

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

Специальность  
21.05.04 Горное дело

Направленность (специализация) программы

Маркшейдерское дело

Уровень высшего образования – специалитет

Форма обучения  
Очная

Институт	Горного дела и транспорта
Кафедра	Геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых
Курс	V
Семестр	9

Магнитогорск  
2017 г.

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО по специальности 21.05.04 Горное дело, утвержденного приказом МОиН РФ от 17.10.2016 № 1298.


Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых «31» августа 2017 г., протокол № 1.

Зав. кафедрой  / И.А. Гришин/

Рабочая программа одобрена методической комиссией института горного дела и транспорта «19» сентября 2017 г., протокол № 1.

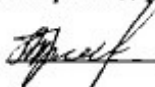
Председатель  / С.Е. Гавришев /

Рабочая программа составлена: ассистентом кафедры ГМДиОПИ

 / К.С. Наумова/

Рецензент:

главный маркшейдер ГОП ОАО «ММК»

 / А.Б. Пермяков/



### 1 Цели освоения дисциплины

Для горного инженера-маркшейдера математическая обработка маркшейдерско-геодезической и горно-геологической информации является важнейшей из дисциплин. Правильно обработанные маркшейдерские измерения – одна из предпосылок рациональной и безопасной разработки месторождения.

Целью преподавания дисциплины является формирование у студентов прочных знаний о характере и особенностях обработки различных видов маркшейдерско-геодезической информации, привития навыков выполнения необходимых вычислений.

### 2 Место дисциплины в структуре образовательной программы подготовки специалиста

Дисциплина «Математическая обработка результатов измерений» входит в базовую часть учебного плана подготовки специалистов по специальности 21.5.04 Горное дело специализация Маркшейдерское дело.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения таких дисциплин, как «Математика», «Геодезия и маркшейдерия», «Геодезия», «Маркшейдерия».

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения таких дисциплин, как «Технология производства работ», «Анализ и оценка результатов», «Высшая геодезия», «Дистанционные методы зондирования Земли», «Маркшейдерские работы при строительстве подземных сооружений», «Маркшейдерское обеспечение безопасности ведения горных работ», «Маркшейдерское обеспечение горных работ и строительства гидротехнических сооружений», «Государственной итоговой аттестации».

### 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения

В результате освоения дисциплины (модуля) «Математическая обработка результатов измерений» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения
<b>ПК-18 – владением навыками организации научно-исследовательских работ обладать знанием методик обработки результатов равнооточных и неравнооточных геодезических измерений , умением выбора методики оценки точности результатов измерений и их функций, грамотно применять программные продукты для автоматизации математической обработки результатов измерений</b>	
Знать	способы обработки результатов равнооточных и неравнооточных измерений, их функций, оценку точности, методы решения систем линейных уравнений математики, методы строгого уравнивания отдельных видов геодезических построений и геодезических сетей
Уметь	обрабатывать результаты равнооточных и неравнооточных измерений, их функций, оценку точности, решать системы линейных уравнений, выполнять строгое уравнивание отдельных видов геодезических построений и сложных сетей
Владеть	приёмами математической обработки данных полевых измерений, определять наличие ошибок измерений и вычислений, средствами автоматизации вычислительных работ

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения
<b>ПК-20 умением разрабатывать необходимую техническую и нормативную документацию в составе творческих коллективов и самостоятельно, контролировать соответствие проектов требованиям стандартов, техническим условиям и документам промышленной безопасности, разрабатывать локальные объекты</b>	
Знать	основные нормативные документы и научно-техническую документацию, их структуру и содержание
Уметь	пользоваться нормативной и научно-технической документацией, и применять ее для составления проектов производства геодезических работ
Владеть	основными приемами работы с нормативной, научно-технической и охранной документацией
<b>ПСК-4.1 готовностью осуществлять производство маркшейдерско-геодезических работ, определять пространственно-временные характеристики состояния земной поверхности и недр, горно-технических систем, подземных и наземных сооружений и отображать информацию в соответствии с современными нормативными требованиями</b>	
Знать	методики обработки результатов равноточных и неравноточных геодезических измерений
Уметь	выбирать методики оценки точности результатов измерений и их функций
Владеть	программными продуктами для автоматизации математической обработки результатов измерений
<b>ПСК-4.3 способностью составлять проекты маркшейдерских и геодезических работ</b>	
Знать	основные нормативные документы и научно-техническую документацию, их структуру; основные структуру и содержание, правила оформления, положения инструкций по работе с результатами полевых измерений
Уметь	пользоваться нормативной и научно-технической документацией, применять её для грамотного решения задач уравнивания
Владеть	основными приемами работы с нормативной, научно-технической и охранной документацией
<b>ПСК-4.5 способностью анализировать и типизировать условия разработки месторождений полезных ископаемых для их комплексного использования, выполнять различные оценки недропользования</b>	
Знать	основные условия разработки месторождений полезных ископаемых для их комплексного использования
Уметь	выполнять различные оценки недропользования
Владеть	основными способами оценки недропользования

#### 4 Структура и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц 144 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 55 акад. часов:
- аудиторная – 54 акад. часов;
- внеаудиторная – 1 акад. часов;
- самостоятельная работа – 89 акад. часов;

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа (в акад. часах)	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код и структурный элемент компетенции
		лекции	лаборат. занятия	практич. занятия				
<b>1. Раздел .Элементы теории погрешностей (ошибок) геодезических измерений</b>	9							
1.1. Тема. Общие сведения об измерениях	9	0,2			2	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Устный опрос (собеседование)	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
1.2. Тема. Погрешности результатов измерений	9	0,4			2	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Устный опрос (собеседование)	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
1.3. Тема. Задачи теории погрешностей измерений	9	0,4			2	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Устный опрос (собеседование)	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3,

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа (в акад. часах)	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код и структурный элемент компетенции
		лекции	лаборат. занятия	практич. занятия				
								ПСК-4.5
<b>Итого по разделу</b>	<b>9</b>	<b>1</b>			<b>6</b>		<b>Устный опрос (собеседование)</b>	
<b>2. Раздел. Равноточные измерения</b>	9							
2.1. Тема. Вычисление наиболее точного по вероятности значения результата измерений одной и той же величины	9	0,5			2	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	<b>Устный опрос (собеседование)</b>	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
<b>Итого по разделу</b>	<b>9</b>	<b>0,5</b>			<b>2</b>		<b>Устный опрос (собеседование)</b>	
<b>3. Раздел. Оценка точности результатов ряда равноточных измерений</b>	9							
3.1. Тема. Средняя квадратическая погрешность результата отдельного измерения. Предельная и относительная погрешности	9	0,5		2	3	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
3.2. Тема. Вероятнейшие погрешности	9	1		2	3	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа (в акад. часах)	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код и структурный элемент компетенции
		лекции	лаборат. занятия	практич. занятия				
<b>Итого по разделу</b>	<b>9</b>	<b>1,5</b>		<b>4</b>	<b>6</b>		<b>Выполненная практическая работа и решенные задачи</b>	
<b>4. Раздел Оценка точности функций измеренных величин</b>	9							
4.1. Тема Средняя квадратическая погрешность функции общего вида	9	0,5		2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
4.2. Тема Средняя квадратическая погрешность простой арифметической середины	9	0,5		2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
4.3. Тема. Оценка точности результатов угловых измерений в триангуляции	9	0,5		2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
4.4. Тема. Оценка точности результатов ряда двойных равноточных измерений	9	0.5		2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3,



Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа (в акад. часах)	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код и структурный элемент компетенции
		лекции	лаборат. занятия	практич. занятия				
								ПСК-4.5
<b>Итого по разделу</b>	<b>9</b>	<b>2</b>		<b>8</b>	<b>16</b>		<b>Выполненная практическая работа и решенные задачи</b>	
<b>5. Раздел. Неравноточные измерения</b>	9							
5.1. Тема. Общая арифметическая середина. Веса результатов измерений	9	0,5		2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
5.2. Тема. Средняя квадратическая погрешность единицы веса	9	0,5		2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
5.3. Тема. Средняя квадратическая погрешность и вес общей арифметической середины	9	0,5		2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
5.4. Тема. Вычисление средней квадратической погрешности единицы веса	9	0,5		2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1,

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа (в акад. часах)	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код и структурный элемент компетенции
		лекции	лаборат. занятия	практич. занятия				
								ПСК-4.3, ПСК-4.5
5.5. Тема. Вычисление весов функций независимых аргументов	9	0,5		2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
<b>Итого по разделу:</b>	<b>9</b>	<b>2,5</b>		<b>10</b>	<b>20</b>		<b>Выполненные практические работы</b>	
<b>6. Раздел. Основы метода наименьших квадратов</b>	9							
6.1. Тема. Задача совместного уравнивания нескольких измеренных величин	9	0,5		1,4	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
6.2. Тема. Принцип (способ) наименьших квадратов	9	1		1,4	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
6.3. Тема. Коррелятный способ уравнивания	9	1		1,4	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1,

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа (в акад. часах)	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код и структурный элемент компетенции
		лекции	лаборат. занятия	практич. занятия				
								ПСК-4.3, ПСК-4.5
6.4. Тема. Параметрический способ уравнивания	9	1		1,4	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
6.5. Тема. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений	9	1		1,4	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
6.6. Тема. Контроль вычисления коэффициентов нормальных уравнений	9	1		1,4	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
6.7. Тема. Решение нормальных уравнений	9	1		1,4	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
6.8. Тема. Контроль решения нормальных уравнений	9	1		1,4	4	Изучение основной и дополнительной литературы по	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20,

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа (в акад. часах)	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код и структурный элемент компетенции
		лекции	лаборат. занятия	практич. занятия				
						дисциплине, конспекта лекций		ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
6.9. Тема. Схемы решения нормальных уравнений по алгоритму К.Ф. Гаусса	9	1		1,4	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
6.10. Тема. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелятным способом	9	2		1,4	3	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-18, ПК-20, ПСК-4.1, ПСК-4.3, ПСК-4.5
<b>Итого по разделу</b>	<b>9</b>	<b>10,5</b>		<b>14</b>	<b>39</b>		<b>Выполненные практические работы</b>	
<b>Итого по курсу (семестр 9)</b>	<b>9</b>	<b>18</b>		<b>36</b>	<b>89</b>		<b>Промежуточная аттестация (зачет)</b>	
<b>Итого по дисциплине</b>	<b>9</b>	<b>18</b>		<b>36</b>	<b>89</b>		<b>144</b>	

## 5 Образовательные и информационные технологии

Для реализации предусмотренных видов учебной работы в качестве образовательных технологий в преподавании дисциплины «Математическая обработка результатов измерений» используются традиционная и модульно-компетентностная технологии.

Лекции проходят в традиционной форме. На лекции-консультации, излагается новый материал, сопровождающийся вопросами-ответами по теме лекции.

Практические работы выполняются студентами по вариантам.

Самостоятельная работа заключается в проработке отдельных вопросов при изучении дисциплины и при подготовке к сдаче зачета.

1. **Традиционные образовательные технологии** ориентируются на организацию образовательного процесса, предполагающую прямую трансляцию знаний от преподавателя к студенту (преимущественно на основе объяснительно-иллюстративных методов обучения). Учебная деятельность студента носит в таких условиях, как правило, репродуктивный характер.

**Формы учебных занятий с использованием традиционных технологий:**

Информационная лекция – последовательное изложение материала в дисциплинарной логике, осуществляемое преимущественно вербальными средствами (монолог преподавателя).

Семинар – беседа преподавателя и студентов, обсуждение заранее подготовленных сообщений по каждому вопросу плана занятия с единым для всех перечнем рекомендуемой обязательной и дополнительной литературы.

Практическое занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по предложенному алгоритму.

2. **Технологии проблемного обучения** – организация образовательного процесса, которая предполагает постановку проблемных вопросов, создание учебных проблемных ситуаций для стимулирования активной познавательной деятельности студентов.

**Формы учебных занятий с использованием технологий проблемного обучения:**

Проблемная лекция – изложение материала, предполагающее постановку проблемных и дискуссионных вопросов, освещение различных научных подходов, авторские комментарии, связанные с различными моделями интерпретации изучаемого материала.

Лекция «вдвоем» (бинарная лекция) – изложение материала в форме диалогического общения двух преподавателей (например, реконструкция диалога представителей различных научных школ, «ученого» и «практика» и т.п.).

