



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



УТВЕРЖДАЮ
Директор ИЭиАС
В.Р. Храмшин

10.02.2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Направление подготовки (специальность)
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Направленность (профиль/специализация) программы
Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения
очная

Институт/ факультет	Институт энергетики и автоматизированных систем
Кафедра	Вычислительной техники и программирования
Курс	1
Семестр	1


Магнитогорск
2023 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника (приказ Минобрнауки России от 19.09.2017 г. № 929)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

08.02.2023, протокол № 5

Зав. кафедрой

 О.С. Логунова

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИЭиАС

10.02.2023 г. протокол № 7

Председатель

 В.Р. Храмшин


Рабочая программа составлена:

доцент кафедры ВТиП, канд. физ.-мат. наук

 А.С. Файнштейн

Рецензент:

директор НИИ «Промбезопасность», канд. техн. наук

 М.Ю. Наркевич

Лист актуализации рабочей программы

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2023 - 2024 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от _____ 20__ г. № ____
Зав. кафедрой _____ О.С. Логунова

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2024 - 2025 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от _____ 20__ г. № ____
Зав. кафедрой _____ О.С. Логунова

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2025 - 2026 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от _____ 20__ г. № ____
Зав. кафедрой _____ О.С. Логунова

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2026 - 2027 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от _____ 20__ г. № ____
Зав. кафедрой _____ О.С. Логунова

1 Цели освоения дисциплины (модуля)

Целями освоения дисциплины «Элементы линейной алгебры» являются: ознакомление студентов с базовыми понятиями и результатами линейной алгебры, ознакомление студентов с применением линейной алгебры в квантовой механике, формирование компетенций, направленных на использование линейно-алгебраических методов при решении научных и прикладных задач.

2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Элементы линейной алгебры входит в обязательную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Дисциплина Линейная алгебра входит в вариативную (по выбору студента) часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения школьного курса математики.

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Физика с элементами квантовой механики

Численные методы

Физические основы механики и оптики

Моделирование

Основы квантовой информатики

Прикладная математика

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения

В результате освоения дисциплины (модуля) «Элементы линейной алгебры» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-1	Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;
ОПК-1.1	Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования
ОПК-1.2	Решает профессиональные задачи с применением методов теоретического и экспериментального исследования

4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц 108 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 37 акад. часов;
- аудиторная – 36 акад. часов;
- внеаудиторная – 1 акад. часов;
- самостоятельная работа – 71 акад. часов;
- в форме практической подготовки – 0 акад. час;

Форма аттестации - зачет

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1. Раздел 1. Комплексные числа								
1.1 Комплексные числа и действия с ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа.	1	1	1/ИИ		3	Решение задач на действия с комплексными числами подготовка к устному опросу и АКР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
1.2 Основная теорема алгебры. Алгоритм деления многочленов. Разложение многочленов на множители.		1	1/ИИ		2	Решение задач на разложение многочленов, подготовка к устному опросу и АКР	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
1.3 Функции комплексного переменного. Элементы комплексного анализа.		1	2/ИИ		2	Решение задач на функции комплексного переменного, подготовка к устному опросу и АКР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная конирольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
Итого по разделу		3	4/3И		7			
2. Раздел 2. Матрицы и системы линейных уравнений								

2.1 Матрицы, действия с матрицами. Определители. Обратная матрица. Ранг матрицы. Решение систем методами матричного исчисления, Крамера, Гаусса. Метод Гаусса в общем случае. Теорема Кронеккера-Капелли. Однородные системы. Фундаментальная система	1	1	2/ИИ		5	Решение задач на, матрицы и определители и системы, подготовка к устному опросу и АКР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
2.2 Решение систем методами матричного исчисления, Крамера, Гаусса. Метод Гаусса в общем случае. Теорема Кронеккера-Капелли. Однородные системы. Фундаментальная система решений.		2	2/ИИ		5	Решение задач на системы уравнений, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
Итого по разделу		3	4/2И		10			
3. Раздел 3. Линейные пространства и операторы								
3.1 Линейные пространства. Базис, размерность, подпространства, преобразования координат. Изоморфизм.	1	1	1/ИИ		10	Решение задач, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.2 Линейные операторы. Матричное представление операторов. Инвариантные подпространства. Собственные значения и векторы. Спектр. Характеристический многочлен. Подобие операторов. Понятие о присоединённых векторах и жордановой форме		1	2		10	Решение задач на матричное представление операторов, нахождение собственных значений и векторов., подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.3 Комплексное евклидово пространство. Скалярное произведение, неравенства Коши-Буняковского и Минковского. Норма. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение и разложение в прямую сумму.		2	2		7	Решение задач на евклидово пространство и ортогонализацию, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2

3.4 Самосопряжённые операторы, квадратичные формы, спектр, экстремальные свойства собственных значений. Проекторы. Спектральная теорема. Нормальные и унитарные операторы. Коммутаторы. Разложение оператора в произведение унитарного и положительного.	4	1		5	Решение задач на самосопряжённые, унитарные и нормальные операторы, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.5 Приложение линейных операторов к оценке погрешности решений систем линейных уравнений. Число обусловленности линейного оператора. Итерационный метод вычисления границ спектра.	2	2		8	Решение задач на вычисление числа обусловленности и итерационный метод, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.6 Квантовомеханическая терминология: бра- и кет-векторы. Среднее значение, отклонение и среднее квадратичное отклонение физических величин. Принцип неопределённости Гейзенберга.	2	2		14	Решение задач на вычисление средних значений и отклонений физических величин, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
Итого по разделу	12	10/1И		54			
Итого за семестр	18	18/6И		71		зачёт	
Итого по дисциплине	18	18/6И		71		зачет	

5 Образовательные технологии

1. Традиционные образовательные технологии, ориентированные на организацию образовательного процесса и предполагающую прямую трансляцию знаний от преподавателя к аспиранту.

Формы учебных занятий с использованием традиционных технологий:

Информационная лекция – последовательное изложение материала в дисциплинарной логике, осуществляемое преимущественно вербальными средствами (монолог преподавателя).

Лабораторная работа – организация учебной работы с реальными материальными и информационными объектами, экспериментальная работа с аналоговыми моделями реальных объектов.

2. Технологии проблемного обучения – организация образовательного процесса, которая предполагает постановку проблемных вопросов, создание учебных проблемных ситуаций для стимулирования активной познавательной деятельности аспирантов.

3. Интерактивные технологии – организация образовательного процесса, которая предполагает активное и нелинейное взаимодействие всех участников, достижение на этой основе лично значимого для них образовательного результата.

Формы учебных занятий с использованием специализированных интерактивных технологий:

Лекция «обратной связи» – лекция–провокация (изложение материала с заранее запланированными ошибками), лекция-беседа, лекция-дискуссия, лекция-конференция.

4. Информационно-коммуникационные образовательные технологии – организация образовательного процесса, основанная на применении программных сред и технических средств работы со знаниями в различных предметных областях.

6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Представлено в приложении 1.

7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

Представлены в приложении 2.

8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) Основная литература:

1. Ильин, В. А. Линейная алгебра. Учебник для вузов [Текст]. / — В.А. Ильин, Э.Г. Позняк – М.: Физматлит, 2014. - 280 с.

2. Гельфанд, И.М. Лекции по линейной алгебре [Текст]. / И.М. Гельфанд – М. : Добросвет, 2009. 296 с.

б) Дополнительная литература:

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц: [Текст]. / Ф.Р. Гантмахер – М.: Физматлит, 2010. - 560 с.

2. Нильсен, М. Квантовые вычисления и квантовая информация. Пер. с англ. [Текст]. / М. Нильсен, И. Чанг. – М. : «Мир», 2006. – 824 с.

в) Методические указания:

1. Смушкевич Л.Е., Лекции по основам квантовых вычислений. Часть 1. Физико-математический минимум. Выпуск 1. Комплексные числа. [Текст]. / Л.Е. Смушкевич. – Магнитогорск : ЧОУ ИТФИ, 2018. – 77 с.

2. Смушкевич Л.Е., Лекции по основам квантовых вычислений. Часть 1. Математический аппарат квантовой механики. Выпуск 2. Алгебра матриц. Системы

линейных уравнений. Линейные операторы в конечномерных комплексных евклидовых пространствах [Текст]. / Л.Е. Смушкевич. – Магнитогорск : ЧОУ ИТФИ, 2017. – 134 с.

г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Программное обеспечение

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
MathCAD v.15 Education University Edition	Д-1662-13 от 22.11.2013	бессрочно

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Название курса	Ссылка

9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Лекционная аудитория - Мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации.

