



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

Естествознания и стандартизации

/И.Ю. Мезин

«29» октября 2018 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
СТАНДАРТИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ**

Направление подготовки (специальность)  
27.06.01 Управление в технических системах

Направленность (профиль) программы  
Стандартизация и управление качеством продукции

Уровень высшего образования  
Подготовка кадров высшей квалификации

Форма обучения  
Очная

Институт  
Кафедра  
Курс  
Семестр

*Естествознания и стандартизации  
Технологий, сертификации и сервиса автомобилей*  
2  
4

Магнитогорск  
2018г.

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) 27.06.01 Управление в технических системах, утвержденного приказом МОиН РФ от 30.07.2014г. № 892.

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Технологий, сертификации и сервиса автомобилей «23» октября 2018г., протокол № 3.

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / И.Ю. Мезин /

Рабочая программа одобрена методической комиссией Института Естествознания и стандартизации «29» октября 2018 г., протокол № 2.

Председатель \_\_\_\_\_ / И.Ю. Мезин /

Рабочая программа составлена:

доцент, кандидат технических наук

\_\_\_\_\_ / Г.Ш. Рубин /

Рецензент:

профессор кафедры ТОМ, д-р техн. наук

\_\_\_\_\_ / М.А. Полякова /



### **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

Целями освоения дисциплины «Организационные и методические основы стандартизации и управления качеством» являются: теоретическое изучение основ и методов разработки математических моделей объектов управления, технологических процессов, организационно – технологических систем и комплексов; изучение способов и средств получения, обработки и анализа информации о процессах в металлургии; изучение эффективных методов организации и проведения научных исследований в области управления качеством.

### **2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина Организационные и методические основы стандартизации и управления качеством входит в вариативную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

История и философия науки

Методы теоретических и экспериментальных исследований в области управления в технических системах

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Спецдисциплина

Научно-исследовательская деятельность и подготовка НКР

### **3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения**

В результате освоения дисциплины (модуля) «Организационные и методические основы стандартизации и управления качеством» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения
ПК-2 Разрабатывает организационные и методические основы стандартизации и управления качеством продукции в рыночных условиях.	
Знать	основные определения и понятия стандартизации и управления качеством; определения и сущность методов стандартизации и управления качеством
Уметь	объяснять применение методов сбора и обработки численной информации для стандартизации и управления качеством; корректно выражать результаты обработки численной информации для стандартизации и управления качеством
Владеть	практическими навыками сбора и обработки численной информации для стандартизации и управления качеством; основными методами решения задач стандартизации и управления качеством
ПК-3 Разрабатывает пути повышения результативности (всех ее составляющих – экономичность, прибыльность, производительность, действенность, условия трудовой деятельности, нововведения) на основе сквозного интегрированного управления качеством и требований международных стандартов ИСО серии 9000, 14000 и положений Всеобщего Управления Качеством (TQM).	

Знать	структуру и особенности международных стандартов ИСО серии 9000, 14000 и сущность положений Всеобщего Управления Качеством (TQM); правила использования международных стандартов ИСО серии 9000, 14000 и положений Всеобщего Управления Качеством (TQM).
Уметь	применять методы обработки численной информации для определения результативности объектов стандартизации и управления качеством; корректно выражать результаты численных расчетов для оценки результативности объектов стандартизации и управления качеством
Владеть	практическими навыками численных расчетов для оценки результативности объектов стандартизации и управления качеством; основными методами решения задач в области стандартизации и управления качеством

#### 4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц 144 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 69 акад. часов;
- аудиторная – 69 акад. часов;
- внеаудиторная – 0 акад. часов
- самостоятельная работа – 75 акад. часов;

Форма аттестации - зачет с оценкой

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1.								
1.1 Классификация видов математических моделей объектов, технологических систем и организационно производственных комплексов	4	3		7	12	Работа с литературой. Подготовка к практическим работам.	Собеседование.	
1.2 Управление качеством процессов с применением методов теории подобия и моделирования		4/2И		7	12	Работа с литературой. Подготовка к практическим работам.	Собеседование.	
1.3 Способы математического описания технологических систем управления и их элементов. Статистические модели. Динамические модели.		4/2И		8	12	Работа с литературой. Подготовка к практическим работам.	Собеседование.	
1.4 Методы анализа технологических систем управления, их математическое описание.		4/2И		8	12	Работа с литературой. Подготовка к практическим работам.	Собеседование.	
1.5 Интегрированные средства разработки специализированного математического обеспечения, пакетов прикладных программ и типовых модулей		4/2И		8	12	Работа с литературой. Подготовка к практическим занятиям.	Собеседование.	
1.6 Основные способы и средства получения, обработки и анализа информации о процессах в металлургии		4/2И		8	15	Работа с литературой.	Собеседование.	

