^2 n \langle V \rangle,$$

где σ - диаметр молекулы (находится по таблице: $\sigma = 3\cdot10^{-10}$м); n – число молекул в единице объёма: n = P/kT; <V> = $(8RT/\pi\mu)^{1/2}$-средняя скорость.

Подставляя в формулу для Z значения n и V, а так же учитывая, что $R=kN_0$, где $N_0=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$– число Авогадро, получим:

$$Z = 4\sigma^2 P\sqrt{\frac{\pi N_0}{kT\mu}}\ .$$

Итак,

$$Z = 4\cdot 9\cdot 10^{-20}\cdot 53{,}33\cdot 10^3\sqrt{\frac{\pi\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300\cdot 28\cdot 10^{-3}}} = 2{,}5\cdot 10^9\,c^{-1}.$$

Средняя длина свободного пробега

$$\lambda = \frac{V}{Z} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 P} = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300}{\sqrt{2}\cdot 3{,}14\cdot(3\cdot 10^{-10})^2 53{,}33\cdot 10^3} = 1{,}9\cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Ж - 5

Найти показатель политропы n процесса, совершаемого идеальным газом, при котором остаётся неизменным коэффициент: а) диффузии D=const; б) вязкости η =const; в) теплопроводности f=const.

Решение.

Для политропического процесса

$$PV^n = const \quad \text{, где}$$

P-давление газа, V- его объём, n – показатель политропы.

а) Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle\lambda \quad \text{, где}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$$ - средняя скорость молекул,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$ - средняя длина свободного пробега молекул,

d – диаметр молекулы,

n – концентрация молекул.

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории выразим n – концентрацию молекул, затем, подставив n формулу для λ – длины свободного пробега и используя формулу для средней скорости молекул, получим выражение для коэффициента диффузии:

$$P = nkT \Rightarrow n = \frac{P}{kT} \Rightarrow \lambda = \frac{kT}{\pi d^2 P\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}$$,откуда

$$D = \left(\sqrt{\frac{8 \cdot k}{6\pi m_0}} \cdot \frac{k}{\pi d^2}\right) \cdot \frac{T^{\frac{3}{2}}}{P}$$ или $$D = A \cdot \frac{T^{\frac{3}{2}}}{P}$$, где

через A обозначена группа постоянных величин в скобке.

Выразим температуру T из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$PV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{PV}{\nu R}$$ и, подставив её в выражение для коэффициента диффузии, получим:

$$D = A \cdot \frac{1}{P}\left(\frac{PV}{\nu R}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{A}{(\nu R)^{\frac{3}{2}}}\right] \cdot P^{\frac{1}{2}} \cdot V^{\frac{3}{2}}.$$

Поскольку по условию $D = \text{const}$, то

$$D^2 = \left[\frac{A}{(\nu R)^{\frac{3}{2}}}\right]^2 \cdot PV^3 \quad \text{или} \quad PV^3 = \text{const},$$

следовательно, показатель политропы в данном процессе $n = 3$.

б) Коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{1}{3}\,\square\, v\,\hbar\,\lambda\,\rho\ \text{, где } \rho = m_0 \cdot n \text{ - плотность газа.}$$

Выполняя действия, аналогичные предыдущим, получим:

$$\eta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \cdot m_0 n = \sqrt{\frac{8km_0}{6\pi}} \cdot \frac{1}{\pi d^2} \cdot T^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{8km_0}{6\pi}} \cdot \frac{1}{\pi d^2}\right] \cdot \left(\frac{PV}{\nu R}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

Возведем η в квадрат:

$$\eta^2 = \left\{\left(\sqrt{\frac{8km_0}{6\pi}} \cdot \frac{1}{\pi d^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu R}\right\} PV .$$

Т. к. по условию $\eta^2 = \mathrm{const}$, то $PV = \mathrm{const}$ следовательно, показатель политропы в данном процессе $n = 1$.

в) Коэффициент теплопроводности

$$f = \eta \cdot C_V ,$$

где C_V - молярная теплоёмкость при постоянном объёме.

$$C_V = \frac{i}{2} \cdot R \text{, где } i \text{ - число степеней свободы.}$$

т.к. в C_V не входят ни P, ни T, ни V, то $C_V = \frac{i}{2} \cdot R = \mathrm{const}$.

Тогда такие же вычисления, что и в пункте б) дадут тот же результат, т.е.

$$PV = \mathrm{const}$$

следовательно, показатель политропы в данном процессе $n = 1$.

3. Электростатика

Основные формулы

- Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами q_1 и q_2 в вакууме:

$$\mathbf{F}_{12} = k\,(q_1 q_2 / r^3)\mathbf{r}_{21}\ ,$$

где $\mathbf{F}_{12}$ – сила, действующая на первый заряд со стороны второго; k – коэффициент пропорциональности (в международной системе единиц $k=1/(4\pi\varepsilon_0)= 9\cdot10^9$ Нм^2 / Кл^2); $\mathbf{r}_{21}$ – радиус-вектор, проведенный от второго заряда к первому (r - модуль радиус-вектора).

- Напряженность и потенциал поля точечного заряда q:

$$\mathbf{E} = k\,(q/r^3)\mathbf{r}\ , \qquad \varphi = k\,q/r\ ,$$

где **r** - радиус-вектор, проведенный от заряда к точке поля, в которой определяются его характеристики (r - модуль радиус-вектора).

- Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов Q_i (принцип суперпозиции):

$$\mathbf{E} = \Sigma\,\mathbf{E}_i\ , \qquad \varphi = \Sigma\varphi_i\ ,$$

где $\mathbf{E}_i$ и φ_i - напряженности и потенциалы полей, создаваемых точечными зарядами q_i в данной точке пространства.

- Связь вектора напряженности и потенциала электрического поля :

$$\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\nabla\varphi$$

- Поток вектора напряженности сквозь произвольную замкнутую поверхность равен суммарному заряду, заключенному внутри этой поверхности, деленному на ε_0 :

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}\ .$$

- Работа сил поля по перемещению заряда q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку поля с потенциалом φ_2 :

$$A = q\,(\varphi_1 - \varphi_2)$$

и не зависит от формы пути.

- Электрическая ёмкость

  уединенного проводника:

$$C = q / \varphi\ ,$$

  конденсатора:

$$C = q / (\varphi_1 - \varphi_2)\ ,$$

где q – заряд, сообщенный проводнику (конденсатору); $(\varphi_1-\varphi_2)$ – разность потенциалов на обкладках конденсатора.

- Ёмкость плоского конденсатора:

$$C = \varepsilon_0\, \varepsilon\, S / d\ ,$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора; d – расстояние между ними.

- Ёмкость системы конденсаторов:

а) при параллельном соединении конденсаторов –

$$C = \sum C_i\ ;$$

б) при последовательном соединении конденсаторов –

$$1/C = \sum (1/ C_i)\ .$$

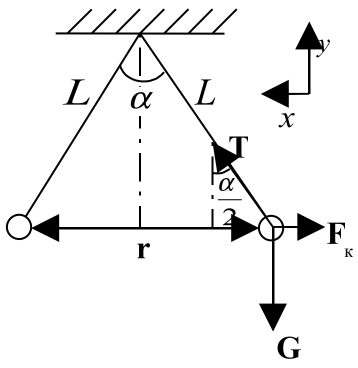
- Энергия заряженного конденсатора:

$$W = qU/2 = CU^2/2 = q^2/ (2C).$$

З -1

Два шарика одинакового радиуса и массы подвешены на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда
$q_0=4\cdot10^{-7}$Кл они оттолкнулись друг от друга так, что нити разошлись на угол 60°. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика L = 20см.

Решение:



Заряд, сообщенный шарикам, распределяется между ними поровну, так как шарики имеют одинаковые радиусы. Поэтому заряды шариков

$$q_1 = q_2 = q_0/2.$$

Поскольку шарики заряжаются одноименными зарядами, то они будут отталкиваться друг от друга до тех пор, пока не наступит состояние равновесия. На каждый шарик действуют силы: **T–** натяжения нити, **G–**тяжести и **F**$_к$– кулоновская (см. рис.)

Условие равновесия: $\mathbf{T}+\mathbf{F}_к+\mathbf{G} = 0.$

Выберем оси координат и спроецируем силы на оси **X** и **Y**:

$$\begin{cases} T\sin\dfrac{\alpha}{2} = F_k \\ T\cos\dfrac{\alpha}{2} = mg. \end{cases}$$

Разделив почленно, получим: $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{F_k}{mg}$, откуда следует $m = \dfrac{F_k}{g \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}}$

. Кулоновская сила равна: $F_k = \dfrac{k\dfrac{q_0}{2}\dfrac{q_0}{2}}{r^2}$,

где r – расстояние между шариками. Его можно найти по формуле

$$r = 2L\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(см. рис.).}$$

Подставляя полученные выражения в формулу массы шарика, получим:

$$m = \frac{kq_0^2}{4 \cdot 4L^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cdot tg\dfrac{\alpha}{2} \cdot g},$$

где $k=9 \cdot 10^9$м/ф. После вычислений получим

$$m = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot 10^{-14}}{4 \cdot 4 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}58 \cdot 9{,}8} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\text{кг}.$$

З - 2

В вершинах квадрата со стороной a=10см помещены точечные заряды по $(1/3) \cdot 10^{-7}$Кл каждый. Найдите величину и направление напряженности электрического поля в центре квадрата, если знаки зарядов следующие:
а) ++++, **б)** +–+– , **в)** ++–– , а также потенциал в центре квадрата в указанных случаях.

Решение:

В нашем случае поле создается несколькими зарядами, поэтому напряженность электрического поля определяется принципу суперпозиции: $\mathbf{E} = \Sigma\, \mathbf{E_i}$,
где $\mathbf{E_i}$ - напряженность поля каждого заряда в отдельности. Покажем на рисунке направление каждого вектора $\mathbf{E_i}$ и направление

результирующего вектора **E**. Модуль вектора $\mathbf{E_i}$ определяется по формуле: $E_i = k\dfrac{q_i}{r_i^2}$,

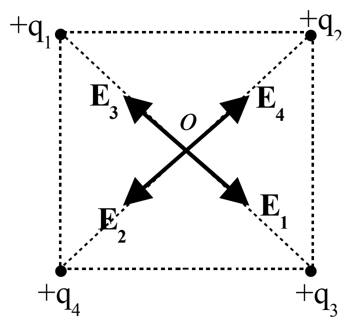
где q_i- заряд, r_i- расстояние от заряда до рассматриваемой точки, $k=9\cdot 10^9$м/ф – коэффициент пропорциональности в системе единиц СИ.

Вектор $\mathbf{E_i}$ направлен по прямой, соединяющей заряд и данную точку. Направление $\mathbf{E_i}$ совпадает с направлением силы действующей на положительный заряд, помещенный в эту точку. q_2 +

а) Центр квадрата находится на пересечении его диагоналей. Так как все заряды одинаковы по абсолютной величине и расстояние от каждого заряда до рассматриваемой точки одинаковы, то $E_1 = E_2 = E_3 = E_4$ и

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 = 0,$$

т.к. векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_4$ направлены по одной прямой в противоположные стороны.



Потенциал электрического поля, созданного несколькими зарядами, равен алгебраической сумме потенциалов полей от отдельных зарядов:

$$\varphi = \Sigma\varphi_i.$$

Потенциал поля точечного заряда определяется по формуле:

$$\varphi_i = k\frac{q_i}{r_i},$$

где r_i равно половине диагонали квадрата.

В данном случае $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4$ и $\varphi_\Sigma = 4\cdot k\dfrac{q\sqrt{2}}{a}$;

После вычисления получим: $\varphi_\Sigma = 4\cdot 9\cdot 10^9\,\dfrac{(1/3)\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}41}{10^{-1}} = 1{,}7\cdot 10^4$ В

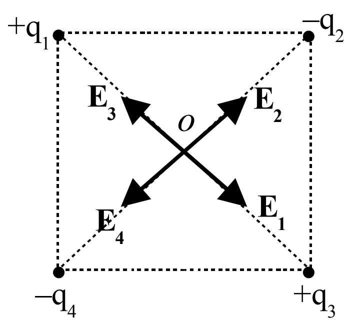
б) В данном случае

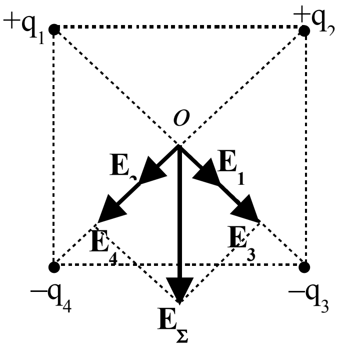
$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4 = 0 \text{ и}$$

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_3 = -\varphi_4.$$

Поэтому $\mathbf{E}_\Sigma = 0$;

$$\varphi_\Sigma = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 = 0.$$





в) В данном случае

$$E_1 + E_3 = E_2 + E_4 = k\frac{2q}{r_i^2};$$

Модуль результирующего вектора определяется по теореме Пифагора

$$E_\Sigma = \sqrt{(E_1 + E_3)^2 + (E_2 + E_4)^2};$$

$$E_\Sigma = k\frac{2q}{r^2}\sqrt{2}\,.$$

После вычисления получим:

$$E = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot(1/3)\cdot 10^{-7}1{,}41}{0{,}01} = 8{,}5\cdot 10^4\,В/м$$

$$\varphi_\Sigma = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = 0$$

Ответ: а) $E = 0$; $\varphi = 1{,}7\cdot 10^4$ В; б) $E = 0$; $\varphi = 0$; в) $E = 8{,}5\cdot 10^4$ В/м; $\varphi = 0$.

Применение теоремы Остроградского-Гаусса для расчета электрических полей

З - 3

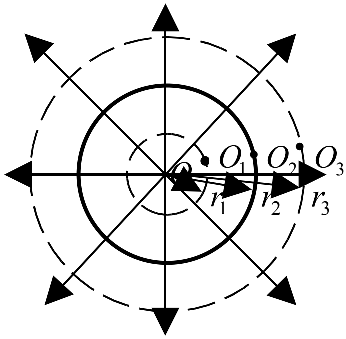
Сплошной эбонитовый шар радиусом R=5 см имеет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью ρ = 10нКл/м^2. Определить напряженность электрического поля в точках: 1) на расстоянии r_1 = 3 см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии r_2 = 10 см от центра сферы. Построить график зависимости E(r). Диэлектрическая проницаемость среды ε =3.

Решение.

Из центра шара проводим силовые линии. По расположению силовых линий поле заряженного шара можно считать симметричным. Поэтому для расчета поля можно применить теорему Остроградского-Гаусса для электрического поля в диэлектрике:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = q/\varepsilon\varepsilon_0 \ ,$$

где $\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \Phi$ - поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность S; q – алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри этой поверхности; ε – диэлектрическая проницаемость среды; ε_o– константа (в международной системе единиц СИ $\varepsilon_o = 8{,}85\cdot10^{-12}$ ф/м).



Через точки O_1, O_2, O_3 проводим вспомогательные поверхности таким образом, чтобы напряженность поля во всех точках поверхности была одинакова и силовые линии были бы перпендикулярны поверхности. В нашем случае таким требованиям удовлетворяет сферическая поверхность. В этом случае поток вектора **E** можно рассчитать по формуле:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = E\cdot S,$$

где S – площадь поверхности сферы ($S = 4\pi r^2$)

1)Для точки O_1: $\Phi_1 = E_1 4\pi r_1^2$; заряд $q_1 = \rho V_1$,

где ρ - объемная плотность заряда; V_1 - объем части шара, заключенной внутри сферы, проходящей через точку O_1 ($V_1 = 4\pi r_1^3/3$). Тогда получим:

$$E_1 4\pi r_1^2 = (4/3)\pi r_1^3\rho/\varepsilon_o\varepsilon, \text{ откуда}$$

$$E_1 = \rho\cdot r_1/3\varepsilon_o\varepsilon.$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$E_1 = \frac{10\cdot10^{-9}\cdot3\cdot10^{-2}}{3\cdot3}4\pi\cdot9\cdot10^{9} = 3{,}77 \text{ В/м}.$$

2)На поверхности сферы происходит переход из одной среды в другую. Поэтому напряженность поля E_2 для точек, находящихся от центра на расстоянии r=R внутри шара, вычисляется по формуле:

$$E_2 = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0 \varepsilon},$$

для точек с r = R вне шара – по формуле:

$$E_2' = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0},$$

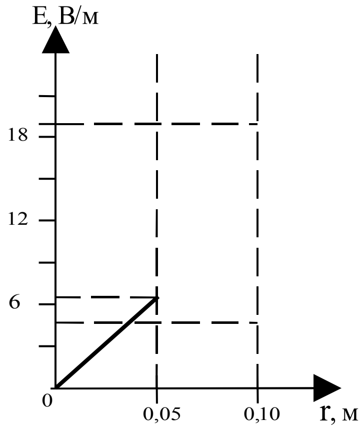
так как вне шара ε = 1.

