



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



УТВЕРЖДАЮ  
Директор ИЕиС  
Ю.В.Сомова

03.02.2025 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

***ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА***

Направление подготовки (специальность)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация) программы  
Математическое моделирование и цифровые двойники

Уровень высшего образования - магистратура

Форма обучения  
очная

|                     |                                          |
|---------------------|------------------------------------------|
| Институт/ факультет | Институт естествознания и стандартизации |
| Кафедра             | Прикладной математики и информатики      |
| Курс                | 2                                        |
| Семестр             | 3                                        |

Магнитогорск  
2025 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - магистратура по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 13)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

14.01.2025, протокол № 5

Зав. кафедрой  Ю.А. Извеков

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИИИС  
03.02.2025 г. протокол № 3

Председатель  Ю.В. Сомова

Рабочая программа составлена:  
профессор кафедры ПМИИ, д-р физ.-мат. наук  С.И. Кадченко

Рецензент:

зав. кафедрой Физики, канд. физ.-мат. наук  Д.М. Долгушин

### Лист актуализации рабочей программы

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2026 - 2027 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2027 - 2028 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

### **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

Подготовка студентов по курсу «Численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода» в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» магистерской программы. Данный курс направлен на формирование математических методов, алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода

### **2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина Численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода входит в часть учебного плана формируемую участниками образовательных отношений образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Вариационные методы математической физики

Современные численные методы математической физики

Спектральная теория дифференциальных операторов

Обратные задачи спектрального анализа

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Производственная - преддипломная практика

Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

Производственная - научно-исследовательская работа

### **3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения**

В результате освоения дисциплины (модуля) «Численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

| Код индикатора | Индикатор достижения компетенции                                                                                             |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК-3          | Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности |
| ОПК-3.1        | Разрабатывает математические модели и производит их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности         |
| ОПК-3.2        | Составляет и оформляет отчеты, выполняет требования нормоконтроля по результатам профессиональной деятельности               |
| ОПК-3.3        | Выполняет обзоры научной информации, подготавливает публикации по теме профессиональной деятельности                         |

#### 4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц 72 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 38 акад. часов;
- аудиторная – 36 акад. часов;
- внеаудиторная – 2 акад. часов
- самостоятельная работа – 34 акад. часов;

Форма аттестации - зачет

| Раздел/ тема дисциплины                                                               | Семестр | Аудиторная контактная работа (в акад. часах) |           |             | Самостоятельная работа студента | Вид самостоятельной работы                                                                                                         | Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | Код компетенции           |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------|-----------|-------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------|
|                                                                                       |         | Лек.                                         | лаб. зан. | практ. зан. |                                 |                                                                                                                                    |                                                                 |                           |
| 1. Интегральные уравнения первого и второго рода. Корректность по Адамару и Тихонову. |         |                                              |           |             |                                 |                                                                                                                                    |                                                                 |                           |
| 1.1 Основные определения и понятия. Понятие корректности                              | 3       | 1                                            |           |             | 3                               | Работа над учебным материалом с основной и дополнительной литературой.                                                             | Устный опрос.                                                   | ОПК-3.1                   |
| 1.2 Уравнение Фредгольма первого рода как некорректно поставленная задача             |         | 2                                            |           |             | 3                               | Работа над учебным материалом с основной и дополнительной литературой.                                                             | Устный опрос.                                                   | ОПК-3.2, ОПК-3.3, ОПК-3.1 |
| Итого по разделу                                                                      |         | 3                                            |           |             | 6                               |                                                                                                                                    |                                                                 |                           |
| 2. Методы регуляризации некорректно поставленных задач                                |         |                                              |           |             |                                 |                                                                                                                                    |                                                                 |                           |
| 2.1 Метод регуляризации Тихонова                                                      | 3       | 4                                            | 4,5/2И    |             | 8                               | Работа над учебным материалом с основной и дополнительной литературой. Конспектирование текста учебника для освоения новых знаний. | Лабораторная работа.                                            | ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3 |

