МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИЕиС
И.Ю. Мезин

04.03.2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Направление подготовки (специальность)
03.03.02 Физика

Направленность (профиль/специализация) программы
Физика конденсированного состояния вещества

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения
очная

Институт/ факультет	Институт естествознания и стандартизации
Кафедра	Прикладной математики и информатики
Курс	1
Семестр	2

Магнитогорск
2021 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 03.03.02 Физика (приказ Минобрнауки России от 07.08.2020 г. № 891)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Прикладной математики и информатики
09.02.2021, протокол № 8

Зав. кафедрой ________________ Ю.А. Извеков

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИЕиС
04.03.2021 г. протокол № 7

Председатель ________________ И.Ю. Мезин

Согласовано:
Зав. кафедрой Физики

________________ М.Б. Аркулис

Рабочая программа составлена:
доцент кафедры ПМиИ, канд. физ.-мат. наук ________________ И.И. Кинзина

Рецензент:
доцент кафедры ВТиП, канд. физ.-мат. наук ________________ А.С. Файнштейн

Лист актуализации программы

Программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2021- 2022 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от __12.10.2021 г. № 3
Зав. кафедрой ________________ Ю.А.Извеков

Программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2020 - 2021 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от _______ 2022 г. № 1
Зав. кафедрой ________________ Ю.А.Извеков

Программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2021 - 2022 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от __ _________ 2023 г. № __
Зав. кафедрой ________________ Ю.А.Извеков

Программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2022 - 2023 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от __ _________ 2024 г. № __
Зав. кафедрой ________________ Ю.А.Извеков

Программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2023 - 2024 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от __ _________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой ________________ Ю.А.Извеков

1 Цели освоения дисциплины (модуля)

приобретение обучаемыми базовых знаний по линейной алгебре, основных понятий и методов решения соответствующих классов задач, умений использовать в профессиональной деятельности базовые знания линейной алгебры, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей; формирование у обучаемых знаний и умений, необходимых для их будущей профессиональной деятельности.

2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Линейная алгебра входит в обязательую часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Аналитическая геометрия

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Математический анализ

Элементарная физика

Вычислительная физика

Общая физика

Дифференциальные уравнения

Теоретическая физика

Математическое моделирование физических процессов

Основы физического эксперимента и метрологии

Вычислительные машины, системы и сети

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения

В результате освоения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности;	
ОПК-1.1	Способен использовать базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности
ОПК-1.2	Способен применять различные способы и приёмы решения стандартных профессиональных задач на основе базовых знаний в области физико-математических и естественных наук
ОПК-2 Способен проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные;	
ОПК-2.1	Способен планировать научные исследования физических объектов, явлений, систем и процессов.
ОПК-2.2	Способен выполнять запланированные экспериментальные исследования физических объектов, явлений, систем и процессов
ОПК-2.3	Способен составлять обрабатывать и анализировать результаты экспериментальных и теоретических исследований, составлять отчеты.

4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц 144 акад. часов, в том числе:
– контактная работа – 92 акад. часов:
– аудиторная – 68 акад. часов;
– внеаудиторная – 24 акад. часов;
– самостоятельная работа – 16,3 акад. часов;
– в форме практической подготовки – 0 акад. час;
– подготовка к экзамену – 35,7 акад. час
Форма аттестации - экзамен

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1. Матрицы и определители								
1.1 Подстановки. Матрицы. Операции над матрицами. Определители матриц и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Критерий обратимости матрицы. Способы нахождения обратной матрицы.	2	8		8/2И	4	Подготовка к практическому занятию. Выполнение практических работ (решение задач, письменных работ),	Устный опрос, проверка индивидуальных заданий, решение задач по теме, самостоятельная работа	
Итого по разделу		8		8/2И	4			
2. Системы линейных алгебраических уравнений								
2.1 Метод Гаусса. Теорема Крамера. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений. Матричный способ решения систем линейных алгебраических уравнений.	2	10		10/3И	5	Подготовка к практическому занятию. Выполнение практических работ (решение задач, письменных работ)	Устный опрос, проверка индивидуальных заданий, решение задач по теме, самостоятельная работа, контрольная работа	
Итого по разделу		10		10/3И	5			
3. Основы векторной алгебры								