Подставляя числовые данные, получим:

$$E_2 = \frac{10 \cdot 10^{-9} 5 \cdot 10^{-2} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 3} = 6{,}28 \text{ В/м},$$

$$E_2' = \frac{10 \cdot 10^{-9} 5 \cdot 10^{-2} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{3} = 18{,}8 \text{ В/м}.$$

3) Для точек, лежащих на сфере с радиусом r_3 теорема Остроградского-Гаусса записывается следующим образом:



$$E_3 4\pi r_3^3 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}, \text{ где } \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = q_{шара},$$

так как вспомогательная поверхность охватывает весь шар.

Отсюда следует: $E_3 = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_3^2}$.

Сделаем вычисления:

$$E_3 = \frac{10 \cdot 10^{-9} 125 \cdot 10^{-6} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{-2}} = 4{,}71 \text{ В/м}.$$

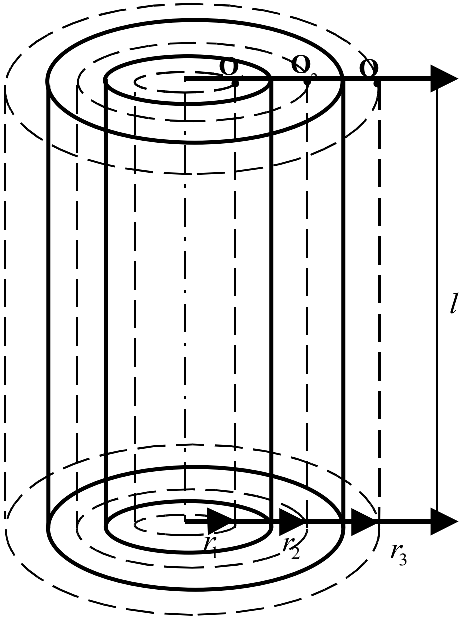
Ответ: $E_1 = 3{,}77$ В/м, $E_2 = 6{,}28$ В/м, $E_2' = 18{,}8$ В/м, $E_3 = 4{,}71$ В/м.
График зависимости E(r) представлен на рисунке.

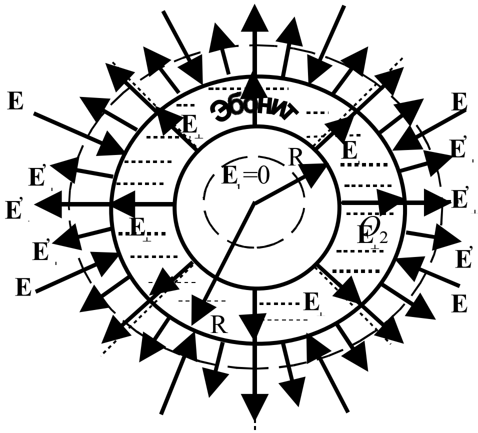
З - 4

Две длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусом R_1=2 см и R_2=4 см несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями τ_1=1нКл/м² и τ_2=–0,5нКл/м². Пространство между трубками заполнено эбонитом (ε =3). Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях r_1=1см, r_2=3см, r_3=5см от оси трубок. Построить график зависимости E от r.

Решение:

Проведем силовые линии электрических полей заряженных трубок. На рисунке справа показано поперечное сечение трубок – внутренней радиуса R_1 и внешней – радиуса R_2, а также схема





расположения силовых линий полей, созданных распределенными по поверхности трубок зарядами.

Символами: $\mathbf{E}_+$ – обозначено поле положительно заряженной внутренней трубки в заполненном эбонитом пространстве между трубками; $\mathbf{E}'_+$ – поле этой же трубки во внешнем пространстве; $\mathbf{E}_-$ – поле заряженной отрицательно внешней трубки. По расположению силовых линий – поля трубок можно считать симметричными и для расчета напряженности поля – применить теорему Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = q/\varepsilon\varepsilon_0 \text{ , где } \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \Phi \text{ ,}$$

– поток вектора напряженности **E** электрического поля через замкнутую поверхность S;

q – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри этой поверхности;

$1/\varepsilon_o = 4\pi\cdot 9\cdot 10^9$ м/ф – const в системе единиц СИ.

Через точки O_1, O_2, O_3 проведем вспомогательные поверхности таким образом, чтобы они были симметрично расположены относительно заряженных тел и силовые линии были перпендикулярны этим поверхностям. Таким требованиям удовлетворяют цилиндрические поверхности, коаксиальные данным трубкам. Тогда поток вектора **E** через замкнутую поверхность цилиндра можно представить в виде суммы потоков вектора **E** через боковую поверхность цилиндра и его основания:

$$\oint_{\mathbf{S}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = \oint_{\mathbf{S}_{\text{бок}}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} + 2\oint_{\mathbf{S}_{\text{осн}}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = \mathrm{E}\cdot 2\pi r\cdot\ell\,,$$

где потоки через основания цилиндра $\oint_{\mathbf{S}_{\text{осн}}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = 0$, так как векторы **E** и $d\mathbf{S}_{\text{осн}}$ взаимно перпендикулярны ($\mathbf{E}\perp d\mathbf{S}_{\text{осн}}$);

$2\pi r\cdot\ell = S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности цилиндра.

Следовательно, теорема Остроградского-Гаусса запишется таким образом:

$$\mathrm{E}\cdot 2\pi r\cdot\ell = \tau\cdot\ell/\varepsilon\varepsilon_o,$$

где $\tau\cdot l = q$ – заряд внутри замкнутой поверхности цилиндра.

1) Для точки O_1: $r_1 < R_1$,

$$E_1 2\pi\, r_1\ell = 0\,,$$

так как поверхность не охватывает заряда. Отсюда следует, что $E_1=0$.

2) Для точки O_2: $R_1 < r_2 < R_2$,

$$E_2 2\pi\, r_2\ell = \frac{\tau_1\,\ell}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\,.$$

Вспомогательная поверхность охватывает заряд, находящийся на внутренней трубке. Отсюда следует, что

$$E_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\,\varepsilon\,\varepsilon_0 r_2} = \frac{1\cdot 10^{-9}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}}{2\pi\cdot 3\cdot 3\cdot 10^{-2}} = 200\ \text{В/м}\,.$$

3) Для точки O_3: $r_3 > R_2$. Вспомогательная поверхность охватывает заряды на обеих трубках, $\varepsilon = 1$,

$$E_3 2\pi\, r_3\ell = \frac{(\tau_1 + \tau_2)\,\ell}{\varepsilon\,\varepsilon_0},\ \text{следовательно}$$

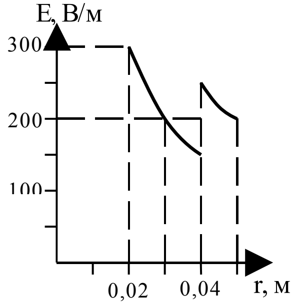
$$E_3 = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{2\pi\varepsilon_0 r_3} = \frac{(1-0{,}5)\cdot 10^{-9}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^9}{2\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}} = 180\ \text{В/м}.$$

Для построения графика нужно рассчитать напряженность поля в точках, находящихся на поверхности трубок.
По формулам:

$E_4 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}$ – напряженность поля на поверхности внутренней трубки, радиус которой R_1;

$E_4' = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$ – на поверхности внешней трубки внутри диэлектрика,

$E_5 = \dfrac{(\tau_1 + \tau_2)}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$ – снаружи.



Подставляя числовые данные, получим:

$$E_4 = \frac{10^{-9}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^9}{2\pi\cdot 3\cdot 2\cdot 10^{-2}} = 300\ \text{В/м},$$

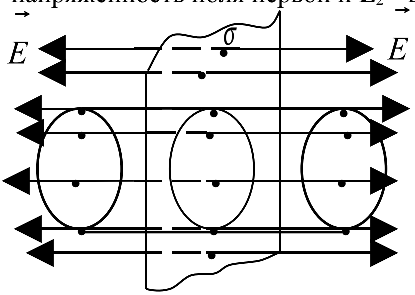
$$E_4' = \frac{10^{-9}\cdot 2\cdot 9\cdot 10^9}{3\cdot 4\cdot 10^{-2}} = 150\ \text{В/м},\quad E_5 = \frac{0{,}5\cdot 10^{-9}\cdot 2\cdot 9\cdot 10^9}{4\cdot 10^{-2}} = 225\ \text{В/м}.$$

3 - 5

Электрическое поле создано двумя бесконечными плоскостями, несущими одинаковый равномерно распределенный по площади заряд (σ =1нКл/м²). Определить напряженность поля: 1) между плоскостями 2) вне плоскостей. Построить график изменения напряженности поля вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

Решение:

Напряженность поля, создаваемого двумя плоскостями, можно определить по принципу суперпозиции: **E** = **E**$_1$ + **E**$_2$, где **E**$_1$ – напряженность поля первой и **E**$_2$ – второй плоскости.



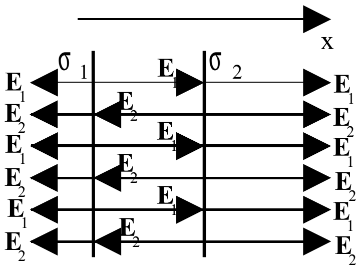
Напряженность поля, создаваемого одной заряженной плоскостью можно определить, используя теорему Остроградского-Гаусса, так как поле плоскости является симметричным (см. рис.). Для расчета **E** построим вспомогательную поверхность, таким образом, чтобы она была симметрична относительно плоскости, и силовые линии были бы перпендикулярны к ней. В данном случае такой поверхностью является цилиндр, образующие которого перпендикулярны плоскости, а основания ей параллельны. Теорема Гаусса в данном случае имеет вид

$$E \cdot 2S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0},$$

где $E \cdot 2S$ - поток вектора **E** через основания, S – площадь основания, $\sigma\ S$ - заряд внутри вспомогательной поверхности. Отсюда следует

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\,\varepsilon_0}.$$

Изобразим на рисунке поле двух плоскостей:



$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon\varepsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \quad \text{т.к.} \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad \text{то}\, E_1 = E_2.$$

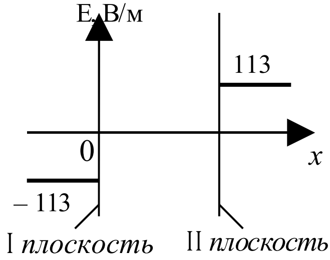
Напряженность поля:

1) между плоскостями

$E = E_1 - E_2 = 0$;

2) вне плоскостей

$$|E| = E_1 + E_2 = \frac{2\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$



После вычислений получаем:

$$|E| = \frac{10^{-9}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}}{1} = 113 \text{ В/м.}$$

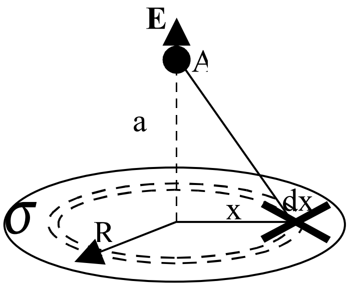
График представлен на рисунке.

Расчет напряженности и потенциала электрических полей, созданных непрерывным распределением зарядов

З - 6

Тонкий диск радиуса R равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ . Найти напряженность и потенциал поля в точке А, лежащей на оси диска на расстоянии а от него.

Решение.



Чтобы найти потенциал в точке А, надо применить принцип суперпозиции полей. Разобьем диск на элементарные кольца шириной dx . Площадь кольца радиуса x равна $2\pi x dx$, а заряд кольца - $\sigma \cdot 2\pi x dx$. Потенциал поля кольца равен сумме потенциалов, созданных всеми его точечными элементами. Последние равноудалены от точки А, на расстояние $\sqrt{a^2 + x^2}$ и создают поле в точке А с потенциалом

$$d\varphi = \frac{\sigma \cdot 2\pi x dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}} .$$

Интегрируя полученное выражение, определим потенциал диска:

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + R^2} - a\right).$$

Из соображений симметрии ясно, что вектор напряженности **E** направлен в точке А вдоль оси диска. Рассматривая величину “a” как переменную, получим

$$E = -\frac{d\varphi}{da} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right) .$$

Работа по перемещению заряда в электростатическом поле
З - 7

Поле создано зарядами $q_1=(10/3)\cdot10^{-9}$Кл и $q_2= -(10/3)\cdot10^{-9}$Кл, расстояние между которыми a=8см, расстояние точки А от заряда q_1– b=6см (см. рис.). Определить работу электрических сил по перемещению заряда $q=10^{-9}$Кл из точки А в точку В.

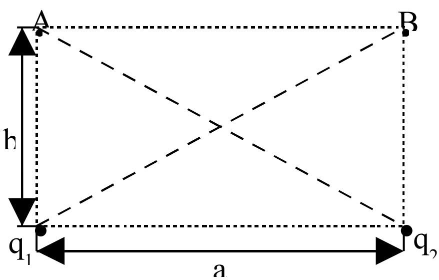
Решение:

Работа по перемещению электрического заряда из точки А в точку В

$$A = q(\varphi_A - \varphi_B),$$

где q – переносимый заряд, φ_A и φ_B – потенциалы поля в точках А и В.

Потенциал электрического поля в точке А равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых зарядами q_1 и q_2 в данной точке:



$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 .$$

Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом в какой-либо точке равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где q – заряд создающий поле, r – расстояние от заряда до данной точки. Следовательно:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 b};\ \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+b^2}},$$

и потенциал поля в точке А равен: $\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$

Потенциал поля в точке В равен: $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{q_2}{b}\right).$

Тогда работа по перемещению заряда q из точки A в точку B в поле зарядов q_1 и q_2 равна:

$$A = \frac{q \cdot (q_1 - q_2)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

После вычислений получим:

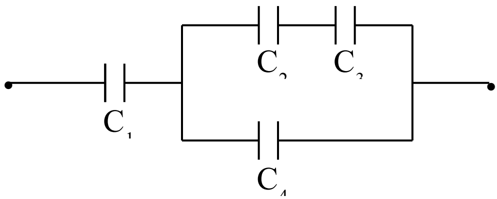
$$A = \frac{10^{-9} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{-9}}{4\pi}\left(\frac{10}{3} + \frac{10}{3}\right)\frac{10^{-9}}{10^{-2}}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{8^2 + 6^2}}\right) = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 4 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Электроёмкость. Конденсаторы

З - 8

Конденсаторы с ёмкостями C_1=2мкФ, C_2=2мкФ, C_3=3мкФ, C_4=1мкФ, соединены так, как показано на рисунке. Разность потенциалов на обкладках четвёртого конденсатора U_4=100 В. Найти заряды и разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора, а также общий заряд и разность потенциалов батареи конденсаторов.