Практическое занятие в форме практикума – организация учебной работы, направленная на решение комплексной учебно-познавательной задачи, требующей от студента применения как научно-теоретических знаний, так и практических навыков.

Практическое занятие на основе кейс-метода – обучение в контексте моделируемой ситуации, воспроизводящей реальные условия научной, производственной, общественной деятельности. Обучающиеся должны проанализировать ситуацию, разобраться в сути проблем, предложить возможные решения и выбрать лучшее из них. Кейсы базируются на реальном фактическом материале или же приближены к реальной ситуации.

3. **Игровые технологии** – организация образовательного процесса, основанная на реконструкции моделей поведения в рамках предложенных сценарных условий.

**Формы учебных занятий с использованием игровых технологий:**

Учебная игра – форма воссоздания предметного и социального содержания будущей профессиональной деятельности специалиста, моделирования таких систем отношений, которые характерны для этой деятельности как целого.

Деловая игра – моделирование различных ситуаций, связанных с выработкой и принятием совместных решений, обсуждением вопросов в режиме «мозгового штурма», реконструкцией функционального взаимодействия в коллективе и т.п.

Ролевая игра – имитация или реконструкция моделей ролевого поведения в предложенных сценарных условиях.

**4. Технологии проектного обучения** – организация образовательного процесса в соответствии с алгоритмом поэтапного решения проблемной задачи или выполнения учебного задания. Проект предполагает совместную учебно-познавательную деятельность группы студентов, направленную на выработку концепции, установление целей и задач, формулировку ожидаемых результатов, определение принципов и методик решения поставленных задач, планирование хода работы, поиск доступных и оптимальных ресурсов, поэтапную реализацию плана работы, презентацию результатов работы, их осмысление и рефлексия.

#### **Основные типы проектов:**

Исследовательский проект – структура приближена к формату научного исследования (доказательство актуальности темы, определение научной проблемы, предмета и объекта исследования, целей и задач, методов, источников, выдвижение гипотезы, обобщение результатов, выводы, обозначение новых проблем).

Творческий проект, как правило, не имеет детально проработанной структуры; учебно-познавательная деятельность студентов осуществляется в рамках рамочного задания, подчиняясь логике и интересам участников проекта, жанру конечного результата (газета, фильм, праздник, издание, экскурсия и т.п.).

Информационный проект – учебно-познавательная деятельность с ярко выраженной эвристической направленностью (поиск, отбор и систематизация информации о каком-то объекте, ознакомление участников проекта с этой информацией, ее анализ и обобщение для презентации более широкой аудитории).

**5. Интерактивные технологии** – организация образовательного процесса, которая предполагает активное и нелинейное взаимодействие всех участников, достижение на этой основе лично значимого для них образовательного результата. Наряду со специализированными технологиями такого рода принцип интерактивности прослеживается в большинстве современных образовательных технологий. Интерактивность подразумевает субъект-субъектные отношения в ходе образовательного процесса и, как следствие, формирование саморазвивающейся информационно-ресурсной среды.

#### **Формы учебных занятий с использованием специализированных интерактивных технологий:**

Лекция «обратной связи» – лекция-провокация (изложение материала с заранее запланированными ошибками), лекция-беседа, лекция-дискуссия, лекция-пресс-конференция.

Семинар-дискуссия – коллективное обсуждение какого-либо спорного вопроса, проблемы, выявление мнений в группе (межгрупповой диалог, дискуссия как спор-диалог).

**6. Информационно-коммуникационные образовательные технологии** – организация образовательного процесса, основанная на применении специализированных программных сред и технических средств работы с информацией.

Формы учебных занятий с использованием информационно-коммуникационных технологий:

Лекция-визуализация – изложение содержания сопровождается презентацией (демонстрацией учебных материалов, представленных в различных знаковых системах, в т.ч. иллюстративных, графических, аудио- и видеоматериалов).

Практическое занятие в форме презентации – представление результатов проектной или исследовательской деятельности с использованием специализированных программных сред.

#### **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Аудиторная самостоятельная работа студентов на практических занятиях осуществляется под контролем преподавателя в виде решения задач и выполнения упражнений, которые определяет преподаватель для студента.

Самостоятельная работа студентов осуществляется в виде чтения литературы по соответствующему разделу с проработкой материала и выполнения домашних заданий с консультациями преподавателя.

Виды	Формы контроля
Выполнение практических работ	Проверка и защита работ
Поиск дополнительной информации по заданной теме (работа с библиографическими материалами, справочниками, каталогами, словарями, энциклопедиями)	Практические работы

#### **Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:**

1. Задачи дисциплины «Математическая обработка результатов измерений»
2. Что понимают под измерением физической величины?
3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными?
4. Что является результатом измерения?
5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения?
6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными?
7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений?
8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро.
9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин.
10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений.
11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины.
12. Общая арифметическая середина.
13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса.
14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины.
15. Что понимается под уравниванием результатов измерений?
16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов.
17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания?
18. Принцип наименьших квадратов.
19. Коррелятивный способ уравнивания.
20. Параметрический способ уравнивания.
21. Как составляют условные уравнения?
22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений?

23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений?
24. Контроль решения нормальных уравнений.
25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелятным способом.



## 7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

### а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:

#### Примерное содержание:

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
<b>ПК-18 – владением навыками организации научно-исследовательских работ обладать знанием методик обработки результатов равноточных и неравноточных геодезических измерений , умением выбора методики оценки точности результатов измерений и их функций, грамотно применять программные продукты для автоматизации математической обработки результатов измерений</b>		
Знать	способы обработки результатов равноточных и неравноточных измерений, их функций, оценку точности, методы решения систем линейных уравнений математики, методы строгого уравнивания отдельных видов геодезических построений и геодезических сетей	<p><b>Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Задачи дисциплины «Математическая обработка результатов измерений»</li> <li>2. Что понимают под измерением физической величины?</li> <li>3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными?</li> <li>4. Что является результатом измерения?</li> <li>5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения?</li> <li>6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными?</li> <li>7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений?</li> <li>8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро.</li> <li>9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин.</li> <li>10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений.</li> <li>11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины.</li> <li>12. Общая арифметическая середина.</li> <li>13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса.</li> <li>14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины.</li> <li>15. Что понимается под уравниванием результатов измерений?</li> <li>16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов.</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелятивный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелятным способом.
Уметь	обрабатывать результаты равноточных и неравноточных измерений, их функций, оценку точности, решать системы линейных уравнений, выполнять строгое уравнивание отдельных видов геодезических построений и сложных сетей	<b>Примерный перечень практических заданий:</b> 1. Уравнивание одиночного нивелирного хода III класса; 2. Уравнивание сети нивелирования III класса с одной узловой точкой; 3. Уравнивание полигонометрического хода произвольной формы коррелятным способом.
Владеть	приёмами математической обработки данных полевых измерений, определять наличие ошибок измерений и вычислений, средствами автоматизации вычислительных работ	<b>Решить задачу:</b> Выполнить уравнивание одиночного нивелирного хода III класса.
<b>ПК-20 умением разрабатывать необходимую техническую и нормативную документацию в составе творческих коллективов и самостоятельно, контролировать соответствие проектов требованиям стандартов, техническим условиям и документам промышленной безопасности, разрабатывать локальные объекты</b>		
Знать	основные нормативные документы и научно-техническую документацию, их структуру и содержание	<b>Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:</b> 1. Задачи дисциплины «Математическая обработка результатов измерений» 2. Что понимают под измерением физической величины?

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными?</li> <li>4. Что является результатом измерения?</li> <li>5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения?</li> <li>6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными?</li> <li>7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений?</li> <li>8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро.</li> <li>9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин.</li> <li>10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений.</li> <li>11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины.</li> <li>12. Общая арифметическая середина.</li> <li>13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса.</li> <li>14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины.</li> <li>15. Что понимается под уравниванием результатов измерений?</li> <li>16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов.</li> <li>17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания?</li> <li>18. Принцип наименьших квадратов.</li> <li>19. Коррелятивный способ уравнивания.</li> <li>20. Параметрический способ уравнивания.</li> <li>21. Как составляют условные уравнения?</li> <li>22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений?</li> <li>23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений?</li> <li>24. Контроль решения нормальных уравнений.</li> <li>25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелятивным способом.</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
Уметь	пользоваться нормативной и научно-технической документацией, и применять ее для составления проектов производства геодезических работ	<p><b>Примерный перечень практических заданий:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Уравнивание одиночного нивелирного хода III класса;</li> <li>2. Уравнивание сети нивелирования III класса с одной узловой точкой;</li> <li>3. Уравнивание полигонометрического хода произвольной формы коррелантным способом.</li> </ol>
Владеть	основными приемами работы с нормативной, научно-технической и охранной документацией	<p><b>Решить задачу:</b></p> <p>Выполнить уравнивание сети нивелирования III класса с одной узловой точкой.</p>
<p><b>ПСК-4.1 готовностью осуществлять производство маркшейдерско-геодезических работ, определять пространственно-временные характеристики состояния земной поверхности и недр, горно-технических систем, подземных и наземных сооружений и отображать информацию в соответствии с современными нормативными требованиями</b></p>		
Знать	методики обработки результатов равноточных и неравноточных геодезических измерений	<p><b>Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Задачи дисциплины «Математическая обработка результатов измерений»</li> <li>2. Что понимают под измерением физической величины?</li> <li>3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными?</li> <li>4. Что является результатом измерения?</li> <li>5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения?</li> <li>6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными?</li> <li>7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений?</li> <li>8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро.</li> <li>9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин.</li> <li>10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений.</li> <li>11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины.</li> <li>12. Общая арифметическая середина.</li> <li>13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса.</li> <li>14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины.</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		15. Что понимается под уравниванием результатов измерений? 16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов. 17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелятивный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелятивным способом.
Уметь	выбирать методики оценки точности результатов измерений и их функций	<b>Примерный перечень практических заданий:</b> 1. Уравнивание одиночного нивелирного хода III класса; 2. Уравнивание сети нивелирования III класса с одной узловой точкой; 3. Уравнивание полигонометрического хода произвольной формы коррелятивным способом.
Владеть	программными продуктами для автоматизации математической обработки результатов измерений	<b>Решить задачу:</b> Выполнить уравнивание полигонометрического хода произвольной формы коррелятивным способом.
<b>ПСК-4.3 способностью составлять проекты маркшейдерских и геодезических работ</b>		
Знать	основные нормативные документы и научно-техническую документацию, их структуру; основные структуру и содержание, правила оформления, положения инструкций по работе с результатами полевых измерений	<b>Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:</b> 1. Задачи дисциплины «Математическая обработка результатов измерений» 2. Что понимают под измерением физической величины? 3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными? 4. Что является результатом измерения?

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		<ol style="list-style-type: none"> <li>5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения?</li> <li>6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными?</li> <li>7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений?</li> <li>8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро.</li> <li>9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин.</li> <li>10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений.</li> <li>11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины.</li> <li>12. Общая арифметическая середина.</li> <li>13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса.</li> <li>14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины.</li> <li>15. Что понимается под уравниванием результатов измерений?</li> <li>16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов.</li> <li>17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания?</li> <li>18. Принцип наименьших квадратов.</li> <li>19. Коррелятный способ уравнивания.</li> <li>20. Параметрический способ уравнивания.</li> <li>21. Как составляют условные уравнения?</li> <li>22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений?</li> <li>23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений?</li> <li>24. Контроль решения нормальных уравнений.</li> <li>25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелятным способом.</li> </ol>
Уметь	пользоваться нормативной и научно-технической документацией, применять её	<p><b>Примерный перечень практических заданий:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Уравнивание одиночного нивелирного хода III класса;</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	для грамотного решения задач уравнивания	2. Уравнивание сети нивелирования III класса с одной узловой точкой; 3. Уравнивание полигонометрического хода произвольной формы коррелантным способом.
Владеть	основными приемами работы с нормативной, научно-технической и охранной документацией	<b>Решить задачу:</b> Выполнить уравнивание сети нивелирования III класса с одной узловой точкой.
<b>ПСК-4.5 способностью анализировать и типизировать условия разработки месторождений полезных ископаемых для их комплексного использования, выполнять различные оценки недропользования</b>		
Знать	основные условия разработки месторождений полезных ископаемых для их комплексного использования	<p><b>Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Задачи дисциплины «Математическая обработка результатов измерений»</li> <li>2. Что понимают под измерением физической величины?</li> <li>3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными?</li> <li>4. Что является результатом измерения?</li> <li>5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения?</li> <li>6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными?</li> <li>7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений?</li> <li>8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро.</li> <li>9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин.</li> <li>10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений.</li> <li>11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины.</li> <li>12. Общая арифметическая середина.</li> <li>13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса.</li> <li>14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины.</li> <li>15. Что понимается под уравниванием результатов измерений?</li> <li>16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов.</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелатный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом.
Уметь	выполнять различные оценки недропользования	<b>Примерный перечень практических заданий:</b> 1. Уравнивание одиночного нивелирного хода III класса; 2. Уравнивание сети нивелирования III класса с одной узловой точкой; 3. Уравнивание полигонометрического хода произвольной формы коррелатным способом.
Владеть	основными способами оценки недропользования	<b>Решить задачу:</b> Выполнить уравнивание сети нивелирования III класса с одной узловой точкой.



## **б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:**

### **Примерная структура и содержание пункта:**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Математическая обработка результатов измерений» включает теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень усвоения обучающимися знаний, и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и владений, проводится в форме зачета.

Зачет по данной дисциплине проводится в устной форме по теоретическим вопросам.

### **Показатели и критерии оценивания зачета:**

– на оценку «**зачтено**» обучающийся демонстрирует уровень сформированности компетенций от высокого до порогового, демонстрирует знание учебного материала, навыки выполнения практических заданий.

– на оценку «**не зачтено**»– обучающийся демонстрирует знания не более 20% теоретического материала, допускает существенные ошибки, не может показать интеллектуальные навыки выполнения простых заданий.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **а) Основная литература**

1. Гальянов А.В., Гордеев В.А. Развитие научных идей в горном деле: Маркшейдерия: научная монография. – Екатеринбург: Уральский государственный горный университет, 2018. 559 с. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36292312>

2. Голубев В.В. Геодезия. Теория математической обработки геодезических измерений: Учеб. для вузов. – М.: Московский государственный университет геодезии и картографии, 2016. 422 с. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30089838>

3. Дьяков, Б.Н. Геодезия [Электронный ресурс]: учебник / Б.Н. Дьяков. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2019. — 416 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/111205> .

### **б) Дополнительная литература**

1. Маркузе, Ю. И. Теория математической обработки геодезических измерений : учебное пособие / Ю. И. Маркузе, В. В. Голубев. — Москва : Академический Проект, 2020. — 247 с. — ISBN 978-5-8291-2981-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/132444>

2. Перфильев, А. А. Теория математической обработки геодезических измерений : учебное пособие / А. А. Перфильев. — Новосибирск : СГУВТ, 2019. — 80 с. — ISBN 978-5-8119-0810-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/147160>

3. Беликов, А. Б. Математическая обработка результатов геодезических измерений : учебное пособие / А. Б. Беликов, В. В. Симонян. — 2-е изд. — Москва : МИСИ – МГСУ, 2016. — 432 с. — ISBN 978-7264-1255-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/73707>

4. Инженерная геодезия и геоинформатика. Краткий курс : учебник / М. Я. Брынь, Е. С. Богомолова, В. А. Коугия, Б. А. Лёвин ; под редакцией В. А. Коугия. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-1831-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/64324>

### **Периодические издания**

- 1.«Маркшейдерия и недропользование»
2. «Геодезия и картография» (научно-технический журнал)
3. «GPS World», «JournalofGeodesy» (зарубежные научно-технические журналы)

### в) Методические указания по проведению учебных занятий

Методические указания для выполнения практических заданий приведены в приложении 1.

### г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Интернет-ресурсы:

– Международная справочная система «Полпред» polpred.com отрасль «Образование наука». – URL: <http://education.polpred.com/>.

– Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ). – URL: [https://elibrary.ru/project\\_risc.asp](https://elibrary.ru/project_risc.asp).

– Поисковая система Академия Google (Google Scholar) – URL: <https://scholar.google.ru/>.

– Информационная система – Единое окно доступа к информационным системам – URL: <http://window.edu.ru/>.

– Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный институт промышленной собственности». – Режим доступа: <https://www1.fips.ru/>

Программное обеспечение:

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Windows 7	Д-1227 от 08.10.2018 Д-757-17 от 27.06.2017 Д-593 от 20.05.2016	11.10.2021 27.07.2018 20.05.2017
MS Office 2007	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный	Д-300-18 от 31.03.2018 Д-1347-17 от 20.12.2017 Д-1481-16 от 25.11.2016 Д-2026-15 от 11.12.2015	28.01.2020 21.03.2018 25.12.2017 11.12.2016
7Zip	свободно распространяемое	бессрочно

### 9 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Тип и название аудитории	Оснащение аудитории
Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа	Технические средства обучения, служащие для представления учебной информации большой аудитории: мультимедийные средства хранения, передачи и представления учебной информации. Специализированная мебель
Учебная аудитория для проведения практических занятий	Технические средства обучения, служащие для представления учебной информации большой аудитории: мультимедийные средства хранения, передачи и представления учебной информации. Специализированная мебель
Учебная аудитория для групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Компьютерная техника с пакетом MS Office, с подключением к сети «Интернет» и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета. Специализированная мебель
Помещение для самостоятельной работы	Компьютерная техника с пакетом MS Office, с подключением к сети «Интернет» и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета. Специализированная мебель

## 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

### 1.1. Общие сведения об измерениях

Объектом изучения науки Геодезия является планета Земля – ее форма, размеры, внешнее гравитационное поле. Эти характеристики получают из различных измерений, выполняемых на поверхности Земли.

Под *измерением* физической величины  $X$  понимают процесс сравнения этой величины с другой, однородной с ней величиной  $q$ , принятой в качестве *меры* - единицы измерения. Например, длину отрезка линии местности сравнивают с единицей линейных измерений - *метром*; горизонтальный угол, образованный отрезками линий на местности, сравнивают с градусом, градусом, радианом.

Измерения различают:

- *прямые*;
- *косвенные*;
- *равноточные*;
- *неравноточные*.

Под *прямыми* измерениями понимают такие, при которых определяемую величину получают путём непосредственного сравнения (сопоставления) её с единицей измерения или её производной. Например, длина отрезка линии измеряется стальной лентой или горизонтальный угол на местности измеряется теодолитом, а на бумаге транспортиром и т.д.

*Косвенными* называют измерения, определяемая величина в которых является функцией других непосредственно измеренных величин. Так, для определения длины окружности или площади круга, необходимо непосредственно измерить радиус окружности.

*Равноточными* называют измерения, выполненные приборами одного класса точности, специалистами равной квалификации, по одной и той же технологии, в идентичных внешних условиях. При несоблюдении хотя бы одного из перечисленных условий измерения считаются *неравноточными*.

*Результатом* измерения  $I$  является число, показывающее, во сколько раз определяемая величина больше или меньше величины, с которой её сравнивали, т.е. величины, принятой за единицу измерения.

Результаты измерений подразделяют на *необходимые* и *добавочные* (или *избыточные*). Так, если одна и та же величина (длина линии, угол треугольника и т.п.) измерена  $n$  раз, то один из результатов измерений является *необходимым*, а  $(n - 1)$  - *добавочными*. Добавочные измерения имеют весьма важное значение: их сходимость является *средством контроля* и позволяет судить о *качестве* результатов измерений; они дают возможность получить *наиболее надежное значение* искомой величины по сравнению с любым отдельно взятым результатом измерения.

### 1.2. Погрешности результатов измерений

Результаты многократных измерений одной и той же физической величины (линии, угла, превышения и т.п.), как правило, различаются между собой и не совпадают с точным (истинным) значением измеряемой величины, т.е. содержат неизбежные погрешности, вызываемые различными причинами.

Под *погрешностью*  $\Delta_i$  результата измерения  $I$  понимают разность между результатом измерения  $I$  физической величины и точным (истинным) значением  $X$  этой величины, т.е.

$$\Delta i = I_i - X \quad (1)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$n$  - число выполненных измерений.

По своим свойствам, характеру возникновения и влияния на результаты измерений, их функции, погрешности подразделяют на *грубые, систематические и случайные*.

*Грубые* погрешности (промахи) возникают вследствие невнимательности наблюдателя, неисправности прибора, несоблюдении технологии работ, не учёта влияния изменяющихся внешних условий: температуры, ветра, видимости и т.п. Обнаружить грубые погрешности можно, используя геометрические свойства наблюдаемого объекта (например, сумму внутренних углов плоского многоугольника), а также выполнением повторных измерений. Так, например, при линейных измерениях, пропуск целого пролета, равного длине мерного прибора, можно обнаружить измерением отрезка линии нитяным дальномером, иногда - даже шагами.

К *систематическим* относят такие погрешности результатов измерений, которые входят в эти результаты по определенному закону.

Так, если известна длина меры при температуре  $t_0$ , а измерение длины линии местности выполнены при температуре  $t$ , то результат измерения длины линии будет содержать систематическую погрешность, пропорциональную разности температур  $(t - t_0)$  и длине линии. Влияние систематических погрешностей на результаты измерений исключают или сводят до пренебрегаемого малого значения выбором методики измерений или введением поправок в результаты.

*Случайные* погрешности результатов измерений характеризуются тем, что при одинаковых условиях измерений они могут меняться по величине и знаку; их нельзя заранее предусмотреть, определить закон воздействия на результат. Статистический анализ, т.е. анализ результатов больших рядов измерений, позволил для случайных погрешностей выявить ряд их свойств.

Первое свойство. Для данных условий измерений случайные погрешности по абсолютной величине не могут превосходить известного предела (свойство ограниченности), т.е.

$$|\Delta| \leq \Delta_{пред} \quad (2)$$

Второе свойство. Равные по абсолютной величине положительные и отрицательные случайные погрешности равновозможны, т.е. встречаются одинаково часто (свойство симметрии).

Третье свойство. Малые по абсолютной величине случайные погрешности при измерениях встречаются чаще, чем большие (свойство плотности).

Четвертое свойство. Среднее арифметическое из случайных погрешностей и их попарных произведений стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений (свойство компенсации), т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_j \Delta_k]}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_j]}{n} = 0, \quad (3)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ;  $k = 2, 3, 4, \dots, n$ ;

$n$  - число измерений;

[ ] - Гауссов символ суммы.

### 1.3. Задачи теории погрешностей измерений

Как было отмечено выше, в результатах измерений неизбежно содержатся погрешности. Поэтому одной из задач теории погрешностей является изучение видов и свойств погрешностей измерений, причин их возникновения.

Далее, выполнив измерения, всегда стремятся определить точность полученных результатов. Поэтому в теории погрешностей измерений устанавливаются критерии для оценки точности результатов измерений.

Так как результаты измерений вследствие влияния погрешностей разнятся между собой, то возникает задача отыскания наиболее точного по вероятности значения определяемой величины из результатов многократных ее измерений.

Во многих случаях геодезической практики по результатам измерений вычисляют другие интересующие нас величины. Например, измерив сторону треугольника и два его угла, можно по известным формулам вычислить третий угол и две другие стороны. В таких случаях результаты вычислений являются функциями измеренных величин. По указанной причине, перед теорией погрешностей возникает задача, по оценке точности функций измеренных величин.

Перечисленные задачи, которые решаются теорией погрешностей измерений, имеют большое значение для правильной организации, проведения геодезических работ и использования их результатов.

Кроме того, теория погрешностей геодезических измерений позволяет обоснованно выбрать необходимые для измерений приборы и инструменты, рассчитать ожидаемую точность измерений и окончательного результата, правильно выбрать метод обработки результатов измерений.

## 1.4 Равноточные измерения

### 1.4.1 Вычисление наиболее точного по вероятности значения результата измерений одной и той же величины

Пусть некоторая величина, истинное (точное) значение которой равно  $X$ , измерена равно точно  $n$  раз и получены результаты этих измерений:  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ . Составим разности

$$\Delta_i = l_i - X \quad (4)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$\Delta_i$  - истинные случайные погрешности результатов  $l_i$  измерений, т.е. отклонения результатов измерений от истинного (точного) значения измеряемой величины.

Найдем сумму уравнений (4) и разделим ее на число измерений.

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - X \quad (5)$$

Введем обозначения:

$$\frac{[\Delta]}{n} = \eta \quad (6)$$

$$\frac{[l]}{n} = x \quad (7)$$

Величину  $x = [l]/n$  называют простой арифметической серединой или средним арифметическим из результатов  $l_i$  равноточных измерений. Выражение  $\eta = [\Delta]/n = x - X$  - есть истинная случайная погрешность простой арифметической середины, т.е. это отклонение простой арифметической середины от истинного (точного) значения  $X$  измеряемой величины.

По четвертому свойству случайных погрешностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{[\Delta]}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad (8)$$

значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{[l]}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x = X \quad (9)$$

Таким образом, среднее арифметическое из результатов  $l_i$  равнозначных измерений стремится к истинному (точному) значению  $X$  измеряемой величины при неограниченном возрастании числа измерений. Величину  $x$  называют еще **вероятнейшим значением** измеряемой величины.

#### **1.4.2 Оценка точности результатов ряда равнозначных измерений. Средняя квадратическая погрешность результата отдельного измерения. Предельная и относительная погрешности**

В качестве критерия при оценке точности результатов геодезических измерений принята предложенная К.Ф. Гауссом *средняя квадратическая погрешность*, вычисляемая по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \quad (10)$$

где  $\Delta$  - истинная случайная погрешность результата,  
 $n$  - число измерений.

По величине средней квадратической погрешности можно определить *предельную погрешность*  $\Delta_{пред.}$ , возможную для данного ряда измерений. В качестве предельной погрешности в геодезии принимают удвоенную среднюю квадратическую погрешность

$$\Delta_{пред} = 2m \quad (11)$$

Если в ряду случайных погрешностей результатов равнозначных измерений встречаются такие, которые по абсолютной величине превышают предельную, то такие погрешности считают грубыми. Измерения, в которых обнаружены эти погрешности, выполняют заново.

В ряде случаев для суждения о точности измерений недостаточно знания лишь абсолютного значения средней квадратической погрешности. Например, измерены три отрезка линий местности:

$L_1 = 240$  м с погрешностью  $m_1 = \pm 0,15$  м;

$L_2 = 600$  м с погрешностью  $m_2 = \pm 0,53$  м;

$L_3 = 500$  м с погрешностью  $m_3 = \pm 0,29$  м.

Если сравнивать средние квадратические погрешности, то наиболее точно измерен первый отрезок. Однако, здесь следует учитывать и длину измеряемого отрезка, т.е. отнести погрешность к величине длины самого отрезка.

В подобных случаях вводят понятие *относительной погрешности*, под которой понимают отношение абсолютной величины средней квадратической погрешности  $m$  к значению результата  $l$  измеряемой величины, т.е.

$$\frac{m}{l} = \frac{1}{l:m} = \frac{1}{N} = 1:N \quad (12)$$

где  $N = l:m$ .

Для нашего примера относительные погрешности равны:

$$\frac{m_1}{L_1} = \frac{0,15}{240} = \frac{1}{240:0,15} = \frac{1}{1600}$$

$$\frac{m_2}{L_2} = \frac{0,53}{600} = \frac{1}{600:0,53} = \frac{1}{1100}$$

$$\frac{m_3}{L_3} = \frac{0,29}{500} = \frac{1}{500:0,29} = \frac{1}{1700}$$

Сравнивая дроби, видим, что третье измерение является самым точным.

**В значении абсолютной величины средней квадратической погрешности и в знаменателе относительной погрешности следует удерживать две-три значащие цифры.**

### 1.4.3 Вероятнейшие погрешности

Формула (10) К.Ф. Гаусса для средней квадратической погрешности справедлива в том случае, когда результаты  $l$  измерений сравниваются с истинным (точным) значением  $X$  этой величины. В большинстве случаев практики топографо-геодезических и маркшейдерских работ истинное значение  $X$  измеряемой величины неизвестно и поэтому используют вероятнейшее значение его  $x$ , определяемое по формуле (7). В этом случае среднюю квадратическую погрешность результата отдельного измерения ряда равнозначных измерений определяют по вероятнейшим погрешностям.

Пусть  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  - результаты равнозначных измерений одной и той же величины,  $x = \frac{[l]}{n}$  - простая арифметическая середина.

Составим разности

$$l_i - x = v_i \quad (13)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$n$  - число измерений;

$v_i$  - вероятнейшие погрешности результатов  $l_i$  измерений, т.е. отклонения значений каждого результата  $l_i$  от простой арифметической середины, от вероятнейшего значения  $x$  измеряемой величины.

Сложим уравнения (13) и разделим на их число

$$\frac{[l]}{n} - x = \frac{[v]}{n} \quad (14)$$

но  $x = \frac{[l]}{n}$ ,

тогда  $[v] = 0$  (15)

т.е. сумма вероятнейших погрешностей результатов равнозначных измерений равна нулю при любом числе измерений.

Составим разности уравнений (1) и (13)

$$\Delta_i - v_i = l_i - X - l_i + x \quad (16)$$

но,  $x - X = \eta = [\Delta]/n$  - истинная случайная погрешность простой арифметической середины, тогда

$$\Delta_i = v_i + \eta \quad (17)$$

Выражение (17) есть уравнение связи истинных и вероятнейших погрешностей результатов равнозначных измерений.

Возведем уравнения (17) в квадрат, сложим и разделим на их число

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \eta^2 + 2\eta \frac{[v]}{n} \quad (18)$$

но  $\frac{[\Delta^2]}{n} = m^2$ ;  $[v] = 0$ ;  $\eta^2 = \frac{[\Delta^2]}{n^2}$ ;

тогда  $m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{[\Delta^2]}{n}$  (19)

Второй член правой части уравнения (19) запишем в виде

$$\eta^2 = \frac{[\Delta]^2}{n^2} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n)^2}{n^2} = \frac{[\Delta^2] + 2[\Delta_j \Delta_k]}{n^2} = \frac{[\Delta^2]}{n^2} + 2 \frac{[\Delta_j \Delta_k]}{n^2} \quad (20)$$

но  $\frac{[\Delta]}{n} = m^2$ ;  $\frac{[\Delta_j \Delta_k]}{n} = 0$ ; - по четвертому свойству случайных погрешностей.

Уравнение (19) с учетом (20) примет вид

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{m^2}{n} \quad (21)$$

или 
$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} \quad (22)$$

Окончательно 
$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

Выражение (23) является формулой Бесселя для средней квадратической погрешности результата отдельного измерения ряда равноточных измерений одной величины.

### **Практические рекомендации по вычислению простой арифметической середины:**

1. Выбирают приближенное значение  $x'$  простой арифметической середины, в качестве которого лучше всего взять наименьшее из результатов  $l_i$  измерений, т.е.

$$x' = l_{i \min} \quad (24)$$

2. Находят разности

$$\varepsilon_i = l_i - x' \quad (25)$$

3. Вычисляют простую арифметическую середину

$$x = x' + \frac{[\varepsilon]}{n} \quad (26)$$

### **Оценка точности функций измеренных величин**

В большинстве случаев практики топографо-геодезических и маркшейдерских работ искомые величины получают в результате вычислений как функции измеренных величин. Полученные при этом результаты будут содержать погрешности, которые зависят как от погрешностей аргументов (измеренных величин), так и от вида функций.

Возникает задача оценки точности функций измеренных аргументов.

#### **1.4.4 Средняя квадратическая погрешность функции общего вида**

Дана функция

$$U = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k) \quad (27)$$

где  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  - точные (истинные) значения измеряемых величин.

Пусть в результате измерений получены приближенные значения  $l_1, l_2, l_3, l_4, \dots, l_k$  этих величин.

Тогда

$$u = f(l_1, l_2, l_3, \dots, l_k) \quad (28)$$

- приближенное значение функции  $U$ .

Составим разность уравнений (27) и (28)

$$\Delta u = u - U = f(l_1, l_2, l_3, \dots, l_k) - f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k) \quad (29)$$



которая является истинной случайной погрешностью функции  $U$ .

Разности

$$\Delta_i = l_i - X_i \quad (30)$$

- суть истинные случайные погрешности аргументов  $l_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Тогда

$$\Delta u = f(l_1, l_2, l_3, \dots, l_k) - f(l_1 - \Delta_1, l_2 - \Delta_2, \dots, l_k - \Delta_k) \quad (31)$$

Чтобы найти линейную зависимость между погрешностями аргументов и погрешностью функции, продифференцируем функцию (28).

$$du = \frac{\partial f}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} dl_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial l_k} dl_k \quad (32)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial l_1}, \frac{\partial f}{\partial l_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial l_k}$  - частные производные функции по каждому из аргументов.

Заменим в выражении (32) дифференциалы истинными случайными погрешностями функции и аргументов

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial l_1} \Delta_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} \Delta_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3} \Delta_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial l_k} \Delta_k \quad (33)$$

При многократном измерении аргументов, например  $n$  раз, получим

$$\Delta u_i = \frac{\partial f}{\partial l_{1,i}} \Delta_{1,i} + \frac{\partial f}{\partial l_{2,i}} \Delta_{2,i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial l_{k,i}} \Delta_{k,i} \quad (34)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ .

Производные функции по соответствующим аргументам в разных измерениях практически остаются постоянными и могут быть вычислены по приближенным значениям аргументов  $l_{1,0}, l_{2,0}, l_{3,0}, \dots, l_{k,0}$ , в качестве которых можно взять  $l_{1,0} = l_{1,1}, l_{2,0} = l_{2,1}, \dots, l_{k,0} = l_{k,1}$ , т.е. значения аргументов, полученные при первом измерении определяемых величин.

В соответствии с этим можно принять

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l_{1,1}} &\approx \frac{\partial f}{\partial l_{1,2}} \approx \frac{\partial f}{\partial l_{1,3}} \approx \dots \approx \frac{\partial f}{\partial l_{1,k}} \approx \left( \frac{\partial f}{\partial l_1} \right)_0, \\ \frac{\partial f}{\partial l_{2,1}} &\approx \frac{\partial f}{\partial l_{2,2}} \approx \frac{\partial f}{\partial l_{2,3}} \approx \dots \approx \frac{\partial f}{\partial l_{2,n}} \approx \left( \frac{\partial f}{\partial l_2} \right)_0, \\ &\dots \\ \frac{\partial f}{\partial l_{k,1}} &\approx \frac{\partial f}{\partial l_{k,2}} \approx \frac{\partial f}{\partial l_{k,3}} \approx \dots \approx \frac{\partial f}{\partial l_{k,n}} \approx \left( \frac{\partial f}{\partial l_k} \right)_0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

С учетом (35) выражение (34) примет вид

$$\Delta u_i = \left( \frac{\partial f}{\partial l_1} \right)_0 \Delta_{1,i} + \left( \frac{\partial f}{\partial l_2} \right)_0 \Delta_{2,i} + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial l_k} \right)_0 \Delta_{k,i} \quad (36)$$

Возведем уравнения (36) в квадрат, сложим и разделим на их число

$$\frac{[\Delta u^2]}{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial l_1} \right)_0^2 \frac{[\Delta l_1^2]}{n} + \left( \frac{\partial f}{\partial l_2} \right)_0^2 \frac{[\Delta l_2^2]}{n} + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial l_k} \right)_0^2 \frac{[\Delta l_k^2]}{n} + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial l_1} \right)_0 \left( \frac{\partial f}{\partial l_2} \right)_0 \frac{[\Delta l_1 \Delta l_2]}{n} + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial l_1} \right)_0 \left( \frac{\partial f}{\partial l_3} \right)_0 \frac{[\Delta l_1 \Delta l_3]}{n} \quad (37)$$

На основании (3) и (8) можно записать

$$\frac{[\Delta_1 \Delta_2]}{n} = 0, \frac{[\Delta_1 \Delta_3]}{n} = 0, \dots, \frac{[\Delta_{k-1} \Delta_k]}{n} = 0,$$

$$u \frac{[\Delta u^2]}{n} = m_u^2, \frac{[\Delta_1^2]}{n} = m_1^2, \frac{[\Delta_2^2]}{n} = m_2^2, \dots, \frac{[\Delta_k^2]}{n} = m_k^2 \quad (38)$$

Выражение (37) с учетом (38) примет вид

$$m_u^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial l_1} \right)_0^2 m_1^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial l_2} \right)_0^2 m_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial l_k} \right)_0^2 m_k^2 \quad (39)$$

или

$$m_u = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial l_1} \right)_0^2 m_1^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial l_2} \right)_0^2 m_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial l_k} \right)_0^2 m_k^2} \quad (40)$$

Таким образом, средняя квадратическая погрешность функции независимых аргументов равна корню квадратному из суммы квадратов произведений частных производных функции по каждому из аргументов на средние квадратические погрешности соответствующих аргументов.

#### 1.4.5 Средняя квадратическая погрешность простой арифметической середины

Формулу (7) для простой арифметической середины перепишем в виде

$$x = \frac{[l]}{n} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n} = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \dots + \frac{1}{n} l_n \quad (41)$$

где  $l_i$  - результаты равноточных измерений одной и той же величины;

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$n$  - число измерений.

Из уравнения (39) имеем

$$m_x^2 = M^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial l_1} \right)^2 m_1^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial l_2} \right)^2 m_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial x}{\partial l_n} \right)^2 m_n^2$$

Но  $\frac{\partial x}{\partial l_i} = \frac{1}{n}$ , тогда

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = m.$$

$$M^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + \dots + \frac{1}{n^2} m_n^2 \quad (42)$$

Так как измерения равноточные, т.е.  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$  (43)

Следовательно, выражение (42) примет вид

$$M^2 = n \frac{1}{n^2} m^2 = \frac{m^2}{n}, \quad (44)$$

откуда

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (45)$$

Средняя квадратическая погрешность простой арифметической середины в  $\sqrt{n}$  раз меньше средней квадратической погрешности результата каждого отдельного измерения.

Сравнивая формулу (44) и второй член правой части уравнения (21), можно сделать вывод, что

$$\eta^2 = \frac{m^2}{n}, \eta = \frac{m}{\sqrt{n}} = M,$$

т.е. истинная случайная погрешность простой арифметической середины равна средней квадратической погрешности простой арифметической середины.

#### 1.4.6 Оценка точности результатов угловых измерений в триангуляции

Известно, что сумма внутренних углов плоского треугольника равна  $180^\circ$ ,

$$\text{т.е. } \beta_{1,0} + \beta_{2,0} + \beta_{3,0} = 180^\circ \quad (46)$$

где  $\beta_{1,0}, \beta_{2,0}, \beta_{3,0}$  - истинные (точные) значения углов.

Пусть  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  - результаты измерения этих углов, т.е. приближенные значения углов.

Тогда, согласно (1), имеем

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 - \beta_{1,0} &= \Delta_1, \\ \beta_2 - \beta_{2,0} &= \Delta_2, \\ \beta_3 - \beta_{3,0} &= \Delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  - истинные случайные погрешности результатов измерений.

Перепишем равенство (46) с учетом формул (47)

$$(\beta_1 - \Delta_1) + (\beta_2 - \Delta_2) + (\beta_3 - \Delta_3) = 180^\circ; \quad (48)$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) = 180^\circ; \quad (49)$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^\circ = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \quad (50)$$

Обозначим

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \omega. \quad (51)$$

$\omega$  - называют *угловой невязкой* в треугольнике, т.е. это истинная случайная погрешность суммы внутренних углов треугольника.

Тогда уравнение (50) можно записать в виде

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^\circ = \omega, \quad (52)$$

или

$$\sum_1^3 \beta - 180^\circ = \omega. \quad (53)$$

Пусть равноточно измерены углы в  $n$  треугольниках, для каждого из которых справедливы равенства (51), т.е.

$$\Delta_{1,i} + \Delta_{2,i} + \Delta_{3,i} = \omega_i. \quad (54)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  - номер треугольника.

Возведем уравнения (54) в квадрат, сложим и разделим на их число:

$$\frac{[\Delta_1^2]}{n} + \frac{[\Delta_2^2]}{n} + \frac{[\Delta_3^2]}{n} + 2 \frac{[\Delta_1 \Delta_2]}{n} + 2 \frac{[\Delta_1 \Delta_3]}{n} + 2 \frac{[\Delta_2 \Delta_3]}{n} = \frac{[\omega^2]}{n}. \quad (55)$$

На основании (3) и (7) можно записать

$$\frac{[\Delta_1 \Delta_2]}{n} = 0; \quad \frac{[\Delta_1 \Delta_3]}{n} = 0; \quad \frac{[\Delta_2 \Delta_3]}{n} = 0;$$

$$\frac{[\Delta_1^2]}{n} = m_1^2; \frac{[\Delta_2^2]}{n} = m_2^2; \frac{[\Delta_3^2]}{n} = m_3^2.$$

Тогда

$$\frac{[\omega^2]}{n} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \quad (56)$$

где  $m_1, m_2, m_3$  - средние квадратические погрешности результатов измерений углов  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  в каждом из треугольников.

Так как измерения равноточные, т.е.  $m_1 = m_2 = m_3 = m_\beta$ , то

$$\frac{[\omega^2]}{n} = 3m_\beta^2, \quad (57)$$

или

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[\omega^2]}{3n}}. \quad (58)$$

Это формула Ферреро, по которой обычно выполняется оценка точности результатов измерений горизонтальных углов в триангуляции.

#### 1.4.7 Оценка точности результатов ряда двойных равноточных измерений

Очень часто в практике геодезических и маркшейдерских работ искомую величину определяют по результатам двукратных равноточных измерений этой величины. Например, горизонтальные углы измеряют двумя полуприёмами, превышение на станции при геометрическом нивелировании определяется по черным и красным сторонам реек, длины отрезков линий местности находят из результатов измерений этих отрезков в прямом и обратном направлениях.

Возникает задача оценки точности этих результатов.

Имеем ряд величин, истинные значения которых равны

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_n. \quad (59)$$

Пусть каждая из этих величин измерена равноточно дважды и получены результаты:

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_n; \quad (60)$$

$$l'_1, l'_2, l'_3, \dots, l'_n, \quad (61)$$

Составим разности между результатами измерений и их истинными значениями:

$$l_i - L_i = \Delta_i; \quad (62)$$

$$l'_i - L_i = \Delta'_i, \quad (63)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Найдем разности уравнений (62) и (63)

$$l'_i - l_i = \Delta'_i - \Delta_i \quad (64)$$

и обозначим

$$\Delta'_i - \Delta_i = d_i, \quad (65)$$

здесь  $\Delta'_i$  и  $\Delta_i$  - истинные случайные погрешности результатов.

Возведем уравнения (65) в квадрат, сложим и разделим на их число

$$\frac{[\Delta'^2]}{n} + \frac{[\Delta^2]}{n} + 2 \frac{[\Delta' \Delta]}{n} = \frac{[d^2]}{n}. \quad (66)$$

На основании (3) и (7) запишем

$$\frac{[\Delta'^2]}{n} = m'^2; \frac{[\Delta^2]}{n} = m^2; \frac{[\Delta' \Delta]}{n} = 0,$$

тогда

$$m'^2 + m^2 = \frac{[d^2]}{n}. \quad (67)$$

Так как измерения равноточные, т.е.  $m' = m = m_i$ , то

$$2m_i^2 = \frac{[d^2]}{n}, m_i = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (68)$$

При двойных равноточных измерениях за окончательное значение принимают среднее арифметическое из результатов отдельных измерений, т.е.

$$l_0 = \frac{l+l'}{2},$$

тогда

$$m_{l_0} = \frac{m_i}{\sqrt{2}} \text{ или } m_{l_0} = 0,5 \sqrt{\frac{[d'^2]}{n}} \quad (69)$$

Формулы (68) и (69) справедливы лишь в том случае, если разности  $d_i$  не содержат систематических погрешностей.

Пусть разности содержат систематическую погрешность  $\theta$ , т.е.

$$d_i = \Delta'_i - \Delta_i + \theta. \quad (70)$$

Сложим уравнения (70) и разделим на их число

$$\frac{[d]}{n} = \frac{[\Delta']}{n} - \frac{[\Delta]}{n} + \theta. \quad (71)$$

На основании четвертого свойства случайных погрешностей имеем

$$\frac{[\Delta']}{n} = 0, \frac{[\Delta]}{n} = 0,$$

т.е.

$$\frac{[d]}{n} = \theta \quad (72)$$

*Среднее арифметическое из разностей результатов двойных равноточных измерений отлично от нуля и численно равно систематической погрешности этих результатов.*

Вычтем из каждой разности  $d_i$  величину систематической погрешности  $\theta$ , т.е. образуем новые разности

$$d'_i = d_i - \theta \quad (73)$$

Сложив равенства (73) и поделив их на  $n$ , получим

$$\frac{[d']}{n} = \frac{[d]}{n} - \theta,$$

но

$$\frac{[d]}{n} = \theta,$$

тогда

$$\frac{[d']}{n} = 0, \quad (74)$$

т.е. *среднее арифметическое из разностей результатов двойных равноточных измерений, свободных от систематических погрешностей, всегда равно нулю. Разности  $d'$ , как отклонения  $d_i$  от простой арифметической середины и обладающие свойством  $[d'] = 0$ , можно считать вероятнейшими погрешностями разностей  $d_i$ .*

Применяя к ним формулу *Бесселя* для средней квадратической погрешности, запишем

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}, \quad (75)$$

а

$$m_l = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}. \quad (76)$$

Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического из результатов  $l_i$  и  $l'_i$  будет равна

$$m_{l_0} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} = 0,5 \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \quad (77)$$

Вычисление значения числителя подкоренного выражения можно проконтролировать по формуле

$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{2}. \quad (78)$$

*Примечание.* Оценку точности по разностям результатов двойных равнооточных измерений следует выполнять по формулам (68) и (69), если разности удовлетворяют условию

$$|[d]| \leq 0,25|[d]|, \quad (79)$$

в противном случае, по формулам (75) - (77).

#### 1.4.8 Примеры оценки точности результатов равнооточных измерений одной величины и функций независимо измеренных величин

**Задача 1.** По результатам равнооточных измерений горизонтального угла девятью приемами (см. табл. 1) найти наиболее точное по вероятности значение угла, средние квадратические погрешности измерения каждого отдельного угла и простой арифметической середины.

Таблица 1

Оценка точности результатов измерения отдельного горизонтального угла

Номера приемов в $i$	Результаты измерений $\beta_i$	$\varepsilon_i$	$\varepsilon_i^2$	$v_i$	$v_i^2$	Основные формулы, вспомогательные вычисления
1	2	3	4	5	6	7
1	32° 23' 44"	+ 4	16	-0,6"	0,36	1. $\beta' = \beta_{i, \min}$
2	40	0	0	-4,6	21,16	2. $\varepsilon_i = \beta_i - \beta'$
3	43	+ 3	9	-1,6	2,56	3. $\beta = \beta' + [\varepsilon]/n = 32^\circ 23' 44,56''$
4	45	+ 5	25	+0,4	0,16	
5	46	+ 6	36	+1,4	1,96	4. $\beta_{\text{окр.}} = 32^\circ 23' 44,6''$
6	43	+ 3	9	-1,6	2,56	5. $\delta = \beta - \beta_{\text{окр.}} = -0,04''$
7	48	+ 8	64	+3,4	11,56	
8	45	+ 5	25	+0,4	0,16	6. $v_i = \beta_i - \beta_{\text{окр.}}$
9	32° 23' 47"	+ 7	49	+2,4	5,76	
$\Sigma$		42	233	-0,4	46,20	7. $[v] = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

Номера приемов в $i$	Результаты измерений $\beta_i$	$\varepsilon_i$	$\varepsilon_i^2$	$v_i$	$v_i^2$	Основные формулы, вспомогательные вычисления
1	2	3	4	5	6	7
$\beta'$ $\beta$ $\beta_{окр.}$	32° 23' 40" 32°23'44,56" 32° 23' 44,6"	$[\varepsilon]^2=1681$ Окончательный результат : $\beta = 32^\circ 23' 44,6'' \pm 0,80''$ $m_\beta = \pm 2,4''$ $M = \pm 0,80''$				<b>Контроль:</b> $[v] = \delta \cdot n$ $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$ $m_\beta = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$

**Вычисления выполняют в следующей последовательности:**

1. Выбирают приближенное значение  $\beta'$  простой арифметической середины как наименьшее из результатов измерений, т.е.  $\beta' = \beta_{i,min}$ . В нашем примере это значение равно  $\beta' = \beta_2 = 32^\circ 23' 40''$ .

2. Вычисляют уклонения  $\varepsilon_i$  результатов измерений  $\beta_i$  от этого приближенного значения  $\varepsilon_i = \beta_i - \beta'$  и сумму этих уклонений

$$[\varepsilon] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n.$$

3. В колонке 4 табл.2 вычисляют квадраты  $\varepsilon^2$  и их сумму  $[\varepsilon^2]$ .

