



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Но-
сова»



УТВЕРЖДАЮ:
Директор института
Естествознания и стандартизации
/И.Ю. Мезин
«29» октября 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

*МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В УПРАВЛЕНИИ
КАЧЕСТВОМ ПРОДУКЦИИ*

Направление подготовки (специальность)
27.06.01 Управление в технических системах

Направленность (профиль) программы
Стандартизация и управление качеством продукции

Уровень высшего образования
Подготовка кадров высшей квалификации

Форма обучения
Очная

Институт
Кафедра
Курс
Семестр

*Естествознания и стандартизации
Технологий, сертификации и сервиса автомобилей
2
4*

Магнитогорск
2018г.

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) 27.06.01 Управление в технических системах, утвержденного приказом МОиН РФ от 30.07.2014г. № 892.

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Технологий, сертификации и сервиса автомобилей «23» октября 2018г., протокол № 3.

Зав. кафедрой _____ / И.Ю. Мезин /

Рабочая программа одобрена методической комиссией Института Естествознания и стандартизации «29» октября 2018 г., протокол № 2.

Председатель _____ / И.Ю. Мезин /

Рабочая программа составлена:

доцент, кандидат технических наук

_____ / Г.Ш. Рубин /

Рецензент:

профессор кафедры ТОМ, д-р техн. наук

_____ / М.А. Полякова /

1 Цели освоения дисциплины (модуля)

Целями освоения дисциплины «Математическое моделирование в управлении качеством продукции» являются: теоретическое изучение основ и методов разработки математических моделей объектов управления, технологических процессов, организационно – технологических систем и комплексов; изучение способов и средств получения, обработки и анализа информации о процессах в металлургии; изучение эффективных методов организации и проведения научных исследований в области управления качеством.

2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Математическое моделирование в управлении качеством продукции входит в вариативную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

История и философия науки

Методы теоретических и экспериментальных исследований в области управления в технических системах

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Спецдисциплина

Научно-исследовательская деятельность и подготовка НКР

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения

В результате освоения дисциплины (модуля) «Математическое моделирование в управлении качеством продукции» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения
ПК-2 Разрабатывает организационные и методические основы стандартизации и управления качеством продукции в рыночных условиях.	
Знать	основные правила построения математических моделей различных объектов управления качеством; особенности объектов математического моделирования; основные принципы построения математических моделей различных объектов управления качеством
Уметь	обсуждать сущность методов математического моделирования различных объектов управления качеством; корректно описывать способы математического описания технологических систем управления и их элементов; приводить примеры использования методов моделирования в управлении качеством продукции
Владеть	способами демонстрации умения описывать математические модели объектов, технологических систем и организационно производственных комплексов; профессиональным языком в области математического моделирования в управлении качеством продукции; навыками обобщения результатов математического моделирования различных объектов управления качеством

ПК-3 Разрабатывает пути повышения результативности (всех ее составляющих – экономичность, прибыльность, производительность, действенность, условия трудовой деятельности, нововведения) на основе сквозного интегрированного управления качеством и требований международных стандартов ИСО серии 9000, 14000 и положений Всеобщего Управления Качеством (TQM).	
Знать	основные определения, понятия и положения TQM, относящиеся к методам моделирования различных объектов управления качеством; основные подходы повышения результативности за счет использования математического моделирования различных объектов управления качеством; основные подходы для интегрирования управления качеством на основе математического моделирования различных объектов
Уметь	обсуждать способы повышения результативности на основе использования результатов математического моделирования различных объектов управления качеством; корректно выражать результаты математического моделирования различных объектов управления качеством в соответствии с требованиями международных стандартов ИСО; распознавать эффективные методы математического моделирования различных объектов на основе сквозного интегрированного управления качеством.
Владеть	способами демонстрации знания методов математического моделирования различных объектов управления качеством с учетом особенностей международных стандартов серии 9000 и 14000; навыками построения математических моделей различных объектов управления качеством для повышения результативности; основными методами исследования в области повышения результативности за счет применения математических моделей различных объектов управления качеством

4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц 144 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 69 акад. часов;
- аудиторная – 69 акад. часов;
- внеаудиторная – 0 акад. часов
- самостоятельная работа – 75 акад. часов;

Форма аттестации - зачет с оценкой

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1.								
1.1 Классификация видов математических моделей объектов, технологических систем и организационно производственных комплексов	4	3/ИИ		7	12	Анализ литературы.	Беседа - обсуждение.	ПК-2, ПК-3
1.2 Управление качеством процессов с применением методов теории подобия и моделирования		4/ИИ		8	12	Анализ литературы.	Собеседование.	ПК-2, ПК-3
1.3 Способы математического описания технологических систем управления и их элементов. Статистические модели. Динамические модели.		4/2И		8	12	Анализ литературы.	Собеседование.	ПК-2, ПК-3
1.4 Основные способы и средства получения, обработки и анализа информации о процессах в металлургии.		4/2И		8	12	Анализ литературы.	Собеседование.	ПК-2, ПК-3
1.5 Методы анализа технологических систем управления, их математическое описание		4/2И		8	12	Анализ литературы. Написание контрольной работы.	Собеседование. Защита контрольной работы.	ПК-2, ПК-3
1.6 Интегрированные средства разработки специализированного математического обеспечения, пакетов прикладных программ и типовых модулей		4/2И		7	15	Анализ литературы.	Собеседование.	ПК-2, ПК-3
Итого по разделу			23/10И		46	75		

Итого за семестр	23/10И		46	75		зао	
Итого по дисциплине	23/10 И		46	75		зачет с оценкой	ПК-2,ПК-3

5 Образовательные технологии

В ходе проведения лекционных занятий предусматривается:

- использование электронного демонстрационного материала по темам, требующим иллюстрации работы специализированного программного обеспечения;
- использование электронных пособий по отдельным темам занятий;
- применение раздаточного материала;
- активные и интерактивные формы обучения: вариативный опрос, дискуссии, устный опрос.

6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Представлено в приложении 1.

7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

Представлены в приложении 2.

8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) Основная литература:

1. Цветков, А. Б. Синтез краевой задачи теории упругости и статического давления для математического моделирования напряженно-деформированного состояния в угольном пласте и вмещающих породах при действии гравитации : учебное пособие / А. Б. Цветков, П. В. Васильев, О. А. Петрова. — Москва : Горная книга, 2012. — 12 с. — ISBN 0236-1493. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/49742> (дата обращения: 02.11.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Рыжков, И. Б. Основы научных исследований и изобретательства : учебное пособие / И. Б. Рыжков. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 224 с. — ISBN 978-5-8114-5697-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/145848> (дата обращения: 02.11.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) Дополнительная литература:

1. Черткова, Е. А. Статистика. Автоматизация обработки информации : учебное пособие для вузов / Е. А. Черткова ; под общей редакцией Е. А. Чертковой. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 195 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01429-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/452447> (дата обращения: 08.10.2020).

2. Картозия, Б. А. Методология работы по формулированию базовых понятий диссертаций и выпускных квалификационных работ : учебно-методическое пособие / Б. А. Картозия, А. С. Вознесенский. — Москва : МИСИС, 2019. — 58 с. — ISBN 978-5-907061-87-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/129024> (дата обращения: 02.11.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Кайнова, В.Н. Статистические методы в управлении качеством : учебное пособие / В.Н. Кайнова, Е.В. Зимина ; под общей редакцией В.Н. Кайновой. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 152 с. — ISBN 978-5-8114-3664-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/121465> (дата обращения: 18.10.2019). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Зубарев, Ю. М. Динамические процессы в технологии машиностроения. Основы конструирования машин : учебное пособие / Ю. М. Зубарев. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 212 с. — ISBN 978-5-8114-2990-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL:

<https://e.lanbook.com/book/103067> (дата обращения: 02.11.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Статистические методы обработки и анализа числовой информации, контроля и управления качеством проката : учебное пособие / М. И. Румянцев, С. А. Левандовский, Н. А. Ручинская и др. ; МГТУ. - Магнитогорск : МГТУ, 2015. - 259 с. : ил., табл., схемы. - URL: <https://magtu.informsystema.ru/uploader/fileUpload?name=1120.pdf&show=dcatalogues/1/1120539/1120.pdf&view=true> (дата обращения: 08.10.2020). - Макрообъект. - Текст : электронный. - ISBN 978-5-9967-0576-4. - Имеется печатный аналог.

6. Рогов, В. А. Средства автоматизации и управления : учебник для вузов / В. А. Рогов, А. Д. Чудаков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 352 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09060-4. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451879> (дата обращения: 09.10.2020).

в) Методические указания:

Методические указания приведены в приложении 3.

г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Программное обеспечение

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Windows 7 Professional(для классов)	Д-1227-18 от 08.10.2018	11.10.2021
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
7Zip	свободно распространяемое	бессрочно
FAR Manager	свободно распространяемое	бессрочно

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Название курса	Ссылка
Электронная база периодических изданий East View Information Services, ООО «ИВИС»	https://dlib.eastview.com/
Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)	URL: https://elibrary.ru/project_risc.asp
Поисковая система Академия Google (Google Scholar)	URL: https://scholar.google.ru/
Информационная система - Единое окно доступа к информационным ресурсам	URL: http://window.edu.ru/
Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный институт промышленной собственности»	URL: http://www1.fips.ru/
Российская Государственная библиотека. Каталоги	https://www.rsl.ru/ru/4readers/catalogues/
Электронные ресурсы библиотеки МГТУ им. Г.И. Носова	http://magtu.ru:8085/marcweb2/Default.asp
Университетская информационная система РОССИЯ	https://uisrussia.msu.ru

Международная наукометрическая реферативная и полнотекстовая база данных научных изданий «Web of science»	http://webofscience.com
Международная реферативная и полнотекстовая справочная база данных научных изданий «Scopus»	http://scopus.com

9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа; учебная аудитория для проведения практических занятий.

Технические средства обучения, служащие для представления учебной информации большой аудитории: мультимедийные средства хранения, передачи и представления учебной информации. Специализированная мебель.

Учебная аудитория для групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля промежуточной аттестации.

Компьютерная техника с пакетом MS Office, с подключением к сети «Интернет» и с доступом в электронную информационно – образовательную среду университета. Специализированная мебель.

Помещение для самостоятельной работы.

Компьютерная техника с пакетом MS Office, с подключением к сети «Интернет» и с доступом в электронную информационно – образовательную среду университета. Специализированная мебель.

Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования.

Оборудование: станок сверлильный, станок токарно-винторезный, стол подъемный, штангенциркуль, тисы слесарные, ножовка по металлу, станок наждачный.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

По дисциплине предусмотрена аудиторная и внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся.

Аудиторная самостоятельная работа студентов предполагает проведение Входного контроля, предусматривающего оценку знаний студентов, полученных при изучении дисциплин бакалавриата и магистратуры. Внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся осуществляется в виде изучения литературы по соответствующему разделу с проработкой материала; написания докладов.

В ходе проведения лекционных занятий предусматривается

- использование электронного демонстрационного материала по темам, требующим иллюстрации структурных схем и графического материала;
- использование электронных учебников по отдельным темам занятий;
- активные и интерактивные формы обучения: вариативный опрос, дискуссии, устный опрос, семинарские занятия, метод мозгового штурма и т.д.

При проведении практических занятий применяются активные и интерактивные методы: разбор конкретных ситуаций, решение ситуационных задач, дискуссии, выполнение групповых и индивидуальных творческих заданий. Выполнение практических заданий основывается на материалах, которые аспиранты получили на лекционных занятиях и при самостоятельной подготовке. При проведении практических занятий учитывается степень самостоятельности аспирантов при их выполнении.

Перечень тем практических занятий

1. Методика разработки рационального плана исследования, оценки объема и сроков работы, составление сетевого графика НИР .
2. Оценка методами теории подобия эффективности реконструкции участка (установки, узла и т.д.) по выпуску продукции в ОМД.
3. Математическое представление технологических процессов. Цифровые модели и их преимущества ИТ.
4. Методы измерений, оценки погрешностей измерений и выбора средств измерений.
5. Определение критериев подобия и масштабов моделирования при изучении процессов ОМД. Выбор материалов. Приближенное моделирование процессов
6. Оценка, анализ и выбор предпочтительной схемы производства продукции надлежащего качества.

а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
ПК-2: Разрабатывает организационные и методические основы стандартизации и управления качеством продукции в рыночных условиях.		
Знать	основные правила построения математических моделей различных объектов управления качеством; особенности объектов математического моделирования; основные принципы построения математических моделей различных объектов управления качеством	<ol style="list-style-type: none"> 1. Виды моделирования и определение подобия явлений. 2. Определение математической модели и область применения в управлении качеством. 3. Классификация моделирования. 4. Наглядное, символическое и математическое моделирование. 5. Натурное, физическое и аналоговое моделирование. 8. Виды задач, решаемые с применением анализа размерностей.
Уметь	обсуждать сущность методов математического моделирования различных объектов управления качеством; корректно описывать способы математического описания технологических систем управления и их элементов; приводить примеры использования методов моделирования в управлении качеством продукции	<ol style="list-style-type: none"> 1. Порядок решения задач с использованием анализа размерности (матричный метод). 2. Точность моделирования и виды погрешностей.
Владеть	способами демонстрации умения описывать математические модели объектов, технологических систем и организационно производственных комплексов; профессиональным языком в области	<ol style="list-style-type: none"> 1. Вопросы, изучаемые моделированием на основе теории подобия. 2. Методика расчета силовых параметров процесса деформации, основанная на законе пластического подобия по "подходящим" данным". 3. Условия приближенного моделирования. 4. Принципы приближенного моделирования.

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	математического моделирования в управлении качеством продукции; навыками обобщения результатов математического моделирования различных объектов управления качеством	
ПК-3: Разрабатывает пути повышения результативности (всех ее составляющих – экономичность, прибыльность, производительность, действенность, условия трудовой деятельности, нововведения) на основе сквозного интегрированного управления качеством и требований международных стандартов ИСО серии 9000, 14000 и положений Всеобщего Управления Качеством (TQM).		
Знать	основные определения, понятия и положения TQM, относящиеся к методам моделирования различных объектов управления качеством; основные подходы повышения результативности за счет использования математического моделирования различных объектов управления качеством; основные подходы для интегрирования управления качеством на основе математического моделирования различных объектов	<ol style="list-style-type: none"> 1. Техничко-экономические, технические, технологические, организационные и социальные аспекты показателей качества, результативности и эффективности. 2. Взаимосвязь методов моделирования с принципами TQM. 3. Основные принципы повышения результативности за счет математического моделирования процессов ОМД.
Уметь	обсуждать способы повышения результативности на основе использования результатов математического моделирования различных объектов управления качеством; корректно выражать результаты математического моделирования различных объектов управления качеством в	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ориентировочное масштабирование при моделировании работы различных прокатных цехов. 2. Критерии выбора экспериментальных точек. 3. Суть и область применения воспроизводимых и невоспроизводимых экспериментов. 4. Отличия и целесообразность применения последовательного и рандомизированного плана.

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	соответствии с требованиями международных стандартов ИСО; распознавать эффективные методы математического моделирования различных объектов на основе сквозного интегрированного управления качеством.	5. Оценить результаты математического моделирования производственного процесса в соответствии требованиям стандартов ИСО.
Владеть	способами демонстрации знания методов математического моделирования различных объектов управления качеством с учетом особенностей международных стандартов серии 9000 и 14000; навыками построения математических моделей различных объектов управления качеством для повышения результативности; основными методами исследования в области повышения результативности за счет применения математических моделей различных объектов управления качеством	<ol style="list-style-type: none"> 1. Использование принципов и методов математического моделирования для повышения эффективности и результативности производственных процессов с учетом особенностей международных стандартов. 2. Продемонстрировать результаты математического моделирования процесса прокатки с учетом требований стандартов ИСО.

б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:

Промежуточная аттестация по дисциплине «**Методы теоретических и экспериментальных исследований в области управления в технических системах**» включает теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень усвоения обучающимися знаний, и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и владений, проводится в форме зачета.