Решение:

Заряд на обкладках конденсатора C_4 можно определить по формуле:

$$q_4 = C_4 U_4.$$

Конденсаторы C_2 и C_3соединены последовательно, поэтому заряды на этих конденсаторах одинаковы. Эти конденсаторы присоединены параллельно к конденсатору C_4. Следовательно, суммарное напряжение на этих конденсаторах равно $U_2+U_3=U_4$. Заряды на этих конденсаторах можно найти по формуле:

$$q_2 = q_3 = C' U_4,$$

где C'- общая ёмкость второго и третьего конденсаторов:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\text{, откуда } C' = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3}.$$

Тогда:

$$q_2=q_3=(C_2C_3)U_4/(C_2+C_3).$$

Конденсатор C_1 присоединён к группе конденсаторов C_2, C_3 и C_4 последовательно. Тогда заряд на этом конденсаторе будет равен суммарному заряду:

$$q_1= q_2+ q_4 .$$

Зная заряды, можно найти напряжение на каждом конденсаторе:

$$U_1=q_1/C_1;\ U_2=q_2/C_2;\ U_3=q_3/C_3;$$

Общий заряд батареи будет равен q_1. Напряжение на зажимах батареи равно: $U=U_1+U_4 = U_1+U_2+U_3$.

Подставляя числовые данные, получим:

$$q_4 = 1\cdot 10^{-6}\cdot 100 = 10^{-4}\text{Кл}$$

$$q_2 = q_3 = \frac{2\cdot 3\cdot 10^{-12}}{(2+3)\cdot 10^{-6}}\cdot 100 = 1{,}2\cdot 10^{-4}\text{Кл}$$

$$q_1 = 1{,}2\cdot 10^{-4} + 1\cdot 10^{-4} = 2{,}2\cdot 10^{-4}\text{Кл}$$

$$U_2 = \frac{1{,}2\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-6}} = 60\text{В};\ U_3 = \frac{1{,}2\cdot 10^{-4}}{3\cdot 10^{-6}} = 40\text{В};$$

$$U_1 = \frac{2{,}2\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-6}} = 110\text{В};\ U=110+60+40=210(\text{В}).$$

Ответ: $q_1=2{,}2\ 10^{-4}$ Кл, $U_1=110$ В; $q_2=1.2\ 10^{-4}$ Кл, $U_2=60$ В; $q_3=1.2\ 10^{-4}$ Кл, $U_3=40$ В; $q_4=10^{-4}$ Кл; $U=210$ В.

3 - 9

Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин $S=100$ см^2 и расстоянием между ними $d_1=1$ мм заряжен до $U=100$ В. Затем пластины раздвигают до расстояния $d_2=25$ мм. Найти энергию конденсатора до и после раздвижения пластин и произведённую при этом работу, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключается; б) отключается от источника.

Решение:

а) Если источник не отключается, то напряжение на пластинах конденсатора поддерживается постоянным и равным ЭДС источника. При раздвижении пластин конденсатора, его емкость уменьшается:

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d.$$

Следовательно, уменьшается и заряд на пластинах конденсатора:

$$\Delta q = (\Delta C)U = \varepsilon\varepsilon_0 S(1/d_2 - 1/d_1)U,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость ($\varepsilon = 1$); ε_o – электрическая постоянная; S – площадь пластин конденсатора; d_1 – первоначальное, d_2 – конечное расстояние между пластинами.

Количество заряда Δq необходимо перенести с положительно заряженной пластины конденсатора на отрицательно заряженную пластину против направления ЭДС источника. Это перемещение заряда производится за счет работы внешних сил и частично компенсируется уменьшением энергии конденсатора:

$$A_{вншн} = -\Delta q \cdot \varepsilon + \Delta W,$$

где $\varepsilon = U$ – ЭДС источника, $\Delta W = W_2 - W_1$ – изменение энергии конденсатора в результате раздвижения его пластин.

До раздвижения пластин энергия конденсатора равна:

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot U_1^2}{2 \cdot d_1}.$$

Энергия конденсатора после раздвижения пластин:

$$W_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot U_1^2}{2 \cdot d_2},$$

где d_2- расстояние между пластинами после их раздвижения. Тогда

$$A_{вншн} = -\varepsilon_0 S(1/d_2 - 1/d_1)U^2 + \varepsilon_0 S U^2(1/d_2 - 1/d_1)/2,$$

откуда: $A_{вншн} = \varepsilon_0 S\, U^2\, (1/d_1 - 1/d_2)/2.$

Подставляя числовые данные, получим:

$$W_1 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}} = 4{,}42 \cdot 10^{-7}\,Дж$$

$$W_2 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 1{,}77 \cdot 10^{-8}\,Дж$$

$$A_{вншн} = 4{,}42 \cdot 10^{-7} - 1{,}77 \cdot 10^{-8} = 42{,}43 \cdot 10^{-8}(Дж) = 4{,}24 \cdot 10^{-7}(Дж).$$

б) Если конденсатор отключается от источника, то заряд на пластинах остаётся постоянным, так как система замкнутая. В этом случае энергию удобно выражать через заряд. Энергия после раздвижения пластин равна:

$$W_2=q^2/(2C_2)\ ,$$

где $q = C_1U_1$– заряд конденсатора до отключения источника.

Тогда конечную энергию конденсатора можно выразить через его начальную энергию: $W_2 = \dfrac{C_1^2U_1^2}{2C_2} = W_1\dfrac{C_1}{C_2} = W_1\dfrac{d_2}{d_1}$.

Работа по раздвижению пластин:

$$A=W_2 - W_1= W_1(d_2 - d_1)/d_1.$$

Подставляя числовые данные, вычислим энергию после раздвижения пластин и произведённую при этом работу.

$$W_2 = 4{,}42\cdot 10^{-7}\frac{25}{1} = 1{,}11\cdot 10^{-5}\,\text{Дж}$$

$$A = 1{,}11\cdot 10^{-5} - 4{,}42\cdot 10^{-7} = 111\cdot 10^{-7}\,\text{Дж} = 106{,}6\cdot 10^{-7}\,\text{Дж}$$

Ответ**:** а) W_1=4,42 10^{-7} Дж; W_2=1,77 10^{-8} Дж; А= 4,24 10^{-7} Дж;

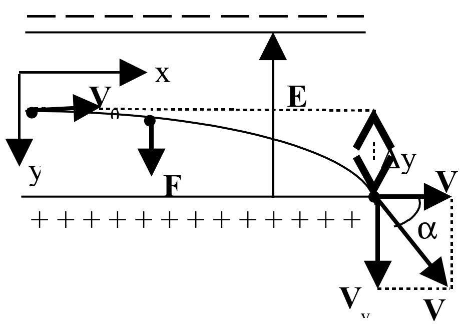
б) W_1=4,42 10^{-7} Дж; W_2=1,11 10^{-5} Дж; А= 1,07 10^{-5} Дж;

Движение заряженных частиц в электрическом поле
3 - 10

Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинкам со скоростью $V_0=10^7$м/с. Напряжённость поля в конденсаторе E=100В/см, длина конденсатора l=5см. Найти: 1) силу, действующую на электрон в электрическом поле конденсатора; 2) ускорение, с которым движется электрон в поле конденсатора; 3) время движения электрона внутри конденсатора; 4) отклонение электрона полем конденсатора; 5) величину и направление скорости электрона при вылете его из конденсатора.

Решение:

Попадая в конденсатор, электрон будет притягиваться к положительно заряженной пластине. Электрическое поле конденсатора будет действовать на электрон с силой



$$\mathbf{F} = (-e)\mathbf{E},$$

где $(-e)$ - заряд электрона; **E** – напряженность эл-кого поля конденсатора.

В направлении этой силы электрон получает ускорение

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = (-e)\mathbf{E}/m,$$

где m- масса электрона .

Движение электрона внутри конденсатора можно разложить на два движения: одно – по инерции, равномерное со скоростью V_0, направленное вдоль оси X параллельно пластинам конденсатора; другое – равноускоренное в направлении оси Y перпендикулярно пластинам.

За время своего движения электрон отклоняется от своего первоначального направления на расстояние

$$\Delta y = \frac{at^2}{2} \quad ,$$

где t – время движения электрона внутри конденсатора:

$$t = \frac{\ell}{V_0} \quad ,$$

где ℓ – длина пластин конденсатора .

Траекторией движения электрона внутри конденсатора является парабола. Скорость электрона при вылете из конденсатора направлена по касательной к траектории и может быть вычислена по формуле:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

где $V_x=V_0$; $V_y=at$ и составляет с первоначальным направлением движения угол α:

$$tg\alpha = \frac{V_y}{V_x}.$$

Подставляя в формулы числовые данные, получим:

$$F = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^4 = 1{,}6\cdot 10^{-15}\ \text{Н};$$

$$a = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^4}{9{,}1\cdot 10^{-31}} = 1{,}76\cdot 10^{15}\ \text{м/с}^2; \qquad t = \frac{5\cdot 10^{-2}}{10^7} = 5\cdot 10^{-9}\ \text{с};$$

$$\Delta y = \frac{1{,}76\cdot 10^{15}\cdot 25\cdot 10^{-18}}{2} = 22\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 2{,}2\ \text{см};$$

$$V = \sqrt{10^{14} + 1{,}76^2\cdot 10^{30}\cdot 25\cdot 10^{-18}} = 1{,}33\cdot 10^7\ \text{м/с};$$

$$tg\alpha = \frac{1{,}76\cdot 10^{15}\cdot 5\cdot 10^{-9}}{10^7} = 0{,}88, \qquad \alpha = 41^\circ 20';$$

Ответы: $F=1{,}6\cdot 10^{-15}$Н; $a=1{,}75\cdot 10^{15}$м/с^2; $t=5\cdot 10^{-9}$с; $\Delta y=2{,}2$см;
$V=1{,}33\cdot 10^7$м/с; $\alpha=41°20'$.

И. Магнитостатика

Основные формулы

- Индукция магнитного поля, созданного элементом тока (I$d\mathbf{l}$) в точке на расстоянии $\mathbf{r}$ от него (закон Био – Савара – Лапласа):

$$d\mathbf{B} = (\mu\mu_0/4\pi)\,[(Id\mathbf{l})\,\mathbf{r}]/r^3$$

- Принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i \quad \text{или} \quad \mathbf{B} = \int d\mathbf{B}\ .$$

- Индукция магнитного поля:

а) бесконечно длинного прямого проводника с током на расстоянии r от него –

$$B = \mu\mu_0 I / (2\pi r);$$

б) отрезка проводника с током –

$$B = (\mu\mu_0/ 4\pi)\ I/r\ (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 – углы между направлениями тока в проводнике и соответствующими радиус-векторами $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$, проведенными от концов отрезка к точке, в которой определяется магнитное поле;

в) в центре кругового витка радиуса R с током –

$$B = \mu_0 I / (2R);$$

- Сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_Л = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\ \mathbf{B}]\ .$$

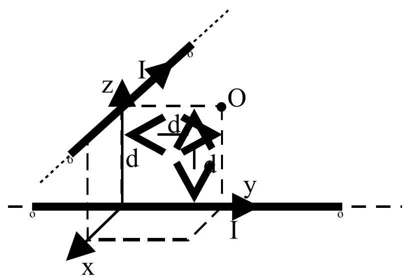
- Сила Ампера:

$$d\mathbf{F}_A = [(I\ d\mathbf{l})\ \mathbf{B}]\ .$$

Магнитное поле постоянного тока (поле прямого тока)

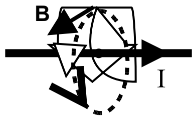
И - 1

По двум длинным прямолинейным проводам, находящимся в воздухе на расстоянии d=8 см перпендикулярно друг другу текут токи I=10А каждый. Определить индукцию **B** магнитного поля, создаваемого токами в точке О, равноудаленной от обоих проводников (см. рис.).



В

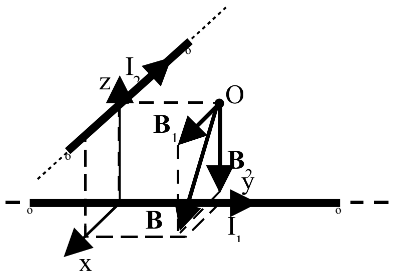
Решение:



Направление вектора индукции **B** магнитного поля, созданного элементом проводника с током I, определяется в соответствии с правилом буравчика.

Индукция **B** магнитного поля в т. О определяется по принципу суперпозиции :

$$\mathbf{B}_{\Sigma} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$$



где $\mathbf{B}_1$– вектор индукции магнитного поля, созданного током I_1 первого проводника;

$\mathbf{B}_2$– вектор индукции магнитного поля, созданного током I_2 второго проводника.

Таким образом, векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ взаимно перпендикулярны. Поэтому модуль вектора индукции результирующего магнитного поля определяется по теореме Пифагора:

$$B_{\Sigma} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}\,.$$

С учетом того, что токи, протекающие в двух проводниках одинаковы, а также точка О, в которой определяется магнитная индукция, расположена на одинаковом расстоянии от проводников, то $B_1 = B_2 = B$ и

$$B_{\Sigma} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2B^2} = B\sqrt{2}\,.$$

Индукция магнитного поля, созданного током I бесконечно длинного прямого проводника в точке, расположенной на расстоянии r от проводника, определяется соотношением:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$Гн/м – магнитная постоянная в системе единиц СИ;

μ – магнитная проницаемость среды.

Отсюда следует:

$$B_{\Sigma} = \frac{\sqrt{2}\mu\,\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 8 \cdot 10^{-2}} = 35 \text{ мкТл.}$$

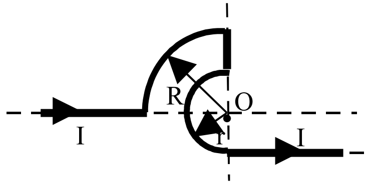
(Для воздушной среды магнитная проницаемость $\mu = 1$).

Ответ: $B_{\Sigma} = 35$ мкТл.

Магнитное поле постоянного тока (поле изогнутого проводника)

И - 2

Бесконечно длинный проводник изогнут так, как это изображено на рисунке. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого в точке O током I = 80A, текущим по проводнику. Принять r = R/2, где R=1м.

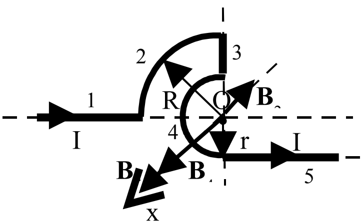


Решение:

Магнитная индукция $\mathbf{B}_\Sigma$ в т. O определяется по принципу суперпозиции: $\mathbf{B}_\Sigma=\Sigma\mathbf{B}_i$.

Разобьём проводник на 5 частей: два прямолинейных участка проводника (1 и 5), одним концом уходящих в бесконечность; участок 2 – четверть окружности радиусом R; отрезок (3); участок 4 – полуокружность радиуса r=R/2. Тогда вектор индукции $\mathbf{B}_\Sigma$ результирующего магнитного поля :

$$\mathbf{B}_\Sigma=\Sigma\mathbf{B}_i=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_3+\mathbf{B}_4+\mathbf{B}_5,$$



где $\mathbf{B}_i$ – магнитные индукции полей в точке O, создаваемых токами, текущими соответственно по каждому из этих участков проводника.

Индукции $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_3$ магнитных полей токов первого и третьего участков равны нулю, так как токи в этих участках направлены вдоль оси, проходящей через точку O; вектор $\mathbf{B}_2$ в точке O направлен, в соответствии с правилом буравчика, перпендикулярно плоскости чертежа, от нас, а векторы $\mathbf{B}_4$ и $\mathbf{B}_5$ – перпендикулярно плоскости чертежа, к нам. Таким образом, не равные нулю векторы магнитной индукции $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_4$, $\mathbf{B}_5$, направлены параллельно оси x, перпендикулярной плоскости чертежа и модуль вектора индукции $\mathbf{B}_\Sigma$ результирующего магнитного поля равен:

$$B_\Sigma = -B_2 + B_4 + B_5,$$

где знак «–» перед B_2 означает, что этот вектор направлен против направления оси x.

Магнитная индукция второго участка B_2 определяется по формуле для магнитной индукции в центре кругового проводника радиуса R с током I:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

С учетом того, что магнитная индукция B_2 создана четвертью кругового проводника, выражение приобретает вид:

$$B_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

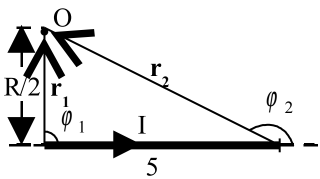
Магнитная индукция B_4 четвертого участка, являющегося полуокружностью радиуса R/2, определяется также:

$$B_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2 \cdot R/2}.$$

Магнитная индукция B_5, созданная током I отрезка проводника (5) определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Для данного участка $r_0 = R/2$; с учетом того, что проводник (5) полубесконечный:



$$\varphi_1 = \pi/2 \quad \text{и} \quad \cos\varphi_1 = 0;$$
$$\varphi_2 = \pi \quad \text{и} \quad \cos\varphi_2 = -1;$$

Тогда: $$B_5 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot R/2}.$$

Результирующая магнитная индукция B_Σ поля в точке O:

$$B_\Sigma = B_4 + B_5 - B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2 \cdot R/2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot R/2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Подставив числовые значения, получим результирующую магнитную индукцию $B_\Sigma = 53{,}75$ мкТл.

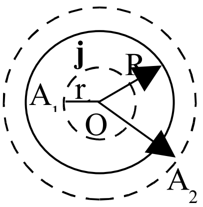
И - 3

По сплошному бесконечному цилиндрическому проводнику радиуса R течет ток плотности **j** . Рассчитать индукцию магнитного поля внутри и вне проводника.

Решение.

Используем теорему о циркуляции вектора индукции **B**:

$$\oint_l \mathrm{Bd}l = \mu_0 \sum I .$$



Рассмотрим точку A_1, расположенную на расстоянии r_1 от оси проводника. Проведем окружность радиуса r_1 с центром O на оси проводника. Сумма токов, охватываемая окружностью равна $j \cdot \pi r^2$. Учтем, что окружность является силовой линией. Вследствие симметрии модуль вектора индукции одинаков во всех точках окружности и направлен по касательной, следовательно

$$\oint_l \mathrm{Bd}l = \oint_l \mathrm{Bd}l\cos\alpha = \mathrm{B}l \quad (\cos\alpha = 1)$$

Итак, $$B 2\pi r_1 = \mu_0 j\pi r_1^2 ,$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\mu_0 j r_1$$

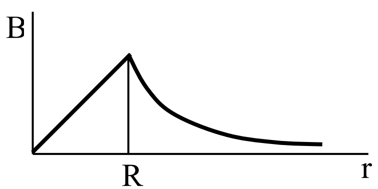
откуда

Рассмотрим точку A_2, расположенную на расстоянии $r_2 > R$ от оси проводника. По теореме о циркуляции находим

$$B_2 2\pi_2 = \mu_0 j\pi R ,$$

откуда $$B_2 = \frac{\mu_0 j R^2}{2 r_2} .$$

График зависимости B от r представлен на рисунке:



Сила Ампера
И - 4

Между полюсами электромагнита создается магнитное поле с индукцией B=0,1Тл. По проводу длиной L=7см, размещенному под углом $\alpha=30^0$ к направлению магнитного поля, течет ток I=70A. Найти силу F, действующую на провод со стороны магнитного поля.

Решение:

На элемент длины d**L** проводника с током I в магнитном поле с индукцией **B** действует сила Ампера:

$$d\mathbf{F}=[Id\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}].$$

Направление этой силы определяется по правилу векторного произведения: вектор d**F** направлен перпендикулярно плоскости векторов Id**L** и **B** так, чтобы из конца вектора δ**F** поворот от вектора (Id**L**) к вектору **B** был виден против часовой стрелки.

Модуль силы Ампера вычисляется по формуле:

$$dF= IdL\cdot B\cdot \sin\alpha,$$

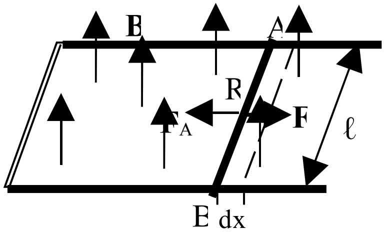
где α – угол между направлением тока и вектором **B**.

Модуль силы Ампера, действующей на весь проводник:

$$F = IB\int_0^L \sin\alpha \; dL = IBL\sin\alpha = 70\cdot 0{,}1\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5 = 2{,}45\,(H).$$

И -5

По П– образному проводнику, расположенному в горизонтальной плоскости, может скользить без трения перемычка AB длиной ℓ, массой m и сопротивлением R. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией **B**, направленном вертикально. В момент времени t = 0 на перемычку начали действовать постоянной горизонтальной силой **F**, и перемычка начала перемещаться вправо. Найти зависимость скорости перемычки от времени. Индуктивность контура и сопротивление П-образного проводника пренебрежимо малы.



При перемещении перемычки на расстояние dx = v·dt площадь контура возрастает на dS = ℓ·dx , что вызывает изменение магнитного потока

$$d\Phi = B \cdot dS .$$

В контуре возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot \ell \frac{dx}{dt} = B\ell v .$$

По цепи пойдет ток

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{B\ell v}{R},$$

который согласно правилу Ленца, своим магнитным полем должен мешать изменению магнитного потока, поэтому на перемычку будет действовать сила Ампера, направленная против внешней приложенной силы **F**

$$F_A = IB\ell = \frac{\varepsilon_i}{R} B\ell = \frac{B^2\ell^2 v}{R} .$$

Применив II закон Ньютона для описания движения перемычки, получим:

$$ma = F - F_A \quad \text{или} \quad m\frac{dv}{dt} = F - \frac{B^2\ell^2 v}{R} .$$

Разделив переменные, проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int_0^v \frac{dv}{F - \frac{B^2\ell^2}{R} v} = \int_0^t \frac{dt}{m} ,$$

$$\frac{-R}{B^2\ell^2}\ln\left|F-\frac{B^2\ell^2}{R}v\right|_0^v=\frac{t}{m},$$

откуда зависимость скорости перемычки от времени имеет вид:

$$v=\frac{RF}{B^2\ell^2}(1-\exp(-\frac{B^2\ell^2}{mR}t)).$$

Сила Лоренца
И - 5

Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 1кВ, влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению его движения. Индукция магнитного поля B = 1,19 мТл. Найти радиус R окружности, по которой движется электрон, период обращения T и момент импульса L электрона. (Действием силы тяжести можно пренебречь).

Решение:

На движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_{Л}= q[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}],$$

где q – заряд частицы, **v** – её скорость, **B** – индукция магнитного поля.

Направление силы Лоренца определяется по правилу векторного произведения: вектор силы $\mathbf{F}_л$, действующей на положительно заряженную движущуюся частицу, направлен перпендикулярно плоскости векторов **v** и **B** так, чтобы из конца вектора силы $\mathbf{F}_л$ поворот от вектора скорости **v** к вектору магнитной индукции **B** был виден против часовой стрелки.

Примеч.: для отрицательно заряженной частицы – направление силы $\mathbf{F}_л$ противоположно направлению силы $\mathbf{F}_л$, действующей на положительно заряженную движущуюся частицу.

Модуль силы Лоренца:

$$F_Л= q\cdot v\cdot B\cdot \sin\alpha,$$

где α - угол, образованный вектором скорости движущейся частицы и вектором магнитной индукции. Поскольку начальная скорость электрона перпендикулярна вектору магнитной индукции, то sinα=1 и траектория электрона лежит на плоскости. По второму закону Ньютона сила Лоренца сообщает электрону нормальное ускорение

$$mv^2/R = q\cdot v\cdot B.$$

где q - заряд, v - скорость и m - масса электрона; B – магнитная индукция; R – радиус кривизны траектории.

Отсюда выразим радиус кривизны траектории R:

$$R = mv/qB.$$

Период обращения электрона по окружности

$$T = 2\pi R/v = 2\pi m/qB.$$

Электрон приобретает кинетическую энергию за счет работы, совершаемой ускоряющим электрическим полем:

$mv^2/2 = qU_{уск.}$, откуда импульс электрона $mv = (2mqU_{уск.})^{1/2}$.

Момент импульса электрона

$$L = mvR =(mv)^2/qB = (2mqU_{уск.})/qB.$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$R=mv/qB =(2mU_{уск.}/q)^{1/2}/B =(2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^3/1{,}6\cdot 10^{-19})^{1/2}/1{,}19\cdot 10^{-3}\cong 9 \text{ см},$$

$$T = 2\pi m/qB = 2\cdot 3{,}14\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}/1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}19\cdot 10^{-3} = 3\cdot 10^{-8}\text{ с},$$

$$L= 2mU_{уск.}/B = 2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^3/1{,}19\cdot 10^{-3} = 1{,}53\cdot 10^{-24}\text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

К. Законы постоянного тока

Основные формулы

- Закон Ома:

а) для однородного участка цепи – $I = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \dfrac{U}{R}$,

б) для неоднородного участка цепи – $I = \dfrac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon_{12}}{R}$,

в) для замкнутой (полной) цепи – $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$,

где $(\varphi_1 – \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи;
U – напряжение на участке цепи;
ε_{12} – ЭДС источников тока, входящих в участок цепи;
ε - ЭДС всех источников тока замкнутой цепи;
R – сопротивление внешнего участка цепи, r – внутреннее сопротивление источника тока.

- Сопротивление однородного проводника постоянного сечения:

$$R = \rho l / S ,$$

где ρ - удельное сопротивление вещества проводника; l – длина проводника, S – площадь его поперечного сечения .

- Сопротивление системы проводников:

а) $R = \sum R_i$ – при последовательном соединении проводников;
б) $1/ R = \sum (1/ R_i)$ – при параллельном соединении проводников.

- Первое правило Кирхгофа:

$$\sum I_i = 0 ,$$

т.е. алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

- Второе правило Кирхгофа:

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_I ,$$

т.е. алгебраическая сумма напряжений $U_i = I_i R_i$ на всех участках произвольного замкнутого контура разветвленной цепи равна алгебраической сумме электродвижущих сил источников в этом контуре.

- Работа тока на участке цепи:

$$A = I U t = I^2 R t = (U^2/ R) t.$$

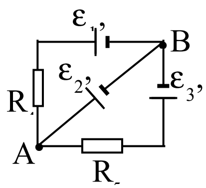
- Закон Джоуля – Ленца:

$$Q = I^2 R t ,$$

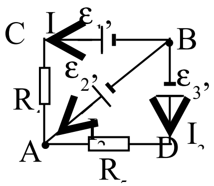
где Q – количество теплоты, выделяющейся в проводнике за время t.

К - 1

Определить силу тока, текущего через элемент ε_2, если ε_1=1В, ε_2 =2В, ε_3 =3В, r_1=1Ом, r_2=0,5Ом, r_3=1/3 Ом, R_4=1 Ом, R_5=1/3 Ом.



Решение:



Сначала нужно выбрать произвольно направления токов в ветвях. Если ошиблись в выборе направления какого-нибудь тока, то в окончательном решении этот ток получится отрицательным, если выбрали правильное направление тока, то он получится положительным.

Применим первый закон Кирхгофа для узлов электрической цепи:

$$\Sigma\, I_i = 0,$$

т.е.– сумма токов в узле равна нулю.(Правило знаков: токи, подходящие к узлу, можно считать положительными, отходящие от узла – отрицательными.)

В данной схеме два узла: А и В. Для узла А по первому закону Кирхгофа получим:

$$I_1+I_2+I_3=0.$$

Применим второй закон Кирхгофа:

$$\Sigma(IR)_i = \Sigma\, \varepsilon_i,$$

т.е. – алгебраическая сумма падений напряжения вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников тока.

Он справедлив для замкнутых контуров. Для применения второго закона Кирхгофа необходимо выбрать (произвольно) направление обхода контуров. (Выберем направление обхода контуров против часовой стрелки). Падение напряжения на i-том сопротивлении берётся со знаком “+”, если направление тока на нем совпадает с направлением обхода, и со знаком “–”, если направление тока противоположно направлению обхода. ЭДС источника тока считается положительной, если обход идёт от знака “–” к “+” внутри источника тока.

В данной схеме таких контуров три: АСВА, АВDА, АСВDА.

В контуре АВСА два источника с ЭДС ε_1 и ε_2 и три сопротивления (r_1, r_2, R_4). ε_1– положительна, а ε_2 – отрицательна:

$$I_1(r_1+R_4) - I_2r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Для контура ADBA:

$$I_2r_2 - I_3(r_3+R_5) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Запишем полученную систему уравнений:

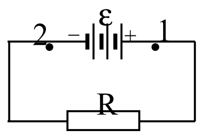
$$\begin{cases} I_1+I_2+I_3=0 \\ I_1(r_1+R_4) - I_2r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ I_2r_2 - I_3(r_3+R_5) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{cases}$$

Решая систему, получим: $I_1 = -0{,}625$А, $I_2 = -0{,}5$А, $I_3 = 1{,}125$А.

Токи I_1 и I_2 отрицательны, это значит, что их направления выбраны ошибочно. Ток I_3 – положительный, следовательно, его направление выбрано верно.

К - 2

Аккумулятор с ЭДС ε=2,6В замкнут на внешнее сопротивление R и даёт ток I=1,0 А. При этом разность потенциалов между полюсами аккумулятора U=2,0В. Найти тепловую мощность, выделяемую в аккумуляторе и мощность, которую развивают в нём электрические силы.



Решение.

Количество тепла Q, выделяемое в батарее при прохождении в ней тока I, найдём по закону Джоуля –Ленца:

$$Q = I^2 \cdot r \cdot t,$$

где r – внутреннее сопротивление батареи. Внутреннее сопротивление r батареи определим по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}, \text{ откуда } r = \frac{\varepsilon - U}{I},$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2 = I \cdot R$ – падение напряжения во внешней цепи.

Тепловая мощность, выделяемая в аккумуляторе:

$$P_1 = Q/t = I^2(\varepsilon - U)/I = I(\varepsilon - U).$$

Работу электрических сил внутри аккумулятора определим по формуле:

$$A = -U \cdot I \cdot t\ .$$

Знак минус отражает то обстоятельство, что положительные заряды движутся внутри аккумулятора от меньшего потенциала φ_2 к большему –

φ_1, т.е. против электрических сил. При этом положительную работу $A_{стр}$ совершают сторонние силы, перемещая заряды внутри аккумулятора.

Мощность, развиваемая электрическими силами внутри аккумулятора:

$$P_2 = -\frac{UIt}{t} = -UI.$$

Произведём вычисления:

$$P_1 = I(\varepsilon - U) = 1 \cdot (2{,}6 - 2) = 0{,}6 \text{ Вт}$$

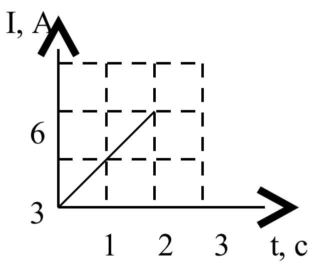
$$P_2 = -UI = -2 \cdot 1 = -2 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P_1 = 0{,}6$ Вт; $P_2 = -2$ Вт.

К - 3

Сила тока в проводнике сопротивлением R=20 Ом нарастает в течении времени Δt=2с по линейному закону от I_0=0 до $I_к$=6А. Определить теплоту Q_1, выделившуюся в этом проводнике за первую секунду и Q_2 – за вторую секунду, отношение Q_1/Q_2, а также заряд, прошедший по проводнику за время Δt=2с.

Решение:



Закон Джоуля – Ленца для переменного тока справедлив для бесконечно малого интервала времени и записывается в виде:

$$dQ = I^2 R dt,$$

где сила тока I является функцией времени: $I = k \cdot t$.

Коэффициент пропорциональности k, характеризующий скорость изменения силы тока, равен:

$$k = \Delta I/\Delta t = 6/2 = 3 \text{ (А/с)}.$$

Тогда закон Джоуля – Ленца примет вид:

$$dQ = k^2 R t^2 dt.$$

Полное количество теплоты, выделившееся в данном проводнике за конечный интервал времени Δt, вычислим как интеграл:

$$Q = k^2 R \int_{t_2}^{t_1} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R \left(t_2^3 - t_1^3\right).$$

Произведём вычисления:

$$Q_1 = \frac{1}{3}3^2 \cdot 20(1-0) = 60 \text{ Дж}; \qquad Q_2 = \frac{1}{3}3^2 \cdot 20(8-1) = 420 \text{ Дж}.$$

Следовательно $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{420}{60} = 7$, т.е. за вторую секунду выделилось теплоты в семь раз больше, чем за первую.