|                                                   |  |    |        |  |    |                                                                                                                                        |                      |                           |
|---------------------------------------------------|--|----|--------|--|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------|
| 2.2 Метод итеративной регуляризации Фридмана      |  | 3  | 4,5/2И |  | 6  | Работа над учебным материалом с основной и дополнительной литературой. Конспектирование текста учебника для овладения новыми знаниями. | Лабораторная работа. | ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3 |
| 2.3 Метод регуляризации Лаврентьева               |  | 4  | 4,5/2И |  | 7  | Работа над учебным материалом с основной и дополнительной литературой. Конспектирование текста учебника для изучения новых знаний.     | Лабораторная работа. | ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3 |
| 2.4 Метод регуляризации генератор РА Бакушинского |  | 4  | 4,5/2И |  | 7  | Работа над учебным материалом с основной и дополнительной литературой. Конспектирование текста учебника для овладения новыми знаниями. | Лабораторная работа. | ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3 |
| Итого по разделу                                  |  | 15 | 18/8И  |  | 29 |                                                                                                                                        |                      |                           |
| Итого за семестр                                  |  | 18 | 18/8И  |  | 34 |                                                                                                                                        | Зачёт                |                           |
| Итого по дисциплине                               |  | 18 | 18/8И  |  | 34 |                                                                                                                                        | Зачёт                |                           |

## **5 Образовательные технологии**

В ходе изучения дисциплины рекомендуется использовать образовательные и информационные технологии:

1. Традиционные технологии обучения, предполагающие передачу информации в готовом виде, формирование учебных умений по образцу лабораторных занятий.

Использование традиционных технологий обеспечивает ориентирование студента в потоке информации, связанной с различными подходами к определению сущности, содержания, методов, форм развития и саморазвития личности; самоопределение в выборе оптимального пути и способов личностно-профессионального развития; систематизацию знаний, полученных студентами в процессе аудиторной и самостоятельной работы. Лабораторные занятия обеспечивают развитие и закрепление умений и навыков определения целей и задач саморазвития, а также принятия наиболее эффективных решений по их реализации. Лабораторные занятия проводятся в компьютерных классах вычислительного центра ФГБОУ ВО «МГТУ».

В ходе проведения лабораторных занятий предусматривается использование средств вычислительной техники при выполнении индивидуальных заданий и тестирования.

2. Интерактивные формы обучения, предполагающие организацию обучения как продуктивной творческой деятельности в режиме взаимодействия студентов друг с другом и с преподавателем

Использование интерактивных образовательных технологий способствует повышению интереса и мотивации учащихся, активизации мыслительной деятельности и творческого потенциала студентов, делает более эффективным усвоение материала, позволяет индивидуализировать обучение и ввести экстренную коррекцию знаний.

При проведении лабораторных занятий используются групповая работа, технология коллективной творческой деятельности, технология сотрудничества, ролевая игра, обсуждение проблемы в форме дискуссии, дебаты, круглый стол. Данные технологии обеспечивают высокий уровень усвоения студентами знаний, эффективное и успешное овладение умениями и навыками в предметной области, формируют познавательную потребность и необходимость дальнейшего самообразования, позволяют активизировать исследовательскую деятельность, обеспечивают эффективный контроль усвоения знаний.

3. Возможности образовательного портала ФГБОУ ВО «МГТУ» для предоставления студентам графика самостоятельной работы, расписания консультаций, заданий для самостоятельного выполнения и рекомендуемых тем для самостоятельного изучения.

Используемые образовательные технологии позволяют активно применять в учебном процессе интерактивные формы проведения занятий (компьютерная симуляция, разбор конкретных ситуаций), что способствует формированию и развитию профессиональных навыков обучающихся. Применяемые в процессе изучения дисциплины поисковый и исследовательский методы в полной мере соответствуют требованиям ФГОС 3++ по реализации компетентностного подхода.

## **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Представлено в приложении 1.

## **7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

Представлены в приложении 2.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

**а) Основная литература:**

Численные методы : учебник и практикум для академического бакалавриата / У. Г. Пирумов [и др.] ; под редакцией У. Г. Пирумова. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 421 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-03141-6. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/431961>.

Привалов, И. И. Интегральные уравнения : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 4-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 253 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01552-2. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451194>.

**б) Дополнительная литература:**

Королев, А. В. Дифференциальные и разностные уравнения : учебник и практикум для вузов / А. В. Королев. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9896-2. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451251>

Васильева А.Б. Интегральные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 156 с.

Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наукова Думка, 1986. – 542.

**в) Методические указания:**

Пименов, В. Г. Численные методы в 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие для вузов / В. Г. Пименов, А. Б. Ложников. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 107 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10891-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/454053>.

**г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:****Программное обеспечение**

| Наименование ПО                           | № договора                   | Срок действия лицензии |
|-------------------------------------------|------------------------------|------------------------|
| MS Office 2007 Professional               | № 135 от 17.09.2007          | бессрочно              |
| 7Zip                                      | свободно распространяемое ПО | бессрочно              |
| MathCAD v.15 Education University Edition | Д-1662-13 от 22.11.2013      | бессрочно              |
| NotePad++                                 | свободно распространяемое ПО | бессрочно              |
| MS Visual Studio Code                     | свободно распространяемое ПО | бессрочно              |
| Браузер Yandex                            | свободно распространяемое ПО | бессрочно              |

|                            |                              |           |
|----------------------------|------------------------------|-----------|
| Браузер Mozilla Firefox    | свободно распространяемое ПО | бессрочно |
| FAR Manager                | свободно распространяемое    | бессрочно |
| Maple 14 Classroom License | К-113-11 от 11.04.2011       | бессрочно |

### **Профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

| Название курса                                                                                   | Ссылка                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) | URL: <a href="https://elibrary.ru/project_risc.asp">https://elibrary.ru/project_risc.asp</a>        |
| Электронная база периодических изданий East View Information Services, ООО «ИВИС»                | <a href="https://dlib.eastview.com/">https://dlib.eastview.com/</a>                                 |
| Поисковая система Академия Google (Google Scholar)                                               | URL: <a href="https://scholar.google.ru/">https://scholar.google.ru/</a>                            |
| Российская Государственная библиотека. Каталоги                                                  | <a href="https://www.rsl.ru/ru/4readers/catalogues/">https://www.rsl.ru/ru/4readers/catalogues/</a> |
| Электронные ресурсы библиотеки МГТУ им. Г.И. Носова                                              | <a href="http://magtu.ru:8085/marcweb2/Default.asp">http://magtu.ru:8085/marcweb2/Default.asp</a>   |

### **9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Лекционная аудитория: Мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации

Компьютерный класс : Персональные компьютеры с пакетом MS Office, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета

Аудитории для самостоятельной работы: компьютерные классы; читальные залы библиотеки: Персональные компьютеры с пакетом MS Office, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета

## Приложение 1. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

### Примерные задания для самостоятельной работы

Самостоятельная работа аспирантов связана с написанием программ, в среде пакета Maple, позволяющие решать следующие задачи:

1. Используя метод регуляризации А.Н. Тихонова найти численное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-1}^1 K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

где  $K(x, s) = \frac{1}{\pi[1 + (x - s)^2]}$ . Для нахождения функции  $f(x)$  и проверки

полученного решения положить  $y(x) = (1 - x^2)^2$ .

2. Найти приближенное решение

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [c, b]$$

при следующих значениях параметров:

- $K(x, s) = \sin^2(xs)$ ,  $y = s^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 2$ ,
- $K(x, s) = \frac{1}{1 + (x + s)^2}$ ,  $y = s^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$ ,
- $K(x, s) = e^{xs}$ ,  $y = 1 + s^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = -1$ ,  $d = 1$ .

### Перечень вопросов для подготовки к зачету

1. Понятие корректности задачи по Адамару и Тихонову.
2. Уравнение Фредгольма первого рода как некорректно поставленная задача.
3. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода как некорректно поставленная задача.
4. Обратная задача теплопроводности.
5. Задача об аналитическом продолжении функции.
6. Метод регуляризации Тихонова.
7. Метод итерационной регуляризации Фридмана.
8. Метод итерационной регуляризации Лаврентьева.
9. Метод регуляризации Лаврентьева.
10. Метод регуляризации и генератор Бакушинского.

