



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



ТВЕРЖДАЮ  
Директор ИЕиС  
И.Ю. Мезин

14.02.2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА**

Направление подготовки (специальность)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация) программы  
Математическое моделирование и цифровые двойники

Уровень высшего образования - магистратура

Форма обучения  
очная

Институт/ факультет	Институт естествознания и стандартизации
Кафедра	Прикладной математики и информатики
Курс	2
Семестр	3

Магнитогорск  
2022 год


Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - магистратура по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 13)


Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Прикладной математики и информатики  
08.02.2022, протокол № 7

Зав. кафедрой  Ю.А. Извеков

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИИиС  
14.02.2022 г. протокол № 6

Председатель  И.Ю. Мезин

Рабочая программа составлена:  
доцент кафедры ПМИИ, канд. пед. наук  С.Е. Акманова

Рецензент:  
доцент кафедры Физики, канд. физ.-мат. наук  Д.М. Долгушин

## Лист актуализации рабочей программы

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2023 - 2024 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2024 - 2025 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

### **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

Целью освоения дисциплины "Дополнительные главы комплексного анализа" является расширение базовых знаний обучающихся по комплексному анализу, изучение основных понятий и утверждений, необходимых для освоения основной образовательной программы и дальнейшей профессиональной деятельности

### **2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина *Дополнительные главы комплексного анализа* входит в часть учебного плана формируемую участниками образовательных отношений образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Дополнительные главы функционального анализа

Математическое моделирование

Дополнительные главы уравнений математической физики

Современные компьютерные технологии

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

Производственная - научно-исследовательская работа

Производственная - преддипломная практика

### **3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения**

В результате освоения дисциплины (модуля) «Дополнительные главы комплексного анализа» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-1	Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.1	Решает профессиональные задачи с области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.2	Владеет способами и приемами решения исследовательских задач в области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.3	Применяет фундаментальные междисциплинарные знания для решения задач в профессиональной деятельности

#### 4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц 108 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 56 акад. часов;
- аудиторная – 54 акад. часов;
- внеаудиторная – 2 акад. часов;
- самостоятельная работа – 52 акад. часов;
- в форме практической подготовки – 0 акад. час;

Форма аттестации - зачет

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1. Гармонические функции и их основные свойства								
1.1 Определение гармонической функции и основные её свойства	3	2	4		6	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Проверка конспектов. Письменный опрос, обсуждение	ОПК-1.2, ОПК-1.3
1.2 Представление гармонических в круге функций с помощью степенных рядов		2	4		6	Подготовка к лабораторному занятию	Устный опрос, проверка конспектов	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
1.3 Интеграл Пуассона и его связь с гармоническими функциями		2	4		6	Поиск дополнительной информации по заданной теме, подготовка к лабораторному занятию	Контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
Итого по разделу		6	12		18			
2. Представление Пуассона для некоторых классов гармонических функций								
2.1 Гармонические функции с ограниченными средними интегральными значениями	3	3	6		9	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Проверка конспектов. Письменный опрос, обсуждение	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
2.2 Представление Пуассона для классов гармонических функций со средними, ограниченными в метрике $L^p$		3	3	6		7	Поиск дополнительной информации по заданной теме	Проверка конспектов. Письменный опрос, обсуждение
Итого по разделу		6	12		16			
3. Граничное поведение гармонических функций								

3.1 Граничное поведение гармонических функций, представимых интегралом Пуассона	3	2	4		6	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Устный опрос, проверка конспектов	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
3.2 Некасательные предельные значения		1	2		3	Подготовка к лабораторному занятию	Тестирование	ОПК-1.2, ОПК-1.3
3.3 Сходимость к граничным значениям в метрике $L^p$ и слабая сходимость		1	2		3	Поиск дополнительной информации по заданной теме	Устный опрос, проверка конспектов	ОПК-1.2, ОПК-1.3
3.4 Теорема Фату		2	4		6	Подготовка к лабораторному занятию	Проверка индивидуальных домашних заданий	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
Итого по разделу		6	12		18			
Итого за семестр		18	36		52		зачёт	
Итого по дисциплине		18	36		52		зачет	

## **5 Образовательные технологии**

С целью успешного усвоения дисциплины «Дополнительные главы комплексного анализа» и формирования требуемых компетенций предполагается применение различных образовательных технологий (личностно-ориентированных, развивающих, информационно-коммуникативных), которые обеспечивают достижение планируемых результатов образования согласно основной образовательной программе. В их числе: дифференцированный подход, проблемное обучение, эвристическое обучение.

Основными формами занятий являются лекции, практические занятия, контрольно-оценочные занятия, консультации. Лекции строятся на основе сочетания информационной и проблемной составляющих, а также элементов беседы и визуализации.

В ходе проведения лекционных занятий предусматривается:

- обсуждение задач, приводящих к тем или иным математическим понятиям;
- изложение теоретического материала в режиме диалога с целью развития критического мышления студентов и привития им исследовательских умений;
- обсуждение и систематизация теоретических вопросов темы с целью лучшего понимания их взаимосвязи и практического применения.

Лабораторные занятия по данной дисциплине направлены на привитие прочных навыков решения задач по каждой теме и сочетают применение методов обучения в сотрудничестве, дифференцированный подход, классические контрольные, тестовые технологии, а также применение компьютерных и информационных технологий. При этом предполагается проведение некоторых таких занятий в интерактивной форме (деловые и ролевые игры, разбор конкретных ситуаций).

Выбирая ту или иную технологию работы со студентами, необходимо иметь в виду, что наибольшего эффекта от ее применения можно достичь, если учитывать :

- а) цели образования, на реализацию которых должна быть направлена избираемая технология;
- б) содержание материала, которое предстоит передать обучающимся с ее помощью;
- в) условия, в которых она будет использоваться;
- г) направленность её на самообразование и медиаобразование студентов.

## **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Представлено в приложении 1.

## **7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

Представлены в приложении 2.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **а) Основная литература:**

1. Авхадиев Ф.Г. Введение в геометрическую теорию функций: учебное пособие. - Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012. - 127 с. - Режим доступа: <http://window.edu.ru/resource/138/78138>.
2. Шабунин М.И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного. - Москва: БИНОМ. Лаб. знаний, 2010 - 246 с. - ISBN 978-5-94774-005-9

### **б) Дополнительная литература:**

1. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной [Электронный ресурс] : учебник / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов ; под ред. В.А. Ильина. - Электрон. дан. - Москва : Физматлит, 2010. - 336 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/48167>

2. Львовский, С.М. Лекции по комплексному анализу [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.М. Львовский. -

Электрон. дан. - Москва : МЦНМО, 2009. - 136 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9365>

**в) Методические указания:**

1. Квасова, Н. А. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / Н. А. Квасова, Е. И. Захаркина. - Магнитогорск : МГТУ, 2013. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - URL:

<https://magtu.informsistema.ru/uploader/fileUpload?name=948.pdf&show=dcatalogues/1/1118983/948.pdf&view=true>

2. Евграфов, М. А. Аналитические функции [Электронный ресурс]: учебное пособие / М. А. Евграфов. - Электрон. дан. - Санкт-Петербург: Лань, 2008. - 448 с. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/134>

**г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

**Программное обеспечение**

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
7Zip	свободно	бессрочно
FAR Manager	свободно	бессрочно

**Профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Название курса	Ссылка
Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования	URL: <a href="https://elibrary.ru/project_risc.asp">https://elibrary.ru/project_risc.asp</a>
Поисковая система Академия Google (Google Scholar)	URL: <a href="https://scholar.google.ru/">https://scholar.google.ru/</a>
Электронные ресурсы библиотеки МГТУ им. Г.И. Носова	<a href="https://magtu.informsistema.ru/Marc.html?locale=ru">https://magtu.informsistema.ru/Marc.html?locale=ru</a>
Международная реферативная и полнотекстовая справочная база данных	<a href="http://scopus.com">http://scopus.com</a>
Архив научных журналов «Национальный электронно-информационный концорциум» (НИ НЭИКОН)	<a href="https://archive.neicon.ru/xmlui/">https://archive.neicon.ru/xmlui/</a>

**9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:



Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

1) Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа. Оснащение: мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации;

2) Учебные аудитории для проведения практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Оснащение: доска, мультимедийный проектор, экран. Комплекс тестовых заданий для проведения промежуточных и рубежных контролей;

3) Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Оснащение: шкафы для хранения учебно-методической документации, учебно-наглядных пособий и учебного оборудования;

4) Помещения для самостоятельной работы обучающихся. Оснащение: персональные компьютеры с пакетом MS Office и выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

## Приложение 1

По дисциплине «Дополнительные главы комплексного анализа» предусмотрена аудиторная и внеаудиторная самостоятельная работа.

Аудиторная самостоятельная работа студентов представляет собой решение контрольных задач обучающимися на практических занятиях.

### **Пример аудиторной контрольной работы (АКР):**

#### **АКР «Гармонические функции и их свойства»**

1. Выясните, является ли функция гармонической на своей области определения:

а)  $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 1$ ;      б)  $u(x, y) = \frac{x^2 - x + y^2}{x - y}$ .

2. Выясните область гармоничности данной функции и проверьте, принимает ли она внутри границы этой области значения, заключенные между минимальным и максимальным её граничными значениями? Почему?

$$u(z) = \operatorname{Re} \left( 1 - \frac{z}{z} \right).$$

3. Построить интеграл Пуассона для поиска гармонической функции в круге  $0 \leq r \leq 2$ , если

$$u(r, \varphi) \Big|_{r=2} = \sin \varphi.$$

Аудиторные самостоятельные работы по данной дисциплине могут быть также комплексными с элементами исследования и привлечением компьютерных и информационных технологий.

### **Примеры исследовательских заданий по дисциплине:**

1. Моделирование гармонических функций средствами математических пакетов.
2. Моделирование гармонических функций с помощью интеграла Пуассона.
3. Моделирование гармонической меры множества.
4. Моделирование сопряжённых гармонических функций средствами математических пакетов.