Заряд, прошедший по проводнику за время Δt:

$$q = \int_0^{\Delta t} I \cdot dt = \int_0^{\Delta t} kt \cdot dt = \frac{k \cdot \Delta t^2}{2} = \frac{3 \cdot 2^2}{2} = 6 \text{ (Кл)}.$$

Ответ: $Q_1 = 60$ Дж; $Q_2 = 420$ Дж; $Q_2/Q_1 = 7$; $q = 6$ Кл.

Л. Электромагнетизм

Основные формулы

- Поток индукции магнитного поля сквозь контур:

$$\Phi = \mathbf{B}\,\mathbf{S} \qquad \text{или} \qquad \Phi = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{S}.$$

- Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле:

$$A = I\,\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ - поток магнитной индукции, пересеченной проводником при его движении.

- ЭДС индукции, возникающей в замкнутом контуре при всяком изменении потока магнитной индукции сквозь площадь, ограниченную этим контуром:

$$\varepsilon = -\, d\Phi/dt.$$

- ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon = -\, L\, dI/dt,$$

где L – индуктивность (коэффициент самоиндукции) контура.

- Индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0\, \mu\, n^2 l\, S,$$

где μ - магнитная проницаемость сердечника; n - число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; l – длина соленоида; S – площадь его поперечного сечения.

- Энергия магнитного поля контура с током:

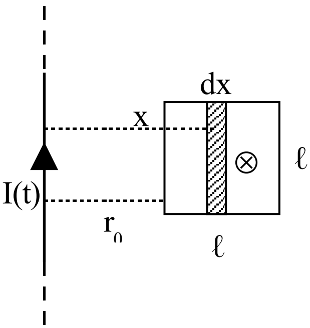
$$W = L\, I^2/2.$$

Л - 1

В плоскости квадратной рамки с сопротивлением R=7Ом и стороной ℓ=20 см параллельно одной из сторон лежит прямой бесконечно длинный проводник на расстоянии r_0 = 20 см от ближайшей стороны. Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = \alpha \cdot t^3$, где α =2А/с. Определить силу тока в рамке в момент времени t = 10 с.

Решение

Ток в рамке возникает в результате появления в ней ЭДС индукции за счет изменения магнитного потока сквозь плоскость рамки. Магнитное поле в плоскости рамки создается током в прямом бесконечно длинном проводнике, расположенном параллельно одной из сторон рамки.



Индукция магнитного поля **B**, созданного бесконечным прямым проводником с током I(t) на расстоянии x от него, равна

$$B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x}.$$

Найдем поток вектора магнитной индукции **B** сквозь плоскость рамки:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r_0}^{r_0+\ell} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot \ell \cdot dx = \frac{\mu_0 \alpha t^3 \ell}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{\ell}{r_0}\right).$$

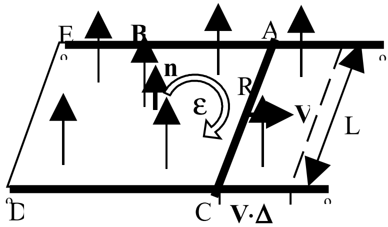
Так как магнитный поток с течением времени изменяется, то в рамке возникает ЭДС индукции и появляется ток

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = 3\frac{\mu_0 \alpha t^2 \ell}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{\ell}{r_0}\right) =$$

$$= \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 0{,}2}{2\pi \cdot 7} \ln 2 \cong 0{,}24\text{А}.$$

Л - 2

Перемычка АС длиной L и сопротивлением R движется по короткозамкнутым проводящим рельсам со скоростью **V** в плоскости, перпендикулярной силовым линиям однородного магнитного поля, индукция которого **В**. Определить ЭДС электромагнитной индукции и силу тока, возникающих в контуре.



Решение:

По закону Фарадея –Ленца ЭДС электромагнитной индукции определяется формулой:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

За время dt площадь, ограниченная контуром ACDE, увеличивается на

$$dS = LVdt,$$

что приводит к изменению потока вектора магнитной индукции **B**, пронизывающего площадь **S** на величину

$$d\Phi = \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = B\cdot dS\cdot\cos\alpha,$$

где α - угол между **B** и вектором нормали **n** к площади контура. В нашем случае $\alpha = 0$ и $\cos\alpha = 1$.

Таким образом: $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{BLVdt}{dt} = -BVL.$

Знак минус показывает, что магнитное поле индукционного тока противодействует изменению магнитного потока. В нашем случае ток пойдет по перемычке от А к С. Ток по закону Ома:

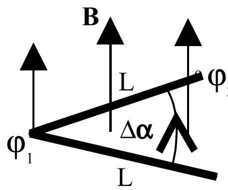
$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{BLV}{R}.$$

Замечание: В случае разомкнутого контура электродвижущая сила равна разности потенциалов на концах движущегося проводника.

Л - 3

В магнитном поле, индукция которого B, вращается стержень длинной L. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна силовым линиям магнитного поля. Найти разность потенциалов, возникающую на концах стержня, если он вращается с частотой n.

Решение:



При повороте за время dt стержень описывает сектор площадью $dS=L^2 d\alpha/2$, что приводит к изменению магнитного потока на

$$d\Phi=\mathbf{B}d\mathbf{S}=BL^2 d\alpha/2.$$

Изменение магнитного потока вызывает ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}BL^2\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2}BL^2\omega,$$

где $\omega = 2\pi n$ - угловая скорость. При разомкнутой цепи

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = |\varepsilon_i|.$$

Таким образом, разность потенциалов на концах проводника будет равна:

$$\Delta\varphi = |\varepsilon_i| = \pi BL^2 n.$$

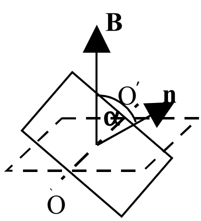
Л - 4

В однородном магнитном поле с индукцией **B** равномерно вращается рамка с угловой скоростью **ω**. Площадь рамки S. Ось вращения перпендикулярна к силовым линиям магнитного поля. Определить ЭДС индукции в рамке.

Решение:

Поток Φ магнитной индукции **B** сквозь плоскость рамки **S** по определению равен:

$$\Phi = \mathbf{BS} = BS\cos\alpha,$$



где α – угол между вектором магнитной индукции **B** и нормалью к плоскости рамки.

При вращении рамки поворачивается и вектор **n** нормали к ее поверхности. Угол поворота связан с угловой скоростью $\alpha = \omega t$ (при равномерном вращении). Тогда $\Phi = BS\cos\omega t$.

ЭДС электромагнитной индукции равна:

$\varepsilon_i = -\,d\Phi/dt = BS\omega\sin\omega t$. Максимальная ЭДС $\varepsilon_{max} = BS\omega$.

Замечание: если в рамке N витков, то $\varepsilon_i = NBS\omega\sin\omega t$.

Учесть также связь угловой скорости и частоты вращения $\omega = 2\pi n$.

Л- 5

Проволочный контур сопротивлением R помещен в однородное магнитное поле. Определить заряд, прошедший по контуру при быстром изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром от Φ_1 до Φ_2. Контур содержит N витков провода.

Решение:

При изменении магнитного потока в каждом витке возникает электродвижущая сила индукции:

$$\varepsilon_i = -\,d\Phi/dt, \text{ а в N витках } \varepsilon_i = -\,N(d\Phi/dt).$$

При этом по контуру течет ток:

$$I = \varepsilon_i/R.$$

Но с другой стороны:

$$I = dq/dt,$$

где dq – заряд, прошедший за малое время dt по контуру. Таким образом:

$$dq/dt = -(N/R)(d\Phi/dt) \quad \text{или}$$

$$dq = -N\,d\Phi/R.$$

После интегрирования получим:

$$q = N\,(\Phi_1 - \Phi_2)/R.$$

Примечание: поскольку $\Phi = \mathbf{BS} = BS\cos\alpha$, то изменение магнитного потока может быть вызвано изменением любой из величин **B** (индукции), **S** (площади) или α – угла между направлением векторов **B** и **S**.

Л - 6

Соленоид представляет собой катушку с плотной намоткой проводом. Площадь поперечного сечения катушки S, её длина ℓ, число витков – N. Найти индуктивность соленоида.

Решение:

Рассмотрим соленоид, длина которого значительно больше его поперечных размеров, так, что его можно в первом приближении считать бесконечно длинным.

При протекании по нему тока I внутри соленоида возбуждается магнитное поле, индукция которого равна $B = \mu\mu_0 In$, где μ - магнитная проницаемость материала сердечника, n – число витков провода на единицу длины. Магнитный поток через каждый виток равен $\Phi = \mathbf{BS}$, а полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом:

$$\Psi = N\Phi = n\ell BS = \mu\mu_0 n^2 \ell SI,$$

где ℓ – длина соленоида, а $n\ell=N$ – полное число витков. Таким образом, магнитный поток Ψ пропорционален силе тока $\Psi = LI$. Коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью соленоида. Итак:

$$LI = \mu\mu_0 n^2 \ell SI,$$

$$\text{откуда } L = \mu\mu_0 n^2 \ell S = \mu\mu_0 SN^2/\ell,$$

где S – площадь сечения соленоида; в случае неферромагнитного сердечника $\mu=1$; $\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная в системе СИ.

Л - 7

Катушка (соленоид) с площадью поперечного сечения S и длиной ℓ содержит N витков провода. Определить ЭДС самоиндукции, возникающую при изменении тока в катушке со скоростью dI/dt.

Решение:

Ток в катушке создает магнитное поле с индукцией **B** и каждый виток пронизывается магнитным потоком $\Phi=\mathbf{BS}$. При изменении магнитного потока возникает ЭДС самоиндукции равная, по закону Фарадея – Ленца,

$$\varepsilon_{си} = N\varepsilon_i = N(-d\Phi/dt) = -d\Psi/dt,$$

где $\Psi = N\Phi = LI$ – поток магнитной индукции, сцепленный со всеми витками соленоида (потокосцепление); L – индуктивность соленоида.

Следовательно:

$$\varepsilon_{си} = -\,d\Psi/dt = -\,L\cdot dI/dt,$$

где dI/dt – скорость изменения тока в катушке.

Л - 8

В катушке индуктивностью 0,2 Гн ток возрастал по закону $I=0{,}1\cdot t^2$. Найти ЭДС самоиндукции и энергию магнитного поля в катушке в момент времени t = 3 с.

Решение:

ЭДС самоиндукции находится по закону:

$$\varepsilon_{си} = -L \cdot dI/dt,$$

где dI/dt – скорость изменения тока.

В данном случае

$dI/dt = 0{,}2 \cdot t$. Тогда $\varepsilon_{си} = -L \cdot 0{,}2 \cdot t = -0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 3 = -0{,}12$ В.

Энергия магнитного поля, созданного в катушке индуктивности током I, определяется формулой:

$$W = LI^2/2.$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$W = \frac{L \cdot (0{,}1 \cdot t^2)^2}{2} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}01 \cdot 3^4}{2} = 81 \cdot 10^{-3} \text{Дж}.$$

Л - 9

Цепь состоит из источника постоянной ЭДС, сопротивления R и катушки с индуктивностью L. Установить закон изменения тока в момент включения и выключения рубильника.

Решение:

В момент включения и выключения рубильника изменяется магнитное поле в катушке, что приводит к появлению ЭДС самоиндукции и индукционного тока. Согласно правилу Ленца направление индукционного тока такое, что созданное им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока. В момент выключения рубильника магнитное поле в катушке уменьшается, поэтому возникает индукционный ток того же направления, что и ток источника, чтобы, согласно правилу Ленца, препятствовать уменьшению магнитного поля. При выключении источника тока в цепи действует ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_{si} = -d\Psi/dt = -L \cdot dI/dt.$$

По закону Ома:

$$IR = -L \cdot dI/dt.$$

Разделим переменные и проинтегрируем это дифференциальное уравнение:

$$\int_{I_0}^{0}\frac{dI}{I} = \int_{0}^{t}\left(-\frac{R}{L}\right)dt\,;\quad \ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t\,;\ \text{откуда}$$

$$I = I_0e^{-(R/L)t}\ \ (1).$$

При замыкании цепи индукционный ток идет навстречу току от источника, поэтому:

$$I = I_0 - I_0e^{-(R/L)t}\ \ (2).$$

Графическая зависимость токов размыкания (1) и замыкания (2) от времени приведена на графиках:

Л – 10

(1) (2)

Соленоид с индуктивностью L=0.1Гн и сопротивлением $R=2\cdot10^{-2}$Ом замыкается на источник ЭДС ε_0 =2В, внутреннее сопротивление которого ничтожно мало. Какой заряд пройдет через соленоид за первые 5 секунд после замыкания цепи.

Решение

После замыкания цепи в соленоиде возникает ЭДС самоиндукции $\varepsilon_{си}$, в результате чего ток в цепи возрастает постепенно. По второму закону Кирхгофа:

$$IR = \varepsilon_0 + \varepsilon_{си} = \varepsilon_0 - L\frac{dI}{dt},\ \text{откуда}\quad I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)..$$

Заряд, прошедший по проводнику за время dt равен

$$dQ = I\cdot dt = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)\cdot dt\ .$$

Проинтегрировав это выражение по времени, получим:

$$Q = \int_0^{\tau} \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)dt = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(t + \frac{L}{R}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)\Big|_0^{\tau} =$$

$$= \frac{2}{2\cdot 10^{-2}}\left(5 + \frac{0{,}1}{2\cdot 10^{-2}}\left(\exp\left(-\frac{2\cdot 10^{-2}}{0{,}1}5\right) - 1\right)\right) = 184\text{Кл}$$

М. Волновая оптика

- Скорость света в среде:

$$v = c / n ,$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления среды.

- Оптическая длина пути световой волны:

$$L = n\,l ,$$

где l – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

- Оптическая разность хода двух световых волн:

$$\Delta = L_1 - L_2 .$$

- Связь разности фаз колебаний $\Delta\varphi$ с оптической разностью хода Δ волн:

$$\Delta\varphi = 2\pi\,(\Delta/\lambda).$$

- Условие максимумов интенсивности света при интерференции:

$$\Delta = \pm k\,\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

- Условие минимумов интенсивности света при интерференции:

$$\Delta = \pm(2\,k + 1)\,\lambda/2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

- Условие минимумов интенсивности света при дифракции от щели, на которую падает нормально плоская волна:

$$a \sin\varphi = \pm k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

условие максимумов:

$$a \sin\varphi = \pm(2k + 1)\,\lambda/2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где a – ширина щели; φ - угол дифракции; k – порядок спектра; λ - длина падающей волны.

- Условие главных максимумов интенсивности света при дифракции на дифракционной решетке:

$$d \sin\varphi = \pm k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где d – период дифракционной решетки.

- Закон Брюстера:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_Б = n_{21} ,$$

где $\alpha_Б$ – угол падения, при котором отразившийся от диэлектрика свет полностью поляризован; $n_{21}=n_2/n_1$ – показатель преломления второй среды относительно первой.

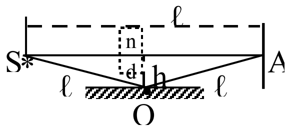
- Закон Малюса: $I = I_0 \cos^2\varphi,$

где I_0 – интенсивность плоско поляризованного света, падающего на анализатор; φ - угол между плоскостью поляризации падающего света и плоскостью пропускания анализатора.

М - 1

В точку А экрана от точечного источника S монохроматического света длиной волны λ=0,5 мкм приходят два луча: непосредственно от источника – луч SA и от зеркала, параллельного лучу SA (см. рис.). Расстояние от источника до экрана l_1=1м, расстояние от луча SA до плоскости зеркала h =2 мм. Определить: а) что будет наблюдаться в точке А экрана – усиление или ослабление интенсивности света; б) как изменится интенсивность света в точке А, если на пути луча SA перпендикулярно ему поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку (n=1,55) толщиной d=6мкм.