3.1 Векторы. Операции над векторами. Линейно зависимые (независимые) системы векторов. Базис и ранг системы векторов. Однородные системы линейных алгебраических уравнений.	2	10		10/2И	3,1	Подготовка к практическому занятию. Выполнение практических работ (решение задач, письменных работ)	Устный опрос, проверка индивидуальных заданий, решение задач по теме, самостоятельная работа, контрольная работа	
Итого по разделу		10		10/2И	3,1			
4. Линейный оператор								
4.1 Понятие линейного оператора. Матрица оператора. Собственные значения и собственные векторы оператора. Квадратичные формы	2	6		6/3И	4,2	Изучение литературы, выполнение индивидуального домашнего задания, прохождение тестирования по теме	Устный опрос, проверка выполнения индивидуального домашнего задания, тестирование	
Итого по разделу		6		6/3И	4,2			
Итого за семестр		34		34/10И	16,3		экзамен	
Итого по дисциплине		34		34/10И	16,3		экзамен	

5 Образовательные технологии

При проведении занятий и организации самостоятельной работы студентов используются следующие технологии:

ТРАДИЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ, предполагающие передачу информации в готовом виде, формирование учебных умений по образцу: лекция-изложение, лекция-объяснение, практические работы, контрольная работа и др. Использование традиционных технологий обеспечивает ориентирование студента в потоке информации, связанной с различными подходами к определению сущности, содержания, методов, форм развития и саморазвития личности; самоопределение в выборе оптимального пути и способов личностно-профессионального развития; систематизацию знаний, полученных студентами в процессе аудиторной и самостоятельной работы. Практические занятия обеспечивают развитие и закрепление умений и навыков определения целей и задач саморазвития, а также принятия наиболее эффективных решений по их реализации.

ИНТЕРАКТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ, предполагающие организацию обучения как продуктивной творческой деятельности в режиме взаимодействия студентов друг с другом и с преподавателем.

6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Представлено в приложении 1.

7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

Представлены в приложении 2.

8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) Основная литература:

1. Туганбаев, А.А. Линейная алгебра : учебное пособие / А.А. Туганбаев. — 2-е изд., стер. — Москва : ФЛИНТА, 2017. — 75 с. — ISBN 978-5-9765-1407-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/108266 (дата обращения: 26.10.2019).

2. Карнаков В.А. Лекции по линейной алгебре. - Иркутск 2016. – URL: http://physdep.isu.ru/ru/departments/theory/study/Karnakov_lect_lin_algebra.pdf

3. Логвенков С. А., Самовол В. С. Линейная алгебра. Основы теории, примеры и задачи. — М.: МЦНМО, 2017. – URL: https://publications.hse.ru/mirror/pubs/share/direct/213483272

б) Дополнительная литература:

1. Постников, М. М. Линейная алгебра. Лекции по геометрии. Ч. 2 [Текст] : учеб. пособие [для вузов]. - 3-е изд., испр. - СПб. [и др.] : Лань, 2009. - 400 с. - (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-0890-0 : 350-02.

2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – URL: https://siblec.ru/matematika/linejnaya-algebra-i-analiticheskaya-geometriya

3. Высшая математика для экономистов. Практикум : учеб. пособие для вузов / Кремер Н. Ш. - М. : ЮНИТИ, 2010. - 478 с. - (Золотой фонд российских учебников) - Рек. Мин. обр. РФ (36 экз.)

в) Методические указания:

1. Иванова, С.А. Линейная алгебра: учебное пособие / С.А. Иванова, В.А. Павский. — Кемерово : КемГУ, 2019. — 125 с. — ISBN 978-5-8383-2359-3. — Текст :

электронный // ЭБС «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/122007 (дата обращения: 26.10.2019).

г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Программное обеспечение

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Windows 7 Professional(для классов)	Д-1227-18 от 08.10.2018	11.10.2021
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
7Zip	свободно распространяемое ПО	бессрочно
Электронные плакаты по дисциплине "Технология строительных процессов"	К-278-11 от 15.07.2011	бессрочно
FAR Manager	свободно распространяемое ПО	бессрочно

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Название курса	Ссылка
Университетская информационная система РОССИЯ	https://uisrussia.msu.ru
Электронные ресурсы библиотеки МГТУ им. Г.И. Носова	http://magtu.ru:8085/marcweb2/Default.asp
Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)	URL: https://elibrary.ru/project_risc.asp
Электронная база периодических изданий East View Information Services, ООО «ИВИС»	https://dlib.eastview.com/
Поисковая система Академия Google (Google Scholar)	URL: https://scholar.google.ru/
Информационная система - Единое окно доступа к информационным ресурсам	URL: http://window.edu.ru/

9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа

Учебные аудитории для проведения практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации

Помещения для самостоятельной работы обучающихся

Помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования

Приложение 1

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

2 семестр

Внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся осуществляется в виде изучения литературы по соответствующему разделу с проработкой материала; выполнения домашних заданий, подготовка к аудиторным контрольным работам.