Компьютерный класс - Персональные компьютеры с пакетом Office, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

Аудитории для самостоятельной работы: компьютерные классы; читальные залы библиотеки - Все классы УИТ и АСУ с персональными компьютерами, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

Аудиторий для групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации - Ауд. 282 и классы УИТ и АСУ.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенных компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и наличием доступа в электронную информационно-образовательную среду организации - Классы УИТ и АСУ.

Помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования - Центр информационных технологий – ауд. 379

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Примерные задачи для усвоения текущего материала и подготовки к аудиторной контрольной работе по разделу 1 «Комплексные числа»

1. Вычислить:

а) $(\overline{2-i})(3+7i) - \frac{5-2i}{4+3i}$,

б) $(2+3i)^2 + (1-4i)^3$,

в) $|4-3i| + (1+2i)^{-2}$.

2. Решить уравнения:

а) $(2-i)z + 5 - 3i = 0$,

б) $z^2 - 4z + 5 = 0$,

в) $z^2 = 5 + 12i$,

г) $z^2 + \sqrt{5}z + 3i = 0$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (2+3i)z_1 + 5z_2 = 1-i \\ 2z_1 + (5-i)z_2 = 2+i \end{cases}$$

4. Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел: а) 6; б) -7 ; в) $3i$; г) $-4i$; д) $2+2i$; е) $3-3i$; ж) $-2\sqrt{3}+2i$; з) $3+4i$; и) $-12-5i$.

5. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах: а) 4; б) $-7i$; в) $3+3i$; г) $4-4i$; д) $2+2\sqrt{3}i$; е) $3\sqrt{3}-3i$; ж) $-3+4i$; з) $-5-12i$.

6. Перевести числа $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3\sqrt{3} + 3i$ в тригонометрическую и показательную формы, найти $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической и показательной формах и перевести в алгебраическую форму.

7. Найти степени комплексных чисел, применяя формулу Муавра:

а) $(1+i)^7$, б) $(\sqrt{3}-i)^8$, в) $(2-2\sqrt{3}i)^5$.

8. Найти корни из комплексных чисел: а) $\sqrt{3+3i}$, б) $\sqrt[3]{-125}$,

в) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$.

9. Разложить многочлены на множители:

а) $z^2 - 4z + 5$;

б) $z^3 + 125$;

в) $z^4 + 1 - \sqrt{3}i$;

г) $z^8 - 2z^4 + 1$.

Примерные вопросы коллоквиума по разделу 1 «Комплексные числа»

1. Что такое алгебраическая форма комплексного числа и как комплексные числа изображаются на комплексной плоскости?

2. Что такое модуль, аргумент, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа?
3. Как происходит умножение, деление, переход к сопряжённому для комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах?
4. Как происходит возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа?
5. Что утверждает основная теорема алгебры и сколько корней может иметь многочлен n -ной степени?
6. Что такое кратность корня и как выглядит разложение многочлена на множители?

Примерные задачи для усвоения текущего материала и выполнения типового расчёта №1 по разделу 2 «Матрицы и системы линейных уравнений»

1. Вычислить $AB - 3C + 2D^T$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Доказать, что $(A+B)^T = A^T + B^T$; $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

3. Вычислить разложением Лапласа приведением к треугольному виду определители:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Найти матрицу, обратную к $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, проверить равенство $A^{-1}A = E$.

5. Решить матричное уравнение: $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Решить методами обратной матрицы, Крамера и Гаусса следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 5 \\ -x + 4y - 5z = 1 \\ 6x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

7. Привести к строго треугольному виду и найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 9 & 8 & 0 \\ 5 & 10 & 11 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

8. Найти общее решение системы: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$ 9.

Примерные вопросы по защите типового расчёта №1 по разделу 2 «Матрицы и системы линейных уравнений»

1. Как определяются основные действия с матрицами: сложение, умножение, транспонирование и переносятся ли на них основные свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность?
2. Что такое определитель и каковы его основные свойства?
3. Что такое обратная матрица и как она вычисляется?.
4. Как решается система линейных алгебраических уравнений методами Крамера и с помощью обратной матрицы? Какие свойства системы обеспечивают применимость этих методов?
5. Что такое ранг матрицы и как он вычисляется?.
6. Как решается и исследуется система методом Гаусса, что утверждает теорема Кронеккера-Капелли?
7. Что такое фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений?

Примерные задачи для усвоения текущего материала и выполнения типового расчёта №2 по разделу 3 «Линейные пространства и операторы»

Для изучения количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка X_1, \dots, X_n объёмом n , имеющая данное статистическое распределение.

- 1). Является ли линейно независимой и образует ли базис система векторов в \mathbf{R}^4 :

$$a) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ если да, то разложить по этому базису вектор } \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

2). Доказать, что следующие подмножества \mathbf{R}^n являются подпространствами:

а) Множество столбцов в \mathbf{R}^n , у которых первая координата равна 0.

б) Множество верхнетреугольных матриц (нули ниже главной диагонали) в пространстве $\mathbf{M}_{n,n}$.

в) Множество многочленов $p(t) \in \mathbf{P}^n$, таких, что

в1) $p(0) = 0$;

в2) $p(1) = p(2) = 0$.

г) Для данной матрицы $A \in \mathbf{M}_{m,n}$ множество векторов $N = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = 0\}$.

д) Для данной матрицы $A \in \mathbf{M}_{m,n}$ множество векторов $R = \{Ax \in \mathbf{R}^m : x \in \mathbf{R}^n\}$.

3). Найти в \mathbf{R}^3 длины векторов $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, расстояние между этими векторами,

угол между ними.

4). Показать, что ортонормированная система векторов (не обязательно образующая базис) линейно независима.

5). а) Проверить, что $C[a,b]$ – пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ является евклидовым, если ввести в нём скалярное произведение следующим образом: для

функций $f(t)$ и $g(t)$ положим $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

б) Найти в $C[0,1]$ длины векторов $f(t) = t, g(t) = e^t$, расстояние между этими векторами, угол между ними.

6). Рассмотрим в пространстве \mathbf{R}^3 базис $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Применив к нему

процесс ортогонализации Шмидта, построить ортонормированный базис в \mathbf{R}^3 .

7). В пространстве $\mathbf{M}_{2,2}$ матриц размерности 2×2 рассмотрим операторы левого и правого умножения на данную матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $L_A X = AX$ и $R_A X = XA$. Приняв за

базис пространства $\mathbf{M}_{2,2}$ матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

найти матрицы операторов L_A и R_A .

8). Найти собственные значения и собственные векторы операторов, задаваемых следующими матрицами; определить размерность собственных подпространств; написать матрицы операторов в базисе из собственных векторов:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 11 & -1 & -4 \\ -1 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 14 \end{pmatrix}$.

9). Найти следы операторов из задачи 8).

10). Доказать тождество: $4\operatorname{Re}(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)$.

11) Показать, что $\|A_\alpha\| = \|P\| = \|S\| = 1$, где A_α – оператор поворота в \mathbf{R}^2 , P – оператор проецирования (какой-нибудь), S – оператор симметрии (какой-нибудь).

12). Найти норму диагонального оператора $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ равна:

$$\|D\| = \max\{|a_k| : k = 1, \dots, n\}.$$

13). Найти норму оператора, представленного матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{pmatrix}$.

Примерные вопросы по защите типового расчёта №2. по разделу 3 «Линейные пространства и операторы»

1. Что такое линейная независимость векторов и базис в \mathbf{R}^n ?
2. Что такое линейное пространство, привести примеры?
3. Что такое линейная независимость, базис, размерность, подпространство в произвольном линейном пространстве?

4. Каковы свойства скалярного произведения в вещественном и комплексном евклидовом пространстве? Чему равна норма вектора?
5. Написать неравенства Коши-Буняковского и Минковского.
6. Что такое ортонормированный базис, ортогонализация базиса, ортогональное дополнение?
7. Что такое линейный оператор? Как строится матрица оператора и как она преобразуется при переходе к новому базису?
8. Что такое собственные векторы и собственные значения оператора?
9. Что такое инвариант оператора и почему определитель, характеристический многочлен, след и спектр являются инвариантами?
10. Что такое норма оператора?
11. Что такое коммутатор двух операторов и каковы его свойства?
12. Что такое сопряжённый оператор и каковы свойства операции сопряжения?
13. Каковы экстремальные свойства собственных значений?
14. Что утверждает спектральная теорема для самосопряжённых операторов?
15. Что такое нормальный и унитарный операторы?
16. Как выглядит полярное разложение оператора?
17. Что такое среднее наблюдаемой величины в квантовой механике? Написать соотношение неопределённостей.

Задания для оценки сформированности компетенций

Проверяемая компетенция ОПК-1

Задания:

1. Какая пара векторов образует базис в пространстве \mathbf{R}^2 ?

а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. Какая размерность у пространства многочленов степени, не превосходящей 6?

а) 6

б) 5

в) 7

г) бесконечная

3. Чему равно скалярное произведение векторов $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

а) 9

б) -10

в) 11

г) -12

4. Есть два оператора поворота в двумерном пространстве: на 3° и 5° . Их произведение тоже является оператором поворота – на сколько градусов?

а) 8°

б) 15°

в) 2°

г) 4°

5. Чему равна норма самосопряжённого оператора в двумерном евклидовом пространстве, который в ортонормированном базисе представляется матрицей $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$?

а) 5

б) 6

в) 7

г) 8

Ключ к заданию для оценки сформированности компетенций

Шифр компетенции	ОПК-1				
№ вопроса	1	2	3	4	5
Правильный вариант ответа	б	в	г	а	г

Критерии оценивания:

ОПК-1:

0-2 правильных ответа – «неудовлетворительно»,

3 правильных ответа – «удовлетворительно»,

4 правильных ответа – «хорошо»,

5 правильных ответов – «отлично».

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности		
ОПК-1.1:	Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования	<p><i>Теоретические вопросы:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Комплексные числа и действия с ними. 2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. 3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня. 4. Основная теорема алгебры и разложение многочлена на множители. 5. Матрицы и действия с ними. 6. Определители и их свойства. 7. Обратная матрица. 8. Решение систем линейных алгебраических уравнений методами Крамера и обратной матрицы. 9. Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. 10. Ранг матрицы. Теорема Кронеккера-Капелли. 11. Линейная зависимость и базис в \mathbf{R}^n. 12. Линейное пространство, подпространство, базис, размерность. 13. Евклидово пространство, скалярное произведение, норма вектора, неравенства Коши-Буняковского и Минковского. 14. Ортогонализация. 15. Линейный оператор, матрица оператора, преобразование матрицы при переходе к новому базису. 16. Собственные векторы и собственные значения оператора. Инварианты. След. Спектр.

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
		<p>17. Сопряжённый оператор. Самосопряжённые операторы. Экстремальные свойства спектра самосопряжённого оператора.</p> <p>18. Спектральная теорема для самосопряжённого оператора. Функции от оператора. Квадратный корень.</p> <p>19. Нормальные и унитарные операторы. спектральная теорема. Полярное разложение.</p> <p>20. Квантовомеханические приложения. Соотношение неопределённостей.</p> <p><i>Практические задания:</i></p> <p>1. Вычислить: $(2 + 3i)^2 + (1 - 4i)^3$.</p> <p>2. Найти степени комплексных чисел, применяя формулу Муавра: а) $(1 + i)^7$, б) $(\sqrt{3} - i)^8$.</p> <p>3. Найти корень из комплексного числа: $\sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i}$</p> <p>4. Разложить многочлен на множители: $z^8 - 2z^4 + 1$</p> <p>5. Вычислить $AB - 3C + 2D^T$,</p> <p>где $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,</p> <p>$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.</p> <p>6. Найти матрицу, обратную к, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, 7. Решить методами обратной матрицы, Крамера и Гаусса следующую систему:</p> $\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 5 \\ -x + 4y - 5z = 1 \\ 6x + y + 4z = -2 \end{cases}$ <p>8. Найти общее решение системы:</p> $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$ <p>9. Является ли линейно независимой и образует ли базис</p>

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
		<p>система векторов в \mathbf{R}^4: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ если да, то</p> <p>разложить по этому базису вектор $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$.</p> <p>10. Найти в \mathbf{R}^3 длины векторов $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, расстояние между этими векторами, угол между ними.</p> <p>11. В пространстве $\mathbf{M}_{2,2}$ матриц размерности 2×2 рассмотрим операторы левого и правого умножения на данную матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $L_A X = AX$ и $R_A X = XA$. Приняв за базис пространства $\mathbf{M}_{2,2}$ матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, найти матрицы операторов L_A и R_A.</p> <p>12. Найти собственные значения и собственные векторы операторов, задаваемых следующими матрицами; определить размерность собственных подпространств; написать матрицы операторов в базисе из собственных векторов: $\begin{pmatrix} 11 & -1 & -4 \\ -1 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 14 \end{pmatrix}$</p> <p>13. Найти норму оператора, представленного матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{pmatrix}$.</p>
ОПК-1.2	Решает профессиональные задачи с применением методов теоретического и экспериментального исследования	14. Написать полярное разложение оператора, заданного в \mathbf{R}^2 матрицей: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$