Решение:



В точке А происходит наложение двух волн: прямой, прошедшей путь SA, равный ℓ_1 и отраженной от зеркала в точке О, прошедшей путь SOA, равный ($\ell_2 + \ell_3$). Так как эти две волны являются частями одной волны, испущенной источником S, то они являются когерентными; поэтому при сложении этих волн возникает интерференционная картина.

Усиление или ослабление интенсивности в той или иной точке экрана зависит от числа m полуволн, укладывающихся на оптической разности хода Δ:

$$m = \Delta/(\lambda/2).$$

Если m-целое четное, то интенсивность будет максимальной; если m-целое нечетное, то интенсивность минимальна. При дробном m происходит или частичное усиление (если m ближе к четному числу) или частичное ослабление.

а) Оптическая длина пути световой волны L=nℓ, где ℓ-геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

Оптическая разность хода будет складываться из двух частей. Геометрической разности $\Delta = (\ell_2+\ell_3) - \ell_1$ (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности хода - λ/2, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении в точке О от оптически более плотной среды (поверхность зеркала).

Так как $$\ell_2 = \ell_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\ell_1^{\,2} + (2h)^2},$$

то $$(\ell_2 + \ell_3) - \ell_1 = \ell_1\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\ell_1}\right)^2} - \ell_1 = \ell_1\left(\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\ell_1}\right)^2} - 1\right).$$

Величина $(2h/\ell_1) \ll 1$, поэтому для вычисления корня можно воспользоваться приближенной формулой $(1+a)^{1/2} \approx 1+a/2$ (если $a \ll 1$). Применив ее, получим:

$$(\ell_2 + \ell_3) - \ell_1 \approx \ell_1\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2h}{\ell_1}\right)^2 - 1\right) = \frac{2h^2}{\ell_1}.$$

Тогда оптическая разность хода:

$$\Delta = (\ell_2 + \ell_3) - \ell_1 + \frac{\lambda}{2} = \frac{2h^2}{\ell_1} + \frac{\lambda}{2}.$$

Зная Δ, найдем

$$m = \Delta/(\lambda/2) = 4h^2/\lambda\ell_1 + 1 = 4\cdot 4\cdot 10^{-6}/0{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 1 + 1 = 33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке A наблюдается минимум интенсивности.

б) Стеклянная пластинка толщиной d, поставлена на пути луча SA, изменит оптическую длину пути.

Теперь оптическая длина пути L будет складываться из геометрической длины пути ℓ_1-d и оптической длины пути nd луча в самой пластинке, т.е.

$$L = (\ell_1 - d) + nd = \ell_1 + (n-1)d.$$

Оптическая разность хода лучей:

$$\Delta = (\ell_2+\ell_3) - L + \lambda/2 = (\ell_2+\ell_3) - \ell_1 - (n-1)d + \lambda/2$$

Зная Δ, найдем

$$m = \Delta/(\lambda/2) = 4h^2/\lambda\ell_1 + 1 - 2(n-1)d/\lambda =$$
$$= 33 - 2\cdot 0{,}55\cdot 6\cdot 10^{-6}/0{,}5\cdot 10^{-6} = 19{,}8.$$

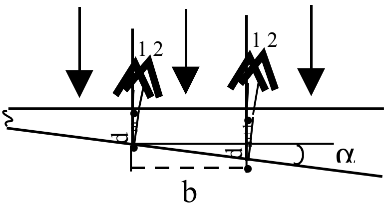
Число половин длин волн в этом случае оказалось дробным, но ближе к целому четному числу 20, чем к целому нечетному числу 19. Из этого следует, что в точке A будет частичное усиление.

М - 2

На стеклянный клин ($n=1,5$) с преломляющим углом $\alpha=40''$ нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda=600$нм. Определить в интерференционной картине расстояние между двумя соседними минимумами.

Решение:

Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается от его верхней и нижней грани (рис.). Так как угол клина мал, то отраженные лучи 1 и 2 практически параллельны.



Отраженные лучи когерентны и на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы. Условие минимума для клина запишется в общем случае

$$2dn\cos\beta + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

где ($m=0,1,2,..,$)– целые числа, d-толщина клина в месте темной полосы, соответствующей номеру m, β – угол преломления, $\Delta_{доп}=\lambda/2$ – дополнительная разность хода, обусловленная отражением световой волны 1 от оптически более плотной среды (поверхности клина).

Угол падения, согласно условию, равен нулю.

Тогда условие минимума запишется в виде:

$$2dn = m\lambda \text{, откуда } d = \frac{m\lambda}{2n},$$

и для соседних полос $d_m = \dfrac{m\lambda}{2n}$, $d_{m+1} = \dfrac{(m+1)\lambda}{2n}$.

Из рисунка видно, что $\sin\alpha = \dfrac{d_{m+1} - d_m}{b}$.

Так как преломляющий угол клина очень мал, то $\sin\alpha \approx \alpha$. Поставив в формулу для угла α значения толщин d_{m+1} и d_m, получим

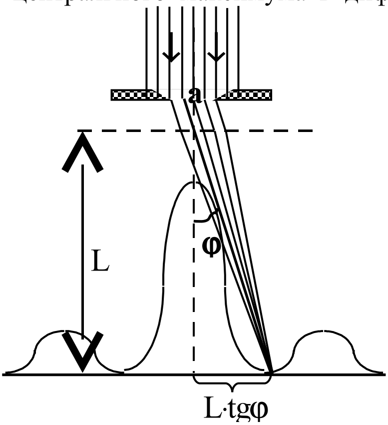
$$\alpha = \frac{(m+1)\lambda - m\lambda}{2bn} = \frac{\lambda}{2bn}\text{, откуда}$$

$$b = \frac{\lambda}{2n\alpha} = \frac{6\cdot 10^{-7}\cdot 2,06\cdot 10^{6}}{2\cdot 1,5\cdot 40} = 1,03 \text{ мм.}$$

(Угол α выражается в радианах. Известно, что 1рад=$(2,06\cdot 10^5)''$).

М - 3

На щель шириной a=0,1мм, нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника (λ=0,6мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии L=1м.



Решение.

Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности (см. рис.).

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдается под углами φ, определяемыми условием:

$$a \cdot \sin\varphi = \pm k\lambda ,$$

где k-порядок минимума, который в нашей задаче равен единице, a-ширина щели, λ -длина волны падающего света.

Расстояние между двумя минимумами на экране определим по чертежу: $\ell = 2L \cdot \mathrm{tg}\varphi$.

При малых углах $\mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, поэтому $\ell \approx 2L \cdot \sin\varphi = 2L\dfrac{k\lambda}{a}$.

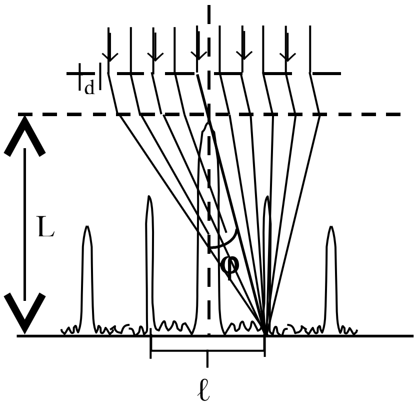
Произведем вычисления, получим ℓ=1,2см.

М - 4

На дифракционную решетку нормально к её поверхности падает параллельный пучок света с длинной волны λ=0,5мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на L=1м. Расстояние между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, ℓ=20,2см. Определить: 1)постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на 1см; 3)число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Решение:

Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий каждому дифракционному максимуму, связаны соотношением:



$$d \cdot \sin\varphi = k\lambda ,$$

где k-порядок спектра, а в случае монохроматического света – порядок максимума.

В условии задачи k=1, $\sin\varphi \approx tg\varphi$ (при малых углах отклонения). Из рисунка видно, что

$$tg\varphi = \frac{\ell}{2L} \cdot$$

Тогда условие максимума запишется $d \cdot \frac{\ell}{2L} = \lambda$, откуда постоянная дифракционной решетки:

$$d = \frac{2L\lambda}{\ell} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}}{20{,}2 \cdot 10^{-2}} = 4{,}95 \cdot 10^{-6} м .$$

Число штрихов на 1см найдем по формуле

$$n = \frac{1}{d} = \frac{1}{4{,}95 \cdot 10^{-6}} = 2{,}02 \cdot 10^{5} м^{-1} = 2{,}02 \cdot 10^{3} см^{-1} .$$

Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение k_{max}, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей не может превышать 90^0.

Из условия максимума для дифракционной решетки запишем

$$k_{max} = \frac{d}{\lambda}\sin\varphi = \frac{4{,}95 \cdot 10^{-6}}{0{,}5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1 = 9{,}9.$$

Число k обязательно должно быть целым. В то же время, оно не может быть равным 10, так как при этом значении sin φ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно, k_{max}=9.

Общее число максимумов, наблюдаемых слева и справа от центрального максимума, равно $2k_{max}$. Если учесть также центральный максимум, получим общее число максимумов $N=2k_{max}+1=19$.

Для определения угла φ_{max} отклонения лучей, соответствующих k_{max}, выразим $\sin\varphi_{max}$ этого угла из условия максимума дифракционной решетки:

$$\sin\varphi_{max} = \frac{k_{max}\lambda}{d}. \text{ Отсюда } \varphi_{max} = \arcsin\left(\frac{k_{max}\lambda}{d}\right).$$

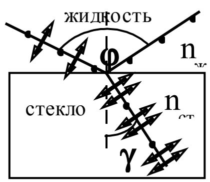
Подставляя значения всех величин, получим $\varphi_{max}=65{,}4^0$.

М - 5

Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света образует угол $\varphi=97^0$ с падающим пучком. Определить показатель преломления жидкости, если отраженный свет максимально поляризован. Абсолютный показатель преломления стекла $n_{ст}=1{,}5$.

Решение.

Согласно закону Брюстера, пучок света, отраженный от диэлектрика, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному показателю преломления, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = n_{21}$, где n_{21}-показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).



Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = n_{21} = n_2/n_1$.

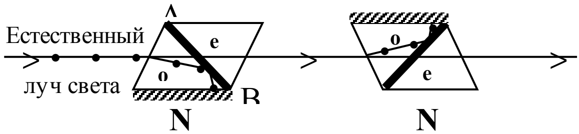
Так как угол падения равен углу отражения, то $\alpha = \varphi/2 = 97/2 = 48{,}5^o$, откуда $n_1 = \dfrac{n_2}{\operatorname{tg}48{,}5^0} = \dfrac{1{,}5}{1{,}13} = 1{,}33.$

М - 6

Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет $\varphi=60^0$. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность I_0 естественного света: 1) при прохождении через один николь N_1; 2) при прохождении через оба николя (коэффициент поглощения света в николе k=0,05). Потери на отражение света не учитывать.

Решение.

1. Естественный луч света, падающий на входную грань призмы



Николя (см. рисунок), расщепляется в результате двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (главного сечения). Плоскость колебаний обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок света (о) в результате полного отражения от границы АВ отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок (е) проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения.

Таким образом, интенсивность света, прошедшего через первую призму Николя, равна:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - k) .$$

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность I_0 естественного света, падающего на первый николь, на интенсивность I_1 поляризованного света, вышедшего из первого николя:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2I_0}{I_0(1 - k)} = \frac{2}{1 - k} = \frac{2}{0{,}95} = 2{,}1 .$$

Таким образом, интенсивность уменьшится в 2,1 раза.

2. Плоско поляризованный пучок света интенсивности I_1 падает на второй николь N_2 и также расщепляется на два пучка различной интенсивности: (о) и (е).Обыкновенный пучок полностью поглощается призмой, поэтому интенсивность его нас не интересует.

Интенсивность I_2 необыкновенного пучка, вышедшего из призмы N_2 , определяется законом Малюса (без учета поглощения света во втором николе):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi ,$$

где φ - угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке I_1 и плоскостью пропускания николя N_2.

Учитывая потери интенсивности света при поглощении во втором николе, получаем:

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2\varphi .$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_2 света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k)\cos^2\varphi} = \frac{I_0}{\frac{1}{2}I_0(1-k)^2\cos^2\varphi} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\varphi} .$$

Произведем вычисления: $\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-0{,}05)^2\cos^2 60^0} = 8{,}86.$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

Н. Квантовая оптика

- Закон Стефана – Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4,$$

где R_e – энергетическая светимость абсолютно черного тела, имеющего термодинамическую температуру T; σ - постоянная Стефана – Больцмана.

- Энергия фотона:

$$\varepsilon = h\nu \quad \text{или} \quad \varepsilon = \hbar\omega ,$$

где h – постоянная Планка; ν – частота фотона; $\hbar$ – постоянная Планка, деленная на 2π; ω - циклическая частота.

- Масса фотона:

$$m = \varepsilon / c^2 = h / (c\lambda) ,$$

где c – скорость света в вакууме; λ - длина волны фотона.

- Импульс фотона:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{c} = (h / \lambda)\mathbf{e}_c = \hbar\mathbf{k} ,$$

где $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)\,\mathbf{e}_c$ – волновой вектор; $\mathbf{e}_c$ – единичный вектор направления распространения света.

- Формула Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + T_{max} = A + mv_{max}^2 /2 ,$$

где $h\nu$ - энергия фотона; A – работа выхода электрона; T_{max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

- Красная граница фотоэффекта:

$$\nu_0 = A / h \quad \text{или} \quad \lambda_0 = hc /A,$$

где ν_0 – минимальная частота света, при которой еще возможен фотоэффект; λ_0 – максимальная длина волны света, при которой еще возможен фотоэффект.

- Формула Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \Lambda_к (1 - \cos\theta) = 2\,\Lambda_к \sin^2 \theta/2 ,$$

где λ' - длина волны фотона, рассеянного свободным электроном массы m_0 на угол θ; λ - длина волны падающего фотона; $\Lambda_к = h/m_0c = 2{,}436$ пм – Комптоновская длина волны электрона.

- Давление света при нормальном падении света на поверхность:

$$P = E_e\,(1 + \rho)/\,c ,$$

где E_e – энергетическая освещенность поверхности; ρ - коэффициент отражения.

Тепловое излучение

Н - 1

Найти солнечную постоянную k, т.е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца T=5800 K. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно чёрного тела.

Решение:

Энергетическая светимость абсолютно чёрного тела определяется формулой Стефана-Больцмана:

$$R_0 = \sigma T^4.$$

Мощность излучения вычисляется по формуле:

$$N = R_0 S_{сл},$$

где $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$Вт/(м^{2}К^4) - постоянная Стефана-Больцмана, $S_{сл}=4\pi r_{сл}^2$ - площадь излучающей поверхности (поверхности Солнца, $r_{сл}=6{,}96\cdot10^8$м - радиус Солнца.), T - абсолютная температура излучающей поверхности.

Считая, что вся испускаемая Солнцем в единицу времени лучистая энергия равномерно распределяется по внутренней поверхности сферы $S_{зм}$ радиуса, равного радиусу орбиты $r_{орб}$ Земли, получим:

$$R_0 S_{сл} = k\cdot S_{зм} \text{ откуда } k = R_0(r_{сл}/r_{орб})^2 \text{ или}$$

$$k = \sigma T^4\,(r_{сл}/r_{орб})^2.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$k = \frac{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 5{,}8^4 \cdot 10^{12} \cdot \left(6{,}96 \cdot 10^8\right)^2}{\left(1{,}5 \cdot 10^{11}\right)^2} = 1{,}37 \cdot 10^3\,\text{Вт}/\text{м}^2.$$

Фотоэффект

Н - 2

Определить энергию, максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра ультрафиолетовым излучением с длинной волны λ=0,1мкм. и красную границу фотоэффекта.

Решение:

Энергию фотоэлектронов и максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + T_{max},$$

где ε – энергия фотонов, падающих на поверхность металла, А – работа выхода (для серебра А = 4,7 эВ), T_{max} - максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов. (1 эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж).

Энергию фотона ультрафиолетового излучения определим по формуле:

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda,$$

где h – постоянная Планка ($h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с), ν и λ – частота и длина волны электромагнитного излучения, с – скорость света ($c=3\cdot10^{8}$м/с).

В данном случае энергия фотона ε=12,41 эВ, что много меньше энергии покоя электрона (E_0=0,51МэВ). Следовательно, для данного случая воспользуемся классической формулой для нахождения кинетической энергии и скорости фотоэлектрона:

$$T_{max}= \varepsilon - A=T_{max}=19{,}86\cdot10^{-19}-7{,}52\cdot10^{-19}=1{,}234\cdot10^{-18}\text{ Дж}$$

$$\frac{m_0 v_{max}^2}{2} = T_{max}\text{, откуда } v_{max} = \sqrt{\frac{2T_{max}}{m_0}};$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2\cdot1{,}324\cdot10^{-18}}{9{,}1\cdot10^{-31}}} = 1{,}65\cdot10^{6}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Красная граница фотоэффекта λ_{max} находится из условия:

$$A_{вых} = hc/\lambda_{max}\text{, откуда}$$

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{A_{вых}} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{7{,}52\cdot 10^{-19}} = 2{,}6\cdot 10^{-7}\,м.$$

Н - 3

На фотоэлемент с катодом из лития падает свет с длинной волны λ=150 нм. Найти наименьшее значение задерживающей разности потенциалов $U_з$, которую нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратить фототок.

Решение:

Запишем закон Эйнштейна для фотоэффекта:

$$hc/\lambda = A + mV^2_{max}/2$$

где h- постоянная Планка, c- скорость света в вакууме, λ- длина волны, A- работа выхода электрона из лития (A=2,39 эВ), $T=mV^2_{max}/2$- кинетическая энергия вылетевших с поверхности металла фотоэлектронов.

Фототок прекратится тогда, когда кинетическая энергия фотоэлектронов будет равна работе электрического поля по торможению электронов:

$$T=mV^2_{max}/2=A_{эл}=eU_з,\ \text{или}\ hc/\lambda=A+eU_з,$$

где e- заряд электрона; $U_з$- задерживающий потенциал.

($h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с; $c=3\cdot 10^{8}$ м/с; $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл).

$$U_з = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{A}{e},$$

$$U_з = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{1{,}5\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} - 2{,}39 = 5{,}885В.$$

Комптон – эффект

Н - 4

В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta=90^0$. Энергия рассеянного фотона ε_2=0,35 Мэв. Определить энергию фотона ε_1 до рассеяния и энергию, приходящуюся на электрон отдачи.

Решение:

Для определения энергии первичного фотона воспользуемся формулой Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0 c}\left(1 - \cos\theta\right),$$

где $\Delta\lambda$ – изменение длины волны фотона в результате рассеяния на свободном электроне; h- постоянная Планка, c- скорость света, m_0- масса покоя электрона, θ- угол рассеяния фотона, λ_1- длина волны падающего фотона, λ_2- длина волны рассеянного фотона.

Энергия фотона $\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$, поэтому $\lambda_1 = \dfrac{hc}{\varepsilon_1}$, $\lambda_2 = \dfrac{hc}{\varepsilon_2}$.

С учётом этого запишем $\Delta\lambda$ как:

$\dfrac{hc}{\varepsilon_2} - \dfrac{hc}{\varepsilon_1} = \dfrac{h}{m_0 c}\left(1 - \cos\theta\right)$. Умножим на $\times \dfrac{1}{hc}$, получим:

$\dfrac{1}{\varepsilon_2} - \dfrac{1}{\varepsilon_1} = \dfrac{1}{m_0 c^2}\left(1 - \cos\theta\right)$, откуда $\dfrac{1}{\varepsilon_1} = \dfrac{1}{\varepsilon_2} - \dfrac{1}{m_0 c^2}\left(1 - \cos\theta\right)$.

Т.к. $\cos 90^\circ = 0$, то $\dfrac{1}{\varepsilon_1} = \dfrac{1}{\varepsilon_2} - \dfrac{1}{m_0 c^2}$, или $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_2 \cdot m_0 c^2}{m_0 c^2 - \varepsilon_2}$.

.

Подставив числовые значения, получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}35 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{8{,}19 \cdot 10^{-14} - 5{,}6 \cdot 10^{-14}} = 17{,}74 \cdot 10^{-14}\,\text{Дж} = 1{,}11\,\text{Мэв}$$

Энергия, приходящаяся на электрон отдачи:

$$T_e = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 1{,}11 - 0{,}35 = 0{,}76 \text{ (Мэв)}.$$

Н - 5

На какой угол рассеялся γ-квант с энергией ε=0,8 МэВ в результате столкновения с покоившимся электроном, если известно, что скорость электрона отдачи составляет V=0,6 c?

Решение:

Если скорость V электрона близка к скорости света ($c=3\cdot10^8$м/с), то кинетическую энергию электрона вычисляем по релятивистской формуле:

$$T = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2,$$

где $m_0=9,1\cdot 10^{-31}$ кг - масса покоя электрона, $m = m_0[1 - (V/c)^2]^{-1/2}$ – масса электрона, движущегося со скоростью V .

Запишем закон сохранения энергии при комптоновском эффекте:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + T,$$

где ε_1- энергия падающего фотона, ε_2- энергия рассеянного фотона.

Энергия фотона связана с длиной волны формулой:

$$\varepsilon = hc/\lambda,$$

откуда длина волны падающего фотона:

$$\lambda_1=hc/\ \varepsilon_1\ ,$$

где $h=6,62\cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с – постоянная Планка.

Проведём вычисления:

$$\lambda_1 = \frac{6,62\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{0,8\cdot 1,6\cdot 10^{-13}} = 1,55\cdot 10^{-12}\text{м}$$

$$T = 9,1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}\left(\frac{1}{\sqrt{1-0,36}} - 1\right) = 20,475\cdot 10^{-15}\text{Дж} = 0,128\text{МэВ}$$

$$\varepsilon_2=0,8\text{ МэВ} - 0,128\text{ МэВ}=0,672\text{ МэВ}=1,075\cdot 10^{-13}\text{ Дж.}$$

Вычислим длину волны рассеянного фотона:

$$\lambda_2=hc/\ \varepsilon_2 = 1,85\cdot 10^{-12}\text{ м.}$$

Изменение длины волны при комптоновском эффекте:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta),$$

где $\Delta\lambda = 0,297\cdot 10^{-12}\text{м}$; $\dfrac{h}{m_0c} = 2,42\cdot 10^{-12}\text{м} = \lambda_c$, отсюда

$$1-\cos\theta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}, \text{ или } \cos\theta = 0,877;\ \theta = 31,9^0.$$

Фотоны

Н - 6

Определить энергию ε, массу m и импульс p фотона с длиной волны λ=1,5нм.

Решение:

Энергия ε фотона, имеющего длину волны λ:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{1{,}5\cdot 10^{-9}} = \frac{1{,}324\cdot 10^{-16}}{1{,}6\cdot 10^{-16}} = 0{,}8275 кэВ,$$

где h-постоянная Планка; c- скорость света в вакууме.

Импульс фотона:

$$P = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{1{,}5\cdot 10^{-9}} = 4{,}41\cdot 10^{-25} кг\cdot м/с.$$

Массу фотона определим из закона, связывающего энергию частицы и ее массу:

$$E = mc^2, \text{ откуда } m_ф = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{1{,}324\cdot 10^{-16}}{9\cdot 10^{16}} = 1{,}47\cdot 10^{-33} кг.$$

Давление света

Н - 7

Пучок монохроматического света с длинной волны λ=700 нм и мощностью излучения $Ф_e$=0,8 Вт падает нормально на зеркальную поверхность. Определить: 1) силу давления F, испытываемую этой поверхностью; 2) число фотонов, ежесекундно падающих на поверхность.

Решение:

Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления на площадь поверхности: F=Ps.

Световое давление:

$$P=E_e(\rho+1)/c,$$

где: E_e– энергетическая освещённость; c – скорость света в вакууме; ρ-коэффициент отражения. Тогда:

$$F=E_eS(\rho+1)/c, \text{ но } E_eS=Ф_e=0{,}8 \text{ Вт по условию.}$$

Для зеркальной поверхности ρ=1. В результате получим:

$$F= Ф_e(\rho+1)/c =0{,}8(1+1)/3\cdot 10^8 = 5{,}33\cdot 10^{-9} Н.$$

Произведение энергии ε одного фотона на число фотонов n, ежесекундно падающих на поверхность, равно мощности излучения, т.е.

потоку излучения $\Phi_e = \varepsilon \cdot n$; $\varepsilon = hc/\lambda$; $\Phi_e = n(hc/\lambda)$, где h-постоянная Планка ($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж/с). Отсюда:

$$n = \frac{\Phi_e \lambda}{hc} = \frac{0{,}8 \cdot 7 \cdot 10^{-7}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 2{,}82 \cdot 10^{18} c^{-1}.$$

О. Квантовая механика

Основные формулы:

- Дебройлевская длина волны частицы с импульсом р:

$$\lambda = h / p = 2\pi \hbar / p.$$

- Соотношение неопределенностей:

а) $\Delta x \, \Delta p_x \geq \hbar$ (для координаты и импульса);

где Δx – неопределенность координаты; Δp_x – неопределенность проекции импульса на ось X;

б) $\Delta E \, \Delta t \geq \hbar$ (для энергии и времени),

где ΔE – неопределенность энергии; Δt – время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

- Одномерное уравнение Шрёдингера для стационарных состояний:

$$d^2 \Psi / dx^2 + (2m/\hbar^2)(E - U)\Psi = 0,$$

где Ψ - волновая функция, описывающая состояние частицы; m – масса частицы; E – полная энергия; U – потенциальная энергия частицы.

- Условие нормировки волновой функции:

$$\int |\Psi(x)|^2 dx = 1,$$

где интегрирование производится по всей области определения волновой функции $\Psi(x)$.

- Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2:

$$\varpi = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx$$

- Решение уравнения Шрёдингера для частицы массы m, заключенной внутри одномерного, бесконечно глубокого, прямоугольного потенциального ящика:

а) при $0 \leq x \leq L$, где потенциальная энергия частицы $U = 0$, собственная нормированная волновая функция имеет вид –

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi n}{L} x ,$$

а собственное значение энергии частицы в этом состоянии равно –

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}$$

где n – квантовое число (номер квантового состояния); L– ширина ящика;

б) вне ящика, при $x \le 0$ и $x \ge L$, где потенциальная энергия $U = \infty$,
$\Psi(x) = 0$.

- Обобщенная формула Бальмера, позволяющая найти частоты ν и длины волн λ, соответствующие линиям спектра излучения водорода и водородоподобных ионов, имеет вид:

$$\nu = c / \lambda = c\, R\, Z^2(1/m^2 - 1/n^2),$$

где $n > m$; c – скорость света в вакууме; $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ *м*$^{-1}$ – постоянная Ридберга; Z – порядковый номер элемента.

- Длины волн спектров водородоподобных ионов:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где Z – порядковый номер элемента, R-постоянная Ридберга, k- номер уровня на который происходит переход электрона, n- номер уровня, с которого переходит электрон.

Волны де Бройля

О - 1

Найти длину волны де Бройля для электрона, обладающего кинетической энергией: 1) T=100 эВ; 2)T=3,0 МэВ.

Решение:

Длина волны де Бройля для частицы, имеющей импульс **p,** равна:

$$\lambda_{дБ} = \frac{h}{p},$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Следовательно, задача сводится к выражению импульса **P** электрона через его кинетическую энергию T. Решение задачи зависит от того, классической или релятивистской частицей является электрон.

Если кинетическая энергия электрона $T \ll m_0c^2$, где $m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ – энергия покоя электрона, то электрон является классической частицей; значит, его импульс и кинетическая энергия связаны соотношением:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{или} \quad p = \sqrt{2mT}.$$

Если кинетическая энергия электрона $T \ge m_0c^2$, то электрон считается релятивистской частицей и в этом случае импульс связан кинетической энергией соотношением:

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{T\left(2m_0c^2 + T\right)}\ .$$

Таким образом, при T = 100 эВ « m_0c^2, получим:

$$\lambda_1 = h/(2mT)^{1/2} = 6{,}62\cdot10^{-34}/(2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot100\cdot1{,}6\cdot10^{-19})^{1/2} = 1{,}23\cdot10^{-10}(\text{м}).$$

Если кинетическая энергия электрона T=3,0 МэВ, т.е. T>0,51МэВ, то электрон следует считать релятивистским, следовательно:

$$\lambda_2 = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T\left(T + 2m_0c^2\right)}}\ .$$

Произведя вычисление, найдём:

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{\sqrt{3\left(3 + 2\cdot0{,}51\right)}\cdot1{,}6\cdot10^{-13}} = 3{,}6\cdot10^{-13}\ \text{м}.$$

Примечание: здесь учтено, что 1 эВ = 1,6 10^{-19}Дж, 1 МэВ = 1,6 10^{-13}Дж.

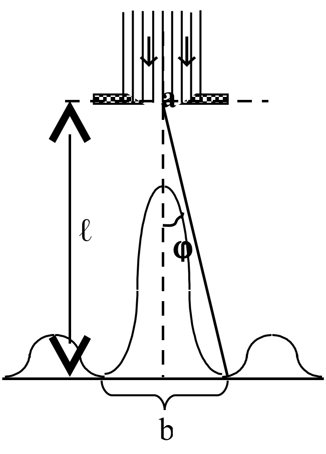
О - 2

Параллельный пучок моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью, ширина которой a=2,0 мкм. Определить скорость электронов, если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии *l*=50 см, ширина центрального максимума b=80 мкм.

Решение:

Дифракция электронов является следствием волновой природы частиц. Поэтому для определения скорости электронов применим формулу де Бройля для классических частиц:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}\text{, откуда } v = \frac{2\pi\hbar}{m\lambda}\ .$$



Чтобы найти длину волны де Бройля λ, воспользуемся тем обстоятельством, что дифракционная картина, возникающая при прохождении через узкую щель параллельного пучка электронов, вполне соответствует дифракционной картине, полученной от этой же щели при освещении её параллельным пучком монохроматического света, длина волны которого равна длине волны де Бройля для электрона.

Это значит, что в случае дифракции электронов положение дифракционных минимумов можно определять по формуле:

$$a \cdot \sin\varphi = \pm k\lambda \text{, где } (k = 1,2,3,...),$$

если понимать в ней под λ длину волны де Бройля для электрона.
Считая, что центральный дифракционный максимум заключён между двумя минимумами первого порядка и учитывая соответствие между величинами b и l, получим:

$$\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{2\ell},$$

l φ

отсюда имеем $\lambda = \dfrac{ab}{2\ell}$. Подставив это значение в выражение для скорости, получим: $v = 4\pi\hbar\ell/mab$.

Произведём вычисления:

$$v = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 0{,}5}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 4{,}5 \cdot 10^{6} \text{ (м/с)}.$$

О - 3

Кинетическая энергия T электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределённостей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение:

Неопределённость координаты и импульса электрона связаны соотношением Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar,$$

где Δx– неопределённость координаты электрона; Δp_x– неопределённость x-проекции его импульса. Из этого соотношения следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределённым становится импульс, а, следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры L, тогда электрон атома будет находиться где–то в пределах области с неопределённостью: $\Delta x = L/2$. Соотношения неопределённостей можно записать в этом случае в виде $(L/2)\Delta p \geq \hbar$, откуда $L \geq 2\hbar/\Delta p$. Физически разумная неопределённость импульса Δp, во всяком случае не должна превышать значение самого импульса p, т.е. $\Delta p \leq p$. Импульс p связан с кинетической энергией T соотношением $p = \sqrt{2mT}$. Заменим Δp значением p (такая замена не увеличит L). Переходя от неравенства к равенству, получим:

$$L_{min} = 2\frac{\hbar}{\sqrt{2mT}}.$$

Подставим числовые значения и произведём вычисления, найдём:

$$L_{min} = \frac{2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 1{,}24 \cdot 10^{-10}\,\text{м} = 1{,}24\,\overset{o}{A}$$

О - 4

Частица находится в основном состоянии (n=1) в одномерном потенциальном ящике шириной L с абсолютно непроницаемыми стенками. Найти вероятность пребывания частицы в областях: 0< x <(L/3) и (L/3) < x < (2L/3).

Решение:

Вероятность dP пребывания частицы в интервале dx выражается формулой:

$$dP = |\Psi(x)|^2 dx.$$

Отсюда вероятность найти частицу в области 0<x<(L/3) определится интегралом:

$$\omega_1 = \int_0^{L/3} |\Psi(x)|^2 dx.$$

Так как частица находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике, то воспользуемся собственной волновой функцией частицы:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{\pi n x}{L}.$$

Так как в основном состоянии n=1, то

$$\omega_1 = \frac{2}{L}\int_0^{L/3} \sin^2\frac{\pi x}{L} dx.$$

Используя соотношение $\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, получим:

$$\omega_1 = \frac{1}{L}\left[\int_0^{L/3} dx - \int_0^{L/3} \cos\frac{2\pi x}{L}dx\right] =$$

$\frac{2}{l}$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{L}{3} - \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi(L/3)}{L}\right] = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}195$$

Вероятность ω_2 пребывания частицы в области $(L/3) < x < (2L/3)$ (т.е. в средней трети ящика) можно вычислить тем же способом, которым найдена вероятность ω_1. Но можно поступить проще. Если сложить вероятности ω_1, ω_2 и ω_3 пребывания частицы соответственно в первой, второй и третьей частях ящика, то получим вероятность пребывания частицы во всём ящике, которая равна единице, как вероятность достоверного события. Учитывая при этом, что в силу симметрии ящика $\omega_1 = \omega_3$, получим $\omega_2 = 1 - 2\omega_1 = 0{,}61$.

Спектры водорода и водородоподобных ионов He^+, Li^{++}.

О – 5

Определить потенциал ионизации атома водорода.

Решение:

Потенциалом ионизации U_i называют наименьшую разность потенциалов, которую должен пройти электрон в ускоряющем поле, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом ионизировать его. Работа по удалению электрона из атома A_i равна работе электрического поля, ускоряющего электрон:

$$A_i = eU_i .$$

Работа ионизации равна кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом водорода при удалении электрона из атома, находящегося в основном (невозбужденном) состоянии.

$$A_i = h\nu = hc\cdot\frac{1}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = hcR,$$

где $n_1 = 1$; $n_2 = \infty$.

Итак

$$eU_i = hcR, \text{ откуда}$$

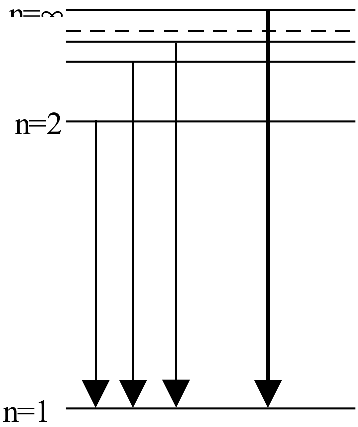
$$U_i = \frac{hcR}{e} = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}\cdot1{,}1\cdot10^{7}}{1{,}6\cdot10^{-19}} = 13{,}6 \text{ В}.$$

О - 6

Найти наименьшую длину волны в ультрафиолетовой серии спектра водорода. Какую наименьшую скорость должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами таких электронов появилась эта линия?

Решение:

Линии ультрафиолетовой серии спектра водорода возникают при переходе электрона с выше лежащего энергетического уровня на первый.



Длины волн λ_{1n} этой серии определяются по формуле:

$$\frac{1}{\lambda} = Rz^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

где $R = 1{,}1\cdot10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга, $Z = 1$ — порядковый номер водорода в периодической системе химических элементов,
n_1— номер уровня, на который совершается переход,
n_2— номер уровня, с которого совершается переход.

Наименьшей длине волны ультрафиолетовой серии соответствует переход с $n_2 = \infty$ на $n_1 = 1$, т. е.

$$\frac{1}{\lambda_{1\infty}} = R\cdot 1^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right), \text{ откуда}$$

$$\lambda = R^{-1} = 0{,}909\cdot10^{-7} \text{ м} \approx 91 \text{ нм}.$$

При возбуждении атомов водорода ударами электронов кинетическая энергия электронов должна быть не меньше, чем энергия кванта, излучаемого возбужденным атомом при переходе в невозбужденное состояние:

$$\frac{mv^2}{2} \geq h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \text{ откуда}$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2hc}{\lambda m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}62\cdot10^{-34}\cdot 3\cdot10^8}{0{,}91\cdot10^{-7}\cdot 9{,}1\cdot10^{-31}}} \cong 2\cdot10^6 \text{ м/с}.$$

$\frac{P}{3}\ \vec{l}\ \omega$

П. Ядерная физика

Основные формулы:

- Массовое число ядра (число нуклонов в ядре):

$$A = Z + N,$$

где Z - порядковый номер элемента (число протонов); N – число нейтронов в ядре.

- Закон радиоактивного распада:

$$dN = -\lambda N\, dt \qquad \text{или} \qquad N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где dN –число ядер, распадающихся за интервал времени dt; N – число ядер, не распавшихся к моменту времени t; N_0 - число ядер в начальный момент времени (t = 0);

λ - постоянная радиоактивного распада.

- Постоянная распада λ связана с периодом полураспада T:

$$\lambda = (\ln 2)/T.$$

- Активность радиоактивного изотопа:

$$A = -dN/dt = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t},$$

где A_0 – активность изотопа в начальный момент времени.

- Дефект массы ядра:

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z) m_n - m_я$$

где m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона; $m_я$ – масса ядра.

- Энергия связи ядра:

$$E_{св} = \Delta m\, c^2 .$$

- Энергия ядерной реакции:

$$Q = c^2[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)] = c^2 \Delta m,$$

где m_1 и m_2 – массы ядра- мишени и бомбардирующей частицы; m_3 и m_4 – массы ядер продуктов реакции; Δm – дефект масс ядерной реакции. При Δm > 0 реакция сопровождается выделением энергии (реакция экзотермическая), при Δm < 0 – энергия поглощается (реакция эндотермическая).

П - 1

Найти энергию связи нейтрона в ядре $^{17}_{8}O$.

Решение:

Энергией связи частицы в ядре называется та энергия, которую надо затратить, чтобы отделить частицу от ядра, без сообщения ей кинетической энергии. Если отделить нейтрон $_0n^1$ от ядра изотопа кислорода $_8O^{17}$, то в соответствии с законом сохранения заряда и числа нуклонов останется ядро изотопа кислорода $_8O^{16}$. Затраченную для отрыва энергию можно определить по формуле:

$$E_{св} = \Delta m\, c^2 ,$$

где Δm – дефект массы, (для данной задачи это изменение массы системы в результате отрыва нейтрона). Тогда для энергии связи нейтрона получим:

$$E_{св} = c^2 \cdot \left[\left(m_{^{16}O} + m_n\right) - m_{^{17}O}\right],$$

где $m_{^{16}O}, m_{^{17}O}, m_n$ – соответственно массы ядер изотопов кислорода O^{16}, O^{17} и нейтрона. Очевидно, разность, стоящая в скобках не изменится, если заменить массы ядер изотопов O^{16}, O^{17} массами их атомов, значения которых приведены в таблицах.

Если квадрат скорости света умножить на массу, равную массе 1а.е.м. (1а.е.м. = $1{,}67\cdot10^{-27}$кг) и полученную энергию выразить в МэВ (1МэВ=$1{,}6\cdot10^{-13}$Дж), то получим коэффициент К=931,4 МэВ/а.е.м. перехода от дефекта масс Δm, выраженного в а.е.м. к энергии связи, выраженной в МэВ, т.е.

$$\Delta E_{св} = К\, \Delta m.$$

$$E_{св} = 931{,}4\left[\left(15{,}99491 + 1{,}00867\right) - 16{,}99913\right] \text{МэВ} = 4{,}14 \text{МэВ}.$$

П - 2

Определить удельную энергию связи для ядра $_8O^{17}$.

Решение:

Удельной энергией связи ядра называется отношение энергии связи $E_{св}$ к массовому числу (числу нуклонов в ядре) А.

Энергией связи $E_{св}$ ядра называется энергия, которую необходимо затратить, чтобы разделить ядро на составляющие его частицы (нуклоны) без сообщения им кинетической энергии. Она вычисляется по формуле:

$$E_{св} = c^2 \cdot \Delta m \text{ или } E_{св} = 931{,}4\left[m_p + \left(A - z\right)m_n - m_я\right] \text{МэВ},$$

где Δm – дефект массы ядра, представляющий собой разность между суммой масс частиц, составляющих ядро и массой ядра, z – порядковый номер (или зарядовое число), равный числу протонов в ядре, A- массовое число (суммарное число нуклонов в ядре), m_p, m_n, $m_я$ – массы протона, нейтрона и ядра соответственно.

Поскольку в справочных таблицах приводятся значения масс атомов (в а.е.м)., а не ядер, то удобнее вычислять энергию связи ядра по формуле

$$E_{св} = 931\left[zm_{'H} + (A - z)m_n - m_a\right] \text{МэВ},$$

где $m_{'H}$ – масса атома водорода ${}_1H^1$, m_a – масса данного атома.

С учётом выше сказанного, запишем удельную энергию связи ${}_8O^{17}$ и рассчитаем её в единицах МэВ/нуклон:

$$\varepsilon_{уд} = \frac{E_{св}}{A} = 931\left[zm_{'H} + (A - z)m_n - m_{{}^{17}_{8}O}\right]/A =$$

$$= \frac{931{,}4}{17}\left[8 \cdot 1{,}00783 + (17 - 8) \cdot 1{,}00867 - 16{,}99913\right] =$$

$$= 7{,}75 \text{ МэВ/нуклон.}$$

П - 3

Определить, сколько ядер в m_0=1,0 мг радиоизотопа церия ${}_{58}Ce^{144}$ распадётся в течение промежутков времени: 1) Δt = 1 с; 2) Δt = 1 год. Период полураспада церия $T_{1/2}$=285 суток.

Решение:

Задача решается с помощью закона радиоактивного распада.

1) В первом случае $\Delta t \ll T_{1/2}$, тогда для нахождения числа распавшихся ядер ΔN воспользуемся приближённой формулой:

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t,$$

где $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$ – постоянная радиоактивного распада, T – период полураспада, $N_0 = (m_0/\mu) \cdot N_A$ – число радиоактивных ядер, содержащихся в массе m_0 радиоизотопа молярной массы μ в начальный момент времени, N_A– число Авогадро.

Рассчитаем $\Delta N = \dfrac{0{,}693 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{285 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 144 \cdot 10^{-3}} = 1{,}2 \cdot 10^{11}$.

2) Во втором случае Δt и $T_{1/2}$ – величины одного порядка. Число распавшихся ядер определится по формуле:

$$\Delta N = N_0\left(1 - e^{-\lambda \Delta t}\right).$$

Рассчитаем $\Delta N = \dfrac{1{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{144 \cdot 10^{-3}} \cdot (1 - e^{-\frac{0{,}693}{285} \cdot 365}) = 2{,}5 \cdot 10^{18}$.

П - 4

На какую часть уменьшается активность A изотопа ^{235}U за время Δt? Рассмотреть случаи: 1) Δt=1000 лет; 2) $\Delta t = T_{1/2}$, где $T_{1/2}=7{,}1 \cdot 10^8$лет; 3) $\Delta t=4{,}5 \cdot 10^9$лет.

Решение:

Согласно определению, активность радиоактивного препарата – это число распадов в единицу времени:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

где N – число не распавшихся ядер к моменту времени t.

По закону радиоактивного распада:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 – число радиоактивных ядер в момент времени t=0, λ– постоянная радиоактивного распада. Тогда активность радиоактивного препарата можно представить в виде:

$$A = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t},$$

где $\lambda \cdot N_0 = A_0 -$ активность препарата в начальный момент времени.

Необходимо найти:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_0 - A}{A_0} = \frac{A_0 - A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}}{A_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}.$$

Полученное выражение нужно применить для трёх случаев:

1) Δt=1000 лет. Из сравнения с периодом полураспада $T_{1/2}$ видим, что $\Delta t \ll T_{1/2}$. Используя формулы приближённого вычисления:

$$e^{\pm x} \approx 1 \pm x, \text{ при } x \ll 1,$$

где для нашей задачи $x=(\ln 2/T)\cdot\Delta t \ll 1$. Тогда получим:

$$\frac{\Delta A}{A_0} \approx \ln 2 \cdot \frac{\Delta t}{T_{1/2}}.$$

Произведём вычисления:

$$\frac{\Delta A}{A_0} \approx 0{,}69 \cdot \frac{10^3}{7{,}1 \cdot 10^8} = 0{,}97 \cdot 10^{-6} = 0{,}97 \cdot 10^{-4}\%,$$

это означает, что за время Δt=1000 лет активность практически не изменится.

2) $\Delta t = T_{1/2}$. В этом случае получим:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} T_{1/2}} = 1 - e^{-\ln 2} = 1 - 0,5 = 0,5 = 50\%.$$

3) $\Delta t = 4,5 \cdot 10^9$лет. В этом случае получим:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = 1 - e^{-\frac{0,69}{7,1 \cdot 10^8} \cdot 4,5 \cdot 10^9} = 0,62 = 62\%.$$

П - 5

Определить энергию реакции ${}_5B^{10}(n,\alpha){}_3Li^7$, протекающей в результате взаимодействия весьма медленных нейтронов с покоящимися ядрами бора. Найти также кинетические энергии продуктов реакции.

Решение:

В развёрнутом виде ядерная реакция записывается так:

$${}_5B^{10} + {}_0n^1 \rightarrow {}_3Li^7 + {}_2\alpha^4$$

Энергию реакции Q найдём по формуле:

$$Q = c^2\left[\left(m_{B^{10}} + m_n\right) - \left(m_{Li^7} + m_{He^4}\right)\right].$$

Заменив массы ядер атомов массами самих атомов, значения которых даны в таблицах, получим:

$$Q = 931,4\left[\left(10,01294 + 1,00867\right) - \left(7,01601 + 4,00260\right)\right] = 2,79 \text{ МэВ}$$

Чтобы найти кинетические энергии продуктов реакции – ядра лития Li^7 и α– частицы, применим закон сохранения энергии в виде:

$$\sum T + Q = \sum T',$$

где $\sum T -$ сумма кинетических энергий частиц до реакции, $\sum T' -$ сумма кинетических энергий частиц (продуктов реакции) после реакции. Из условия задачи следует, что величиной $\sum T$ можно пренебречь.

Тогда получим для суммы кинетических энергий частиц Li^7 и He^4:

$$T_{Li} + T_{He} = Q.$$

Чтобы составить второе уравнение, связывающее неизвестные T_{Li} и T_{He}, применим закон сохранения импульса. Полагая суммарный импульс частиц до реакции равным нулю, приходим к выводу, что и после реакции он должен быть равен нулю:

$$P_{Li} + P_{He} = 0,$$

отсюда для модулей импульсов имеем $P_{Li} = P_{He}$.

Переходя от импульсов частиц к их кинетическим энергиям $\left(P = \sqrt{2mT}\right)$, получим $m_{Li} \cdot T_{Li} = m_{He} \cdot T_{He}$.

Отсюда:

$$T_{Li} = \frac{Q \cdot m_{He}}{m_{Li} + m_{He}}; \; T_{He} = \frac{Q \cdot m_{Li}}{m_{Li} + m_{He}}.$$

Округлив значения масс ядер m_{Li}, m_{He} до целых чисел, получим:

$$T_{Li} = \frac{4Q}{11} = \frac{4 \cdot 2{,}79}{11} = 1{,}02 \text{ МэВ}; \qquad T_{He} = \frac{7Q}{11} = 1{,}78 \text{ МэВ}.$$