Примерные индивидуальные домашние задания (ИДЗ):

ИДЗ №1 «Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений»

Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение матрицы. Как определить размер матрицы, элемент матрицы? Приведите примеры.
2. Частные виды матриц (их названия, примеры).
3. Линейные операции над матрицами: сложение и вычитание матриц.
4. Линейные операции над матрицами: умножение матрицы на число.
5. Нелинейные операции над матрицами: умножение матриц, правило, пример. Всегда ли определена операция умножения матриц? Укажите исключения, приведите примеры.
6. Что называется определителя 2-го и 3-го порядка, приведите примеры
7. Каковы основные свойства определителей. Докажите одно из них.
8. Какие способы вычисления определителей произвольного порядка Вы знаете?
9. Систематизируйте все случаи, в которых определитель равен нулю.
10. Что называется минором элемента матрицы, его алгебраическим дополнением?
11. Дайте определение ранга матрицы.
12. Какие преобразования над матрицами называются элементарными? Перечислите их, приведите примеры и сформулируйте правило вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
13. Какая матрица называется обратной для данной матрицы А? Всякая ли матрица имеет обратную?
14. Как найти обратную матрицу? Как проверить, что она найдена верно?
15. Какие виды систем линейных уравнений Вы знаете? (Что значит однородная, неоднородная система; какие системы совместные, несовместные; определенные, неопределенные?)
16. Сформулируйте необходимое и достаточное условие совместности СЛАУ.
17. При каком условии СЛАУ имеет единственное решение?
18. Как определить, что система несовместна?
19. Однородные СЛАУ могут быть несовместными? Почему?
20. При каком условии однородная СЛАУ имеет только нулевое решение?
21. Что Вы можете сказать о количестве решений однородной СЛАУ, если определитель матрицы этой системы равен нулю?
22. Запишите формулы Крамера. Каковы условия их применения.
23. Какие системы можно решать матричным методом? Запишите соответствующую формулу.
24. В чем заключается сущность метода Гаусса?

Задание 1. Вычислить определитель 4-го порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Найти матрицу X. Проверить правильность решения подстановкой найденной матрицы в исходное уравнение.

$$3X = 12B^T - 9A \cdot C\text{, если}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Решить систему линейных уравнений тремя способами:

- по формулам Крамера,

- матричным методом (с помощью обратной матрицы),

- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -5; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Задание 4. Решить системы уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -5, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \end{cases}$$

ИДЗ №2 «Векторы»

Вопросы для самоподготовки

1. Что такое вектор?
2. Что называется базисом на прямой, плоскости и пространстве?
3. Какие операции над векторами называются линейными?
4. Как определяются эти операции и каковы их свойства?
5. Линейные операции над векторами в координатной форме.

6. Что называется скалярным произведением двух векторов? Каковы его свойства? Как выражается скалярное произведение через координаты векторов-сомножителей?
7. Как определить угол между двумя векторами?
8. Определение коллинеарных векторов. Условие коллинеарности векторов.
9. Каково условие ортогональности векторов?

1. Даны четыре вектора $\vec{a}=(-2;3;5)$, $\vec{b}=(1;-3;4)$, $\vec{c}=(7;8;-1)$ и $\vec{d}=(1;20;1)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

2. Даны векторы $\vec{a}=(-2;1;2)$ и $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Найти длины векторов $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{d}=-\vec{a}+\vec{b}$, построенных по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{d}$; $Пр_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{c}-\vec{d})$. Проверить коллинеарность векторов $\vec{c}$ и $\vec{b}$.

3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

ИДЗ №3 «Векторное пространство. Линейный оператор»

Вопросы для самоподготовки

1. Что называется n-мерным векторным (линейным) пространством? Приведите примеры.
2. Что называется n-мерным вектором?
3. Какие векторы линейного пространства называются линейно независимыми? Линейно зависимыми?
4. Что называется базисом линейного пространства?
5. Что называется размерностью линейного пространства?
6. Что называется евклидовым пространством?
7. Сформулируйте аксиомы, определяющие скалярное произведение векторов.
8. Что называется нормой вектора?
9. Как определить угол между двумя векторами евклидова пространства?
10. Какие векторы евклидова пространства называются ортогональными?, приведите признак ортогональности.
11. Что называется линейным оператором?
12. Как найти матрицу линейного оператора? Запишите формулы для нахождения матрицы линейного оператора в новом базисе.
13. Что такое собственные значения и собственные векторы линейного оператора?
14. Как найти собственные векторы линейного оператора?
15. Какой вид имеет матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов?
16. Что называется квадратичной формой и её матрицей? В каком случае говорят, что квадратичная форма имеет канонический вид?
17. Как применяется теория квадратичных форм для приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду?

1. Проверить линейность оператора

$$A\bar{x}=(-1;\ y+z;\ x),\quad \text{где } \bar{x}=(x;\ y;\ z)$$

2. Даны базисные векторы оператора A:

$$A\bar{i}=7\bar{i}+4\bar{k};\ A\bar{j}=\bar{j}+10\bar{k};\ A\bar{k}=-\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}.$$

Составить матрицу этого оператора.

3. Найти собственные числа и собственные векторы оператора А.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти матрицу линейного оператора А в новом базисе $(\overline{e}_1'; \overline{e}_2'; \overline{e}_3')$, где
$\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$; $\overline{e}_2' = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 + \overline{e}_3$; $\overline{e}_3' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - \overline{e}_3$,

если она задана в базисе $(\overline{e}_1; \overline{e}_2; \overline{e}_3)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

Перечень тем и заданий для подготовки к экзамену

Теоретические вопросы

1. Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами.
2. Определитель. Свойства определителя.
3. Минор, алгебраическое дополнение, теорема Лапласа.
4. Невырожденная матрица, обратимость матрицы.
5. Ранг матрицы.
6. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Совместность СЛАУ.
7. Методы решения невырожденных СЛАУ:формулы Крамера,матричный метод.
8. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
9. Системы линейных однородных уравнений.
10. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Модуль вектора. Направляющие косинусы.
11. Скалярное произведение векторов, его свойства. Приложения скалярного произведения в геометрии, физике.
12. Понятие векторного пространства. Размерность. Базис. Примеры.
13. Матрица перехода от старого базиса к новому.
14. Понятие линейного оператора. Матрица оператора.
15. Собственные числа и собственные векторы оператора.
16. Квадратичные формы

Практические задания

Тема 1: Матрицы и определители

1. Решить матричное уравнение X+3(A-B)=4C, где
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Выполнить действия $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

4. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Тема 2: Системы линейных алгебраических уравнений

1. Решить системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера, матричным методом, методом Гаусса:

   А) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ В) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 36 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$.

2. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}.$$

3. Решить систему однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Тема 3: Основы векторной алгебры

1. При каком условии вектор $\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}-\vec{b}$?

2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{n}=3\vec{a}-4\vec{b}$ и $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные векторы и $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$.

3. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}-8\vec{k}$ и $\vec{b}=-4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$. Вычислить проекцию вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oy углы $\alpha=60^0, \beta=120^0$, а с осью Oz - тупой угол γ.

4. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}=\{-1;0;2\}$ и $\vec{b}=\{2;2;-10\}$ образует с осью Ox острый угол. Зная, что $|\vec{x}|=\sqrt{14}$, найти его координаты.

АКР №1 «Матрицы, операции над матрицами»

Вычислить матрицы AB, BA, A^2, B^2, если

1. $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -2 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

АКР №2 «Методы решения систем линейных уравнений»

Решить системы уравнений методом Гаусса и Крамера:

а) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=-10,\\ 7x_1+5x_2+3x_3=-17,\\ x_1-4x_2-4x_3=-3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-2x_1-3x_2+x_3=-2,\\ 3x_1+4x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+2x_3=1;\end{cases}$

АКР № 3 «Операции над векторами»

1. Даны векторы $\vec{a}(1;-1;0,5)$, $\vec{b}(-3;0;4)$. Найти $\left|2\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

2. Найти значения *m* и *n*, при которых векторы $\vec{a}(1;m;3)$ и $\vec{b}(3;6;n)$ коллинеарны.

3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}+\vec{c}$ и $3\vec{a}-2\vec{c}$, если $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{c}\right|=2$, $\angle(\vec{a};\vec{c})=\dfrac{2\pi}{3}$.

4. В параллелограмме АВСД даны его вершины $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(6:4)$. Определить координаты вершины Д и угол при вершине А.

Приложение 2

Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация имеет целью определить степень достижения запланированных результатов обучения по дисциплине за определенный период обучения (2 семестр) и проводится в форме экзамена

а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности		
ОПК-1.1	Способен использовать базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	***Перечень примерных контрольных вопросов к экзамену:*** 1. Дайте определение понятию матрица. Виды матриц. Действия над матрицами. 2. Определители матриц, их свойства. 3. Минор, алгебраическое дополнение. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу), понижением порядка. 4. Обратная матрица, теорема о существовании и единственности обратной матрицы (док-во). 5. Элементарные преобразования матриц. Эквивалентные матрицы. Ранг матрицы. Свойства ранга. Теорема о рангах эквивалентных матриц (без док-ва). 6. Ступенчатая матрица. Теорема о ранге ступенчатой матрицы (док-во). 7. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (определения: совместной, несовместной СЛАУ, решения СЛАУ). Условия совместности СЛАУ. 8. Матричная запись СЛАУ. Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы. 9. Формулы Крамера (вывод). 10. Определенные и неопределенные СЛАУ. Метод Гаусса. 11. Однородные СЛАУ. Фундаментальная система решений. 12. Исследуйте систему линейных алгебраических уравнений 13. Дайте определение понятиям вектор, длина вектора, сумма, разность векторов, коллинеарность векторов 14. Скалярное произведение векторов, его свойства. Угол между векторами. ортогональности двух векторов. Проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$. 15. Опишите геометрический и физический смысл скалярного произведения векторов 16. Дайте определение векторного пространства, размерности пространства, базиса пространства, приведите примеры пространств и их базисов 17. Дайте определение понятию линейный оператор, матрицы оператора. 18. Приведите примеры линейных преобразований плоскости

		Примерные практические задания к экзамену: **Задание 1.** Составьте алгоритм решения нахождения обратной матрицы. **Задача 2.** Составьте по условию задачи систему линейных уравнений и решите ее матричным способом. **Задание 3**Опишите способы вычисления определителя, поясните теорему Лапласа **Задание 4**. Выведите формулу скалярного произведения в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. **Задание 5**. Опишите построение матрицы перехода от старого базиса к новому
ОПК-1.2	Способен применять различные способы и приёмы решения стандартных профессиональных задач на основе базовых знаний в области физико-математических и естественных наук	***Практические задания*** **Задание 1.** Систематизируйте и обобщите все ключевые понятия и приемы решения типовых задач по теме «Виды матриц» и «Операции над матрицами». Результат оформите в виде таблицы. **Задание 2.** Систематизируйте и обобщите все ключевые понятия и приемы решения типовых задач по теме «Способы вычисления определителей второго, третьего, более высоких порядков». Результат оформите в виде таблицы **Примерные прикладные задачи и задания** **Задача 1**. Проверить, лежат ли точки $A(1;0;1)$, $B(4;4;6)$, $C(2;2;3)$ и $D(10;14;17)$ на одной прямой. **Задача 2**. 1.Решить уравнение: $3(a_1 - 2x) + 5(a_2 + a_3 - 3x) = 2(a_3 - 4x)$, где $a_1 = (4,3,1,2)$, $a_2 = (2,-1,-3,4)$, $a_2 = (2,-1,-3,4)$, $a_3 = (-1,4,-5,3)$. **Задача 3**. Установить линейную независимость векторов: **а)** $a_1 = (3,1,1,1,1)$, $a_2 = (1,1,2,3,1)$, $(1,2,9,1,4)$, $a_4 = (1,1,3,8,2)$;

б) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,-1,2,-2)$, $a_3=(1,3,0,4)$, $a_4=(1,5,-1,7)$.

Задача 4. Найти ранг данной системы векторов, указать всевозможные ее базы и выразить через базу все векторы системы:

а)
$(5,2,-3,1)$, $a_2=(4,1,-2,3)$, $a_3=(1,1,-1,-2)$, $a_4=(3,4,-1,2)$;

Задача 5. Даны базисные векторы оператора A:

$$A\bar{i}=7\bar{i}+4\bar{k};\ \ A\bar{j}=\bar{j}+10\bar{k};\ \ A\bar{k}=-\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}.$$

Составить матрицу этого оператора.

Задача 6. Предприятие специализируется по выпуску изделий трех видов: A, B, C; при этом используется сырье трех типов: S_1, S_2, S_3. Нормы расхода каждого вида сырья на единицу изделия каждого вида и объем расхода сырья на 1 день заданы таблицей:

Вид сырья	Расходы сырья на единицу продукции, усл. ед.			Запасы сырья на один день, усл. ед.
	A	B	C	
S_1	2	3	1	1400
S_2	4	1	2	1300
S_3	1	2	3	1100

Найти ежедневный объем выпуска изделий каждого вида.

Получить систему уравнений и решить ее тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса.

Задача 7. Предприятие выпускает m видов изделий с использованием k видов сырья. Нормы расхода сырья для производства единицы продукции каждого вида даны матрицей $A_{m\times k}$. Стоимость единицы сырья задана матрицей C. Найти затраты каждого вида сырья при заданном плане выпуска Q и суммарные затраты на сырье. Представить результаты с помощью матриц A, C, Q.

$$A=\begin{pmatrix}2&8&1&0\\6&7&3&2\\4&5&1&1\\3&3&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3&8\end{pmatrix}\ Q=\begin{pmatrix}20&100&50&100\end{pmatrix}$$

ОПК-2: Способен проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные		
ОПК-2.1	Способен планировать научные исследования физических объектов, явлений, систем и процессов	***Перечень примерных контрольных вопросов к экзамену:*** 1. Системы линейных уравнений. Основные определения. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. 2. Изложение метода Гаусса. Возможные варианты количества решений систем линейных алгебраических уравнений 3. Определение определителя. Вычисление определителя второго порядка (ответ подкрепить конкретными примерами). 4. Определение определителя. Вычисление определителя третьего порядка. Правило Саррюса. 5. Определение определителя. Свойства определителей (каждое свойство проиллюстрировать конкретными примерами). 6. Миноры и алгебраические дополнения. Лемма о вычислении определителя матрицы $n-го$ порядка, содержащей строку (столбец), все элементы которой, за исключением, быть может, одного элемента равны нулю (ответ подкрепить конкретными примерами). 7. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о вычислении определителя матрицы через элементы какой-либо строки (столбца) и их алгебраические дополнения(ответ подкрепить конкретными примерами). 8. Решение систем линейных уравнений при помощи формул Крамера (ответ подкрепить конкретными примерами). 9. Алгебра матриц: основные определения, операции над матрицами, свойства операций над матрицами. Единичная матрица. Обратная и обратимая матрицы. 10. Вырожденная матрица. Достаточный признак обратимости матрицы. На конкретном примере показать нахождение обратной матрицы. 11. Способ нахождения матрицы, обратной данной с использованием единичной матрицы (иллюстрация на конкретном примере). 12. Матричный способ решения систем nлинейных алгебраических уравнений с nнеизвестными 13. Векторы. Основные определения теории векторов. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость векторов. 14. Базис системы векторов. Теорема о существовании базиса у всякой ненулевой системы векторов. Правило нахождения базиса системы векторов 15. Базис системы векторов. Теорема о разложении любого вектора через вектора базиса (привести конкретные примеры). 16. Ранг системы векторов. Правило нахождения ранга системы векторов. 17. Ранг системы векторов. Теорема об эквивалентности системы алгебраических уравнений и векторного уравнения. 18. Теорема Кронекера-Капелли. Правило нахождения ранга системы векторов. На конкретном примере проиллюстрировать применимость теоремы Кронекера-Капелли. 19. Операции над векторами. Координаты вектора. Длина вектора. Скалярное и произведения векторов. 20. Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии. 21. Вычисление расстояния между точками. 22. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

<table>
<tr><td></td><td></td><td> Практические задания
Задание 1. Предложена задача …. Самостоятельно проанализировать, какие знания, методыпотребуются для решения данной задачи.
Примерные прикладные задачи и задания (в тестовой форме)
Выберите один из верных ответов
Задача 1. Таблица, задающая попарные расстояния между несколькими пунктами, является
□ системой □ определителем ■ матрицей □ параллелепипедом
Задача 2. Для решения транспортной задачи можно использовать
□ производные □ пределы ■ матрицы □ интегралы
Задача 3. Когда на материальную точку наложены линейные условия, для описания ее движения необходимо исследовать
□ матрицу □ определитель ■ систему уравнений □ производную
Задача 4. На тело действует несколько сил. Для нахождения результирующей используют
■ сложение векторов □ дифференцирование □ исследование на непрерывность □ пределы
Задача 5. Для вычисления работы силы на перемещении используют
□ векторное произведение ■ скалярное произведение □ непрерывность □ смешанное произведение </td></tr>
<tr><td>ОПК-2.2</td><td>Способен выполнять запланированные экспериментальные исследования физических объектов, явлений, систем и процессов</td><td> Примерные прикладные задачи и задания
Задача 1.Найти матрицу X=A(B-2C) и вычислить ее определитель, если
$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$
Задача 2. Решить систему: 1) методом Гаусса; 2) методом Крамера, показав умения находить определители: а) по правилу Саррюса; б) сведением матрицы определителя к треугольному виду; в) получением столбца (строка) со всеми нулевыми элементами, за исключением одного; 3) матричным способом. </td></tr>
</table>

		$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4; \end{cases}$ **Задача 3.** Найти работу силы $\vec{F} = (1;\ 2;\ 5)$ электростатического поля, по перемещению электрического заряда из точки $M_1 = (0;\ 4;\ 2)$ в точку $M_2 = (4;\ 7;\ 4)$. **Задача 4**. Найти собственные числа и собственные векторы оператора А. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$
ОПК-2.3	Способен составлять, обрабатывать и анализировать результаты экспериментальных и теоретических исследований, составлять отчеты	***Прикладные задания*** **Задание 1**. Проанализируйте, может ли в векторном пространстве быть два базиса разной длины? **Задание 2.** Докажите, что два конечномерных векторных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны. **Задание 3**. Установите, какое векторное пространство размерности n изоморфно пространству R n . **Задание4**. Установите критерии работоспособности устройства на основе электрических схем постоянного тока **Примерные прикладные задачи и задания** **Задача 1.** Даны четыре вектора $\vec{a} = (-2;3;5)$, $\vec{b} = (1;-3;4)$, $\vec{c} = (7;8;-1)$ и $\vec{d} = (1;20;1)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе. **Задача 2.** Даны векторы $\vec{a} = (-2;1;2)$ и $\vec{b} = (-1;0;-2)$. Найти длины векторов $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b}$, построенных по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{d}$; $Пр_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{c} - \vec{d})$. Проверить коллинеарность векторов $\vec{c}$ и $\vec{b}$. **Задача 3.** Проверить линейность оператора $A\overline{x} = (-1;\ \ y+z;\ \ x), \quad \text{где } \overline{x} = (x;\ y;\ z)$

Задача 4. Найти матрицу линейного оператора A в новом базисе $(\overline{e}_1'; \overline{e}_2'; \overline{e}_3')$, где $\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$; $\overline{e}_2' = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 + \overline{e}_3$; $\overline{e}_3' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - \overline{e}_3$,

если она задана в базисе $(\overline{e}_1; \overline{e}_2; \overline{e}_3)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 5. Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2 . Нормы расхода сырья характеризуются матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

где каждый элемент a_{ij} (i = 1,2,3; j = 1,2) показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = (100 \;\; 50 \;\; 130)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) - матрицей столбцом:

$$B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Определить стоимость сырья.

Задание 6. В производстве используются три вида сырья x, y, z . Для изготовления единицы продукции используются три детали, для каждой из которых налагается условие на использование каждого из видов сырья:

$x + 3y - 2z = 5,\qquad 2x + 5y - 4z = 8,\qquad 4x + 11y - 9z = 1$

Какое количество сырья каждого из видов используется?

б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:

Показатели и критерии оценивания экзамена (2 семестр):

– на оценку **«отлично»** (5 баллов) – обучающийся демонстрирует высокий уровень сформированности компетенций, всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, свободно выполняет практические задания, свободно оперирует знаниями, умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности.

– на оценку **«хорошо»** (4 балла) – обучающийся демонстрирует средний уровень сформированности компетенций: основные знания, умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.

– на оценку **«удовлетворительно»** (3 балла) – обучающийся демонстрирует пороговый уровень сформированности компетенций: в ходе контрольных мероприятий допускаются ошибки, проявляется отсутствие отдельных знаний, умений, навыков, обучающийся испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.

– на оценку **«неудовлетворительно»** (2 балла) – обучающийся демонстрирует знания не более 20% теоретического материала, допускает существенные ошибки, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.

– на оценку **«неудовлетворительно»** (1 балл) – обучающийся не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.