Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Махновский
«23» марта 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

по учебной дисциплине
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
для студентов специальности
09.02.01 Компьютерные системы и комплексы
базовой подготовки

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО:
Предметно-цикловой комиссией Информатики и вычислительной техники
Председатель И.Г. Зорина
Протокол № 7от 14 марта 2017 г.

Методической комиссией МпК
Протокол №4 от «23» марта 2017г

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г. И. Носова» МпК Елена Александровна Васильева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия. Являясь частью изучения учебной дисциплины, они призваны, экспериментально подтвердить теоретические положения и формировать общие и профессиональные компетенции, практические умения.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений - учебных умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности по математическим и естественно-научным, общепрофессиональным дисциплинам.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующих федеральных государственных образовательных стандартов среднего профессионального образования.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» предусмотрено проведение практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

– вычислять вероятность событий с использованием элементов комбинаторики;

– использовать методы математической статистики.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 1.2. Разрабатывать схемы цифровых устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции.

ПК 1.4. Проводить измерения параметров проектируемых устройств и определять показатели надежности.

ПК 2.2. Производить тестирование, определение параметров и отладку микропроцессорных систем.

А также формированию общих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и

личностного развития.
ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.
ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Классификация событий. Основные теоремы

Практическое занятие № 1

Решение простейших задач на нахождение вероятности

Цель работы: научится решать задачи с использование различных подходов к понятию вероятности.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи с использование различных подходов к понятию вероятности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решите следующие задачи:

Задание 1. (УСТНО). В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна частота появления нестандартных деталей?

Задание 2. На числовой оси ох отмечен отрезок ОА длинной 18 см, наудачу поставлена Точка $B \in OX$. Найти вероятность того, что точка попадет на отрезок ОА.

Задание 3. Перед окопами вдоль прямой линии через каждые 10 м установлены противотанковые мины. Перпендикулярно этой линии движется танк, ширина которого 3 м. Какова вероятность того, что танк пересечет линию установки мин невредимым, т.е. что мина не взорвется?

Задание 4. Внутри круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

Задание 5. На плоскость нанесена сетка квадратов со стороной 8 см. Найти вероятность, что брошенный на плоскость круг радиуса 1 см не пересечет ни одной стороны квадрата.

Задание 6. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение $\frac{1}{4}$ часа, после уходит. Найти вероятность того, что: а) встреча состоится; б) встреча не состоится.

Задание 7. Момент начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени от 0 до 120 минут. Одно из событий длится 10 минут, другое 20 минут. Определить вероятность того, что: а) события «перекрываются» по времени; б) события «не перекрываются» по времени.

Порядок выполнения работы

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 2

Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики

Цель работы: научится решать задачи с использованием перестановок, размещений и сочетаний.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи с использованием формул комбинаторики.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решите следующие задачи:

1.	В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести извлеченных наудачу деталей 4 детали стандартные.
2.	На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв «а», «т», «м», «р», «с», «о». Карточки перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных в одну линию карточках можно будет прочитать слово «матрос».
3.	Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
4.	Какова вероятность того, что при случайном сочетании цифр 1, 2, 3, 4 получится число 3241?
5.	Чему равна вероятность правильно набрать код дверного замка, если он набирается последовательным нажатием четырех цифр?
6.	32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Наугад вынимается пять карточек одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «конец».
7.	С блюда с 30 пирожками взяли наугад три пирожка. Какова вероятность того, что среди них будет два с грибами, если всего 10 пирожков с капустой, 20 с грибами.
8.	В партии из 12 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести извлеченных наудачу деталей 3 детали стандартные.

9.	На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв «и», «т», «н», «е», «г», «а», «р», «л», «к», «с», «п», «о». Карточки перемешаны. Найти вероятность того, что на, вынутых по одной и расположенных в одну линию карточках можно будет прочитать слово «матрос».
10.	Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал её наугад. Какова вероятность того, что набранная цифра правильная?

Краткие теоретические сведения:

Перестановки считаются по формуле: $P = n!$ (1)

Пример №1: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз.

Решение.

Подсчитаем вручную: (123) (132) (213) (231) (312) (321)

Или с помощью формулы (1): $P = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6;$

Если в последовательности $a_1, a_2, ..., a_n$ не только менять местами элементы, но и заменять последовательно элементы на другие $b_1, b_2, ..., b_n$, то полученные новые комбинации можно подсчитать с помощью формулы размещения.

Определение: Размещения называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

Пример №2: Сколькими способами можно выбрать из группы, насчитывающего 40 студентов, старосту, зам. старосты, физорга.

Решение.

Любой такой выбор является размещением без повторений из 40 элементов по 3. Значит, число способов выбора равно $A_{40}^3 = 40 \cdot (40-1) \cdot (40-2) = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$.

Пример №3: Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение.

Используя формулу (2), получим: $A_6^2 = 6 \cdot (6-1) = 6 \cdot 5 = 30$ сигналов.

Если при замене элемента a_i на b_i порядок расположения b_i не важен, то количество полученных комбинаций подсчитывается по формуле сочетания.

Определение: Сочетания называют комбинации, составленные из n-различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(nn-m)!}; \qquad (3)$$

Необходимо отметить, что: $C_n^0 = C_n^{n-n} = 1 = C_n^n$; $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Пример №4: В аудитории имеется 10 лампочек. Сколько существует разных способов ее освещения, при которых горит ровно 2 лампочки?

Решение.

Способов освещения столько, сколько существует сочетаний из 10 лампочек по 2, то есть $C_{10}^2 = \frac{10!}{(2!\cdot 8!)} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2!\cdot 8!} = \frac{90}{2\cdot 1} = 45$;

Пример №5: Из множества $\{a,b,c,d,e\}$ можно составить 10 сочетаний по 3 элемента в каждом:

$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},$

$\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{c,d,e\}$

Из каждого такого сочетания путем различного упорядочивания элементов получается 6 размещений из 5 элементов по 3. Например, из сочетания $\{a,b,c\}$ получаем следующие размещения $(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$. Отсюда видно, что число размещений без повторений из 5 элементов по 3 равно 6*10=60, что согласуется с формулой $A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

Различные сочетания порождают различные размещения и каждое размещение может быть получено указанным способом. Иными словами $A_n^m = P_m \cdot C_n^m$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 3

Вычисление вероятностей сложных событий

Практическое занятие № 4

Вычисление вероятностей с использованием формул полной вероятности и Байеса

Цель работы: научится решать задачи с применением теоремы умножения вероятностей, формулы полной вероятности.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи с применением теоремы умножения вероятностей, формулы полной вероятности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Задание 1. Решите задачи.

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым равна 0,7, а вторым – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.
2. Бросается игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное и меньшее 5 число очков?
3. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимается один шар. Какова вероятность того, что он красный, если известно, что он не синий?
4. В первом ящике содержится 20 деталей из них 15 стандартных. Во втором – 30 деталей из них 24 стандартных. В третьем – 10 деталей из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика стандартная.
5. В группе спортсменов 20 биатлонистов, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: у биатлонистов-0,9, у велосипедистов-0,8 и у бегунов – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

Задание 2. Решите задачи.

1.	Имеется два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, а во втором – 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность того, что оставшийся шар является белым?
2.	Два автомата производят одинаковые хирургические зажимы. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый производит в среднем 60% зажимов отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятый зажим оказался отличного качества. Найти вероятность того, что зажим произведен первым автоматом.
3.	Имеются 3 партии электроламп. Вероятность того, что лампа проработает заданное время, равны соответственно для этих партий 0.7; 0.8; 0.9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа проработает заданное время
4.	Три охотника одновременно стреляют в зайца. Шанс на успех первого охотника расценивается как 3 из 5; второго – 3 из 10; наконец, для третьего охотника они составляют лишь 1 из 10. Какова вероятность того, что заяц будет подстрелен?
5.	Появление колонии микроорганизмов данного вида в определенных

	условиях оценивается вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что в шести пробах данная колония появится четыре раза.
6.	Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?
7.	Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому – 0,65, ко второму – 0,35. Вероятность того, что годная деталь при проверке будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что деталь проверил первый контролер.
8.	В конкурсе на лучшую курсовую работу участвуют 20 студентов первого курса, 22 студента второго и 18 участников учатся на 3 курсе. Шансы на победу студента первого курса оцениваются в 55%, второкурсник победит с вероятностью 60%, студент 3 курса-с вероятностью 70%. Определите вероятность того, что победивший студент второкурсник.
9.	Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Определить вероятность того, что из 10 наугад выбранных новорожденных будет шесть мальчиков.
10.	С первого предприятия поступило 200 пробирок, из которых 190 стандартных, а со второго 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу взятая пробирка будет стандартной.

Краткие теоретические сведения:

Пример 1: В урне находятся 3 черных и 2 белых шара. Из урны извлекают последовательно (без возвращения) два шара.

Решение.

A – [событие состоит в том, что первым будет изъят белый шар].

B – [событие состоит в том, что вторым будет изъят черный шар].

Найти вероятность произведения событий A и B (т.е. их совместного наступления). $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$

$$P(A)=\frac{2}{5}$$

Извлекли 1 шар; Сколько осталось? (4) (Зависимость)

$$P_A(B)=\frac{3}{4} \qquad P(AB)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10};$$

Пример 2**:** Пусть имеется a белых и b черных мешков, причем в каждом белом мешке x красных и y синий шаров, а в каждом черном мешке – u красных и v синих шаров. Сначала случайным образом выбирают один мешок, а потом из него вынимают шар. Найдем вероятность Р(Б), Р(Ч), Р($Б \cdot К$) и условные вероятности $P_Б(К)$, $P_ч(К)$.

Решение.

Очевидно, что вероятность того, что выбран белый мешок равна- $\text{Đ}(\text{Á}) = \frac{a}{a+b}$, а $P(Ч) = \frac{b}{a+b}$.

Далее условная вероятность того, что выбран красный шар из белого мешка, равна - $P_Б(К) = \frac{x}{x+y}$, а из черного мешка $P_ч(К) = \frac{u}{u+v}$.

Событие Б*К состоит в том, что выбран белый мешок, а из него извлечен красный шар. По формуле умножения вероятность этого события равна: $P(Б \cdot К) = P(Б) \cdot P_Б(К) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{x+y}$.

Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместимых событий $В_1$, $В_2$, …, $В_n$ образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А.

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)$

Алгоритм решение задач

1. Определить события искомой вероятности.
2. Определить вид событий.
3. Исходя из вопроса задачи и вида событий, найти в таблице 1 искомую формулу.
4. подставить исходные данные в формулу, подсчитать и записать ответ.

Таблица №1

События	Совместные	Несовместные
Зависи-мые	$P(A+B) = P(A) + P(B) -$ $- P(A) \cdot P_A(B)$ $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$	$P(A+B) = P(A) + P_A(B)$ $P(A \cdot B)$ - нет
Независи-симые	$P(A+B) = P(A) + P(B) -$ $- P(AB)$ $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A+B) = P(A) + P(B)$ $P(A \cdot B)$ - нет

Пример 3: Два спортсмена независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания первого спортсмена = 0,7; а второго = 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

Решение.

В мишень попадет либо первый, либо второй, либо попадут вместе- **хотя бы** попадет один стрелок, *т.е. произойдет A + B.*

А и В – независимы, совместны. Из таблицы №1

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. Подставим исходные данные, получим:

P(A + B) = 0,7 + 0,8 – 0,7 · 0,8 = 0,94;

Пример 4: Бросается игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число и число меньше 5?

Решение: Что будем понимать под событием А?

А – [событие появления четного числа очков 2, 4, 6].

$$P(A)=\frac{3}{6}$$

В – [появление числа очков < 5].

Благоприятные исходы: 1, **2**, 3, **4**.

$$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

А и В – независимы и совместны.

$$P(A\cdot B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}=0{,}25$$

Пример 5:. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна = 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартна.

Решение:

А –[событие, что извлеченная деталь стандартна];

B_2-[извлечена из второго набора];

B_1-[извлечена из первого набора];

Тогда

$P(B_1) = ½$ $P_{B1}(A) = 0{,}8$

$P(B_2) = ½$ $P_{B2}(A) = 0{,}9$

По формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B2}(A)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}8+\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=0{,}85;$$

Вероятность того, что взятая наудачу деталь стандартны 0,85.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 1.2. Случайные величины и их числовые характеристики

Практическое занятие № 5

Построение закона распределения и функции распределения ДСВ

Практическое занятие № 6

Вычисление числовых характеристик ДСВ

Цель работы: изучение законов распределения дискретной случайной величины; научится решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Задание 1. В книжном магазине организована лотерея. Разыгрываются две книги стоимостью по 10 руб. и одна – стоимостью в 30 руб. Составить закон распределения случайной величины *X* – суммы чистого (возможного) выигрыша для того, кто приобрел один билет за 1 руб., если всего продано 50 билетов.

Задание 2. Задан закон распределения (из задания 1). Определите функцию распределения и постройте график.

Задание 3. Дискретная случайная величина x задана таблицей распределения. Требуется найти M [x], D[x] и σ [x]:

1)

0	1	2
0,3	0,5	0,2

2)

-2	-1	0	1	2
0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Задание 4. Строительная инвестиционная компания в настоящий момент продает акции по 16 условных денежных единиц за штуку. Инвестор планирует покупку пакета акций и предполагает хранение их в течение года. Пусть *X* – случайная величина, означающая цену одной акции спустя год. Ряд распределения дан в таблице:

Цена акции (x)	*P(X)*
16	0,35
17	0,25
18	0,25
19	0,10
20	0,05

1. Показать, что заданное распределение обладает всеми свойствами ряда распределения.
2. Чему равно ожидаемое среднее значение цены акции спустя один год?

3. Чему равен ожидаемый средний выигрыш от акции, спустя год? Чему равен процент возврата инвестиций, отражаемый этим ожидаемым значением?
4. Определите дисперсию цены акции спустя год.
5. Другая акция с одинаковым ожидаемым значением возврата инвестиций имеет дисперсию, равную 3. Какая из акций лучше в смысле минимизации риска или неопределенности, ассоциируемой с инвестициями? Объясните.

Краткие теоретические сведения:

Пример №1. Рассматривается работа трех независимых работающих технических устройств (ТУ); вероятность нормальной работы первого ТУ равна 0,2, второго – 0,4, третьего – 0,5; Построить ряд распределения случайной величины X.

Решение:

Случайная величина X - число работающих ТУ. Возможные значения случайной величины: 0,1,2,3.