Выполнение исследовательских заданий заключается в построении математической модели объектов исследования и реализацию построенной модели программными средствами. Завершающим этапом выполнения таких заданий служит их защита в виде демонстрации

разработанных программных продуктов и ответов на вопросы преподавателя по тематике исследовательского задания, включая детали его выполнения.

Внеаудиторная самостоятельная работа предполагает изучение обучающимся лекционного материала и дополнительной литературы по дисциплине с целью выполнения **индивидуальных домашних заданий (ИДЗ)** и последующей их защитой-выступлением. Обучающиеся выбирают тему **ИДЗ**, разрабатывают план его выполнения, согласовывают его с преподавателем, обсуждают сроки выполнения заданий: Темы ИДЗ для обучающихся одной группы должны быть различными.

***Примерные темы индивидуальных домашних заданий (ИДЗ):***

- 1. Теоремы о среднем для гармонических функций.***
- 2. Задачи Дирихле и Неймана для гармонических функций.***
- 3. Функция Грина.***
- 4. Интеграл Пуассона.***
- 5. Представление гармонических функций степенными рядами.***
- 6. Теорема Фату.***
- 7. Гармоническая мера.***
- 8. Сопряжённые функции. Точки Лебега.***
- 9. Пространства Харди.***

При защите ИДЗ выступающий должен выполнить следующие действия в отношении слушателей (преподавателя и обучающихся)

- привлечь и удержать их внимание путём содержательного и логически выстроенного доклада;
- вызвать интерес актуальностью изучаемых вопросов и их значимостью в науке и практике;
- повысить активность слушателей посредством рассмотрения задач темы, которые могут быть решены обучающимися под руководством докладчика-выступающего.

**Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
<b>ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики</b>		
	Знания и умения интерпретировать базовые теоретические положения дисциплины	<p><i>Владеет основным содержанием дисциплины в рамках следующих теоретических вопросов:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Гармонические функции в круге. Представимость степенным рядом и формулой Пуассона.</li> <li>2. Ядро Пуассона и его свойства.</li> <li>3. Представление гармонических функций с ограниченными средними интегралами Пуассона от суммируемых функций и по ограниченной мере.</li> <li>4. Обратные теоремы о представлении гармонических функций: ограниченность средних от интегралов Пуассона.</li> <li>5. Граничное поведение интеграла Пуассона от непрерывной функции.</li> <li>6. Граничные свойства интеграла Пуассона: сходимости в среднем к граничной функции.</li> <li>7. Граничные свойства интеграла Пуассона: слабая сходимости к граничной мере и граничной функции.</li> <li>8. Граничные свойства интеграла Пуассона: теорема Фату.</li> <li>9. Теоремы о представлении гармонических функций интегралами Пуассона и существование некасательных граничных значений (обзор результатов).</li> <li>10. Гармонически сопряжённая функция. Представление степенным рядом и через сопряжённое ядро Пуассона. Вид граничной функции. Точки Лебега.</li> </ol>

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
	Владение методами и приемами решения основных задач дисциплины, а также методами математического моделирования при решении задач профессиональной сферы	<p><b><i>Владеет фундаментальными методами и способами решения классических задач дисциплины исследовательского характера:</i></b></p> <p>1. Восстановить аналитическую в окрестности точки <math>z_0 = 0</math> функцию <math>f(z)</math> по её мнимой части <math>v(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1</math> и значению <math>f(0) = i</math>.</p> <p>2. Объясните, как найти гармоническую в области <math>D</math> функцию <math>u(z)</math>, зная значение её нормальной производной на границе <math>C</math>:</p> $\frac{\delta u}{\delta n} = \frac{\delta u}{\delta x} \cos \alpha + \frac{\delta u}{\delta y} \sin \alpha,$ <p>если известно значение <math>u(z_0)</math> искомой функции в точке <math>z_0 \in \bar{D}</math>.</p> <p>3. Составьте и решите задачу 2 со своими данными.</p>
	Применение фундаментальных междисциплинарных знаний для решения задач в профессиональной деятельности	<p><b><i>Задания на решение задач из профессиональной области, комплексные задания:</i></b></p> <p>1. Моделирование гармонических функций с помощью степенных рядов на основе применения математических пакетов.</p> <p>2. Решение задачи Дирихле для круга с помощью интеграла Пуассона.</p> <p>3. Моделирование аналитических функций посредством математических пакетов на основе моделей одной из их гармонических компонент.</p>

**б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:**

Студенты сдают по дисциплине в 3-м семестре зачёт.

Критерием успешного освоения программы дисциплины являются:

- умение интерпретировать понятия и утверждения, применять к решению задач изученную теорию;

- усвоение методов и приемов решения основных задач дисциплины; приобретение навыков работы с наиболее часто встречающимися объектами комплексного анализа.

- знание основных теоретических положений, формулировок и доказательств ряда теорем.

При этом обучающиеся должны выполнить на положительную оценку аудиторские контрольные работы, исследовательское задание и защитить индивидуальное домашнее задание.