4. Вычисляют простую арифметическую середину  $\beta$  - наиболее точное по вероятности значение измеряемого угла.

5. Находят вероятнейшие погрешности  $v_i$  как разности результатов отдельных измерений и округленного значения  $\beta_{окр.}$ , т.е.,  $v_i = \beta_i - \beta_{окр.}$  их сумму  $[v] = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  контролем  $[v] = \delta \cdot n$ , где  $\delta = \beta - \beta_{окр.}$  - погрешность округления среднего арифметического.

6. В графе 6 вычисляют квадраты вероятнейших погрешностей  $v_i^2$  и их сумму  $[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$  с контролем  $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$ .

7. По формуле (23) Бесселя вычисляют среднюю квадратическую погрешность результата каждого отдельного измерения:

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

8. По формуле (44) находят среднюю квадратическую погрешность простой арифметической середины:

$$M = \frac{m_\beta}{\sqrt{n}}$$

9. Окончательный результат записывают в виде

$$\beta = \beta_{окр.} \pm M.$$

**Задача 2.** В каждом треугольнике микротриангуляции (рис. 1) измерено одинаково точно по три внутренних горизонтальных угла (см. табл. 2). Вычислить среднюю квадратическую погрешность результатов измерений каждого отдельного угла, применив формулу Ферреро:

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[\omega^2]}{3n}},$$

где  $\omega_i = [\beta] - 180^\circ$  - угловые невязки в треугольниках;  $n$  – число треугольников.

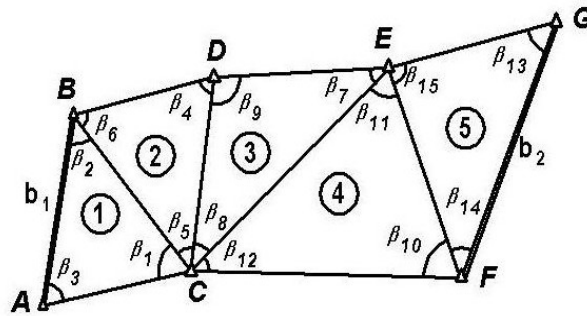


Рис. 1. Схема сети микротриангуляции

Таблица 2

Обработка результатов угловых измерений в микротриангуляции

Названия углов	Номера треугольников и значения измеренных углов				
	1	2	3	4	5
$\beta_1$	$80^\circ 07,7'$	$74^\circ 21,6'$	$36^\circ 39,2'$	$39^\circ 17,4'$	$69^\circ 49,6'$
$\beta_2$	50 58,3	64 35,5	71 49,6	96 15,8	36 39,2
$\beta_3$	48 53,1	41 01,8	71 32,6	44 26,1	73 32,4
$\Sigma \beta$	$179^\circ 59,1'$	$179^\circ 58,9'$	$180^\circ 01,4'$	$179^\circ 59,3'$	$180^\circ 01,2'$
$\omega_\beta = \Sigma \beta - 180^\circ$	- 0,9'	- 1,1'	+ 1,4'	- 0,7'	+ 1,2'
$\omega^2$	0,81	1,21	1,96	0,49	1,44

$$m_\beta = \sqrt{\frac{5,91}{15}} = \sqrt{0,394} = \pm 0,63'$$

**Задача 3.** В теодолитном ходе равномерно измерено 11 горизонтальных углов, каждый со средней квадратической погрешностью  $m_\beta = \pm 0,5'$ . Определить среднюю квадратическую и предельную погрешности суммы этих углов.

Имеем функцию  $u = \sum \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_{11}$ .

Частные производные ее по каждому из аргументов равны  $\frac{\partial u}{\partial \beta} = 1$ .

Тогда  $m_u = m_{\Sigma \beta} = m_\beta \sqrt{n} = 0,5' \sqrt{11} = \pm 1,66'$ ;

и  $\Delta_{пред.} = 2m_u = 2 \cdot 1,66' \approx \pm 3,3'$ .

**Задача 4.** Горизонтальный угол  $\beta$  (см. рис. 2) измерен теодолитом 2Т30 одним полным приемом способом «приемов». Определить среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического из значений результатов измерений угла в полуприемах, если средняя квадратическая погрешность отсчетов по лимбу составила  $m_o = \pm 0,5'$ . Другими погрешностями пренебречь.

Значение угла в полуприемах вычисляют по формулам:

$$\beta_L = c'_L - a'_L; \beta_R = c'_R - a'_R,$$

где  $c'_L, c'_R, a'_L, a'_R$  - отсчеты по горизонтальному кругу при визировании на точки С и А при положении вертикального круга слева (КЛ) и справа (КП).

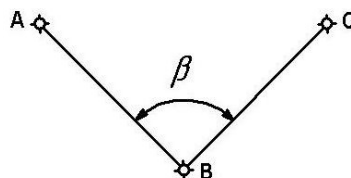




Рис. 2. Схема наблюдений

Вероятнейшее значение горизонтального угла по результатам, полученным в каждом полуприеме, вычисляют по формуле

$$\beta_{cp.} = \frac{\beta_L + \beta_R}{2} = \frac{c'_L - a'_L + c'_R - a'_R}{2} = i \frac{1}{2} c'_L - \frac{1}{2} a'_L + \frac{1}{2} c'_R - \frac{1}{2} a'_R.$$

На основании формул (39) – (42) запишем

$$m_{\beta, cp.} = m_0 \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right]} = 0,5 \sqrt{4 \frac{1}{4}} = \pm 0,5'.$$

Эту же задачу решим иначе.

1. Определим среднюю квадратическую погрешность результатов измерений угла, полученных в каждом полуприеме

$$m_{\beta}^2 = m_a^2 + m_c^2, \text{ но } m_a = m_c = m_0 = \pm 0,5'$$

тогда

$$m_{\beta} = m_0 \sqrt{2} = \pm 0,5' \sqrt{2}$$

2. По формуле (42) вычислим среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического значения угла, полученного из результатов в каждом полуприеме:

$$m_{\beta, cp.} = \frac{m_{\beta}}{\sqrt{2}} = \frac{0,5 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm 0,5'.$$

**Задача 5.** Вычислить среднюю квадратическую и предельную погрешности превышения, определенного на станции при геометрическом нивелировании по двум сторонам нивелирных шашечных реек, если:

- цена деления шкалы рейки  $\mu = 10$  мм,
- средняя квадратическая погрешность отсчета по рейке  $m_o = \pm 1$  мм.

Другими погрешностями пренебречь.

Превышение вычисляют по формулам:

$$h^u = a^u - b^u; h^k = a^k - b^k; h_{cp.} = \frac{h^u + h^k}{2}$$

где  $a^u, b^u$  - отсчеты по черным сторонам реек, устанавливаемых в задней и передней точках нивелирного хода;

$a^k, b^k$  - то же, по красным сторонам реек.

Перепишем последнюю формулу в виде

$$h_{cp.} = \frac{a^u - b^u + a^k - b^k}{2} = \frac{1}{2} a^u - \frac{1}{2} b^u + \frac{1}{2} a^k - \frac{1}{2} b^k.$$

Согласно формулам (41) – (44) имеем

$$m_{h, cp.} = m_0 \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right]} = 1 \text{ мм} \sqrt{4 \frac{1}{4}} = \pm 1 \text{ мм};$$

$$\Delta h_{пред.} = 2 m_{h, cp.} = \pm 2, \text{ мм}.$$

**Задача 6.** Вычислить среднюю квадратическую погрешность результата определения превышения способом тригонометрического нивелирования, если превышение вычислено по формуле

$$h = h' + i - l, \tag{80}$$

где  $h' = d \tan \nu$ ,  $d = 153,84$  м – горизонтальное проложение линии местности, измеренное с относительной погрешностью 1:2000,  $\nu = + 3^\circ 13'$  - угол наклона линии визирования, измеренный со средней квадратической погрешностью  $m_{\nu} = \pm 0,5'$ ,  $i = 1,47$  м – высота прибора (теодолита), измеренная с погрешностью  $m_i = \pm 0,002$  м.

1. Вычислим превышение:  $h = d \tan \nu + i - l = 153,83 \cdot 0,05620 + 1,47 - 2,00 = + 8,12$  м.

2. Определим частные производные функции (78) по каждому из аргументов:  
 $\frac{\partial h}{\partial d} = \tan v$ ;  $\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{d}{(\cos v)^2}$ ;  $\frac{\partial h}{\partial i} = 1$ ;  $\frac{\partial h}{\partial l} = -1$ .

3. На основании формулы (38) запишем

$$m_h = \sqrt{(m_d \cdot \tan v)^2 + \left(\frac{m_v}{\rho \cdot (\cos v)^2}\right)^2 + m_i^2 + m_l^2},$$

где  $\rho = 206265'' = 3437,75' = 57,2958^\circ$  - радиан.

4. С учетом  $\frac{m_d}{d} = \frac{1}{2000}$ ;  $m_d = \frac{d}{2000} = \frac{153,84}{2000} = \pm 0,077$  м

вычислим

$$m_h = \sqrt{(4,32 \cdot 10^{-3})^2 + (22,4 \cdot 10^{-3})^2 + (5 \cdot 10^{-3})^2 + (2 \cdot 10^{-3})^2} = 10^{-3} \sqrt{18,66 + 501,8 + 25 + 4} = 23,4 \cdot 10^{-3} = \pm 0,023$$

1. Окончательно  $h = +8,12 \pm 0,023$  м.

2.

**Задача 7.** В треугольнике ABC (рис.3) равноточно измерены три угла  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  и сторона AB = c. Определить длины сторон **a** и **b**, средние квадратические и относительные погрешности этих сторон, если: средние квадратические погрешности результатов измерений углов равны  $m_\beta = m_\alpha = m_\gamma = \pm 0,5'$ ; относительная погрешность результата измерения стороны c составила  $m_c : c = 1:2000$ .

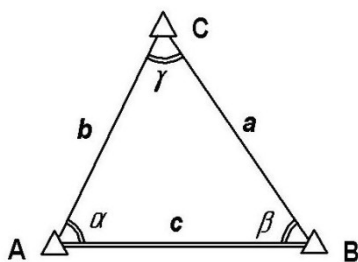


Рис. 3. К решению треугольника

Исходные данные, результаты вычислений и оценка точности приведены в табл. 3.

Таблица 3

Решение треугольника

№ вершин	Результаты измерений углов	Поправки $v_\beta$	Уравненные углы	Синусы углов	Длины сторон d, м	$m_d$ , мм	$\frac{m_d}{d}$
С ( $\gamma$ )	58° 14,7'	0,2'	58° 14,5'	0,85028	156,82	78	1:2000
В ( $\beta$ )	62 52,1	0,2	62 51,9	0,88993	164,13	84	1:1950
А ( $\alpha$ )	58 53,9	0,2	58 53,6	0,85621	157,91	81	1:1940
$\sum \omega$	180° 00,7' + 0,7'	- 0,7'	180° 00,0'	$\Delta \omega = 1,0' \sqrt{3} = \pm 1,7'$ $v_\beta = \frac{-\omega}{3} = -0,2'$			

Основные формулы:

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \alpha; b = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \beta; \quad (81)$$

$$\ln b = \ln c - \ln \sin \gamma + \ln \sin \beta, \quad (82)$$

$$\ln a = \ln c - \ln \sin \gamma + \ln \sin \alpha. \quad (83)$$

Продифференцируем уравнения (82) и (83):

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} - \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \cdot \frac{d\gamma}{\rho} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cdot \frac{d\beta}{\rho}; \quad (84)$$

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} - \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \cdot \frac{d\gamma}{\rho} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\rho}. \quad (85)$$

На основании формул (27) – (40) запишем:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \left(\operatorname{ctg} \gamma \frac{m_\gamma}{\rho}\right)^2 + \left(\operatorname{ctg} \beta \frac{m_\beta}{\rho}\right)^2; \quad (86)$$

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \left(\operatorname{ctg} \gamma \frac{m_\gamma}{\rho}\right)^2 + \left(\operatorname{ctg} \alpha \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2. \quad (87)$$

Подставляя численные значения в уравнения (86) и (87), получим:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2000}\right)^2 + \left(0,619 \frac{0,5}{3438}\right)^2 + \left(0,512 \frac{0,5}{3438}\right)^2 = \left(\frac{1}{1950}\right)^2;$$

$$\frac{m_b}{b} = \frac{1}{1950}; m_b = \pm 0,084 \text{ м};$$

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{1}{2000}\right)^2 + \left(0,619 \frac{0,5}{3438}\right)^2 + \left(0,603 \frac{0,5}{3438}\right)^2 = \left(\frac{1}{1940}\right)^2;$$

$$\frac{m_a}{a} = \frac{1}{1940}; m_a = \pm 0,081 \text{ м}.$$

**Задача 8.** Определить средние квадратические погрешности:

- результатов отдельных измерений;
- средних арифметических значений из результатов двойных равноточных измерений длин сторон теодолитного хода;
- относительные погрешности этих сторон.

Исходные данные и математическая обработка результатов измерений представлены в табл. 4.

Таблица 4

Оценка точности результатов двойных равноточных измерений

Номера сторон	Результаты измерений длин сторон хода, м		$l_{\text{среднее}}, \text{ м}$	$d, \text{ см}$	$d^2, \text{ см}^2$	$d', \text{ см}$	$d'^2, \text{ см}^2$	$\frac{m_{l, \text{ср.}}}{l_{\text{ср.}}}$
	$l_{\text{прямо}}$	$l_{\text{обратно}}$						
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	145,65	145,74	145,695	- 9	81	-4,5	20,25	1:4900
2	156,09	156,09	156,090	0	0	4,5	20,25	1:5200
3	205,58	205,62	205,600	- 4	16	0,5	0,25	1:6900
4	144,67	144,63	144,650	4	16	8,5	72,25	1:4800
5	174,56	174,69	174,625	-13	169	-8,5	72,25	1:5800
6	125,51	125,26	125,235	- 5	25	-0,5	0,25	1:4200
$m_d = \pm 6,1 \text{ см}$			$[ ] = \Sigma$	-27	307	0,0	185,50	$\theta = -$
$m_l = \pm 4,3 \text{ см}$			$[[d]]$	27		Контроль :		4,5 см
$m_{l, \text{ср.}} = \pm 3,0 \text{ см}$			$[[d]]$	35		$[d'^2] = 185,50$		

Обработку результатов измерений выполняют в следующей последовательности.

1. В колонки 2 и 3 таблицы 4 выписывают из полевых журналов результаты  $l$  измерений длин сторон.
2. Вычисляют средние арифметические значения ( $l_{\text{ср.}}$ ) из результатов  $l$  измерений каждой стороны в прямом и обратном направлениях:

$$l_{\text{ср.}} = \frac{l_{\text{прямо}} + l_{\text{обратно}}}{2},$$

и записывают их в графу 4.

3. Находят разности  $d = l_{\text{прямо}} - l_{\text{обратно}}$  (графа 5) и их сумму  $[d] = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_6$ .

4. Проверяют выполнение условия  $|[d]| \leq 0,25 [ |d| ]$ ;  
 $|[d]| = 27$ ;  $[ |d| ] = 35$ ;  $0,25 [ |d| ] = 8,75$ ;

Условие не выполнено, значит оценку точности результатов измерений следует выполнять по формулам (73) – (75).

5. Вычисляют величину систематической погрешности разностей  $d$ :

$$\theta = \frac{[d]}{n} = \frac{-27}{6} = -4,5 \text{ см.}$$

6. В графу 7 записывают разности  $d' = d - \theta$ , свободные от систематической погрешности  $\theta$ .

7. Квадраты разностей  $d'^2$ , их сумму  $[d'^2]$  заносят в графу 8, контролируя значение суммы по формуле

$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n} = 307 - \frac{27^2}{6} = 307 - 121,5 = 185,50.$$

8. По формулам (73) – (75) вычисляют средние квадратические погрешности:  
 - разностей результатов двойных равноточных измерений

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}} = \frac{185,50}{5} = \pm 6,1 \text{ см};$$

- результатов отдельных измерений

$$m_l = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \frac{6,1}{\sqrt{2}} = \pm 4,3 \text{ см};$$

- средних арифметических значений из результатов двойных равноточных измерений

$$m_{l, \text{ср.}} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} = \frac{4,3}{\sqrt{2}} = \pm 3,0 \text{ см.}$$

9. В графе 9 записывают относительные погрешности результатов измерений, вычисляемые по формуле

$$m_{l, \text{ср.}} / l_{\text{ср.}} = 1 : (l_{\text{ср.}} / m_{l, \text{ср.}})$$

**Задача 9.** В теодолитном ходе равно точно измерено семь горизонтальных углов двумя полуприемами каждый и получены результаты этих измерений  $\beta_{R,i}$  и  $\beta_{L,i}$ , где  $\beta_{R,i}$  – значения углов, полученных в первом полуприеме – при положении вертикального круга теодолита справа (КП);  $\beta_{L,i}$  – значения углов, полученных во втором полуприеме – при положении вертикального круга теодолита слева (КЛ);  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  – номера углов и их число.

Определить средние квадратические погрешности:

$m_\beta$  – результатов измерений углов в полуприемах;

$m_{\beta, \text{ср.}}$  – средних арифметических значений углов в приемах – по разностям результатов двойных равноточных измерений углов в полуприемах. Решение представлено в таблице

5. Вычисления выполняют в последовательности, указанной для предыдущей задачи.

Таблица 5

Оценка точности результатов измерения горизонтальных углов

№	ОМ	Результаты измерений	$d_i =$		
---	----	----------------------	---------	--	--

ер углов	I полуприем $\beta_R$	II полуприем $\beta_L$	$=\beta_R-\beta_L$	$d_i^2$	Основные формулы и вспомогательные вычисления
1	2	3	4	5	6
1	179° 56,9'	179° 56,2'	+ 0,6'	0,36	1. Условие: $ [d]  \leq 0,25 \cdot  [d] $ $1,0' = 0,25 \cdot 4,0'$ 2. $m_{\beta} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{2,54}{14}} = \sqrt{0,1814}$ 3. $m_{\beta,cp.} = \frac{m_{\beta}}{\sqrt{2}} = \pm 0,30'$
2	179 58,1	179 58,9	- 0,8	0,64	
3	180 01,2	180 00,4	+ 0,8	0,64	
4	180 08,5	180 08,0	+ 0,5	0,25	
5	179 46,9	179 47,4	- 0,5	0,25	
6	202 37,8	202 38,0	- 0,2	0,04	
7	179° 43,4'	179° 42,8'	+ 0,6'	0,36	
$m_{\beta} = \pm 0,43'$ $m_{\beta,cp.} = \pm 0,30'$		[ ] = $\Sigma$   [ d ]     [ d ]	+ 1,0' + 1,0 + 4,0	2,54	

### 1.5 Неравноточные измерения

#### 1.5.1 Общая арифметическая середина. Веса результатов измерений

Пусть имеется физическая величина (угол, отрезок линии, превышение и т.п.), точное (истинное) значение которой равно  $X$ . Эта величина измерена равноточно  $N$  раз несколькими сериями и получены результаты  $l_j^{(i)}$ , этих измерений. Здесь  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  - номера серий измерений и их число;  $j = 1, 2, 3, \dots, n_i$  - номера измерений в каждой серии и их число.

Примем, что число измерений  $n_i$  в каждой серии неодинаково, т.е.

$$n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \dots \neq n_k. \tag{88}$$

Обозначим среднюю квадратическую погрешность результатов  $l_j^{(i)}$  равноточных измерений через  $\mu$ . В каждой серии можно определить наиболее точное по вероятности значение результата  $x_i$ , как среднее арифметическое из результатов  $l_j^{(i)}$  равноточных измерений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1^{(1)} + l_2^{(1)} + l_3^{(1)} + \dots + l_{n_1}^{(1)}}{n_1}; \\ x_2 &= \frac{l_1^{(2)} + l_2^{(2)} + l_3^{(2)} + \dots + l_{n_2}^{(2)}}{n_2}; \\ \dots &\dots\dots\dots; \\ x_k &= \frac{l_1^{(k)} + l_2^{(k)} + l_3^{(k)} + \dots + l_{n_k}^{(k)}}{n_k}, \end{aligned} \right\} \tag{89}$$

и их средние квадратические погрешности

$$m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{n_1}}; m_2 = \frac{\mu}{\sqrt{n_2}}; m_3 = \frac{\mu}{\sqrt{n_3}}; \dots; m_k = \frac{\mu}{\sqrt{n_k}}. \tag{90}$$

Величины  $x_i$  - результаты неравноточных измерений, для которых

$$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \dots \neq m_k \tag{91}$$

по условию (88). Возникает задача, как по результатам  $x_i$  неравноточных измерений найти наиболее точное по вероятности значение измеряемой величины  $X_0$ .

Так как  $l_j^{(i)}$  - результаты равноточных измерений, то вероятнейшее значение  $X_0$  из этих результатов равно

$$X_0 = \frac{l_1^{(1)} + l_2^{(1)} + \dots + l_{n_1}^{(1)} + l_1^{(2)} + l_2^{(2)} + \dots + l_{n_2}^{(2)} + \dots + l_1^{(k)} + l_2^{(k)} + \dots + l_{n_k}^{(k)}}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k} \tag{92}$$

В свою очередь,

$$\left. \begin{aligned} l_1^{(1)} + l_2^{(1)} + l_3^{(1)} + \dots + l_{n_1}^{(1)} &= x_1 \cdot n_1; \\ l_1^{(2)} + l_2^{(2)} + l_3^{(2)} + \dots + l_{n_2}^{(2)} &= x_2 \cdot n_2; \\ \dots &\dots; \\ l_1^{(k)} + l_2^{(k)} + l_3^{(k)} + \dots + l_{n_k}^{(k)} &= x_k \cdot n_k; \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

С учетом (93) равенство (92) перепишем в виде

$$X_0 = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \dots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k} \quad (94)$$

Обозначив  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = N$ ,  
получим

$$X_0 = \frac{[x_i \cdot n_i]}{[n_i]} = \frac{[x_i \cdot n_i]}{N}. \quad (96)$$

Из выражения (90) видим, что

$$n_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2}; n_2 = \frac{\mu^2}{m_2^2}; \dots; n_k = \frac{\mu^2}{m_k^2}. \quad (97)$$

Подставим значения для  $n_i$  в равенства (94), (97):

$$X_0 = \frac{x_1 \frac{\mu^2}{m_1^2} + x_2 \frac{\mu^2}{m_2^2} + \dots + x_k \frac{\mu^2}{m_k^2}}{\frac{\mu^2}{m_1^2} + \frac{\mu^2}{m_2^2} + \dots + \frac{\mu^2}{m_k^2}}. \quad (98)$$

Величины

$$\frac{\mu^2}{m_i^2} = p_i \quad (99)$$

называют *весами* результатов  $x_i$  неравноточных измерений.

С учетом (99) выражение (98) примет вид

$$X_0 = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_k \cdot p_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k} = \frac{[p \cdot x]}{[p]} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^k p_i}. \quad (100)$$

Величину  $X_0$ , вычисляемую по формуле (100) называют *общей арифметической серединой*, *средним весовым*, или *средневзвешенным значением* определяемой величины из результатов неравноточных измерений.

Величина общей арифметической середины не изменится, если все веса изменить в одинаковое число раз. Этим свойством следует пользоваться для упрощения вычислений. На практике общую арифметическую середину чаще всего вычисляют по формуле

$$X_0 = x' + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}, \quad (101)$$

которая получена из следующих рассуждений.

В ряду результатов  $x_i$  неравноточных измерений выберем наименьший по абсолютной величине и примем его в качестве приближенного значения искомой величины, т.е.

$$x' = x_{i, \min}. \quad (102)$$

Образует разности

$$\varepsilon_i = x_i - x'. \quad (103)$$

Умножив обе части этого равенства на соответствующие веса  $p_i$ , получим

$$p_i \cdot \varepsilon_i = p_i \cdot x_i - p_i \cdot x'. \quad (104)$$

Найдем сумму уравнений (102) и разделим ее на  $[p_i]$

$$\frac{[p_i \cdot \varepsilon_i]}{[p_i]} = \frac{[p_i \cdot x_i]}{[p_i]} - x', \quad (105)$$

Но 
$$\frac{[p_i \cdot x_i]}{[p_i]} = X_0,$$

тогда  $X_0 = x' + \frac{[p_i \cdot \varepsilon_i]}{[p_i]}$ , т.е. получена формула (101).

### 1.5.2 Средняя квадратическая погрешность единицы веса

На основании формулы (99) можно сделать вывод, что веса результатов измерений – положительные числа, обратно пропорциональные квадратам средних квадратических погрешностей этих результатов.

Пусть в ряду результатов измерений  $x_i$  существует такой  $x_j$ , вес которого равен единице, т.е.  $p_j = 1$ .

Тогда

$$p_j = \frac{\mu^2}{m_j^2} \text{ и } \mu^2 = m_j^2; \mu = m_j. \quad (106)$$

Величину  $\mu = m_j$  называют *средней квадратической погрешностью единицы веса* или *средней квадратической погрешностью результата измерения*, вес которого равен единице.

Из выражения (99) видно также, что

$$\mu = m_i \sqrt{p_i} \quad (107)$$

или

$$\mu^2 = m_1^2 p_1 = m_2^2 p_2 = \dots = m_k^2 p_k, \quad (108)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}, \frac{p_2}{p_3} = \frac{m_3^2}{m_2^2}, \dots, \frac{p_{k-1}}{p_k} = \frac{m_k^2}{m_{k-1}^2}. \quad (109)$$

### 1.5.3 Средняя квадратическая погрешность и вес общей арифметической середины

Пусть  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  – результаты неравноточных измерений;  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  – веса этих результатов.

Тогда

$$X_0 = \frac{[px]}{[p]} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} = \frac{p_1}{[p]} x_1 + \frac{p_2}{[p]} x_2 + \frac{p_3}{[p]} x_3 + \dots + \frac{p_n}{[p]} x_n. \quad (110)$$

Обозначим  $\frac{p_i}{[p]} = k_i$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . С учетом обозначения формула (110)

примет вид

$$X_0 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \dots + k_n x_n. \quad (111)$$

Согласно с (42) можно записать

$$M_0^2 = m_{x_0}^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \dots + k_n^2 m_n^2 = \frac{p_1^2}{[p]^2} m_1^2 + \frac{p_2^2}{[p]^2} m_2^2 + \frac{p_3^2}{[p]^2} m_3^2 + \dots + \frac{p_n^2}{[p]^2} m_n^2. \quad (112)$$

Но  $p_i \cdot m_i^2 = \mu^2$ , тогда

$$M_0^2 = \frac{\mu^2 p_1 + \mu^2 p_2 + \dots + \mu^2 p_n}{[p]^2} = \frac{\mu^2 [p]}{[p]^2} = \frac{\mu^2}{[p]} \quad (113)$$

или

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \quad (114)$$

т.е. средняя квадратическая погрешность общей арифметической середины равна отношению средней квадратической погрешности единицы веса к корню квадратному из суммы весов результатов измерений.

На основании формул (99) и (114) имеем

$$P = \frac{\mu^2}{M_0^2} = \frac{\mu^2}{\mu^2/[p]} = [p]. \quad (115)$$

Таким образом, вес общей арифметической середины равен сумме весов результатов неравноточных измерений, из которых она определена.

#### 1.5.4 Вычисление средней квадратической погрешности единицы веса

Рассмотрим способы вычисления средней квадратической погрешности единицы веса, применяемые в геодезической практике.

1. Вычисление  $\mu$  при установлении весов по известным средним квадратическим погрешностям  $m$  результатов измерений. Веса результатов измерений в этом случае устанавливаются по формуле

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} = \frac{c}{m_i^2}, \quad (116)$$

в которой коэффициент  $c$  назначается с таким расчетом, чтобы значения весов  $p_i$  было близким к единице. Тогда  $\mu$  вычисляют из выражения

$$\mu = \sqrt{c}. \quad (117)$$

2. Вычисление  $\mu$  по известным средним квадратическим погрешностям и весам однородных результатов измерений выполняют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[m_i^2 p_i]}{n}}, \quad (118)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $n$  – число измерений, для которых известны  $m_i$  и  $p_i$ .

3. Вычисление  $\mu$  по известным истинным случайным погрешностям  $\Delta_i$  функций измеренных величин и их весам  $p_i$ :

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_i \Delta_i^2]}{n}}. \quad (119)$$

**Истинные случайные погрешности функций результатов измерений называют невязками** и обозначают:

а)  $f_\beta$  – угловая невязка в замкнутом многоугольнике, вычисляемая по формуле

$$f_\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i - 180^\circ (n-2), \quad (120)$$

где  $n$  – число внутренних углов многоугольника,  $\beta_i$  – результаты измерений углов;

б)  $\omega$  – угловая невязка в треугольнике, которую находят из выражения

$$\omega = \sum_{i=1}^3 \beta_i - 180^\circ, \quad (121)$$

где  $\beta_i$  – результаты измерений внутренних углов треугольника;

с)  $f_x$  и  $f_y$  – невязки в приращениях координат полигонометрических или теодолитных ходов, определяемые по формулам

$$f_x = \sum \Delta x - (X_k - X_n) \text{ и } f_y = \sum \Delta y - (Y_k - Y_n), \quad (122)$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta y$  – вычисленные приращения координат;  $X_k, Y_k$  и  $X_n, Y_n$  – координаты опорных геодезических пунктов в конце и начале хода;

г)  $f_h$  – высотная невязка нивелирного хода, значение которой вычисляют по формуле

$$f_h = \sum h - (H_k - H_n), \quad (123)$$



где  $h$  – значения средних превышений на станциях;  $H_k, H_n$  – высотные отметки реперов в конце и начале нивелирного хода.

4. Вычисление  $\mu$  по вероятнейшим погрешностям  $v$  результатов измерений, т.е. по внутренней сходимости результатов

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_i v_i^2]}{n-1}}, \quad (124)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  – номера и число измерений,  $p_i$  – веса результатов.

### 1.5.5 Вычисление весов функций независимых аргументов

Имеем функцию

$$F = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (125)$$

и веса аргументов  $p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3}, \dots, p_{x_n}$ .

На основании формулы (39) можно написать

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 m_{x_3}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2. \quad (126)$$

Разделим обе части этого равенства на  $\mu^2$ :

$$\frac{m_F^2}{\mu^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{m_{x_1}^2}{\mu^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{m_{x_2}^2}{\mu^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \frac{m_{x_3}^2}{\mu^2} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{m_{x_n}^2}{\mu^2}, \quad (127)$$

и, учитывая, что  $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$ , окончательно запишем

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{P_{x_1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{P_{x_2}} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{P_{x_n}}. \quad (128)$$

### 1.5.6 Порядок математической обработки результатов неравноточных измерений

Задача 10. Пусть, для определения высоты грунтового репера №29 (см.рис. 4) от фундаментальных реперов № 23, 24 и 43 до определяемого репера проложено три нивелирных хода. Требуется по результатам трех неравноточных значений высоты репера №29 получить наиболее точное значение высоты этого репера. Высоты исходных реперов считать безошибочными. Исходные данные и результаты вычислений приведены в табл. 6 и 7.

Таблица 6

Исходные данные

Номера ходов	Высоты репера № 29 $H_i$ , м	Число станций в ходах $n$
1	403.895	4
2	403.883	7
3	403.890	5

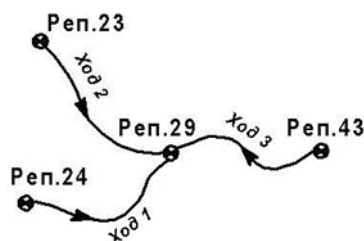


Рис. 4. Схема ходов

Таблица 7

Обработка результатов неравноточных измерений

Номер ходов $i$	Высоты репера №29 $H_i$ , м	Число станций $n$	$P$	$\epsilon$ мм	$P\epsilon$ , мм	$P\epsilon^2$	$v$ , мм	$Pv$ , мм	$Pv^2$
-----------------	-----------------------------	-------------------	-----	------------------	---------------------	---------------	-------------	--------------	--------

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	403,895	4	2,50	+12	+30,0	360,0	5	+12,5	62,5
2	403,883	7	1,43	0	0,0	0,0	-7	-10,0	70,1
3	403,890	5	2,00	+7	+14,0	98,0	0	0,0	0,0
H	403,883	Σ	5,93	+19	+44,0	458,0	-2	+2,5	132,6
H <sub>0</sub>	403,8904	μ=±8,1 мм; M <sub>0</sub> =±3,3 мм; m <sub>h</sub> =±2,6 мм;							
H <sub>ок</sub>	403,890	H <sub>29</sub> =403,890±0,033 м							
δ	+0,4 мм								

Обработку результатов неравноточных измерений выполняют в следующей последовательности:

1. В графе 1 табл. 7 выписывают из табл. 6 номера нивелирных ходов (см. рис. 4), в графе 2 – высоты репера №29, полученные при проложении нивелирных ходов 1, 2, 3.

2. Выбирают приближенное значение  $H'$  высоты репера №29 как наименьшее из  $H_i$ , т.е.  $H' = H_{i, \min}$ , в нашем случае  $H' = 403,883$  м.

3. В графу 3 заносят число станций  $n$  в каждом нивелирном ходе.

4. В четвертой графе записывают веса  $P_i$  результатов измерений для каждого хода, вычисляемые по формуле

$$p_i = \frac{\lambda}{n_i} \quad (129)$$

где  $\lambda = 10$  - коэффициент, значение которого выбирают таким образом, чтобы величины весов были близкими к единице.

Формула (129) получена из следующих рассуждений. Считая результаты определения превышения  $h$  на каждой  $j$ -й станции равноточными, примем в качестве весов  $p_j$  этих результатов число  $\lambda$ , т.е.

$$\lambda = p_j = \frac{\mu^2}{m_h^2}, \quad (130)$$

где  $m_h$  – средняя квадратическая погрешность определения превышений на станции.

Веса результатов определения высоты репера №29 в каждом  $i$ -м нивелирном ходе равны

$$p_j = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \quad (131)$$

где  $m_i = m_h \sqrt{n_i}$  - средние квадратические погрешности определения высоты репера №29 в каждом нивелирном ходе;  $n_i$  – число станций в каждом ходе.

На основании формул (109) можем записать

$$\frac{p_i}{p_h} = \frac{p_i}{\lambda} = \frac{m_h^2}{m_i^2},$$

откуда 
$$p_i = \lambda \frac{m_h^2}{m_i^2} = \lambda \frac{m_h^2}{m_h^2 n} = \frac{\lambda}{n}.$$

5. Уклонения  $\varepsilon_i = H_i - H'$  заносят в графу 5 табл. 7.

6. В графы 6 и 7 записывают произведения  $p_i \varepsilon_i$ ,  $p_i \varepsilon_i^2 = p_i \varepsilon_i \varepsilon_i$  и их суммы.

7. По формуле (101) вычисляют наиболее точное по вероятности значение высоты репера №29:

$$H_0 = H_{29} = H' + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 403,883 + \frac{44,0}{5,93} = 403,8904 \text{ м.}$$

8. Это значение округляют до 0,001 м. Вычисляют уклонения результатов определения высоты репера №29 по каждому ходу от округленного значения общей арифметической середины, т.е.  $v_i = H_i - H_{0, \text{окр.}}$ , которые записывают в графу 8.

9. В графах 9 и 10 получают произведения  $p_i v_i$  и  $p_i v_i^2 = p_i v_i v_i$ , их суммы с контролем общей арифметической середины.

10. По формулам (124) и (114) вычисляют:

- среднюю квадратическую погрешность единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{N-1}} = \sqrt{\frac{132,6}{2}} = \pm 8,1 \text{ мм};$$

- среднюю квадратическую погрешность общей арифметической середины

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{8,1}{\sqrt{5,93}} = \pm 3,3 \text{ мм},$$

где  $N$  – число нивелирных ходов.

11. Среднюю квадратическую погрешность определения превышений на каждой станции находят из выражения

$$m_h = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} = \frac{8,1}{\sqrt{10}} = \pm 2,6 \text{ мм}.$$

12. По формуле  $m_{H_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$  вычисляют средние квадратические погрешности определения высоты репера №29 по каждому нивелирному ходу

$$m_{H_1} = \frac{8,1}{2,50} = \pm 3,24 \text{ мм}; m_{H_2} = \frac{8,1}{1,43} = \pm 5,66 \text{ мм}; m_{H_3} = \frac{8,1}{2,00} = \pm 4,05 \text{ мм}.$$

13. Окончательное значение высоты репера №29 записывают в виде

$$H_{29} = H_{0, \text{окр.}} \pm M_0 = 403,890 \pm 0,033 \text{ м}.$$