Определим соответствующие вероятности, пользуясь правилами сложения и умножения. Для краткости будем обозначать нормальную работу знаком “+”, а отказ – знаком “-”.

$$p1 = P\{X=0\} = \mathrm{P}\{---\} = 0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}24$$

$$p2 = P\{X=1\} = \mathrm{P}\{+--\} + \mathrm{P}\{-+-\} + \mathrm{P}\{--+\} = 0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5 +$$
$$+0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5 + 0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}46$$

$$p1 = P\{X=2\} = \mathrm{P}\{-++\} + \mathrm{P}\{+-+\} + \mathrm{P}\{++-\} = 0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5 +$$
$$+0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5 + 0{,}2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5 = 0{,}26$$

$$p1 = P\{X=3\} = \mathrm{P}\{+++\} = 0{,}2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5 = 0{,}04$$

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

X	0	1	2	3
n	0,24	0,46	0,26	0,04

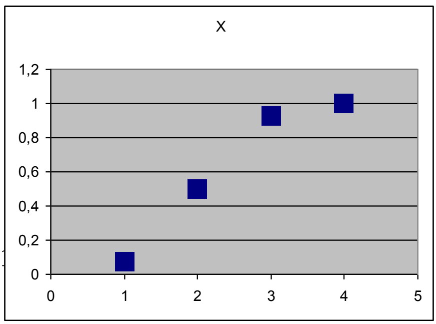
Пример №2. Задан ряд распределения. Построить функцию распределения.

X	1	2	3	4
P	1/14	6/14	6/14	1/14

при $x <= 1$ $F(x) = P(x < 1) = 0$;

при $1 < x <= 2$

$F(x) = P(x < 2) = \frac{1}{14}$;



при $2 < x <= 3$ $F(x) = P(x < 3) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$;

при $3 < x <= 4$ $F(x) = P(x < 4) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} + \frac{6}{14} = \frac{13}{14}$ Рис.6 График функции распределения

при $x > 4$ $F(x) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} + \frac{6}{14} + \frac{1}{14} = 1$

Из рисунка видно, что F(x) имеет 4 скачка по числу X. Если увеличить X, то число скачков так же становится больше, а сами скачки меньше, вследствие чего ступенчатая кривая становится более плавной. В этом случае дискретная случайная величина постепенно приближается к непрерывной.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 7

Вычисление числовых характеристик НСВ

Практическое занятие № 8

Вычисление функции распределения и плотности распределения вероятности

Цель работы: изучение законов распределения непрерывной случайной величины; научится решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Ход работы:

Задание 1

Задана плотность распределения f(x) непрерывной случайной величины ξ.

1. Построить график f(x).
2. Найти интегральную функцию F(x).

3. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, средеквадратическое отклонение, моду, медиану.

4. Найти вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (a, b).

Пример 1.

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1\\ x^2+A\cdot|x| & \text{при} -1<x\le 2\\ 0 & \text{при } x>2\end{cases}$$

a=0, b=1

Решение:

1. Найдем неизвестный параметр A плотности распределения вероятности из соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1,$$

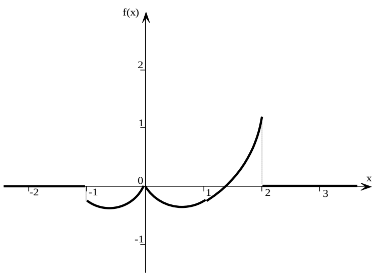
Поскольку в нашем примере плотность f(x) на (-∞;-1] и на (2;+ ∞) равна нулю, то можно записать:

$$\int_{-1}^{2} x^2+A\cdot|x|dx=1$$

Решив данный интеграл и полученной уравнение получим, что A=-4/3, тогда плотность распределения примет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\, x\le -1\\ x^2-\dfrac{4}{3}|x| & \text{при}-1<x\le 2\\ 0 & \text{при}\, x>2\end{cases}$$

График функции f(x) изображен на рисунке.



2. Найдем интегральную функцию F(x):

$x\in(-\infty;-1], F(x)=P\{\xi<x\}=0$

$x\in(-1;2], F(x)=P\{\xi<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot dt+\int_{-1}^{x} t^2-\frac{4}{3}\cdot|t|\cdot dt=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}|x|^2+1$

$x\in(-1;+\infty), F(x)=P\{\xi<x\}=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot dt+\int_{-1}^{2} t^2-\frac{4}{3}\cdot|t|\cdot dt+\int_{2}^{x} 0dt=1$

Тогда можно записать:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1 \\ \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}|x|^2+1 & \text{при } -1 < x \le 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

3. Числовые характеристики искомой случайной величины.
Математическое ожидание:

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0dx + \int_{-1}^{2} x\cdot (x^2 - \frac{4}{3}\cdot |x|)dx + \int_{2}^{+\infty} x\cdot 0dx = 0.63(8)$$

Дисперсия:

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx - M_\xi = \int_{-\infty}^{-1} x^2\cdot 0dx + \int_{-1}^{2} x^2\cdot (x^2 - \frac{4}{3}\cdot |x|)dx + \int_{2}^{+\infty} x^2\cdot 0dx - 0.63(8) = 2.8500$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = 1{,}688194301613$$

Мода равна 2.
4. Вероятность того, что 0≤ξ≤1, вычислим по формуле:

$$P\{0 < \xi < 1\} = \int_0^1 x^2 - \frac{4}{3}|x|\, dx = 0.333.$$

Решить задачи.

1.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{\pi^2} & \text{при } 0 < x \le \pi; \\ 1 & \text{при } x > \pi; \end{cases}$	6.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{e^2} & \text{при } 0 < x \le e; \\ 1 & \text{при } x > e; \end{cases}$
2.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{x^4}{16} & \text{при } 0 < x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$	7.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{при } x > 0; \end{cases}$
3.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{(x^2-x)}{2} & \text{при } 1 \le x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$	8.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{16}{25}x^2 & \text{при } 0 < x \le \dfrac{5}{4}; \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{5}{4}; \end{cases}$
4.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ x^2 & \text{при } 0 \le x \le 1; \\ 0 & \text{при } x > 1; \end{cases}$	9.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{x^3}{125} & \text{при } 0 < x \le 5; \\ 1 & \text{при } x > 5; \end{cases}$

5.	$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0; \\ \dfrac{x^3}{8} \quad \text{при } 0<x<2; \\ 1 \text{ при } x>2; \end{cases}$	10.	$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0; \\ x \text{ при } 0\le x<1 \\ -x+2 \text{ при } 1\le x<2; \\ 0 \text{ при } x>2; \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 2.1. Элементы математической статистики

Практическое занятие № 9

Построение эмпирической функции распределения, полигона и гистограммы

Практическое занятие № 10

Вычисление числовых характеристик выборки

Цель работы: научиться осуществлять расчет по заданной выборке числовых характеристик.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- осуществлять расчет по заданной выборке числовых характеристик.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

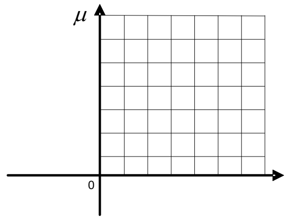
1. Пятьюдесятью абитуриентами на вступительных экзаменах в МПК получены следующие количества баллов:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12,
20, 17, 15, 13, 17, 16, 20, 14, 14, 13,
17, 16, 15, 19, 16, 15, 18, 17, 15, 14,
16, 15, 15, 18, 15, 15, 19, 14, 16, 18,
18, 15, 15, 17, 15, 16, 16, 14, 14, 17.

Требуется: а) составить вариационный ряд; б) составить таблицу частот; в) построить полигон частот.

α_1									
μ_1									

2. Обследование оплаты труда 60 преподавателей дало следующие результаты (в усл.ед.):



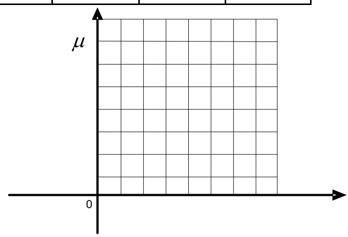
114, 104, 112, 101, 90, 122, 126, 116, 128, 140, 124, 120, 160, 104, 140, 90, 118, 132, 154, 124, 104, 121, 156, 160, 128, 132, 104,82, 130, 114, 142, 122, 160, 98, 116, 98, 132, 142, 116, 126, 108, 121, 102, 104, 122, 96, 122, 138, 124, 123, 108, 121, 102, 104, 122, 96, 122, 138, 124, 123.

а) Составьте интервальную таблицу частот с шириной интервала 10 (у.е.) начиная с 80 (у.е.).

б) Постройте гистограмму.

α_1										
μ_1										

3. Построить эмпирическое распределение веса студентов в килограммах для следующей выборки:



64,57,63,62,58,61,63,60,60,61,65,62,62,60,64,61, 59,59,63,61,62,58,58, 63,61,59,62,60,60,58,61,60,63,63,58,60,59,60,59, 61,62,62,63,57,61,58,60,64,60,59,61,64,62,59,65.

Воспользуемся процедурой Гистограмма.

1. В ячейку А1 введем слово Наблюдения, а в диапазон А2:Е12 — значения веса студентов.
2. Для вызова процедуры Гистограмма выберем из меню Сервис подпункт Анализ данных и в открывшемся окне в поле Инструменты анализа укажем процедуру Гистограмма.
3. В появившемся окне Гистограмма заполним рабочие поля: во Входной диапазон введем диапазон исследуемых данных (А2:Е12); в Выходной диапазон — ссылку на левую верхнюю ячейку выходного диапазона *(F1)*. Установим переключатели в положение Интегральный процент и Вывод графика;
4. После этого нажмем кнопку ОК.

В результате получим таблицу и диаграмму (рис.1).

Рис.1. Результаты процедуры Гистограмма пакета Анализа.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради и на компьютере.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю и в электронном виде.

Практическое занятие № 11

Вычисление точечных и интервальных оценок

Цель работы: научиться осуществлять расчет по заданной выборке числовых характеристик.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- осуществлять расчет по заданной выборке числовых характеристик.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание

Решить задачу. На заводе железобетонных изделий N для создания марки бетона высокого качества проводилось исследование 100 различных пробных сортов бетона, для которых подсчитывался процент прочности на сжатие (случайная величина X). Получен следующий результат (таблица из 100 чисел). Найти эмпирическое распределение признака X, построить графическое отображение распределения. Найти исправленные оценки (статистики) генеральных параметров (выборочное среднее; исправленная дисперсия; исправленное среднеквадратичное отклонение; исправленная асимметрия; исправленный эксцесс. Найти моду и медиану по сгруппированным данным. Проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность измеримого признака X, из которой извлечена выборка, распределена по нормальному закону при уровне значимости α =0,05.

42.7	37.4	35.1	49.9	44.2
32.9	37.1	37.1	36.7	43.5
37.0	29.6	42.3	42.5	41.0
28.8	31.4	44.3	26.4	43.7
34.0	47.1	37.8	34.2	27.3
39.7	31.1	37.9	37.2	38.7
44.9	43.2	41.7	33.3	30.8
38.5	29.6	23.2	38.8	38.1
31.5	31.4	47.7	25.2	44.3
36.6	47.1	32.4	33.7	36.9
30.2	28.2	43.8	49.2	36.2
38.4	31.3	31.7	35.2	42.8
35.5	29.0	44.5	32.9	37.6
45.9	32.4	37.0	37.5	29.3
37.7	26.6	40.3	37.9	30.2
37.4	34.6	40.5	47.0	42.5
38.8	36.1	41.1	38.6	39.6
42.8	41.2	32.9	29.3	37.1
39.4	32.3	43.0	41.0	16.6
54.3	48.7	32.7	44.5	43.1

Пример. Пусть для изучения количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=100$, имеющая следующее статистическое распределение:

X	1	3	5	7	9	11	13	15
n_i	5	9	17	25	22	11	7	4

Требуется:

а) построить полигон частот по данному распределению выборки;

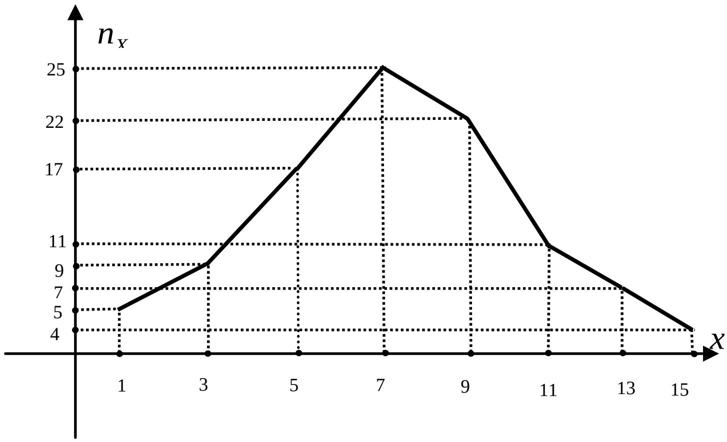
б) найти выборочное среднее $\overline{X}$, выборочное среднее квадратичное отклонение $\overline{\sigma}$, «исправленное» выборочное среднее квадратичное отклонение S;

в) при данном уровне значимости α проверить по критерию Пирсона гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности;

г) в случае принятия гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности найти доверительные интервалы для математического ожидания m и среднего квадратичного отклонения σ, при уровне надежности $\gamma = 1-\alpha$.

Решение

а). Отложим на оси абсцисс варианты $x_1,\dots,x_8$, а на оси ординат – соответствующие частоты $n_1,\dots,n_8$. Соединив полученные точки ломаной, получим полигон частот.



б). Выборочное среднее $\bar{X}$, выборочное среднее квадратичное отклонение $\bar{\sigma}$, «исправленное» выборочное среднее квадратичное отклонение S находятся соответственно по формулам (см. п.13):

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} x_i n_i, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{X})^2 n_i}, \; S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{X})^2 n_i}.$$

Результаты вычислений удобно оформлять в виде таблицы.

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\bar{X}$	$x_i-\bar{X}$	$(x_i-\bar{X})^2$	$(x_i-\bar{X})^2 n_i$	$\bar{\sigma}^2$	$\bar{\sigma}$	S^2
1	1	5	5		-6,62	43,82	219.10			
2	3	9	27		-4,62	21,34	192,06			
3	5	17	85		-2,62	6,86	116,62			

4	7	25	175		-0,62	0,38	9,50			
5	9	22	198		1,38	1,90	41,80			
6	11	11	121		3,38	11,42	125,62			
7	13	7	91		5,38	28,94	202,58			
8	15	4	60		7,38	54,46	217,84			
$\sum$		100	762	7,62			1125,12	11,25	3,36	11,36

Итак, $\bar{X} = 7{,}62$, $\bar{\sigma} = 3{,}36$, $S = 3{,}37$. $(S = \sqrt{S^2} = \sqrt{11{,}36})$

в). Для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности применим критерий Пирсона. Учитывая, что варианты равноотстоят друг от друга (с шагом $h = x_i - x_{i-1} = 2$), это можно сделать следующим образом.

Концы интервалов, серединами которых являются x_i, вычисляются по формулам: $\alpha_{i-1} = x_i - \frac{h}{2}$, $\alpha_i = x_i + \frac{h}{2}$, теоретические вероятности попадания X в интервал (α_{i-1}, α_i), согласно формуле п.14, равны $p_i = \Phi\left(\frac{\alpha_i - \bar{X}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_{i-1} - \bar{X}}{S}\right)$, теоретические частоты равны $n_i' = np_i$ и, согласно п.14, $\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$.

Оформим вычисления в виде таблицы (см. ниже).

Из приложения 3 находим при данном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и при числе степеней свободы $k = 8 - 3 = 5$ критическое значение $\chi^2_{крит} = 11{,}1$. Поскольку $\chi^2 = 2{,}856 < \chi^2_{крит} = 11{,}1$, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

i	x_i	α_i	$\frac{\alpha_i - \bar{X}}{S}$	$\Phi\left(\frac{\alpha_i - \bar{X}}{S}\right)$	p_i	n_i'	n_i	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
0		0	-2,26	-0,4881				
1	1	2	-1,67	-0,4525	0,0356	3,56	5	0,582
2	3	4	-1,07	-0,3577	0,0948	9,48	9	0,024

3	5	6	-0,48	-0,1844	0,1733	17,33	17	0,006
4	7	8	0,11	0,0438	0,2282	22,82	25	0,208
5	9	10	0,71	0,2611	0,2173	21,73	22	0,003
6	11	12	1,30	0,4032	0,1421	14,21	11	0,725
7	13	14	1,89	0,4706	0,0674	6,74	7	0,010
8	15	16	2,48	0,4934	0,0228	2,28	4	1,298
Σ								$\chi^2 = 2{,}856$

г). Теперь в предположении, что случайная величина X распределена нормально, найдем доверительные интервалы для математического ожидания a и среднего квадратичного отклонения σ по формулам п.13:

$$a \in (\overline{X} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}) \;,\; \sigma \in (S(1-q_\gamma), S(1+q_\gamma)) \;,$$

где $\overline{X} = 7{,}62,\ S = 3{,}37$ – выборочное среднее и исправленное выборочное среднее квадратичное отклонение, найденные в п.б), t_γ, q_γ – коэффициенты, зависящие от уровня надежности $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$ и объема выборки $n = 100$, которые находятся из приложений 5, 6:
$t_\gamma = t(0{,}95;100) = 1{,}984,\ \ q_\gamma = q(0{,}95;100) = 0{,}143$.

Итак, с надежностью $\gamma = 0{,}95$ a и σ принадлежат следующим интервалам: $a \in (6{,}95;8{,}29), \sigma \in (2{,}89;3{,}85)$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 12

Вычисление доверительных интервалов для оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения нормального распределения

Практическое занятие № 13

Проверка гипотез

Цель работы: применение критерия согласия для проверки нормального распределения генеральной совокупности.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять доверительный интервал для оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения нормального распределения.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1) Менеджер по закупкам отдела «Книга - почтой» отслеживал ежедневные заказы на техническую литературу и регистрировал объем продаж в течении 2 месяцев (61 день). Среднее число заказов в день составило 38+а (где а- количество букв в вашем полном имени). Требуется определить:
   a) В каком интервале лежит реальное среднее число заказов технической литературы;
   b) Максимальный и минимальный размер заказа;
   c) Насколько отличаются друг от друга размеры заказов на техническую литературу.
2) Определите, лежит ли значение 19 внутри границ 95%.-ного доверительного интервала выборки 2,3,5,7,4,9,6,4,9,10,4,7,19.
3) Опросите студентов вашей подгруппы узнав вес каждого студента в кг. Найдите соответствие полученных вами экспериментальных данных нормальному закону распределения.

Краткие теоретические сведения:

Пример №1. Найти границы 95%-ного доверительного интервала для среднего значения, если у 25 телефонных аккумуляторов среднее время разряда в режиме ожидания составило 140 часов, а стандартное отклонение — 2,5 часа.

1. Откройте новую рабочую таблицу. Установите табличный курсор в ячейку А1.
2. Для определения границ доверительного интервала необходимо на панели инструментов Стандартная нажать кнопку Вставка функции (fx). В появившемся диалоговом окне Мастер функций выберите категорию Статистические и функцию ДОВЕРИТ, после чего нажмите кнопку ОК.
3. В рабочие поля появившегося диалогового окна ДОВЕРИТ с клавиатуры введите условия задачи: Альфа—0,05;Станд_откл—2,5;Размер—25(рис. 6.11). Нажмите кнопку ОК.
4. В ячейке А1 появится полуширина 95%-ного доверительного интервала для среднего значения выборки — 0,979981. Другими словами, с 95%-ным уровнем надежности можно утверждать, что средняя продолжительность разряда аккумулятора составляет 140 ± 0,979981 часа или от 139,02 до 140,98 часа.

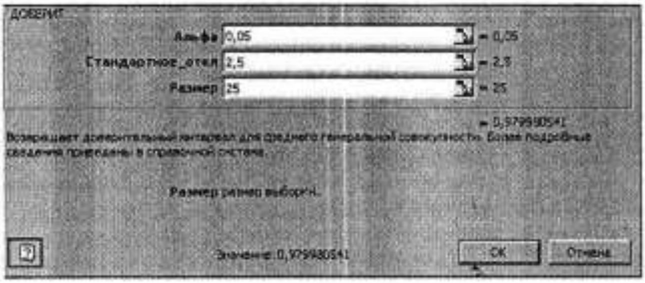


Рис. Пример заполнения диалогового окна ДОВЕРИТ

Пример №2

Предположим, ваша компания рассматривает вопрос о приобретении участка для нового магазина, торгующего в розницу. И очень важным критерием при принятии этого решения является место положения магазина, т.е. насколько оно многолюдно. Чтобы выяснить это, вы каждый день в течении двух недель подсчитываете, сколько пешеходов проходит мимо магазина. Результаты этих наблюдений составляют выборку из генеральной совокупности всех возможных дней, в течение которых магазин будет оставаться вашей собственностью.

При этом вы вычисляете *средний показатель* ежедневных результатов наблюдений, и получаете число, например, **403**. *Насколько же точно это среднее значение, полученное на основе выборки, отражает количество людей, которые будут проходить около вашего магазина в любой конкретный день?*

На этот вопрос вам поможет ответить *доверительный интервал среднего значения* (403).

Доверительный интервал-это интервал, с помощью которого возможна оценка с заданной вероятностью неизвестного значения генеральной совокупности. Это неизвестное значение называется доверительным, а его границы - доверительными границами (верхние и нижние границы). В их пределах вы можете обладать неким уровнем уверенности в существовании значения генеральной совокупности.

Чтобы провести такой анализ, выполните следующие действия:

- В ячейку А1 введите Количество прохожих;
- Сгенерируйте количество прохожих с помощью распределения Пуассона. Для этого выберите команду Сервис – Анализ данных –Генерация случайных чисел – распределение Пуассона;
- Укажите в поле Число переменных -1, в поле число случайных чисел – количество дней эксперимента, в поле Параметры – 403;
- Установите переключатель Выходной интервал и укажите ячейку А2;
- Щелкните на кнопку Ок;

- Выберите команду Сервис – Анализ данных – Описательная статистика;
- В поле Входной интервал введите A1:A15;
- Установите флажок Метки в первой строке и убедитесь, что в поле Уровень надежности установлено значение 95%;
- Установите переключатель Выходной интервал и укажите ячейку C1;
- Щелкните на кнопку Ок;
- В ячейки C5 подсчитайте среднее значение сгенерированных данных;
- В ячейках C6 и C7 подсчитайте верхние и нижние границы доверительного интервала. Для этого введите формулы =СРЗНАЧ(A2:A15)+D3и =СРЗНАЧ(A2:A15)-D3;

Что же означает полученный вами доверительный интервал? Если вы повторите свой эксперимент 100 раз, то получите 100 двухнедельных значений и 100 соответствующих доверительных интервалов. 95 из этих интервалов будут включать средний показатель для генеральной совокупности, т.е. реальное среднее значение генеральной совокупности будет находиться между нижней и верхней границами интервала. И только 5 доверительных интервалов не будут охватывать реального среднего числа совокупности.

Проверка соответствия теоретическому распределению. Следующей задачей, возникающей при анализе одной выборки, является оценка меры соответствия (расхождения) полученных эмпирических данных и каких-либо теоретических распределений. Это связано с тем, что в большинстве случаев при решении реальных задач закон распределения и его параметры неизвестны. В то же время применяемые статистические методы в качестве предпосылок часто требуют определенного закона распределения.

Наиболее часто проверяется предположение о нормальном распределении генеральной совокупности, поскольку большинство статистических процедур ориентировано на выборки, полученные из нормально распределенной генеральной совокупности.

Наиболее убедительные результаты дает использование критериев согласия. Критериями согласия называют статистические критерии, предназначенные для проверки согласия опытных данных и теоретической модели. Здесь нулевая гипотеза H_0 представляет собой утверждение о том, что распределение генеральной совокупности, из которой получена выборка, не отличается от нормального. Среди критериев согласия большое распространение получил непараметрический критерий χ^2 (хи-квадрат). Он основан на сравнении эмпирических частот интервалов группировки с теоретическими (ожидаемыми) частотами, рассчитанными по формулам нормального распределения.

Отметим, что сколько-нибудь уверенно о нормальности закона распределения можно судить, если имеется не менее 50 результатов наблюдений. В случаях меньшего числа данных можно говорить только о том, что данные не противоречат нормальному закону, и в этом случае обычно используют графические методы оценки соответствия. При большем числе наблюдений целесообразно совместное использование графических и статистических (например, тест хи-квадрат или аналогичные) методов оценки, естественно дополняющих друг друга.

Использование критерия согласия хи-квадрат. Для применения критерия желательно, чтобы объем выборки *n>40*, выборочные данные были сгруппированы в интервальный ряд с числом интервалов не менее 7, а в каждом интервале находилось не менее 5 наблюдений (частот).

Отметим, что сравниваться должны именно абсолютные частоты, а не относительные (частости). При этом, как и любой другой статистический критерий, критерий хи-квадрат не доказывает справедливость нулевой гипотезы (соответствие эмпирического распределения нормальному), а лишь может позволить ее отвергнуть с определенной вероятностью (уровнем значимости).

В MS Excel критерий хи-квадрат реализован в функции ХИ2ТЕСТ. Функция ХИ2ТЕСТ вычисляет вероятность совпадения наблюдаемых (фактических) значений и теоретических (гипотетических) значений. Если вычисленная вероятность ниже уровня значимости (0,05), то нулевая гипотеза отвергается и утверждается, что наблюдаемые значения не соответствуют нормальному закону распределения. Если вычисленная вероятность близка к 1, то можно говорить о высокой степени соответствия экспериментальных данных нормальному закону распределения.

Функция имеет следующие параметры: ХИ2ТЕСТ(*фактический_интервал;ожидаемый_интервал*). Здесь:

- *фактический _интервал* — это интервал данных, которые содержат наблюдения, подлежащие сравнению с ожидаемыми значениями;
- *ожидаемый_интервал* — это интервал данных, который содержит теоретические (ожидаемые) значения для соответствующих наблюдаемых.

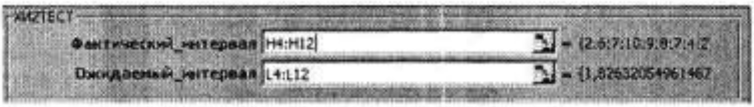
Пример №3. Проверить соответствие выборочных данных. (64,57,63,62,58,61,63,60,60,61,65,62,62,60,64,61,59,59,63,61,62,58,58,63,61,59,62,60,60,58,61,60,63,63,58,60,59,60,59,61,62,62,63,57,61,58,60,64,60,59,61,64,62,59,65) нормальному закону распределения.

1. Повторите пункты 1-4 решения примера 1.
2. Найдите теоретические частоты нормального распределения. Для этого предварительно необходимо найти среднее значение и стандартное отклонение выборки.

В ячейке I13 с помощью функции СРЗНАЧ найдите среднее значение для данных из диапазона A2:E12 (60,855). В ячейке J13 с помощью функции СТАНДОТКЛОН найдите стандартное отклонение для этих же данных (2,05). В ячейки К1 и К2 введите название столбца— *Теоретические* *частости*. Затем с помощью функции НОРМРАСП найдите теоретические частости. Установите курсор в ячейку К4, вызовите указанную функцию и заполните ее рабочие поля: *x* — G4; Среднее — *I13*; Стандартное_откл — *J13*; Интегральный — 0. Получим в ячейке К4 0,033. Далее протягиванием скопируйте содержимое ячейки *К4* в диапазон ячеек К5:К12. Затем в ячейки L1 и L2 введите название нового столбца — *Теоретические частоты*. Установите курсор в ячейку L4 и введите формулу =H$13*К4. Далее протягиванием скопируйте содержимое ячейки L4 в диапазон ячеек L5:L12.

	G	H	I	J	K	L
1	Вес	Абсолютные	Относительн	Накопленные	Теоретические	Теоретические
2	кг	частоты	частоты	частоты	частости	частоты
3						
4	57	2	0,036	0,036	0,033205828	1,82632055
5	58	6	0,109	0,145	0,073795567	4,058756212
6	59	7	0,127	0,273	0,129258576	7,109221665
7	60	10	0,182	0,455	0,178443849	9,814411704
8	61	9	0,164	0,618	0,194158732	10,67873029
9	62	8	0,145	0,764	0,16650428	9,157735407
10	63	7	0,127	0,891	0,112540024	6,189701326
11	64	4	0,073	0,964	0,059951732	3,297345259
12	65	2	0,036	1,000	0,025171529	1,384434082

3. С помощью функции ХИ2ТЕСТ определите соответствие данных нормальному закону распределения. Для этого установите табличный курсор в свободную ячейку L13. На панели инструментов Стандартная нажмите кнопку Вставка функции (fx). В появившемся диалоговом окне Мастер функций выберите категорию Статистические и функцию ХИ2ТЕСТ, после чего нажмите кнопку ОК. Появившееся диалоговое окно ХИ2ТЕСТ отодвиньте вправо на 1-2см от данных. Указателем мыши в рабочие поля введите фактический H4:H12 и ожидаемые L4:L12 диапазоны частот. Нажмите кнопку ОК. В ячейке L13 появится значение вероятности того, что выборочные данные соответствуют нормальному закону распределения — 0,9842.



4. Поскольку полученная вероятность соответствия экспериментальных данных *p=0,98* много больше, чем уровень значимости α = 0,05, то можно утверждать, что нулевая гипотеза не может быть отвергнута и, следовательно, данные не противоречат нормальному закону распределения. Более того, поскольку полученная вероятность *p=0,98* близка к 1, можно говорить о высокой степени вероятности того, что экспериментальные данные соответствуют нормальному закону.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради и на компьютере.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю и в электронном виде.

Оценка параметров законов распределения по выборочным данным

Цель работы: научится оценивать параметры законов распределения по выборочным данным.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи на вычисление характеристик случайной величины;
- оценивать параметры законов распределения по выборочным данным.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, вычислить $M(X), D(X), \sigma(X), P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно:

1. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ 1, & x>\pi/2; \end{cases} \qquad \alpha=1;\ \beta=1,5.$

2. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin(x/2), & 0 \le x \le \pi, \\ 1, & x>\pi; \end{cases} \qquad \alpha=0,1;\ \beta=0,45.$

3. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin(2x), & 0 \le x \le \pi/4, \\ 1, & x>\pi/4; \end{cases} \qquad \alpha=0,2;\ \beta=0,6.$

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 2/\sqrt{3}\cdot\sin(2x), & 0 \le x \le \pi/6, \\ 1, & x>\pi/6; \end{cases} \qquad \alpha=0,1;\ \beta=0,43.$

Краткие теоретические сведения:

Определение. Статистической *оценкой* θ_n параметра θ теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от выборки:

$\theta_n = \theta(X_1, X_2, ..., X_n)$. Функцию результатов наблюдений называют *статистикой.*

Оценка θ_n является случайной величиной, так как является функцией независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$; если произвести другую выборку, то функция $\theta_n = \theta(X_1, X_2, ..., X_n)$ примет другое значение. Если число наблюдений мало, замена параметра его оценкой, например математического ожидания средним арифметическим, приводит к ошибке. К оценке любого параметра предъявляется ряд требований, которым должна удовлетворять оценка хорошего качества: несмещенность, состоятельность и эффективность.

Определение. Если математическое ожидание $M(\bar{\theta}_n)$ равно нулю, то оценка называется *несмещенной*. В противном случае – *смещенной.* Если $M(\bar{\theta}_n) \to 0$, то оценка θ_n называется *асимптотически несмещенной*.

Требование несмещенности важно при малом числе наблюдений и указывает на отсутствие систематической ошибки.

Определение. Оценка θ_n параметра θ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру: $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} p\left\{\left|\bar{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$.

Требование состоятельности указывает на приближение оценки к истинному значению параметра θ с ростом числа наблюдений. Состоятельность оценки может быть установлена с помощью следующей теоремы.

Теорема. Если оценка θ_n параметра θ является несмещенной и $\lim\limits_{n\to\infty} D(\bar{\theta}_n) = 0$, то θ_n - состоятельная оценка.

Определение. Несмещенная оценка θ_n параметра θ называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ.

На практике не всегда удается подобрать оценки, удовлетворяющие всем трем критериям. Рассмотрим далее точечные оценки таких параметров распределения как математическое ожидание и дисперсия, т.е. эти числа будем определять по выборке.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_k$ - выборка, полученная в результате проведения k независимых наблюдений за случайной величиной X. Представим значения $x_1, x_2, ..., x_k$ случайной величины в виде $X_1, X_2, ..., X_k$, т.е. под X_i будем понимать значение случайной величины X в i-ом наблюдении. Эти случайные величины можно рассматривать как k независимых случайных величин. Поэтому: $M(X_1)=M(X_2)=...=M(X_k)=M(X)=a$ и $D(X_1)=D(X_2)=...=D(X_k)=D(X)$.

Теорема. Если $X_1, X_2, ..., X_k$ - выборка из генеральной совокупности и $M(X_i)=a,\ D(X_i)=D(X)\ \left\langle i=\overline{1,k}\right\rangle$, то выборочное среднее $\overline{X}_{\hat{A}}=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}X_i$ - несмещенная и состоятельная оценка математического ожидания $M(X)$.

Теорема. Если $X_1, X_2, ..., X_k$ - выборка из генеральной совокупности и $M(X_i)=a,\ D(X_i)=D(X)\ \left\langle i=\overline{1,k}\right\rangle$, то исправленная выборочная дисперсия $S^2=\frac{1}{k-1}\cdot\sum(X_i-\overline{X})^2=\frac{k}{k-1}\cdot D_{\hat{A}}$ - несмещенная и состоятельная оценка дисперсии $D(X)$.

Следует отметить, что относительная частота появления случайного события А в k независимых наблюдениях является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой вероятности этого события.

В случае когда объем выборок невелик точечные оценки приводят к ошибкам, т.к. дают большую погрешность. Этого недостатка лишены интервальные оценки неизвестного параметра θ, т.е. те, которые определяются концами интервала.

Определение. Интервал $\left(\theta_1, \theta_2\right)$, покрывающий с вероятностью γ истинное значение параметра θ, называется доверительным интервалом, а γ - надежностью оценки или доверительной вероятностью.

Чаще всего доверительный интервал выбирают симметричным относительно несмещенной точечной оценки параметра θ, т.е. $P\left\{\left|\theta-\theta\right|<\varepsilon\right\}=\gamma$, где число ε характеризует точность оценки. Надежность γ принято выбирать равной 0,9; 0,95; 0,99; 0,999, т.е. когда нахождение оцениваемого параметра в доверительном интервале почти достоверно.

Рассмотрим построение интервальных оценок для параметров нормального распределения: математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

Построим доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X при известной дисперсии.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ - выборка, полученная в результате проведения k независимых наблюдений за случайной величиной X, для которой известно среднее квадратическое отклонение σ. Зададим доверительную вероятность равной γ. Оценкой математического ожидания является выборочное среднее $\overline{X}_{\text{Â}}$, которое как и сама величина X распределено по нормальному закону.

Рассмотрим случайную величину $\overline{X}_{\text{Â}}$. Определим параметры её распределения:

$$M(\overline{X}_{\text{Â}}) = M\left(\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} M(X_i) = \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} M(X) = M(X) = a,$$

$$D(\overline{X}_{\text{Â}}) = D\left(\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \frac{1}{k^2}\cdot\sum_{i=1}^{k} D(X_i) = \frac{1}{k^2}\cdot\sum_{i=1}^{k} D(X) = \frac{1}{k}\cdot D(X) = \frac{\sigma^2}{k}.$$

Используем формулу теории вероятностей вероятности попадания в интервал для нормально распределенной случайной величины: $P\{|X-a|<l\} = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)$. Тогда для случайной величины $\overline{X}_B$ имеем: $\gamma = P\{|\overline{X}_{\text{Â}} - a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{k}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(t)$, где $t = \frac{\varepsilon\cdot\sqrt{k}}{\sigma}$. Из последнего равенства находим $\varepsilon = \frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{k}}$

(из этой формулы следует, что с возрастанием объема выборки точность оценки увеличивается, а увеличение надежности уменьшает точность оценки), следовательно $\gamma = P\left\{|\overline{X}_{\text{Â}} - a| < \frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{k}}\right\} = 2\Phi_0(t)$. Таким образом, интервал $\left(\overline{X}_{\text{Â}} - \frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{k}}; \overline{X}_{\text{Â}} + \frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{k}}\right)$- доверительный интервал для $a = M(X)$. Поскольку γ было задано, то по таблице значений функции Лапласа из равенства $\Phi_0(t) = \gamma/2$ находим аргумент t.

Построим доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X при неизвестной дисперсии.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ - выборка, полученная в результате проведения k независимых наблюдений за случайной величиной X, для которой известно среднее квадратическое отклонение σ. Зададим доверительную вероятность равной γ. Оценкой математического ожидания является выборочное среднее

$\overline{X}_B$, которое как и сама величина X распределено по нормальному закону: $P\left\{\left|\overline{X}-a\right|<\varepsilon\right\}=\gamma\ (*)$.

Рассмотрим вспомогательную случайную величину $T=\dfrac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}}$, (где S – исправленное среднее квадратическое отклонение X, вычисленное по выборке), которая имеет распределение Стьюдента с n-1 степенями свободы. Перейдём в неравенстве $(*)$ от случайной величины X к случайной величине T: $P\left\{\dfrac{\left|\overline{X}-a\right|}{S/\sqrt{n}}<\dfrac{\varepsilon}{S/\sqrt{n}}\right\}=\gamma$ или $P\left\{\left|T\right|<t_\gamma\right\}=\gamma$. По таблице квантилей распределения Стьюдента при данной доверительной вероятности γ и числе степеней свободы n-1, найдем значение t_γ. Из равенства $t_\gamma=\dfrac{\varepsilon}{S/\sqrt{n}}$ находим ε. Тогда неравенство $(*)$ можно переписать в следующем виде: $P\left\{\overline{X}-t_\gamma\cdot S/\sqrt{n}<a<\overline{X}+t_\gamma\cdot S/\sqrt{n}\right\}=\gamma$, т.е. доверительным интервалом для математического ожидания при неизвестном среднем квадратическом отклонении и доверительной вероятностью γ будет интервал $\left(\overline{X}-t_\gamma\cdot S/\sqrt{n};\overline{X}+t_\gamma\cdot S/\sqrt{n}\right)$.

Построим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения. Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_k$ - выборка, полученная в результате проведения k независимых наблюдений за случайной величиной X, для которой известно математическое ожидание a. Зададим доверительную вероятность равной γ. Оценкой среднего квадратического отклонения является S: $P\left\{\left|\sigma-S\right|<\varepsilon\right\}=\gamma\ (**)$. Рассмотрим вспомогательную случайную величину $\chi=\left(S/\sigma\right)\sqrt{n-1}$, квадрат которой распределен по закону χ^2 с n-1 степенями свободы. Перейдем в неравенстве $(**)$ к случайной величине χ: $S\left(1-\varepsilon/S\right)<\sigma<S\left(1+\varepsilon/S\right)$,

$$S\left(1-q\right)<\sigma<S\left(1+q\right),\text{ãäå }\ q=\varepsilon/S<1.$$

По таблице приложения вычисляем $q=q\left(\gamma,n\right)$ и подставляем в последнее неравенство, т.е. доверительным интервалом для среднего квадратического отклонения при известном математическом ожидании является интервал

$\left(S(1-q);S(1+q)\right)$. Если же $q>1$, то доверительным интервалом будет $\left(0;S(1+q)\right)$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 3.1. Основные понятия теории графов

Практическое занятие № 14

Операции над графами

Практическое занятие № 15

Решение примеров на составление матриц смежности и матриц инцидентности

Цель работы: формирование умений построения графов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять типы графов и давать их характеристики;
- составлять матрицы смежности и матриц инцидентности для графов.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Граф G задан диаграммой (рис. 1).

   1. Составьте для него матрицу смежности.
   2. Постройте матрицу инцидентности.
   3. Укажите степени вершин графа.
   4. Найдите длину пути из вершины V_2 в вершину V_5, составьте маршруты длины 5, цепь и простую цепь, соединяющие вершину V_2 и вершину V_5.
   5. Постройте простой цикл, содержащий вершину V_4.
   6. Найдите цикломатическое число графа G.
   7. Определите вид заданного графа.

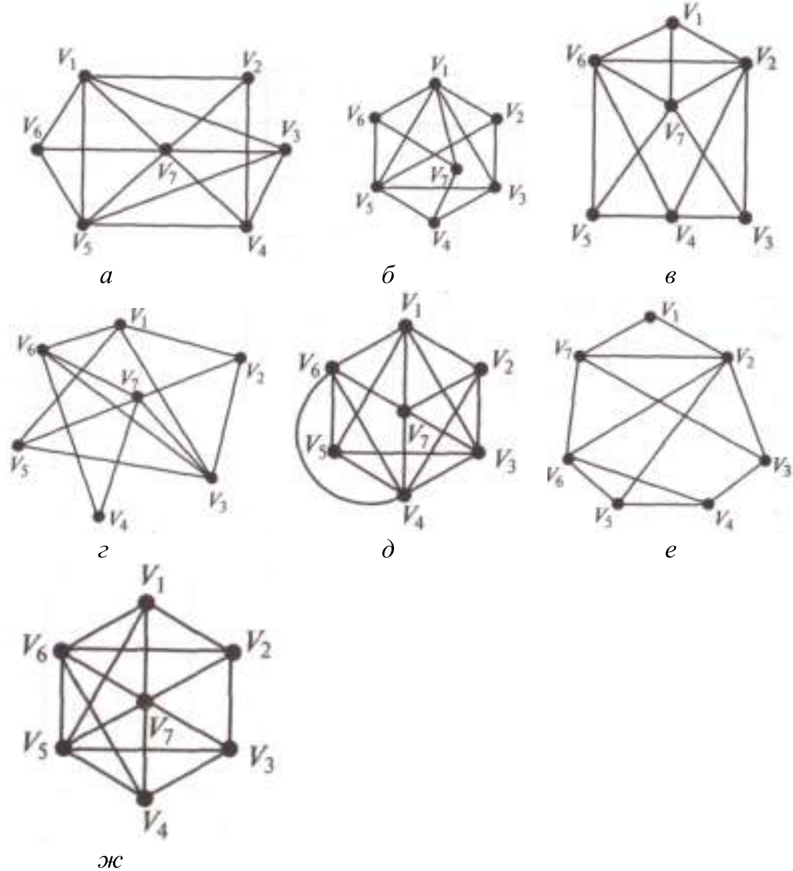


Рис. 1. Задание графа G к упр. 1 (*а*-*ж* – варианты)

2. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности для отношений, заданных графом G. Найдите число степеней входа и выхода этого графа, дайте ему характеристику (рис. 2.).

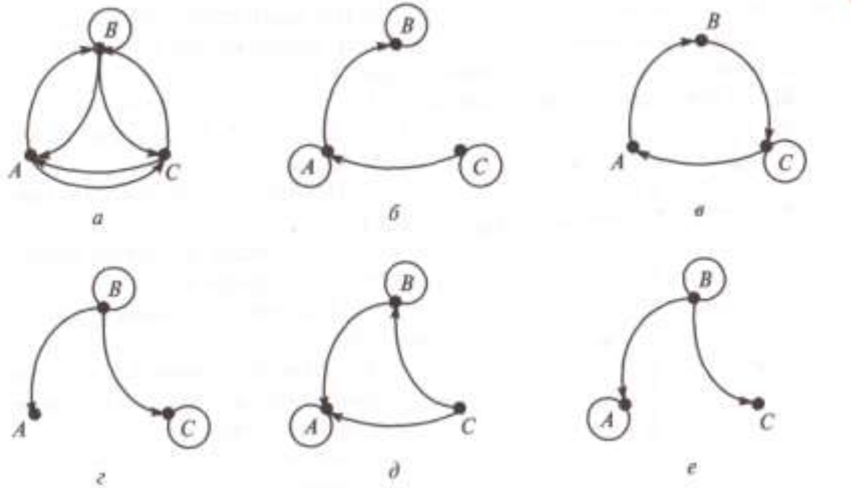


Рис. 2. Задание графа G к упр. 2 (a—e — варианты)

3. В таблице для каждого варианта заданы декартовы координаты вершин графа и перечислены ребра графа. Граф неориентирован. Следует построить граф на плоскости xOy и найти:

1. таблицу степеней вершин;
2. матрицу смежности;
3. матрицу инцидентности;
4. таблицу расстояний в графе;
5. определить радиус и центр графа.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	(1;3)	(3;5)	(6;5)	(2;2)	(3;3)	(1;0)	(3;0)	(6;2)
$(x_1;x_2)$,$(x_2;x_5)$,$(x_2;x_3)$,$(x_2;x_4)$,$(x_1;x_6)$,$(x_2;x_7)$, $(x_6;x_7)$								

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.