Итого по разделу	23/10И		46	75			
Итого за семестр	23/10И		46	75		зао	
Итого по дисциплине	23/10 И		46	75		зачет с оценкой	

## **5 Образовательные технологии**

В ходе проведения лекционных занятий предусматривается:

- использование электронного демонстрационного материала по темам, требующим иллюстрации работы специализированного программного обеспечения;
- использование электронных пособий по отдельным темам занятий;
- применение раздаточного материала;
- активные и интерактивные формы обучения: вариативный опрос, дискуссии, устный опрос.

## **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Представлено в приложении 1.

## **7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

Представлены в приложении 2.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **а) Основная литература:**

1. Цветков, А. Б. Синтез краевой задачи теории упругости и статического давления для математического моделирования напряженно-деформированного состояния в угольном пласте и вмещающих породах при действии гравитации : учебное пособие / А. Б. Цветков, П. В. Васильев, О. А. Петрова. — Москва : Горная книга, 2012. — 12 с. — ISBN 0236-1493. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/49742> (дата обращения: 02.11.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Рыжков, И. Б. Основы научных исследований и изобретательства : учебное пособие / И. Б. Рыжков. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 224 с. — ISBN 978-5-8114-5697-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/145848> (дата обращения: 02.11.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

### **б) Дополнительная литература:**

1. Черткова, Е. А. Статистика. Автоматизация обработки информации : учебное пособие для вузов / Е. А. Черткова ; под общей редакцией Е. А. Чертковой. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 195 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01429-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/452447> (дата обращения: 08.10.2020).

2. Картозия, Б. А. Методология работы по формулированию базовых понятий диссертаций и выпускных квалификационных работ : учебно-методическое пособие / Б. А. Картозия, А. С. Вознесенский. — Москва : МИСИС, 2019. — 58 с. — ISBN 978-5-907061-87-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/129024> (дата обращения: 02.11.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Кайнова, В.Н. Статистические методы в управлении качеством : учебное пособие / В.Н. Кайнова, Е.В. Зимина ; под общей редакцией В.Н. Кайновой. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 152 с. — ISBN 978-5-8114-3664-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/121465> (дата обращения: 18.10.2019). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Зубарев, Ю. М. Динамические процессы в технологии машиностроения. Основы конструирования машин : учебное пособие / Ю. М. Зубарев. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 212 с. — ISBN 978-5-8114-2990-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL:



<https://e.lanbook.com/book/103067> (дата обращения: 02.11.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Статистические методы обработки и анализа числовой информации, контроля и управления качеством проката : учебное пособие / М. И. Румянцев, С. А. Левандовский, Н. А. Ручинская и др. ; МГТУ. - Магнитогорск : МГТУ, 2015. - 259 с. : ил., табл., схемы. - URL: <https://magtu.informsystema.ru/uploader/fileUpload?name=1120.pdf&show=dcatalogues/1/1120539/1120.pdf&view=true> (дата обращения: 08.10.2020). - Макрообъект. - Текст : электронный. - ISBN 978-5-9967-0576-4. - Имеется печатный аналог.

6. Рогов, В. А. Средства автоматизации и управления : учебник для вузов / В. А. Рогов, А. Д. Чудаков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 352 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09060-4. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451879> (дата обращения: 09.10.2020).

**в) Методические указания:**

Методические указания приведены в приложении 3.

**г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

**Программное обеспечение**

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Windows 7 Professional(для классов)	Д-1227-18 от 08.10.2018	11.10.2021
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
7Zip	свободно распространяемое	бессрочно
FAR Manager	свободно распространяемое	бессрочно

**Профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Название курса	Ссылка
Электронная база периодических изданий East View Information Services, ООО «ИВИС»	<a href="https://dlib.eastview.com/">https://dlib.eastview.com/</a>
Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)	URL: <a href="https://elibrary.ru/project_risc.asp">https://elibrary.ru/project_risc.asp</a>
Поисковая система Академия Google (Google Scholar)	URL: <a href="https://scholar.google.ru/">https://scholar.google.ru/</a>
Информационная система - Единое окно доступа к информационным ресурсам	URL: <a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>
Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный институт промышленной собственности»	URL: <a href="http://www1.fips.ru/">http://www1.fips.ru/</a>
Российская Государственная библиотека. Каталоги	<a href="https://www.rsl.ru/ru/4readers/catalogues/">https://www.rsl.ru/ru/4readers/catalogues/</a>
Электронные ресурсы библиотеки МГТУ им. Г.И. Носова	<a href="http://magtu.ru:8085/marcweb2/Default.asp">http://magtu.ru:8085/marcweb2/Default.asp</a>
Университетская информационная система РОССИЯ	<a href="https://uisrussia.msu.ru">https://uisrussia.msu.ru</a>

Международная наукометрическая реферативная и полнотекстовая база данных научных изданий «Web of science»	<a href="http://webofscience.com">http://webofscience.com</a>
Международная реферативная и полнотекстовая справочная база данных научных изданий «Scopus»	<a href="http://scopus.com">http://scopus.com</a>

### **9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа; учебная аудитория для проведения практических занятий.

Технические средства обучения, служащие для представления учебной информации большой аудитории: мультимедийные средства хранения, передачи и представления учебной информации. Специализированная мебель.

Учебная аудитория для групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля промежуточной аттестации.

Компьютерная техника с пакетом MS Office, с подключением к сети «Интернет» и с доступом в электронную информационно – образовательную среду университета. Специализированная мебель.

Помещение для самостоятельной работы.

Компьютерная техника с пакетом MS Office, с подключением к сети «Интернет» и с доступом в электронную информационно – образовательную среду университета. Специализированная мебель.

Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования.

Оборудование: станок сверлильный, станок токарно-винторезный, стол подъемный, штангенциркуль, тисы слесарные, ножовка по металлу, станок наждачный.

### Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

По дисциплине предусмотрена аудиторная и внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся.

Аудиторная самостоятельная работа студентов предполагает проведение Входного контроля, предусматривающего оценку знаний студентов, полученных при изучении дисциплин бакалавриата и магистратуры. Внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся осуществляется в виде изучения литературы по соответствующему разделу с проработкой материала; написания докладов.

В ходе проведения лекционных занятий предусматривается

- использование электронного демонстрационного материала по темам, требующим иллюстрации структурных схем и графического материала;
- использование электронных учебников по отдельным темам занятий;
- активные и интерактивные формы обучения: вариативный опрос, дискуссии, устный опрос, семинарские занятия, метод мозгового штурма и т.д.

При проведении практических занятий применяются активные и интерактивные методы: разбор конкретных ситуаций, решение ситуационных задач, дискуссии, выполнение групповых и индивидуальных творческих заданий. Выполнение практических заданий основывается на материалах, которые аспиранты получили на лекционных занятиях и при самостоятельной подготовке. При проведении практических занятий учитывается степень самостоятельности аспирантов при их выполнении.

#### Перечень тем практических занятий

1. Методика разработки рационального плана исследования, оценки объема и сроков работы, составление сетевого графика НИР .
2. Оценка методами теории подобия эффективности реконструкции участка (установки, узла и т.д.) по выпуску продукции в ОМД.
3. Математическое представление технологических процессов. Цифровые модели и их преимущества ИТ.
4. Методы измерений, оценки погрешностей измерений и выбора средств измерений.
5. Определение критериев подобия и масштабов моделирования при изучении процессов ОМД. Выбор материалов. Приближенное моделирование процессов
6. Оценка, анализ и выбор предпочтительной схемы производства продукции надлежащего качества.

**а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:**

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
ПК-2: Разрабатывает организационные и методические основы стандартизации и управления качеством продукции в рыночных условиях.		
Знать	основные правила построения математических моделей различных объектов управления качеством; особенности объектов математического моделирования; основные принципы построения математических моделей различных объектов управления качеством	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Виды моделирования и определение подобия явлений.</li> <li>2. Определение математической модели и область применения в управлении качеством.</li> <li>3. Классификация моделирования.</li> <li>4. Наглядное, символическое и математическое моделирование.</li> <li>5. Натурное, физическое и аналоговое моделирование.</li> <li>8. Виды задач, решаемые с применением анализа размерностей.</li> </ol>
Уметь	обсуждать сущность методов математического моделирования различных объектов управления качеством; корректно описывать способы математического описания технологических систем управления и их элементов; приводить примеры использования методов моделирования в управлении качеством продукции	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Порядок решения задач с использованием анализа размерности (матричный метод).</li> <li>2. Точность моделирования и виды погрешностей.</li> </ol>
Владеть	способами демонстрации умения описывать математические модели объектов, технологических систем и организационно производственных комплексов; профессиональным языком в области	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вопросы, изучаемые моделированием на основе теории подобия.</li> <li>2. Методика расчета силовых параметров процесса деформации, основанная на законе пластического подобия по "подходящим" данным".</li> <li>3. Условия приближенного моделирования.</li> <li>4. Принципы приближенного моделирования.</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	математического моделирования в управлении качеством продукции; навыками обобщения результатов математического моделирования различных объектов управления качеством	
ПК-3: Разрабатывает пути повышения результативности (всех ее составляющих – экономичность, прибыльность, производительность, действенность, условия трудовой деятельности, нововведения) на основе сквозного интегрированного управления качеством и требований международных стандартов ИСО серии 9000, 14000 и положений Всеобщего Управления Качеством (TQM).		
Знать	основные определения, понятия и положения TQM, относящиеся к методам моделирования различных объектов управления качеством; основные подходы повышения результативности за счет использования математического моделирования различных объектов управления качеством; основные подходы для интегрирования управления качеством на основе математического моделирования различных объектов	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Техничко-экономические, технические, технологические, организационные и социальные аспекты показателей качества, результативности и эффективности.</li> <li>2. Взаимосвязь методов моделирования с принципами TQM.</li> <li>3. Основные принципы повышения результативности за счет математического моделирования процессов ОМД.</li> </ol>
Уметь	обсуждать способы повышения результативности на основе использования результатов математического моделирования различных объектов управления качеством; корректно выражать результаты математического моделирования различных объектов управления качеством в	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ориентировочное масштабирование при моделировании работы различных прокатных цехов.</li> <li>2. Критерии выбора экспериментальных точек.</li> <li>3. Суть и область применения воспроизводимых и невоспроизводимых экспериментов.</li> <li>4. Отличия и целесообразность применения последовательного и рандомизированного плана.</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	соответствии с требованиями международных стандартов ИСО; распознавать эффективные методы математического моделирования различных объектов на основе сквозного интегрированного управления качеством.	5. Оценить результаты математического моделирования производственного процесса в соответствии требованиям стандартов ИСО.
Владеть	способами демонстрации знания методов математического моделирования различных объектов управления качеством с учетом особенностей международных стандартов серии 9000 и 14000; навыками построения математических моделей различных объектов управления качеством для повышения результативности; основными методами исследования в области повышения результативности за счет применения математических моделей различных объектов управления качеством	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Использование принципов и методов математического моделирования для повышения эффективности и результативности производственных процессов с учетом особенностей международных стандартов.</li> <li>2. Продемонстрировать результаты математического моделирования процесса прокатки с учетом требований стандартов ИСО.</li> </ol>

**б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:**

Промежуточная аттестация по дисциплине «**Методы теоретических и экспериментальных исследований в области управления в технических системах**» включает теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень усвоения обучающимися знаний, и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и владений, проводится в форме зачета.

***Показатели и критерии оценивания зачета:***

на оценку «**зачтено**» студент должен показать высокий уровень знания материала по дисциплине на уровне воспроизведения и объяснения информации, продемонстрировать знание и понимание законов дисциплины, умение оперировать этими знаниями в профессиональной деятельности;

на оценку «**не зачтено**» студент не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации по дисциплине, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач, умение критически оценивать свои личностные качества, намечать пути и выбирать средства развития достоинств и устранения недостатков.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ  
«НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ  
БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА»**

**Задача**

Дана дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f(x)$ , определённая на множестве  $X = R^n$ .

Требуется определить точки  $x^* \in R^n$  её локальных минимумов и максимумов на  $R^n$ .

**1. Последовательность решения**

Вначале с помощью необходимых условий первого и второго порядка (порядок условий определяется порядком используемых производных) необходимо найти точки  $x^*$ , где могут быть локальные экстремумы. Затем в найденных точках проверяется выполнение достаточных условий безусловного экстремума. В точках экстремума вычисляются значения исследуемой функции  $f(x^*)$ .

**1.1. Необходимые условия экстремума первого порядка**

Пусть  $x^* \in R^n$  есть точка локального минимума (максимума) функции  $f(x)$  на множестве  $R^n$  и  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^*$ . Тогда градиент функции  $f(x)$  в точке  $x^*$  равен нулю, т.е.

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Точки, удовлетворяющие условию (1), называются **стационарными**.

**1.2. Необходимые условия экстремума второго порядка**

Пусть  $x^* \in R^n$  есть точка локального минимума (максимума) функции  $f(x)$  на множестве  $R^n$  и  $f(x)$  дважды дифференцируема в точке  $x^*$ . Тогда матрица Гессе  $H(x^*)$  функции  $f(x)$ , вычисленная в точке  $x^*$ , является положительно (отрицательно) полуопределённой, т.е.

$$H(x^*) \geq 0, \quad (H(x^*) \leq 0) \quad (2)$$

**1.3. Достаточные условия экстремума**

Функция  $f(x)$  в точке  $x^* \in R^n$  дважды дифференцируема, её градиент равен нулю (необходимое условие экстремума первого порядка), а матрица Гессе является положительно (отрицательно) определённой:

$$\nabla f(x) = 0, \quad H(x^*) > 0, \quad (H(x^*) < 0). \quad (3)$$



Тогда точка  $x^*$  есть точка локального минимума (максимума) функции  $f(x)$  на множестве  $R^n$ .

### Определение 1

Рассмотрим определитель матрицы Гессе  $H(x^*)$ , вычисленный в стационарной точке

$$\det H(x^*) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Определители

$$\Delta_1 = h_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

называются **угловыми минорами** матрицы Гессе.

Определители  $m$ -го порядка ( $m \leq n$ ), получающиеся из определителя матрицы  $H(x^*)$  вычёркиванием каких-либо  $(n-m)$  строк и  $(n-m)$  столбцов с одними и теми же номерами, называются **главными минорами**.

## 2. Проверка достаточных условий экстремума

Достаточные условия экстремума и необходимые условия 2-го порядка могут быть проверены двумя способами.

**1-й способ** основан на исследовании угловых миноров.

Для того, чтобы матрица Гессе  $H(x^*)$  была положительно определённой ( $H(x^*) > 0$ ) необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры этой матрицы были положительны:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \quad (5)$$

Для того чтобы матрица Гессе  $H(x^*)$  была отрицательно определённой ( $H(x^*) < 0$ ) необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров этой матрицы чередовались, начиная с минуса:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0 \quad (6)$$

Для того, чтобы матрица Гессе  $H(x^*)$  была положительно полуопределённой ( $H(x^*) \geq 0$ ) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этой матрицы были неотрицательны.

Для того, чтобы матрица Гессе  $H(x^*)$  была отрицательно полуопределённой ( $H(x^*) \leq 0$ ) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры чётного порядка этой

матрицы были неотрицательны, а все главные миноры нечётного порядка – неположительны.

### **Определение 2**

Составим уравнение

$$|H(x^*) - \lambda E| = \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Это алгебраическое уравнение называется *характеристическим уравнением* матрицы  $H(x^*)$ . Корни этого уравнения называются *собственными числами* матрицы  $H(x^*)$ .

**2-й способ** основан на проверке собственных чисел матрицы Гессе

Для того, чтобы матрица Гессе  $H(x^*)$  была положительно определённой ( $H(x^*) > 0$ ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были положительны:

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \quad (8)$$

Для того чтобы матрица Гессе  $H(x^*)$  была отрицательно определённой ( $H(x^*) < 0$ ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были отрицательны

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0 \quad (9)$$

Для того, чтобы матрица Гессе  $H(x^*)$  была положительно полуопределённой ( $H(x^*) \geq 0$ ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были неотрицательны.

Для того, чтобы матрица Гессе  $H(x^*)$  была отрицательно полуопределённой ( $H(x^*) \leq 0$ ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были неположительны.

Алгоритм решения задачи нахождения безусловного экстремума функции отображён на рис.1. На рисунке ромб – означает проверку условия, описанного в этой фигуре, прямоугольник со скруглёнными углами – окончание исследования. В табл.1 приведены все способы проверки условий экстремума.

**Пример 1.** Найти экстремум функции  $f(x) = x_1^2 + x_2^2$  на множестве  $R^2$ .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_2 = 0 \quad (10)$$

В результате решения системы уравнений (10) Получим одну стационарную точку  $x^* = (0,0)^T$ .

Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

**1-й способ.** Матрица Гессе имеет вид  $H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . При этом  $\Delta_1 = 2 > 0$ ,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ . Следовательно, в точке  $x^* = (0,0)^T$  локальный минимум.

**2-й способ.** Найдём собственные числа матрицы Гессе. Для этого решим уравнение

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ . Отсюда  $(2-\lambda)^2 = 0$  и  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$ . Все собственные числа

положительны, следовательно, в исследуемой точке функция имеет локальный минимум.

Результаты исследования обоими способами совпадают.

Вычислим значение функции в точке минимума:

$$f(x^*) = 0^2 + 0^2 = 0.$$

**Пример 2.** Найти экстремум функции  $f(x) = x_1^2 - x_2^2$  на множестве  $R^2$ .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_2 = 0 \quad (11)$$

В результате решения системы уравнений (11) получим одну стационарную точку  $x^* = (0,0)^T$ .

Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

**1-й способ.** Матрица Гессе имеет вид  $H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

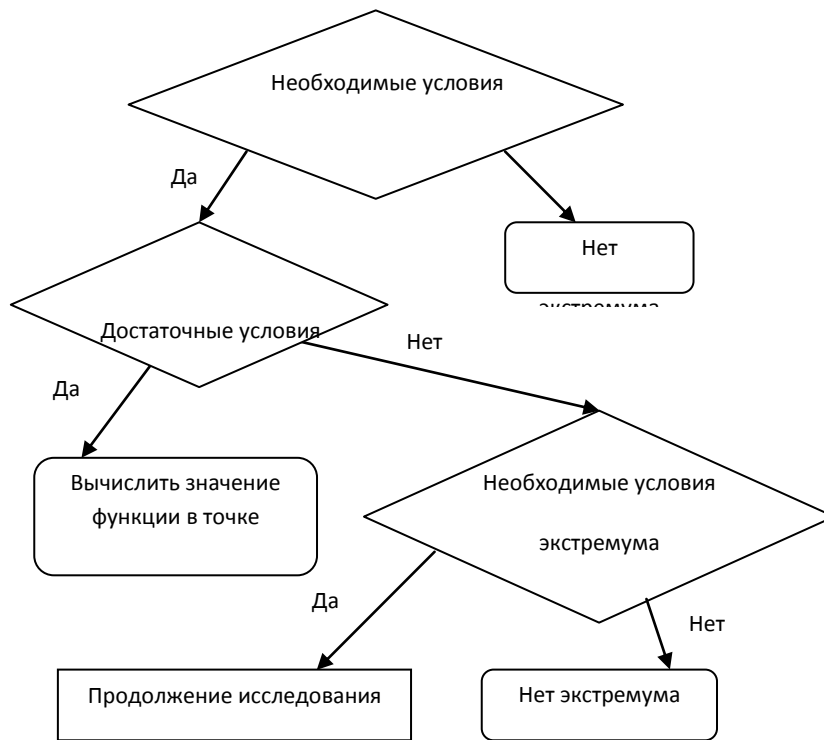


Рис.1. Алгоритм решения

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

следовательно, достаточные условия экстремума не выполняются.

Проверяем необходимые условия экстремума второго порядка. Главные миноры первого ( $m = 1$ ) порядка получаются из  $\Delta_2$  в результате вычёркивания  $n - m = 2 - 1 = 1$  строк и столбцов с одинаковыми номерами и равны  $-2$  и  $2$ . Главный минор второго порядка ( $m = 2$ ) получается из  $\Delta_2$  в результате вычёркивания  $n - m = 2 - 2 = 0$  строк и столбцов, т.е совпадает с  $\Delta_2 = -4$ . Отсюда следует, что необходимые условия второго порядка не выполняются. Т.к. матрица Гессе не является нулевой, то можно сделать вывод, что в точке  $x^*$  нет экстремума.

**2-й способ.** Найдём собственные значения матрицы Гессе в соответствии с (7) из уравнения

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0.$$

Получим  $\lambda_1 = 2 > 0, \lambda_2 = -2 < 0$ , т.е. собственные значения имеют разные знаки. Поэтому точка  $x^*$  не является точкой минимума или максимума.

Функция  $f(x)$  не имеет экстремумов.

**Пример 3.** Найти экстремум функции  $f(x) = x_1^2 + x_2^4$  на множестве  $R^2$ .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 4x_2^3 = 0$$

В результате решения системы получаем стационарную точку  $x^* = (0, 0)^T$ .

Матрица Гессе имеет вид  $H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^{*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .  $\Delta_1 = h_{11} = 2 > 0$ ,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$  следовательно, достаточные условия экстремума не выполняются.

Проверяем необходимые условия экстремума второго порядка. Главные миноры первого порядка равны 2 и 0 соответственно. Главный минор второго порядка – 0. Т.к. все главные миноры неотрицательны, то в точке  $x^*$  может быть минимум и требуется дополнительное исследование.

Вычислим значение функции в точке  $x^*$ :  $f(x^*) = 0$  и рассмотрим поведение функции  $f(x)$  на множестве  $R^2$ . При любых  $x \in R^2$   $f(x) \geq f(x^*) = 0$ , поэтому точка  $(0, 0)^T$  является точкой глобального минимума.

**Пример 4.** Найти экстремум функции  $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  на множестве  $R^2$ .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку  $x^* = (0, 0)^T$ .

Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = 8 - 1 = 7 > 0,$$

следовательно, точка  $x^*$  является точкой локального минимума. Поскольку  $H(x^*) > 0$ , то в точке  $x^*$  функция строго выпуклая, поэтому точка  $x^*$  – точка глобального минимума. Вычислим значение функции в точке  $x^*$ :  $f(x^*) = 0$ .

**Пример 5.** Найти экстремум функции  $f(x) = (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - x_1^2)$  на множестве  $R^2$ .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:  $x$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2(1 - x_1) - 40x_1(x_2 - x_1^2) = 0; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 20(x_2 - x_1^2) = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку  $x^* = (1, 1)^T$ .

Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид  $H(x^*) = \begin{pmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}$ . Т.к.  $\Delta_1 = 82 > 0$ ,  $\Delta_2 = 82 \cdot 20 - 40^2 = 1640 - 1600 = 40 > 0$ , то в точке  $x^*$  локальный минимум. Поскольку  $H(x^*) > 0$ , то в точке  $x^*$  функция строго выпуклая, поэтому точка  $x^*$  - точка глобального минимума. Вычислим значение функции в точке  $x^*$ :  $f(x^*) = 0$ .

**Пример 6.** Найти экстремум функции  $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1x_2 + 2x_3$  на множестве  $R^2$ .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:  $x$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2x_1 - 1 + x_2 = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1 = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = -2x_3 + 2 = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку  $x^* = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)^T$ .

Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

**1-й способ.** Матрица Гессе имеет вид

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Т.к. } \Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \Delta_3 = -2\Delta_2 = -6 < 0,$$

т.е. знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса, то точка  $x^*$  - точка локального максимума.

**2-й способ.** Найдём собственные значения матрицы Гессе в соответствии с (7) из уравнения:

$$\det(H(x^*) - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$(-2 - \lambda)[(-2 - \lambda)^2 - 1] = 0 \text{ и } \lambda_1 = -2 < 0, \lambda_2 = -1 < 0, \lambda_3 = -3 < 0.$$

Т.к. все собственные числа матрицы Гессе отрицательны, то в точке  $x^*$  локальный максимум. Вычислим значение функции в точке  $x^* : f(x^*) = \frac{4}{3}$ .

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Найти безусловный экстремум функции

$$f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_3.$$

2. Проверить, является ли точка  $x^* = (0, 0, 0)^T$  точкой безусловного экстремума

функции  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ .

3. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$ .

4. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$ .

5. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$ .

6. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ .

7. Проверить, является ли точка  $x^* = (1, 1)^T$  точкой безусловного минимума функции

$$f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - 1)^2.$$

8. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = 3x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2$ .

9. Проверить, являются ли точки  $x^* = (0, 0)^T, x^{**} = (1, 1)^T, x^{***} = (-1, -1)^T$  точками безусловного минимума функции  $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$ .

10. Проверить, являются ли точки  $x^* = (2, 0, 1)^T, x^{**} = (0, 0, 0)^T$  точками экстремума функции  $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$ .