Показатели и критерии оценивания зачета:

на оценку «**зачтено**» студент должен показать высокий уровень знания материала по дисциплине на уровне воспроизведения и объяснения информации, продемонстрировать знание и понимание законов дисциплины, умение оперировать этими знаниями в профессиональной деятельности;

на оценку «**не зачтено**» студент не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации по дисциплине, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач, умение критически оценивать свои личностные качества, намечать пути и выбирать средства развития достоинств и устранения недостатков.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
«НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ
БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА»**

Задача

Дана дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, определённая на множестве $X = R^n$.

Требуется определить точки $x^* \in R^n$ её локальных минимумов и максимумов на R^n .

1. Последовательность решения

Вначале с помощью необходимых условий первого и второго порядка (порядок условий определяется порядком используемых производных) необходимо найти точки x^* , где могут быть локальные экстремумы. Затем в найденных точках проверяется выполнение достаточных условий безусловного экстремума. В точках экстремума вычисляются значения исследуемой функции $f(x^*)$.

1.1. Необходимые условия экстремума первого порядка

Пусть $x^* \in R^n$ есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дифференцируема в точке x^* . Тогда градиент функции $f(x)$ в точке x^* равен нулю, т.е.

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Точки, удовлетворяющие условию (1), называются **стационарными**.

1.2. Необходимые условия экстремума второго порядка

Пусть $x^* \in R^n$ есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^* . Тогда матрица Гессе $H(x^*)$ функции $f(x)$, вычисленная в точке x^* , является положительно (отрицательно) полуопределённой, т.е.

$$H(x^*) \geq 0, \quad (H(x^*) \leq 0) \quad (2)$$

1.3. Достаточные условия экстремума

Функция $f(x)$ в точке $x^* \in R^n$ дважды дифференцируема, её градиент равен нулю (необходимое условие экстремума первого порядка), а матрица Гессе является положительно (отрицательно) определённой:

$$\nabla f(x) = 0, \quad H(x^*) > 0, \quad (H(x^*) < 0). \quad (3)$$

Тогда точка x^* есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n .

Определение 1

Рассмотрим определитель матрицы Гессе $H(x^*)$, вычисленный в стационарной точке

$$\det H(x^*) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Определители

$$\Delta_1 = h_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

называются **угловыми минорами** матрицы Гессе.

Определители m -го порядка ($m \leq n$), получающиеся из определителя матрицы $H(x^*)$ вычёркиванием каких-либо $(n-m)$ строк и $(n-m)$ столбцов с одними и теми же номерами, называются **главными минорами**.

2. Проверка достаточных условий экстремума

Достаточные условия экстремума и необходимые условия 2-го порядка могут быть проверены двумя способами.

1-й способ основан на исследовании угловых миноров.

Для того, чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была положительно определённой ($H(x^*) > 0$) необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры этой матрицы были положительны:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0 \quad (5)$$

Для того чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была отрицательно определённой ($H(x^*) < 0$) необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров этой матрицы чередовались, начиная с минуса:

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \dots, \quad (-1)^n \Delta_n > 0 \quad (6)$$

Для того, чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была положительно полуопределённой ($H(x^*) \geq 0$) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этой матрицы были неотрицательны.

Для того, чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была отрицательно полуопределённой ($H(x^*) \leq 0$) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры чётного порядка этой

матрицы были неотрицательны, а все главные миноры нечётного порядка – неположительны.

Определение 2

Составим уравнение

$$|H(x^*) - \lambda E| = \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Это алгебраическое уравнение называется *характеристическим уравнением* матрицы $H(x^*)$. Корни этого уравнения называются *собственными числами* матрицы $H(x^*)$.

2-й способ основан на проверке собственных чисел матрицы Гессе

Для того, чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была положительно определённой ($H(x^*) > 0$) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были положительны:

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \quad (8)$$

Для того чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была отрицательно определённой ($H(x^*) < 0$) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были отрицательны

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0 \quad (9)$$

Для того, чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была положительно полуопределённой ($H(x^*) \geq 0$) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были неотрицательны.

Для того, чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была отрицательно полуопределённой ($H(x^*) \leq 0$) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были неположительны.

Алгоритм решения задачи нахождения безусловного экстремума функции отображён на рис.1. На рисунке ромб – означает проверку условия, описанного в этой фигуре, прямоугольник со скруглёнными углами – окончание исследования. В табл.1 приведены все способы проверки условий экстремума.

Пример 1. Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ на множестве R^2 .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_2 = 0 \quad (10)$$

В результате решения системы уравнений (10) Получим одну стационарную точку $x^* = (0,0)^T$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

1-й способ. Матрица Гессе имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. При этом $\Delta_1 = 2 > 0$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$. Следовательно, в точке $x^* = (0,0)^T$ локальный минимум.

2-й способ. Найдём собственные числа матрицы Гессе. Для этого решим уравнение

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $(2-\lambda)^2 = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$. Все собственные числа

положительны, следовательно, в исследуемой точке функция имеет локальный минимум.

Результаты исследования обоими способами совпадают.

Вычислим значение функции в точке минимума:

$$f(x^*) = 0^2 + 0^2 = 0.$$

Пример 2. Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ на множестве R^2 .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_2 = 0 \quad (11)$$

В результате решения системы уравнений (11) получим одну стационарную точку $x^* = (0,0)^T$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

1-й способ. Матрица Гессе имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

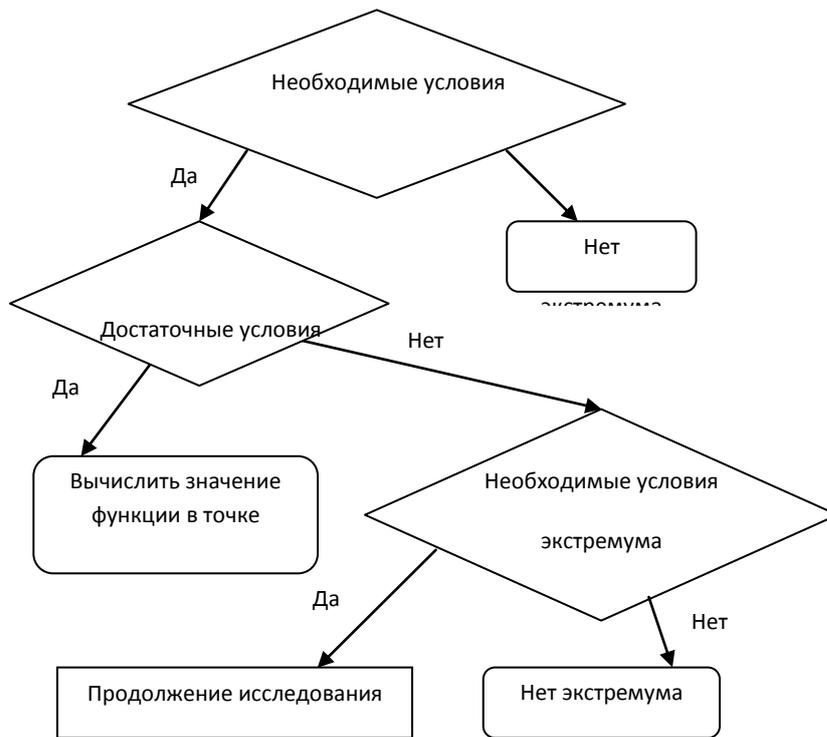


Рис.1. Алгоритм решения

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

следовательно, достаточные условия экстремума не выполняются.

Проверяем необходимые условия экстремума второго порядка. Главные миноры первого ($m = 1$) порядка получаются из Δ_2 в результате вычёркивания $n - m = 2 - 1 = 1$ строк и столбцов с одинаковыми номерами и равны -2 и 2 . Главный минор второго порядка ($m = 2$) получается из Δ_2 в результате вычёркивания $n - m = 2 - 2 = 0$ строк и столбцов, т.е. совпадает с $\Delta_2 = -4$. Отсюда следует, что необходимые условия второго порядка не выполняются. Т.к. матрица Гессе не является нулевой, то можно сделать вывод, что в точке x^* нет экстремума.

2-й способ. Найдём собственные значения матрицы Гессе в соответствии с (7) из уравнения

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0.$$

Получим $\lambda_1 = 2 > 0, \lambda_2 = -2 < 0$, т.е. собственные значения имеют разные знаки. Поэтому точка x^* не является точкой минимума или максимума. Функция $f(x)$ не имеет экстремумов.

Пример 3. Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^4$ на множестве R^2 .
Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 4x_2^3 = 0$$

В результате решения системы получаем стационарную точку $x^* = (0,0)^T$.

Матрица Гессе имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^{*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\Delta_1 = h_{11} = 2 > 0$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ следовательно, достаточные условия экстремума не выполняются.

Проверяем необходимые условия экстремума второго порядка. Главные миноры первого порядка равны 2 и 0 соответственно. Главный минор второго порядка – 0. Т.к. все главные миноры неотрицательны, то в точке x^* может быть минимум и требуется дополнительное исследование.

Вычислим значение функции в точке x^* : $f(x^*) = 0$ и рассмотрим поведение функции $f(x)$ на множестве R^2 . При любых $x \in R^2$ $f(x) \geq f(x^*) = 0$, поэтому точка $(0,0)^T$ является точкой глобального минимума.

Пример 4. Найти экстремум функции $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ на множестве R^2 .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку $x^* = (0,0)^T$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = 8 - 1 = 7 > 0,$$

следовательно, точка x^* является точкой локального минимума. Поскольку $H(x^*) > 0$, то в точке x^* функция строго выпуклая, поэтому точка x^* - точка глобального минимума. Вычислим значение функции в точке x^* : $f(x^*) = 0$.

Пример 5. Найти экстремум функции $f(x) = (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - x_1^2)$ на множестве R^2 .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка: x

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2(1 - x_1) - 40x_1(x_2 - x_1^2) = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 20(x_2 - x_1^2) = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку $x^* = (1,1)^T$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}$. Т.к. $\Delta_1 = 82 > 0$, $\Delta_2 = 82 \cdot 20 - 40^2 = 1640 - 1600 = 40 > 0$, то в точке x^* локальный минимум. Поскольку $H(x^*) > 0$, то в точке x^* функция строго выпуклая, поэтому точка x^* - точка глобального минимума. Вычислим значение функции в точке x^* : $f(x^*) = 0$.

Пример 6. Найти экстремум функции $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1x_2 + 2x_3$ на множестве R^2 .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка: x

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2x_1 - 1 + x_2 = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1 = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = -2x_3 + 2 = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку $x^* = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)^T$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

1-й способ. Матрица Гессе имеет вид

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Т.к. } \Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \Delta_3 = -2\Delta_2 = -6 < 0,$$

т.е. знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса, то точка x^* - точка локального максимума.

2-й способ. Найдём собственные значения матрицы Гессе в соответствии с (7) из уравнения:

$$\det(H(x^*) - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$(-2 - \lambda)[(-2 - \lambda)^2 - 1] = 0 \text{ и} \\ \lambda_1 = -2 < 0, \lambda_2 = -1 < 0, \lambda_3 = -3 < 0.$$

Т.к. все собственные числа матрицы Гессе отрицательны, то в точке x^* локальный максимум. Вычислим значение функции в точке $x^* : f(x^*) = \frac{4}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти безусловный экстремум функции
 $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_3$.
2. Проверить, является ли точка $x^* = (0, 0, 0)^T$ точкой безусловного экстремума функции $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.
3. Найти безусловный экстремум функции $f(x) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$.
4. Найти безусловный экстремум функции $f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$.
5. Найти безусловный экстремум функции $f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$.
6. Найти безусловный экстремум функции $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$.
7. Проверить, является ли точка $x^* = (1, 1)^T$ точкой безусловного минимума функции $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - 1)^2$.
8. Найти безусловный экстремум функции $f(x) = 3x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2$.
9. Проверить, являются ли точки $x^* = (0, 0)^T, x^{**} = (1, 1)^T, x^{***} = (-1, -1)^T$ точками безусловного минимума функции $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$.
10. Проверить, являются ли точки $x^* = (2, 0, 1)^T, x^{**} = (0, 0, 0)^T$ точками экстремума функции $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$.