## Приложение 2. Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:

| Код индикатора                                                                                                                             | Индикатор достижения компетенции                                                                                     | Оценочные средства                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ОПК-3: Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности</b> |                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>ОПК-3.1</b>                                                                                                                             | Разрабатывает математические модели и производит их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности | <p>1. Используя метод регуляризации А.Н. Тихонова найти численное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода</p> $\int_{-1}^1 K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [-1, 1],$ $K(x, s) = \frac{1}{\pi[1 + (x - s)^2]}.$ <p>где <math>f(x) = 1 - x^2</math>. Для нахождения функции <math>f(x)</math> и проверки полученного решения положить <math>y(x) = (1 - x^2)^2</math>.</p> <p>2. Найти приближенное решение</p> $\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [c, b]$ <p>при следующих значениях параметров:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>K(x, s) = \sin^2(xs)</math>, <math>y = s^2</math>,<br/><math>a = 0</math>, <math>b = 1</math>, <math>c = 0</math>, <math>d = 2</math>,</li> <li>• <math>K(x, s) = \frac{1}{1 + (x + s)^2}</math>, <math>y = s^2</math>,<br/><math>a = 0</math>, <math>b = 1</math>, <math>c = 0</math>, <math>d = 1</math>,</li> <li>• <math>K(x, s) = e^{xs}</math>, <math>y = 1 + s^2</math>,<br/><math>a = 0</math>, <math>b = 1</math>, <math>c = -1</math>, <math>d = 1</math>.</li> </ul> |
| <b>ОПК-3.2</b>                                                                                                                             | Составляет и оформляет отчеты, выполняет требования нормоконтроля по результатам профессиональной деятельности       | <p>Написать рефераты ответов на вопросы:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Понятие корректности задачи по Адамару и Тихонову.</li> <li>2. Уравнение Фредгольма первого рода как некорректно поставленная задача.</li> <li>3. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода как некорректно поставленная задача.</li> <li>4. Обратная задача теплопроводности.</li> </ol>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

|                |                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                |                                                                                                      | 5. Задача об аналитическом продолжении функции.<br>6. Метод регуляризации Тихонова.<br>7. Метод итерационной регуляризации Фридмана.<br>8. Метод итерационной регуляризации Лаврентьева.<br>9. Метод регуляризации Лаврентьева.<br>10. Метод регуляризации и генератор Бакушинского.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>ОПК-3.3</b> | Выполняет обзоры научной информации, подготавливает публикации по теме профессиональной деятельности | Выполнить обзоры научной литературы по следующим вопросам:<br>1. Понятие корректности задачи по Адамару и Тихонову.<br>2. Уравнение Фредгольма первого рода как некорректно поставленная задача.<br>3. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода как некорректно поставленная задача.<br>4. Обратная задача теплопроводности.<br>5. Задача об аналитическом продолжении функции.<br>6. Метод регуляризации Тихонова.<br>7. Метод итерационной регуляризации Фридмана.<br>8. Метод итерационной регуляризации Лаврентьева.<br>9. Метод регуляризации Лаврентьева.<br>10. Метод регуляризации и генератор Бакушинского. |

б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:

Аттестация по дисциплине включает ответы на теоретические вопросы и выполнение практических заданий, выявляющих степень сформированности компетенций, проводится в форме зачета.

– на оценку баллов – обучающийся демонстрирует высокий уровень сформированности компетенций, всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, свободно выполняет практические задания, свободно оперирует знаниями, умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности.

– на оценку 4 балла – обучающийся демонстрирует средний уровень сформированности компетенций: основные знания, умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.

– на оценку 3 балла – обучающийся демонстрирует пороговый уровень сформированности компетенций: в ходе контрольных мероприятий допускаются ошибки, проявляется отсутствие отдельных знаний, умений, навыков, обучающийся испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.

– на оценку «не зачтено» (1-2 балл) – обучающийся не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.

Показатели и критерии оценивания зачета:

– оценка «зачтено» ставится при наборе учащимся от 3 до 5 баллов

– на оценку «не зачтено» (1-2 балла) – обучающийся не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач