Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Махновский
«23» марта 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
МАТЕМАТИКА

для студентов специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий
базовой подготовки

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО:
Предметной комиссией
Математических и
естественнонаучных дисциплин
Председатель Е.С. Корытникова
Протокол №7 от 14.03.2017

Методической комиссией МпК
Протокол №4 от 23.03.2017 г.

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК
Антропова Наталья Владимировна

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий (базовой подготовки) и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующего федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности по математическим и общепрофессиональным дисциплинам.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- находить производную элементарной функции;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять погрешности результатов действия над приближенными числами;
- решать простейшие уравнения и системы уравнений;

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 2.4. Участвовать в проектировании силового и осветительного электрооборудования.

ПК 3.3. Участвовать в проектировании электрических сетей.

ПК 4.2. Контролировать качество выполнения электромонтажных работ.

ПК 4.3. Участвовать в расчетах основных технико-экономических показателей

А также формированию общих компетенций:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление.

Практическое занятие № 1

Дифференцирование сложных функций.

Цель работы: Научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;

- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$

2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$

3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$

4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$

5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1-4x^2)^9 \cdot (1-4x^2)' = 10\,(1-4x^2)^9(-8x)$$
$$= -80x(1-4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x)$$
$$\cdot (2x)' = \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(a^u)' = a^u lna \cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\left(3x+5x^2\right)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)\,ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x)\log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)\,ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

/

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$u = 1 - e^{2x}$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})'$$
$$= -\frac{1}{e^{x}} \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} (-2e^{x})$$

Форма представления результата: выполненная работа.
Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление.

Практическое занятие № 2
Применение производной к исследованию функций.

Цель работы: Научиться исследовать функции с помощью производной и строить графики.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-определять промежутки монотонности функций с помощью производной;
- находить экстремумы функции;
-проводить исследование функции по общей схеме;
-строить графики функций, используя проведенное исследование.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:
Исследовать функцию и построить ее график:
1) $f(x) = x^3 - 12x$;
2) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$.

Краткие теоретические сведения:
Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:
1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки.
3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
4) Записать интервалы, на которых функция возрастает $f'(x) > 0$ и убывает $f'(x) < 0$.
5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:
1) Найти вторую производную.
2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
4) Если $f''(x) > 0$, то график выпуклый вниз. Если $f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх.
5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите функцию.
2. Используя общую схему, исследуйте функцию.
3. По результатам исследования постройте график функции

Ход работы:

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это не вызывает затруднения) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции.
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.
9. Построить график функции.

Форма представления результата:

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 3
Применение производной к решению практических задач.

Цель работы: Научиться применять производную функции при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке;

-решать задачи с практическим содержанием на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке :а) $[-1;1]$;б) $[0;3]$.
2. Имеется проволока длиной a метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

Краткие теоретические сведения:

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.

Ход работы:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на промежутке :а) $[-2;-0{,}5]$;б) $[1;3]$.

Решение. Находим критические точки функции.

$$f'(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 4)' = -x^2 - 6x = -6x(x + 1);$$

$f'(x) = 0$; $-6x(x + 1)=0$; $x = 0$ и $x = -1$. получили две критические точки: $x = 0$ и $x = -1$.

a) В промежутке $[-2; -0{,}5]$ лежит одна из критических точек:x= -1.

Так как $f(-2) = 8, f(-1) = 3, f(-0{,}5) = 3{,}5$, то наименьшее значение функция $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ достигает в точке $x = -1$ и равно 3, а наибольшее - в точке $x = -2$ и равно 8. Кратко это можно записать так: $\min_{[-2;-0{,}5]} f(x) = f(-1) = 3. \max_{[-2;-0{,}5]} f(x) = f(-2) = 8.$

б) Отрезку $[1; 3]$ не принадлежит ни одна из критических точек, поэтому найдём значения функции на концах отрезка:

$f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = -1. [1; 3]$

$f(3) = -2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = -77.$. Кратко это можно записать так: $\min_{[\ \ 1;3]} f(x) = f(3) = -7;. \max_{[1;3]} f(x) = f(1) = -1.$

2. Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найдите эти слагаемые.

Решение.

Пусть заданное число представлено в виде суммы двух слагаемых x и y, т.е.86= $x + y$. Выразим второе слагаемое через *x:*

y=86-x.

Запишем произведение этих чисел в виде функции от *x:*

$f(x) = x \cdot (86 - x)$ Найдём значение x, при котором функция $f(x) = x \cdot (86 - x)$ достигает максимума. Найдём производную $f'(x)$ и приравняем её нулю. $f'(x)$ $=(x \cdot (86 - x))' = (86x - x^2)' = 86 - 2x = 2(43 - x),$

$2(43 - x) = 0, x = 43.$

Определим второе слагаемое: $y = 86 - x = 86 - 43 = 43.$

Ответ: $x = 43$; $y = 43.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности	Качественная оценка индивидуальных

(правильных ответов)	образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1. 2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 4
Нахождение неопределённых интегралов различными методами

Цель работы: Научиться находить неопределённые интегралы различными методами

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить неопределённые интегралы непосредственно, используя формулы табличных интегралов;

- находить неопределённые интегралы путём введения новой переменной;

- - находить неопределённые интегралы по частям..

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица интегралов и конспекты лекций.

Задание

1. $\int(2x^2-\sqrt{x})dx$;
2. $\int\frac{cos^3x-1}{cos^2x}dx$;
3. $\int e^{5x-1}dx;$
4. $\int cos\frac{x}{3}dx$;
5. $\int\frac{3x}{\sqrt{x^2+3}}dx$;
6. $\int x\cdot cosxdx.$

Краткие теоретические сведения: Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для заданной функции $y = f(x)$ на отрезке a ε x ε b, если в каждой точке этого отрезка ее производная равна $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)\cdot$

Каждая непрерывная функция имеет бесконечное множество первообразных функций, отличающихся друг от друга на постоянную величину.

Общее выражение $F(x)+C$ для всех первообразных функций от данной

функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается:

$$\int f(x)dx,$$

где $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным
выражением.

При вычислении неопределенных интегралов необходимо использовать как стандартную таблицу, так и различные приемы упрощения подынтегральных выражений, позволяющих свести задачу к табличным интегралам привести к такому виду, который позволит воспользоваться справочными таблицами.

Порядок выполнения работы:

Внимательно изучите подынтегральную функцию и .используя конспекты лекций, определите способ интегрирования.

Ход работы:.1. Вычислить $\int (5\sqrt{x} - 4x)\, dx \cdot$

В данном случае – приводим к табличному виду

$$\left(\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \right):$$

$$\int (5\sqrt{x} - 4x) dx = 5\int x^{1/2} dx - 4\int x dx =$$

$$= 5\frac{x^{0,5+1}}{0,5+1} - 4\frac{x^2}{2} + C = \frac{10}{3} x^{1,5} - 2x^2 + C \cdot$$

2. Вычислить $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx \cdot$

Здесь для приведения к табличному виду

$$\left(\int \sin x dx = -\cos x + C; \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \right)$$

преобразуем подынтегральное выражение к сумме двух слагаемых:

$$\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx = \int \left(\sin x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = -\cos x - \operatorname{ctg} x + C \cdot$$

Во многих случаях для приведения к табличному виду можно использовать замену переменной (подстановку).

3. Вычислить интеграл $\int 4^{2x-1} dx \cdot$

Здесь для применения табличной формулы $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ необходимо преобразовать показатель степени $2x - 1$. Введем подстановку: $u = 2x - 1$, откуда $du = 2dx$ и $dx = \dfrac{1}{2}du$. Тогда:

$$\int 4^{2x-1}dx = \left\rangle \begin{array}{l} u = 2x-1 \\ du = 2dx \\ dx = 0{,}5du \end{array} \right\langle = \int 4^u \cdot 0{,}5du = 0{,}5\int 4^u du = 0{,}5\frac{4^u}{\ln 4} =$$

$$= 0{,}5\frac{4^{2x-1}}{\ln 4} + C.$$

4. Вычислить интеграл $\int \sin 5x dx$.

$$\int \sin 5x dx = \left\rangle \begin{array}{l} u = 5x \\ du = 5dx \\ dx = \dfrac{1}{5}du \end{array} \right\langle = \frac{1}{5}\int \sin u du = -\frac{1}{5}\cos u = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$$

5 Вычислить интеграл $\int \dfrac{xdx}{x^2 - 8}$.

$$\int \frac{xdx}{x^2-8} = \left\rangle \begin{array}{l} u = x^2 - 8 \\ du = 2xdx \\ xdx = \dfrac{1}{2}du \end{array} \right\langle = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(x^2-8) + C.$$

(Интеграл $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + C$ – табличный.)

6. Вычислить интеграл $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}} = \left\rangle \begin{array}{l} u = 5 - x^2 \\ du = -2xdx \\ xdx = -\dfrac{1}{2}du \end{array} \right\langle = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{3}\int u^{-1/2}du =$$

$$= -u^{1/2} = \sqrt{5 - x^2} + C.$$

7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(8-3x)^2}$.

$$\int \frac{dx}{(8-3x)^2} = \left\rangle \begin{array}{l} u = 8 - 3x \\ du = -3dx \\ dx = -\frac{1}{3}du \end{array} \right\langle = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3}\int u^{-2}du =$$

$$= \frac{1}{3u} = \frac{1}{3(8-3x)} + C.$$

8. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left\rangle \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{array} \right\langle = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

9. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{8x^2 + 3}$.

Приведем интеграл к табличной формуле

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 3} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{8}} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{8}}} + C = 1{,}63\operatorname{arctg}1{,}63x + C.$$

10. Вычислить интеграл $\int x\cos x dx$.

Интегралы такого типа вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu \cdot$

$$\int x\cos xdx = \left\rangle \begin{array}{lll} u = x & \to & du = dx \\ dv = \cos xdx & \to & v = \sin x \end{array} \right\langle = x\sin x - \int \sin xdx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

9.11. Вычислить интеграл $\int x^2 \ln xdx \cdot$

$$\int x^2 \ln xdx = \left\rangle \begin{array}{lll} u = \ln x & \to & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx & \to & v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right\langle = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} d$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C \cdot$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 5
Вычисление определённых интегралов

Цель работы: Повторить определение определённого интеграла, его свойства , методы нахождения определённого интеграла.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить определённый интеграл непосредственно;

- находить определённый интеграл методом подстановки.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. $\int_2^4 (x^3 - 3x)dx$.

2. $\int_0^1 (2x + e^x)dx$

3. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

Краткие теоретические сведения :гарантируются конспектом лекций.

Порядок выполнения работы:

1. Найти первообразную подынтегральной функции.
2. Воспользоваться формулой Ньютона- Лейбница.
3. В случае непосредственного интегрирования найти приращение первообразной.
4. В случае введения новой переменной величины найти значения верхнего и нижнего пределов интегрирования и после этого найти интеграл.

Ход работы:

1 Вычислить интеграл $\int_2^4 (x^2 + 3x)dx$.

Первообразная: $\int (x^2 + 3x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2$.

Отметим, что произвольную константу C можно здесь не записывать, так как она в следующей операции уничтожается.

По формуле Ньютона–Лейбница:

$$\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\right|_2^4=\left(\frac{4^3}{3}+\frac{3}{2}4^2\right)-\left(\frac{2^3}{3}+\frac{3}{2}2^2\right)=\frac{110}{3}\approx 36{,}67\,.$$

Вычисление значения интеграла обычно принято записывать цепочкой,
без выделения первообразной и формулы Ньютона–Лейбница.

2 Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (x+e^x)dx$.

$$\int\limits_0^1 (x+e^x)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+e^x\right)\right|_0^1=\left(\frac{1^2}{2}+e^1\right)-(0+e^0)=$$

$$=0{,}5+e-1=0{,}5+e\approx -0{,}5+2{,}718=2{,}218\,.$$

3. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

$$\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}=\left\rangle\begin{matrix}u=3x+4\\ du=3dx\\ dx=\frac{1}{3}du\end{matrix}\right\langle=\left.\left(\frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt{u}}\right)\right|_{-1}^{7}=\left.\left(\frac{2}{3}u^{1/2}\right)\right|_{-1}^{7}=$$

$$=\left.\left(\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\right)\right|_{-1}^{7}=\frac{2}{3}\sqrt{3\cdot 7+4}-\frac{2}{3}\sqrt{3\cdot(-1)+4}=\frac{8}{3}\,.$$

Для сокращения преобразований при замене переменной удобно вновь вычислять верхний и нижний пределы. Это позволяет избежать обратной замены на исходную переменную в полученной первообразной и упрощает вычисления. Так, для данного примера можно записать:

$$\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}=\left\rangle\begin{aligned}&u=3x+4\\&du=3dx\\&dx=\frac{1}{3}du\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&\alpha=3\cdot(-1)+4=1\\&\text{(нижний предел)}\\&\beta=3\cdot7+4=25\\&\text{(верхний предел)}\end{aligned}\right\langle=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{3}\int_{1}^{25}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{2}{3}u^{1/2}\Big|_{1}^{25}=\frac{2}{3}(\sqrt{25}-\sqrt{1})=\frac{2}{3}(5-1)=\frac{8}{3}.$$

Мы получили тот же результат, без обратного перехода к радикалу $\sqrt{3x+4}$.

4. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{3} x\sqrt{1+x}dx$.

$$\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}dx=\left\langle\begin{aligned}&u=\sqrt{1+x}\\&u^2=1+x\\&x=u^2-1\\&dx=2udu\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&\alpha=\sqrt{1+0}=1\\&\beta=\sqrt{1+3}=2\end{aligned}\right\rangle=\int_{1}^{2}(u^2-1)u\cdot2udu=$$

$$=2\int_{1}^{2}(u^4-u^2)du=2\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{2}=2\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}\right)-2\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}\right)=7\frac{11}{15}.$$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/2} x\sin xdx$.

При интегрировании по частям рекомендуется сначала полностью определить первообразную, а затем применить формулу Ньютона–Лейбница.

$$\int_{0}^{\pi/2} x\sin xdx=\left\rangle\begin{aligned}&u=x &&\Rightarrow &&du=dx\\&dv=\sin xdx &&\Rightarrow &&v=-\cos x\end{aligned}\right\langle=$$

$$=(-x\cos x+\int\cos xdx)\Big|_{0}^{\pi/2}=(-x\cos x+\sin x)\Big|_{0}^{\pi/2}=$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - (0 + \sin 0) = 1.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 6
Интегрирование различными методами.

Цель работы: Рассмотреть различные способы интегрирования функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные и определенные интегралы методом подстановки;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите интегралы

1) $\int 3^{4x^2} x dx$

2) $\int_2^4 \frac{3x dx}{(x^2-1)^3}$

3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x \cdot cosx dx$

4) $\int (x^2 + 5x + 7) lnx \cdot dx$

5) $\int (x^2 + 4x + 3) e^{2x} dx$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой

переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернуться к старой переменной.

4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *U*и *dV*. Затем, после нахождения *dU*и *V*,использовать формулу интегрирования по частям.

- \- Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где *P*(*x*)- многочлен, *k*-число. Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за *dV*.
- Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$. Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за *U*.
- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx$, $\int e^{ax}cosbxdx$, где *a*и *b*числа. За *U* можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1)$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1 - x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\frac{dt}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{15dt}{-3t^4}$$

$$= -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C$$

$$= \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

2) $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} == \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{bmatrix}$$

=

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt|_0^1 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^3x} = \begin{bmatrix} cosx = t \\ dcosx = dt \\ -sinxdx = dt \\ sinxdx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = cos0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} t_B = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5}$$

$$= \frac{1}{2t^2}|_1^{0,5} = \frac{1}{2\cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

4) $\int (x^3 - 4x)lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx,\ dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right)dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

5) $\int (x^2 - 2x)\cos 4x\, dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x,\ dV = cos4xdx$.

$$dU = (2x - 2)dx, \qquad V = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x$$

$$\int (x^2 - 2x)\cos 4x\, dx = (x^2 - 2x)\frac{1}{4}sin4x - \int \frac{1}{4}sin4x(2x - 2)dx =$$

$$(x^2 - 2x)\frac{1}{4}sin4x - \frac{1}{4}\int sin4x(2x - 2)dx = \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}\int sin4x(x - 1)dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x - 1,\ dV = sin4xdx$.

$$dU = dx, \qquad V = \int sin4xdx = -\frac{1}{4}cos4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}((x - 1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int -\frac{1}{4}cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}((x - 1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) + \frac{1}{4}\int cos4xdx =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x + \frac{1}{8}((x - 1)(cos4x) - \frac{1}{8}\int cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x+\frac{1}{8}((x-1)(cos4x)-\frac{1}{32}sin4x+C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 7

Применение определенного интеграла к решению прикладных задач.

Цель работы: Научиться применять определенный интеграл к вычислению площадей плоских фигур.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- вычислять площади криволинейных трапеций;
-вычислять площади плоских фигур.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники

Задание:
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = -x^2 + 7x$, $y = 0$.
2) $y = x^2$ и $y = -x^2 + 2$

Порядок выполнения работы:

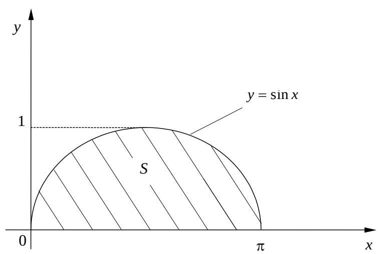
1. Постройте фигуру по заданным уравнениям.
2. Определите, является ли фигура криволинейной трапецией.
3. Вычислите площадь фигуры, используя геометрический смысл определенного интеграла.

Ход работы:

Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y=\sin x$, $x=\pi$, $x=0$, $y=0$.

Решение. Изобразим в координатной плоскости криволинейную трапецию.



Отсюда:

$$S = \left| \int_0^{\pi} \sin x dx \right| .$$

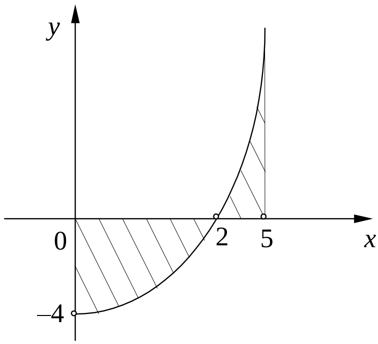
$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) = 2 .$$

Следовательно, $S = |2| = 2$ кв. ед.

2 .*y=x*^{2}*-4; x=0; x=5; y-=0.*

Изобразим в координатной плоскости криволинейную трапецию.



Эскиз показывает, что линия $y = x^2 - 4$ пересекает ось 0*x*. При вычислении площади разобьем интеграл на два слагаемых, для того чтобы

не допустить алгебраического сложения величин различных знаков. Найдем сначала точку пересечения функции с осью 0*x*:

$$x^2 - 4 = 0 \; . \quad x_1=2 \; ; x_2=-2.$$

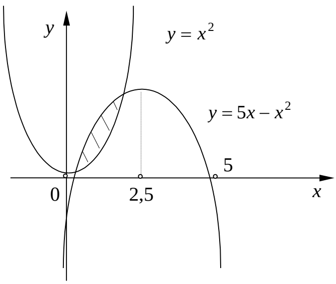
Значение $x_2=-2$. (отбрасываем, так как оно не входит в интервал $0 \le x \le 5$).

Таким образом,

$$S = \left|\int_0^2 (x^2 - 4)dx\right| + \left|\int_2^5 (x^2 - 4)dx\right| = \ldots = \left|-\frac{16}{3}\right| + \left|\frac{81}{3}\right| = \frac{97}{3} \text{ кв. ед.}$$

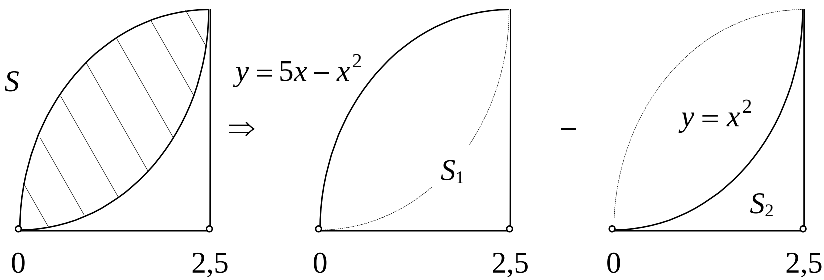
3) Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = 5x - x^2$ и $y = x^2$ .....

.



Точки пересечения линий определятся из уравнения $x^2 = 5x - x^2$,
т.е. $x_1 = 0; \; x_2 = 2{,}5$.

Для решения задач со сложным очертанием области удобно использовать графическое разложение на сумму простейших фигур. Так, в нашем случае:



Следовательно, чтобы получить искомую площадь *S*, достаточно определить площадь S_1 для функции $y = 5x - x^2$ и вычесть из нее площадь S_2 для функции $y = x^2$, т.е.

$$S = S_1 - S_2 = \left|\int_0^{2,5}(5x - x^2)dx\right| - \left|\int_0^{2,5}x^2dx\right| = \ldots = |10{,}42| - |5{,}21| = 5{,}21$$

кв.ед.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 8

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения I порядка с разделяющими переменными. Научиться находить общие и частные решения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разделять переменные для решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными;
- находить общее решение дифференциального уравнения;
- выделять из общего решения частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решать задачу Коши).

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$

б) $(y-1)^2 dx + (1-x^2)dy = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$dy = (3x^2 - 2x)\,dx$, *если y=4 при x=*

Порядок выполнения работы:

1) Привести данное уравнение к уравнению с разделяющими переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:

а) Производные функции заменить её дифференциалами;

б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;

в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих” дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$

2) Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

3) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0; y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постоянной С, а затем С подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

1) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6xdx + 3xy^2dx) - (6ydy + 2x^2ydy) = 0$$

Сгруппируем члены с *dx* и *dy*

$$3x(2 + y^2)dx - 2y(3 + x^2)dy = 0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3 + x^2} = \frac{2ydy}{2 + y^2}$$

-Интегрируем

$$3\int \frac{xdx}{3 + x^2} = 2\int \frac{ydy}{2 + y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2}\ln(3 + x^2) = \ln(2 + y^2) + \ln c$$

$$\ln(3 + x^2)^{\frac{3}{2}} = \ln(2 + y^2) \cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3 + x^2)^3} = (2 + y^2) \cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}{2+y^2} = c$$

2) Найти частные решение дифференциальных уравнений

$2(y - 3)dx - dy = 0$ *при x=0 , y=4*

-Разделим переменные

$$dy = 2(y-3)dx$$

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx$$

-Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$$

$$\ln(y-3) = 2x + \ln c$$

-По определению логарифма $2x = \ln e^{2x}$

$$\ln(y-3) = \ln(e^{2x} \cdot c)$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{2x} \cdot c + 3$$

-Подставим в это уравнение начальные условия *x=0* , *y=4*

$4 = e^{0} \cdot c + 3$ => *c=1*

-Запишем частное решение

$$y = e^{2x} + 3$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 9

Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы:

Научиться определять вид дифференциальных уравнений, находить общее и частное решение линейных дифференциальных уравнений I порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять вид дифференциального уравнения первого порядка;
- находить общее и частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти частное решение дифференциального уравнения

a) $y^2 + x^2y' = xy \cdot y'$ *при* $y(1) = 1$

b) $y' \sin x - y \cos x = 1$ *при* $x\,\frac{\Pi}{2}$, *y=1*

Порядок выполнения работы:

1. Линейное дифференциальное уравнение I порядка решается путем подстановки

$y = u \cdot \vartheta$; $\frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$

Дифференциальное уравнение сводится к решению двух дифференциальных уравнений, с разделяющими переменными, сначала относительно u , потом-ϑ, где $u и \vartheta$ неизвестные функции от *x*.

Ход работы:

1) Найти частное решение линейного дифференциального уравнения I порядка

$xy' + y = 3$, если *y=0, при x=1*

-Приведем уравнение к виду по определению

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$$

-Сделаем замену

$$y = u\vartheta; \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$$

-Сгруппируем члены с ϑ, получим

$\vartheta\left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right) = 0$, т.к. $\vartheta \neq 0$ =>$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$

-Разделим переменные

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

-Проинтегрируем

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\ln|x|$$

-Пропотенцируем

$$u = \frac{1}{x}$$

-Подставим *u* в оставшееся уравнение

$$\frac{1}{x}\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{3}{x}$$

$$d\vartheta = 3dx$$

-Проинтегрируем

$$\vartheta = 3x + c$$

-Подставим $y = u\vartheta$

$y = \frac{1}{x}(3x + c)$- общее решение

-Подставим начальные условия

$0 = 3 + c$ =>c=-3

$y = \frac{3}{x}(x - 1)$- частное решение

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 10

Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель работы:

Научиться определять вид дифференциальных уравнений, находить общее и частное решение однородных и линейных дифференциальных уравнений I порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять вид дифференциального уравнения первого порядка;
- находить общее и частное решение однородного дифференциального уравнения первого порядка;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1.Найти общее решение дифференциального уравнения

a) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

b) $xy' - y = -x$

Порядок выполнения работы:

1.Для решения однородного дифференциального уравнения I порядка данное уравнение путем введения новой переменной нужно привести к уравнению с разделяющимися переменными. Заменим $y = z \cdot x, \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$, где Z-новая неизвестная функция от *x*.

Получилось уравнение с разделяющими переменными относительно Z.

-Решив его, надо Z заменить на $\frac{y}{x}$ и выразить *y*.

Ход работы:

1) Найти частное решение однородного дифференциального уравнение I порядка

$y' = \frac{2x+y}{2x}$, если $y=0$ *при* $x=1$

-Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{2x}$

-Произведем подстановку $y = zx$; $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$

$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{2x+zx}{2x}$; $\quad x\frac{dz}{dx} + z = \frac{x(2+z)}{2x}$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{2+z}{2} - z$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{2-z}{2}$$

-Разделим переменные $\frac{2}{2-z}dz = \frac{dx}{x}$

-Проинтегрируем выражение: $2\int\frac{dz}{2-z} = \int\frac{dx}{x}$

-Решаем данное уравнение $-2\ln|2-z| = \ln|x| + \ln c$

$$\ln\frac{1}{(2-z)^2} = \ln(xc)$$

-Пропотенцируем выражение $\frac{1}{(2-z)^2} = xc$

-Выразим z: $(2-z)^2 = \frac{1}{xc}$

$$2 - z = \frac{1}{\sqrt{xc}}$$

$$z = 2 - \frac{1}{\sqrt{xc}}$$

-Заменим $z = \frac{y}{x}$ и выразим y $y = \frac{2x\sqrt{xc}-x}{\sqrt{xc}}$ – общее решение

-Подставим начальные условия $y=0$, $x=1$

$$0 = \frac{2\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}};\ 2\sqrt{c} - 1 = 0,\ 2\sqrt{c} = 1,\ \sqrt{c} = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$$

-Подставим cв общее решение $y = 2(x - \sqrt{x})$ частное решение.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 11

Решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения II порядка и линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка;
- находить общее и частное решение простейших дифференциальных уравнений второго порядка;
- находить общее и частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения II порядка:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$

b) $y'' = x\,, A(1;0); B(1;1)$

2. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения II порядка.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ при } x = 0\,;\, y = 0;\ \frac{dy}{dx} = 0$$

Порядок выполнения работы:

1) Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $p = \frac{dy}{dx}$

Приводим к уравнению с разделяющими переменными и решаем относительно p.

Подставляем p и решаем уравнение разделением переменных относительно y.

Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно C_1 и C_2. Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, находим частные решения.

2) Однородное дифференциальное уравнение II порядка.

Путем замены $y = e^{kx}$

$y' = ke^{kx}$

$y'' = k^2e^{kx}$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = o$ из которого находим k_1 и k_2.

Общее решение при D>0 будет:

$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$

При D=0 будет: $y = e^{kx}(c_1 + c_2x)$

При D<0 будет: $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

При заданных начальных условиях составляем систему линейных уравнений и решаем её относительно C_1 и C_2.

Ход работы:

I. Решить дифференциальное уравнение порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$$

-Заменим $p = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}; \quad \frac{dp}{dx} = 1 - 2x$$

-Разделим переменные

$$dp = (1 - 2x)dx$$

-Проинтегрируем

$$\int dp = \int(1 - 2x)dx$$

$$p = x - x^2 + c_1$$

-Заменим *p* на $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + c_1$$

-Разделим переменные

$$dy = (x - x^2 + c_1)dx$$

-Проинтегрируем и получим общее решение

$$\int dy = \int(x - x^2 + c_1)dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$$

II. Решить однородное дифференциальное уравнение II порядка

a) $y'' - 5y' + 6 = 0$

-Составим характеристическое уравнение
$k^2 - 5k + 6 = 0$, решаем квадратное уравнение, получим
$k_1 = 2, k_2 = 3$
-Общее решение будет:
$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$
$b)$ $y'' + 4y' + 4y = o$

-Составим характеристическое уравнение
$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k+2)^2 = 0 \qquad k = -2$
-Запишем общее решение для D=0
$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$
c) $y'' - 6y' + 13y = 0$

-Составим характеристическое уравнение
$k^2 - 6k + 12 = 0; D = 36 - 4 \cdot 13 = -16$ D<0 =>
$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i \qquad a = 3; b = 2$
-Запишем общее решение
$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Комплексные числа

Практическое занятие № 12
Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в алгебраической форме;

-выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

1.Даны комплексные числа: z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6). Записать эти числа в алгебраической форме.

2.Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_2 - z_3$;
3) z_1 / z_3;
4) $z_2 * z_3$;
5) z_1^5.

3.Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

Ход работы:

1**.**Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1{,}5;1{,}5)$, $z_3=(4;-3)$. Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$$z_1=7+i\,;\quad z_2=-1{,}5+1{,}5i\,;\quad z_3=4-3i$$

2**.**Выполнить действия в алгебраической форме:

1) z_1+z_2;
2) z_2-z_3;
3) z_1/z_3;
4) $z_2\cdot z_3$;
5) z_1^5.

Решение:

1) $z_1+z_2=(7-1{,}5)+(1+1{,}5)i=5{,}5+2{,}5i$;)
2) $z_1-z_3=(7-4)+(1+3)i=3+4i$;
3)

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{7+i}{4-3i}=\frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{28+21i+4i+3i^2}{16-(3i)^2}=\frac{28+25i-3}{16+9}=\frac{25+25i}{25}=1+i$$

4) $z_2\cdot z_3=(-1{,}5+1{,}5i)(4-3i)=-6+4{,}5i+6i-4{,}5i^2=-6+10{,}5i+4{,}5=-2{,}5+10{,}5i$
;

5) $z_1^5=$

$$(7+i)^5=((7+i)^2)^2(7+i)=(49+14i+i^2)^2(7+i)=(48+14i)^2(7+i)=$$

$$(2304+1344i+196i^2)(7+i)=$$

$$=(2108+1344i)(7+i)=14756+2108i+9408i+1344i^2=13412+11516i$$

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8$$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8=-2{,}1-2{,}8i$$

1) $\frac{1+3i}{i-3}=\frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2-i^2}=\frac{-10i}{10}=-i$;

2) $\frac{4-5i}{1+3i}=\frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2}=\frac{-11-17i}{10}=-1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1$

4) $-i+(-1{,}1-1{,}7i)-1=-i-1{,}1-1{,}7i-1=-2{,}1-2{,}8i$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Комплексные числа.

Практическое занятие № 13

Переход от одной формы комплексных чисел к другой.

Цель работы: Научиться переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую и обратно.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить модуль и аргумент комплексного числа;
- переводить комплексные числа из одной формы в другую.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций, четырехзначные математические таблицы Брадиса, калькуляторы.

Задание:
Даны комплексные числа : $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7,2;7,2)$, $z_3=(2;6)$.

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.
2. Вычислить:
   a. $\frac{z_1}{z_3}$;
   b. $z_2 * z_3$;
   c. z_1^5.
3. Извлечь квадратный корень из числа z_2.

4. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

a) $(3\cdot(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}))^2$ b) $\frac{24(\cos 75^0+i\sin 75^0)}{3(\cos 30^0+i\sin 30^0)}$

Краткие теоретические сведения:

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z=a+bi$.

1) Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить , в какой четверти находится точка (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z = a + bi$
- Решив уравнение $tg\varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z = \varphi = arctg\,\frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = arctg\,\frac{b}{a}$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = arctg\,\frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(cos\varphi + i\,sin\varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм.

2. Выполните действия в тригонометрической форме, используя правила:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$
$$z^n = r^n(cosn\varphi + i sin\, n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа z=r·(cos φ+i sinφ) используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Ход работы:

Даны комплексные числа: z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Число находится в первой четверти, значит $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$ $= arctg\,\frac{1}{7} = arctg\,0{,}1429$.

Находим значение арктангенса по таблице Брадиса $\varphi = 8°8'$.

$$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + i\sin 8°8')$$

2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$

$$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}1$$

Число находится во второй четверти, значит φ = argz= $arctg\,\frac{y}{x} + \pi$ $\varphi = arctg(\frac{1{,}5}{-1{,}5}) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4});$$

3) $z_3 = 4 - 3i$

$$|z_3| = \sqrt{16+9} = 5$$

Число находится в четвертой четверти, значит φ= argz= $arctg\,\frac{y}{x}$

$$\varphi = arctg(\frac{-3}{4}) = -arctg\,0{,}75 = -36°52'$$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52') + i\sin(-36°52'))$$

4.Извлечь квадратный корень из числа z_2.

Решение:

$$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

В нашем примере n=2.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{2}) \approx \sqrt{2{,}1}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{2}) \approx \sqrt{2{,}1}(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}).$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Комплексные числа

Практическое занятие № 14

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической и показательной формах.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-изображать комплексные числа на координатной плоскости;

- выполнять действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической и показательной формах.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

4. Даны комплексные числа в тригонометрической форме: $z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$ и $z_2 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$. Вычислите: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$; z_1^3; $\sqrt[3]{z_2}$

5. Выполните действия и запишите результат в показательной форме:

a) $\left(3 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^2$ b) $\frac{24(\cos 75^0 + i\sin 75^0)}{3(\cos 30^0 + i\sin 30^0)}$

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде: $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме z=r·(cos φ+i sinφ) используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные в тригонометрической форме числа.
2. Используя конспект, выясните, как выполняются действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
3. Выполните заданные действия.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.1 Матрицы и определители

Практическое занятие № 15

Действия над матрицами

Цель работы: научиться выполнять действия над матрицами, решать матричные уравнения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять вид матриц;
- выполнять действия сложения, вычитания, умножения матрицы на число, умножения матриц;
- находить неизвестную матрицу из матричного уравнения.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание:

1.Даны матрицы :$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Вычислите:$\mathrm{A}^2-3\mathrm{AB}$.

2.Решите матричное уравнение: $X=2A+BC^2$,

если $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -5\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 4 & 4 & -2\end{pmatrix}$;$C=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде: $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn}\end{pmatrix}$.

Действия над матрицами:

1.Сложение.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \cdots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в i-той строке в k-том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов i-той строки первой матрицы на соответствующие элементы k-того столбца второй.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.1 Матрицы и определители

Практическое занятие № 16

Вычисление определителей второго и третьего порядков

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определители второго порядка;
- вычислять определители третьего порядка.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

Краткие теоретические сведения:

Определителем квадратной матрицы второго порядка(определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка(определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Порядок выполнения работы:

1 Запишите определитель, определите какого он порядка.

2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Ход работы:
Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$
$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7)$
$= 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.2 Системы линейных уравнений.

Практическое занятие № 17

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+3y-5z=-2 \\ x+y+2z=3 \\ 2x-y+7z=27 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

.

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2.Запишите и вычислите определитель системы.
3.Вычислите определители каждой неизвестной.
4.Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.2 Системы линейных уравнений.

Практическое занятие № 18

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Гаусса;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;

-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;

-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.2 Системы линейных уравнений.

Практическое занятие № 19

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- составлять по данной системе линейных уравнений матричное уравнение;

- находить обратную матрицу;

-находить решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание: Решите системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 7x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 13 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Пусть задана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим матричное уравнение: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$X = A^{-1} \cdot B$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы А ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицыА;

в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots & A_{m1} \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицуA^{-1}на матрицу B, состоящую из свободных членов.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 12) = 14$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

$A_{21} = -1$; $A_{22} = 8$; $A_{23} = 5$; $A_{31} = 5$; $A_{32} = -10$; $A_{33} = -5$.

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 4 Приближенные числа и действия над ними

Практическое занятие № 20

Приближенные значения величин.
Абсолютная и относительная погрешности.
Правила приближенных вычислений

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– выполнять приближенные вычисления

– применять правила приближенных вычислений

– анализировать результаты измерения величин с допустимой погрешностью, представлять их графически

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Действительное число - любое положительное, отрицательное число или нуль. Посредством действительных чисел выражаются результаты измерения всех физических величин.

Результат измерений подсчетов и вычисления являются числами. Числа полученные в результате измерения лишь приблизительны с некоторой точностью характеризуют искомые величины.

Погрешностью называют разность точного и приближенного знач величины.

Абсолютная погрешность - это разность между измеренным и истинным значениями измеряемой величины. Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность — это отношение абсолютной погрешности измерения к истинному (действительному) значению измеряемой величины (она обычно выражается в процентах).

Правила вычислений

1. **При сложении и вычитании** приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных.

2. **При умножении** следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.

3.**При возведении в квадрат** или куб следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.

4.**При умножении** следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.

5.**При вычислении** сложных выражений следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий.

Кроме того, при обработке результатов используются ***правила нахождения погрешности*** суммы, разности, произведения и частного.

Правило 1. Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей отдельных слагаемых, но при значительном числе погрешностей слагаемых обычно происходит взаимная компенсация погрешностей, поэтому истинная погрешность суммы лишь в исключительных случаях совпадает с предельной погрешностью или близка к ней.

- ***Правило 2.*** Предельная абсолютная погрешность разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого или вычитаемого.

- ***Правило 3.*** Предельная относительная погрешность суммы (но не разности) лежит между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых.

Если все слагаемые имеют одну и ту же предельную относительную погрешность, то и сумма имеет ту же предельную относительную погрешность. Иными словами, в этом случае точность суммы (в процентном выражении) не уступает точности слагаемых.

В противоположность сумме разность приближенных чисел может быть менее точной, чем уменьшаемое и вычитаемое. Потеря точности особенно велика в том случае, когда уменьшаемое и вычитаемое мало отличаются друг от друга.

- ***Правило 4.*** Предельная относительная погрешность произведения приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей: $\delta=\delta_1+\delta_2$, или, точнее, $\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2$ где δ – относительная погрешность произведения, $\delta_1\delta_2$ - относительные погрешности сомножителей.

- ***Правило 5.*** Предельная относительная погрешность частного приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя. Точная величина предельной относительной погрешности всегда превышает приближенную. Процент превышения примерно равен предельно относительной погрешности делителя.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Найти сумму, разность, произведение и частное приближенных чисел и границы абсолютной и относительной погрешностей результата:

1) $a_1 = 25{,}74 \pm 0{,}2$; $a_2 = 96{,}42 \pm 0{,}3$.

2) $a_1 = 37{,}375 \pm 0{,}03$; $a_2 = 3{,}042 \pm 0{,}004$.

3) $a_1 = 879{,}03 \pm 0{,}1$; $a_a = 653{,}84 \pm 0{,}4$.

2. Выполнить действия, округляя промежуточные результаты до четырех цифр, и сравнить результаты: (0,3644 + 423)-0,125 и

0,364-0,125 4 0,423-0,125.

3. При вычислении значения выражения $z = 8x - 2y$ данные в условии задачи значения $x = 50{,}4$ и $y = 100{,}3$ округлили до целых и получили $z = 8 \cdot 50 - 2 \cdot 100 = 200.$ Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

Решение: модуль разности между точным числом и его приближенным значением называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа. Значит, абсолютная погрешность числа 50 равна $|50{,}4 - 50| = 0{,}4$ и абсолютная погрешность числа 100 равна $|100{,}3 - 100| = 0{,}3.$ Абсолютная погрешность суммы и разности приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей. Тогда абсолютная погрешность полученного числа 200 будет равна $8 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}8.$

4. Известно, что ребра прямоугольного параллелепипеда равны 56 см, 19 см и 122 см. Для упрощения вычислений эти числа округлили до 50 см, 20 см и 120 см соответственно. Нашли объем $V = 60 \cdot 20 \cdot 120 = 144000$ (куб. см.). Полученный результат имеет относительную погрешность, равную …

Решение: относительная погрешность приближенного положительного числа равна отношению абсолютной погрешности числа к точному значению этого числа. Так как точное значение числа, как правило, неизвестно, то под относительной погрешностью понимают отношение абсолютной погрешности числа к его приближенному значению. Тогда относительные погрешности чисел 50, 20 и 120 равны $\delta_1 = \frac{\Delta_1}{50} = \frac{|56-50|}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15},$

$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{20} = \frac{|19-20|}{20} = \frac{1}{20}$,

$\delta_3 = \frac{\Delta_3}{120} = \frac{|122-120|}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$, соответственно.

Относительная погрешность произведения приближенных чисел равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

Значит, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$.

5. Пусть *a=3,8* и *b=6,2*.

Необходимо найти значение *a+4b*.

Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления.

Получили $3,8+4\cdot 6,2 \approx 4-4\cdot 6=-20$.

Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

<u>Решение:</u> модуль разности между точным числом a и его приближенным значением x называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа x и обозначается Δx.

Имеем $x=4,\ y=6$.

$\Delta x = |3,8-4| = 0,2$.

$\Delta y = |6,2-6| = 0,2$.

Абсолютная погрешность полученного результата можно найти по формуле $\Delta(x-4y) = \Delta x + 4\cdot\Delta y$.

Получим: $\Delta(x-4y) = 0,2+4\cdot 0,2 = 1$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Модуль разности между точным числом *a* и его приближенным значением *x* называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа *x* и обозначается Δx.

Имеем $x=9,\ y=9$.

$\Delta x = |9,2-9| = 0,2$.

$\Delta y = |8,9-9| = 0,1$.

2. При измерении линейкой длины и ширины фанерного листа были получены размеры *a*=120 см. и *b*=60 см. Известно, что погрешность измерения линейкой равна 2 см.

Была найдена площадь листа S=120·60=7200 кв.см. Полученный результат имеет относительную погрешность равную …

3) Пусть *a=3,8* и *b=6,2*.

Необходимо найти значение *a+4b*.

4) Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления.

Получили $3,8+4\cdot 6,2 \approx 4-4\cdot 6=-20$.

Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

5) Вычислили значение функции $f(x;y)=x^3y$ при $x=2$ и $y=5,$ получили результат 40.

6) Известны относительные погрешности чисел 2 и 5: $\delta_x=0{,}01;\ \delta_y=0{,}04.$

Тогда относительная погрешность полученного результата равна …

7) Форма записи рациональной дроби $\frac{3}{14}$ в виде бесконечной десятичной дроби имеет вид …

Поделить числитель дроби на знаменатель:

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно