Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Маховский
«23» марта 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

по учебной дисциплине
ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для студентов специальности
09.02.03 Программирование в компьютерных системах
базовой подготовки

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО:
Предметно-цикловой комиссией Информатики и вычислительной техники
Председатель И.Г. Зорина
Протокол № 7 от 14 марта 2017 г.

Методической комиссией МпК
Протокол №4 от «23» марта 2017г

Составитель:
преподаватель МпК ФГБОУ ВО МГТУ Елена Александровна Васильева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Элементы высшей математики».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1.ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия. Являясь частью изучения учебной дисциплины, они призваны, экспериментально подтвердить теоретические положения и формировать общие и профессиональные компетенции, практические умения.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений - учебных умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности по математическим и естественно-научным, общепрофессиональным дисциплинам.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующих федеральных государственных образовательных стандартов среднего профессионального образования.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предусмотрено проведение практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

– выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

– решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;

– применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

– решать дифференциальные уравнения;

– пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

ПК 2.4. Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

А также формированию общих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.
ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Элементы высшей математики» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2.МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическое занятие № 1
Операции над матрицами. Вычисление определителей

Формируемая компетенция:

ПК 2.4. Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.

Цель работы: формирование умений выполнять операции над матрицами; вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции над матрицами;
- вычислять определители.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Даны квадратные матрицы второго порядка $K = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислить значения выражений: а) $K+M$; б) $3M-K$; в) $K \cdot M$; г) K^2; д) M^2.
2. Найти значение выражения $f(A) = A^2 - 3 \cdot A + 7$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Найти значение матрицы A^3, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Даны квадратные матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Вычислить их определители.

5. Вычислить определитель матрицы четвертого порядка $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, разложив по элементам первого столбца.

6. Записать матрицы, транспонированные к данным: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ -9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Краткие теоретические сведения:

1. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A,$ элементы, которых $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n.

Следствия.

1) Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

2) Произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, то есть $0 \cdot A = O$.

2. Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ *для* $i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n$(т.е. матрицы складываются поэлементно).

В частном случае $A+O=A$.

3. Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A-B=A+(-1)B$.

*4. Умножение матриц. Умножение матрицы A на матрицу B*определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Тогда *произведением матриц* $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij}равен сумме произведений элементовi-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj}\ ,\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами:

1) $A + B = B + A.$
2) $(A + B) + C = A + (B + C).$
3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$
4) $A(B + C) = AB + AC.$
5) $(A + B)C = AC + BC.$
6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$
7) $A(BC) = (AB)C.$
8) $A \cdot E = E \cdot A = A.$
9) $A \cdot B \neq B \cdot A.$

5. Возведение в степень. Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы *A* называется произведение *m* матриц, равных *A*, т.е. $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{m}$.

Операция возведение в степень определяется только для квадратных матриц.

Следствия. 1) $A^{\circ} = E$; 2) $A^1 = A$; 3) $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$; 4) $(A^{m)^k} = A^{mk}$.

6. Транспонирование матрицы. Матрица, полученная из матрицы *A* путем замены строк на соответствующие столбцы, называется *транспонированной* относительно матрицы *A* и обозначается A', то есть:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times m}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или *определителем первого порядка,* называется элемент a_{11}: $\Delta_1 = |A| = a_{11}$.

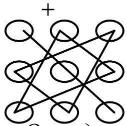
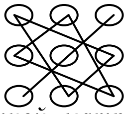
Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, или *определителем второго порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A=(a_{ij})$, или *определителем третьего порядка*, называется число, которое вычисляется под формуле:

$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу, легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется *правилом треугольников* или *правилом Сарриуса*.

+  $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ – 

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \quad + a_{in}A_{in}$(разложение по элементам i-ой строки);

$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \quad + a_{nj}A_{nj}$ (разложение по элементам $_j$-го столбца).

Порядок выполнения работы:

1.Решить задания в тетради.

2.Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 2
Нахождение обратной матрицы

Формируемая компетенция:

ПК 2.4. Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.

Цель работы: формирование умений вычислять обратные матрицы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять обратные матрицы.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти матрицы, обратные данным:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 11 & 10 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Краткие теоретические сведения:

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A|=0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A|\neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A^T, транспонированную к A.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы и составляем из них присоединенную матрицу A^*.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$.

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 3
Основы работы в Mathcad

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений выполнять вычисления в математическом пакете Mathcad.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять значения выражений в математическом пакете Mathcad.

Материальное обеспечение:

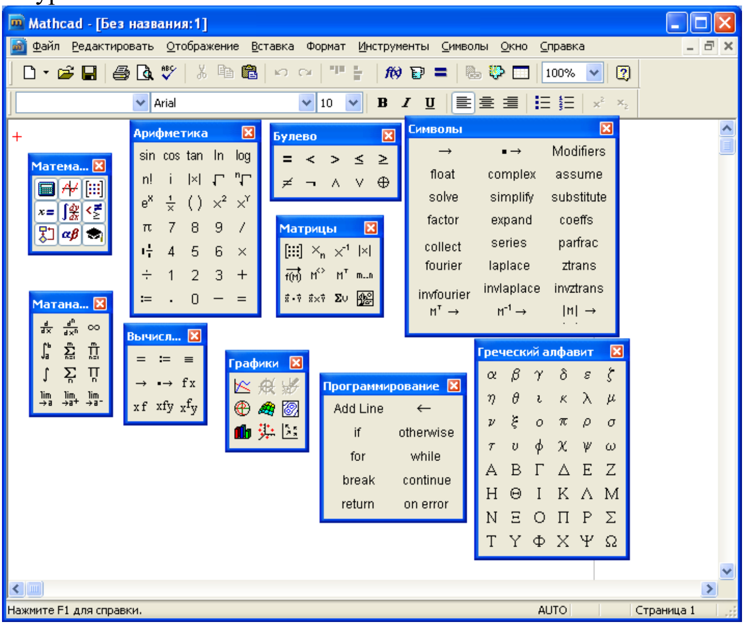
Раздаточный материал (карточки с заданиями).

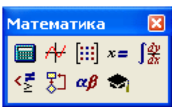
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Общие сведения

Основное окно приложения имеет ту же структуру, что и большинство приложений Windows. Сверху вниз располагаются заголовок окна, строка меню, панели инструментов (стандартная и форматирования) и рабочий лист, или рабочая область, документа. Новый документ создается автоматически при запуске MathCAD. Файлы документов в MathCAD имеют расширение .mcd.

Большинство команд можно выполнить как с помощью меню (верхнего или контекстного), так и панелей инструментов или клавиатуры.





Панель Math (Математика) предназначена для вызова на экран еще девяти панелей, с помощью которых происходит вставка математических операций в документы. Чтобы вызвать какую-либо из них, нужно нажать соответствующую кнопку на панели Математика.

В окне редактирования формируется документ MathCAD. Новый документ получает имя Untitled (Без названия) и порядковый номер. Одновременно открыто может быть до восьми документов.

Документ состоит из трех видов областей: формульных, текстовых и графических. Расположение нетекстовых блоков в документе имеет принципиальное значение. Области просматриваются системой, интерпретируются и исполняются. Просмотр идет слева направо и сверху вниз.

Для ввода текстового комментария нужно выполнить команду Text Region (Текстовая область) из пункта меню Insert или нажать клавишу с двойной кавычкой ("), или нажать на кнопку текста на панели инструментов. Текстовая область служит для размещения текста между формулами и графиками.

При этом в месте ввода появляется курсор в виде вертикального штриха, на место которого вводятся символы текста. Внутри текста курсор перемещается клавишами перемещения курсора. Переход на новую строку производится нажатием на клавишу Enter. Для окончания ввода нужно щелкнуть мышью вне текстовой области.

Для ввода формулы нужно установить указатель мыши в свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой мыши. Появится визир в виде красного крестика. Он указывает место, с которого начинается набор формулы.

Константы и переменные

Константами называются поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены.

В MathCAD применяются десятичные, восьмеричные и шестнадцатеричные числовые константы. Десятичные константы могут быть целочисленными, вещественными, заданными с фиксированной точкой, и вещественными, заданными в виде мантиссы и порядка.

В MathCAD содержится особый вид констант - размерные. Помимо своего числового значения они характеризуются еще и указанием на то, к какой физической величине они относятся. Для этого указания используется символ умножения. В системе MathCAD заданы следующие основные типы физических величин: time (время), length (длина), mass (масса) и charge (заряд). При необходимости их можно изменить на другие.

Переменные являются поименованными объектами, которым присвоено некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Тип переменной определяется ее значением; переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т. д. Имена констант, переменных и иных объектов называют идентификаторами.

Имя переменной называется идентификатором. MathCAD различает в идентификаторах символы верхнего и нижнего регистров. Например: ABC и AbC имена разных переменных.

Идентификаторы MathCAD должны начинаться с буквы и могут содержать следующие символы:

- латинские буквы любого регистра;
- арабские цифры от 0 до 9;

- символ подчеркивания (_), символ процент (%) и символ (.);
- буквы греческого алфавита (набираются с использованием клавиши Ctrl или применяется палитра греческих букв).

Определение переменных

Переменные должны быть предварительно определены пользователем, т.е. им необходимо хотя бы однажды присвоить значение. В качестве оператора присваивания используется знак :=, тогда как знак = отведен для вывода значения константы или переменной. Попытка использовать неопределенную переменную ведет к выводу сообщения об ошибке.

В MathCAD различают: локальные и глобальные переменные.

Локальные переменные вводятся:

Имя_переменной : выражение

На экране:

Имя_переменной := выражение

Глобальные переменные вводятся:

Имя_переменной ~ выражение

На экране:

Имя_переменной ≡ выражение

Если переменной присваивается начальное значение с помощью оператора :=, такое присваивание называется локальным. До этого присваивания переменная не определена и ее нельзя использовать. MathCAD читает рабочий документ слева направо и сверху вниз, поэтому определив переменную, ее можно использовать в вычислениях везде правее и ниже равенства, в котором она определена. Однако с помощью знака ≡ (три горизонтальные черточки) можно обеспечить глобальное присваивание, т. е. оно может производиться в любом месте документа. К примеру, если переменной присвоено таким образом значение в самом конце документа, то она будет иметь это же значение и в начале документа.

Например:

Ввод с клавиатуры	Вид на экране
local:137	local := 137 локальное определение переменной local;
global~987.23	global ≡ 987.23 глобальное определение переменной global.

Переменные могут использоваться в математических выражениях, быть аргументами функций или операндом операторов.

Переменные могут быть и размерными, т. е. характеризоваться не только своим значением, но и указанием физической величины, значение которой они хранят. Проведение расчетов с размерными величинами и переменными особенно удобно при решении различных физических задач.

Предопределенные переменные

Предопределенные (системные) переменные – особые переменные, которым изначально системой присвоены начальные значения.

Переменная	Ввод	Назначение	Значение по умолчанию
π	Ctrl + Shift + p	Число π	3.14159
e	e	Основание натурального логарифма	2.718
∞	Ctrl + Shift + z	Системная бесконечность	10^{307}
i или j	1i или 1j	Мнимая единица	
%		Процент	0.01
TOL		Погрешность численных методов	0.001
ORIGIN		Нижняя граница индексации массивов	0

Операторы

Операторы - элементы языка, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например, относятся символы арифметических и логических операций, знаки вычисления сумм, произведений, производной и интеграла и т. д.

Операторы, обозначающие основные арифметические действия, вводятся с панели Calculator (Калькулятор, Арифметика).

Вычислительные операторы вставляются в документы при помощи панели инструментов Calculus (Матанализ). При нажатии любой из кнопок в документе появляется символ соответствующего математического действия, снабженный несколькими местозаполнителями. Количество и расположение местозаполнителей определяется типом оператора и в точности соответствует их общепринятой математической записи.

Результатом действия логических, или булевых, операторов являются только числа 1 (если логическое выражение, записанное с их помощью, истинно) или 0 (если логическое выражение ложно).

Вычислительные операторы сгруппированы на панели Evaluation (Вычисления):

- Численный вывод (Evaluate Numerically) =

- Символьный (аналитический) вывод (Evaluate Symbolically) $\rightarrow$
- Присваивание (Definition) :=
- Глобальное присваивание (Global Definition) $\equiv$.

Оператор	Клавиша	Назначение оператора
$X := Y$	$X : Y$	Локальное присваивание X значения Y
$X \equiv Y$	$X \sim Y$	Глобальное присваивание X значения Y
$X =$	$X =$	Вывод значения X
$X + Y$	$X + Y$	Сложение X с Y
$X - Y$	$X - Y$	Вычитание из X значения Y
$X \cdot Y$	$X * Y$	Умножение X на Y
$\frac{X}{Z}$	X / Z	Деление X на Z
$X \div Y$	*Ctrl + /*	Линейное деление
$a\frac{b}{c}$	*Ctrl + Shift + +*	Дробь (смешанный номер)
z^w	$z \wedge w$	Возведение z в степень w
$\sqrt{z}$	z \	Вычисление квадратного корня из z
$n!$	$n\ !$	Вычисление факториала
B_n	*B [n*	Ввод нижнего индекса n
$A_{n,m}$	*A [n , m*	Ввод двойного нижнего индекса
$A^{<n>}$	*A Ctrl + 6 n*	Ввод верхнего индекса (для векторов)

Ранжированные (дискретные) переменные

Ранжированная переменная – переменная, которая принимает ряд значений при каждом ее использовании.

Для определения ранжированной переменной общего вида используется выражение:

Имя_переменной := начальное_значение, начальное_значение + шаг .. конечное_значение.

Если шаг равен 1, тогда ранжированную переменную можно задавать следующим образом:

Имя_переменной := начальное_значение.. конечное_значение.

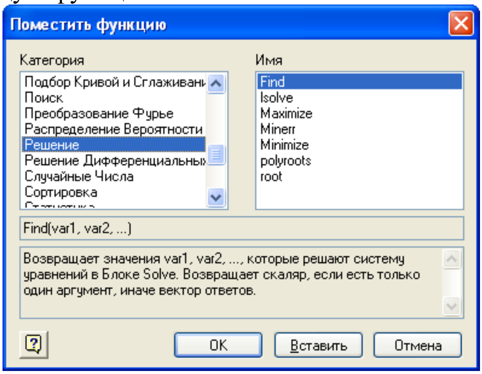
Любое выражение с ранжированными переменными после знака равенства (=) создает таблицу вывода.

Определение функций

Функция – выражение, согласно которому проводятся некоторые вычисления с его аргументами и определяется его числовое значение.

Функции в пакете MathCAD могут быть встроенные и определенные пользователем.

В MathCAD имеется множество встроенных функций. Для их ввода используется команда меню Вставка / Функция или кнопка на панели инструментов . В диалоговом окне нужно выбрать Категорию и соответствующую функцию.



Функция пользователя вначале должна быть определена, а затем к ней может быть произведено обращение. Функция пользователя определяется следующим образом:

Имя_функции(Переменная1, Переменная2, ...) := Выражение

Задается имя функции, в скобках указывается список аргументов функции - это перечень используемых в выражении переменных, разделяемых запятыми. Затем записывается знак присваивания, справа от которого записывается выражение. Выражение - это любое арифметическое выражение, содержащее доступные системе операторы и функции с операндами и аргументами, указанными в списке аргументов.

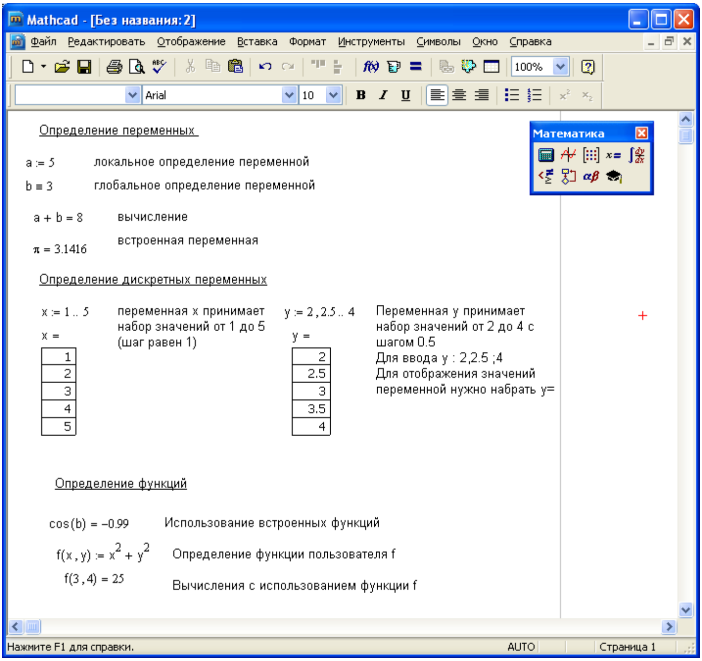
Примеры задания функций одной и двух переменных:

f(x):= 10 - exp(x)

*mult(x, y) := x*y*

Обращение к функции осуществляется по ее имени с подстановкой на место аргументов констант, переменных, определенных до обращения к функции, и выражений. Например:

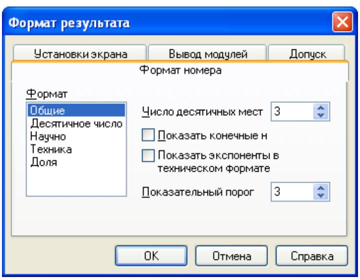
f(3), sin(1), mult(2,3).



Форматирование результатов

Способ, которым MathCAD выводит числа, называется форматом результата. Формат результата может быть установлен для всего документа (глобальный формат) или для отдельного результата (локальный формат).

Глобальный формат устанавливается командой меню Формат/Результат. В диалоговом окне, появляющемся после выбора этой команды, устанавливается выводимая точность числа, диапазон



показателя степени (если вывод чисел нужен в форме с плавающей запятой) и точность нуля. После внесения требуемых изменений нужно нажать кнопку ОК.

Для установки формата отдельного числа нужно: щелкнуть мышью на выражении, результат которого нужно переформатировать; вызвать команду форматирования и проделать вышеописанные действия.

Задания для самостоятельной работы

Задание № 1. Вычислить значение арифметического выражения:

Вариант	Выражение	Вариант	Выражение
1	$1\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$	2	$1\frac{1}{7}+2\frac{1}{5}$
3	$3\frac{3}{4}-\frac{4}{5}$	4	$\frac{5}{7}\div\frac{4}{21}$
5	$\frac{1}{3}\div\frac{5}{12}$	6	$\frac{5}{6}\cdot 2.4$
7	$\frac{4}{5}-2.5$	8	$3\frac{1}{11}+\frac{1}{3}$
9	$\frac{1}{5}+2\frac{1}{9}$	10	$5\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{17}$

Задание № 2. Вычислить значение арифметического выражения:

Вариант	Выражение
1	$\dfrac{\left(13.75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1.2}{\left(10.3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6.8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}$
2	$\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0.1+\frac{1}{15}\right)\div\left(\frac{1}{6}+0.1-\frac{1}{15}\right)\cdot 2.52}{\left(0.5-\frac{1}{3}+0.25-\frac{1}{5}\right)\div\left(0.25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}$
3	$\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2.5}{2.5-\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4.6-2\frac{1}{3}}{4.6+2\frac{1}{3}}\cdot 5.2\right)\div\left(\dfrac{0.05}{\frac{1}{7}-0.125}+5.7\right)$
4	$\dfrac{0.4+8\cdot\left(5-0.8\cdot\frac{5}{8}\right)-5\div 2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8.9-2.6\div\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90$
5	$\dfrac{\left(\frac{3}{5}+0.425-0.005\right)\div 0.1}{30.5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}+\dfrac{6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}}{26\div 3\frac{5}{7}}-0.05$

6	$$\frac{3\frac{1}{3}\cdot 1.9+19.5\div 4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0.16}\div\frac{3.5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0.5\cdot\left(1\frac{1}{20}+4.1\right)}$$
7	$$\frac{\left(1\frac{1}{5}\div\left(\frac{17}{40}+0.6-0.005\right)\right)\cdot 1.7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\frac{4.75+7\frac{1}{2}}{33\div 4\frac{5}{7}}\div 0.25$$
8	$$\frac{\left(4.5\cdot 1\frac{2}{3}-6.75\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(3\frac{1}{3}\cdot 0.3+5\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)\div 2\frac{2}{3}}+\frac{1\frac{4}{11}\cdot 0.22\div 0.3-0.96}{\left(0.2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1.6}$$
9	$$\frac{\left(1.88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0.625-\frac{13}{18}\div\frac{26}{9}}+\frac{\left(\frac{0.216}{0.15}+0.56\right)\div 0.5}{\left(7.7\div 24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4.5}$$
10	$$\frac{0.128\div 3.2+0.86}{\frac{5}{6}\cdot 1.2+0.8}\cdot\frac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot 3.6}{0.505\cdot\frac{2}{5}-0.002}$$

Задание № 3. Вычислить значение арифметического выражения. Результат выведите с 6 знаками после запятой.

Вариант	Значения переменных	Выражение
1	x = 3.981 y = 1.625 c = 0.512	$$h=\frac{\sqrt{c+x^2\cdot(\cos^5(x)+c)}+\sqrt[5]{\sin x+\ln y}}{c+y}$$
2	x = -6.251 a = 0.827 z = 25.001	$$b=\frac{x^3+z}{\cos^2 x+1}+tgx^2-\sqrt{\sin x+a}+\frac{e^x}{3x^2}$$
3	x = 3.251 y = 3.325 z = 0.466	$$h=\frac{\sin z+\cos 2x}{2x^5+tgx}+\sqrt[3]{3x+2y}$$
4	x = 0.622 y = 3.325 z = 5.541	$$\varphi=\frac{(\cos x-\sin y)^3}{\sqrt{\lvert tg(z)\rvert}}+\ln^2(x\cdot y\cdot z)$$

5	x = 17.421 b = 10.365 z = 0.828	$k = \dfrac{1 + sin^3 x}{z^2} + cos^2 x + \dfrac{ln^2 x + b}{x^4}$
6	x = 2.444 a = 0.869 z = -0.166	$g = \left\| z^2 - \dfrac{1}{e^a + 3} \right\| - \dfrac{1 + \sin^3 x}{a^2}$
7	x = 0.335 y = 0.025 z = 32.005	$t = y^{x+1} + \sqrt{\|x\| + e^y} - \dfrac{z^{3x} - \sin^2(y)}{y + z^2 /(e^x)}$
8	x = 3.258 r = 4.005 z = -0.666	$p = \dfrac{e^x - 2}{z + 3} + \sqrt{\sin^2 x^5} - \dfrac{r^3 + 1}{\cos^2(r-2) + 1}$
9	x = 0.100 y = -8.750 z = 0.765	$g = \left((1 + y) \cdot \sqrt{\sin^2(z)} - \dfrac{\|y - x\|}{5} \right)^3$
10	x = 1.542 a = 3.261 z = 8.005	$r = \dfrac{x^2}{e^a} + \dfrac{1}{3} \cdot \sin^2 z - \ln \sqrt{2x}$

Задание № 4. Определить ранжированные переменные x, y, и z, показать их значения в таблицах вывода.Определить по заданному выражению функцию пользователя, вычислить значения функции для переменных x, y, и z и показать их в таблице вывода.

Вариант	Ранжированная переменная	Выражение
1	x=3, 3.9..5 y = 5, 4.6..1 z = 5..10	$2x^3 - 9x^2 + 1$
2	x = 4,4.9..6 y = 3, 1.4..-2 z = 6..11	$5x^3 - x^2 + 3$
3	x = 5, 5.9..7 y = -7, -8.6..-13 z = 7..12	$x^2 - 10x + 2$
4	x = 6, 6.9..8 y = 8, 7.4..4 z = -8..-4	$x^2 - 4sin(x)$
5	x = 7, 7.9..9 y = 8,7.3..5 z = 9..15	$cos\,2x - 0.4x^3 + 1$

6	x = 8, 8.9..10 y = 9,7.8..5 z = 10..15	$(x+1)^3 + x - 2$
7	x = 3, 3.5..6 y = 6, 5.3..2 z = 6..10	$ln\left(\frac{1}{x}\right) - 4$
8	x = 5, 5.6..8 y = 4, 2.3..0 z = 8..13	$2 \cdot x - sin\, x$
9	x = 3,3.5..8 y = 9, 7.5..-4 z = -9..4	$\frac{1}{x^2} - 3$
10	x = 2, 2.5..7 y = 8, 6.5..1 z = 6..12	$cos\left(-\frac{x}{100}\right) \cdot sin\left(\frac{x}{10}\right)$

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать теоретический материал.

2. Получить у преподавателя номер варианта для самостоятельной работы и выполнить задания.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в виде файлов преподавателю.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 4
Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса

Формируемая компетенция:

ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

Цель работы: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы линейных уравнений.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Решить системы линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

2. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Метод Крамера

Теорема Крамера. Пусть Δ – определитель матрицы системы A, а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1,2\dots n.).$$

Формула получила название формулы Крамера.

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Крамера.

1). Вычислить определитель матрицы A, составленной из коэффициентов системы линейных уравнений.

2). Составить матрицы A_1, A_2, ..., A_n, путем замены соответствующих столбцов столбцом свободных членов, и вычислить их определители.

3). Вычислить значения переменных по формулам Крамера: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$.

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Метод Гаусса является наиболее общим точным методом решения и исследования систем линейных уравнений. Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к ступенчатому виду, из которого все решения системы могут быть найдены непосредственно.

Элементарными преобразованиями системы являются:

- перестановка любых двух уравнений системы;
- умножение любого уравнения системы на число $\lambda \neq 0$;
- вычеркивание уравнения, у которого все коэффициенты и свободный член равны нулю;
- сложение двух уравнений системы.

Любое элементарное преобразование системы не меняет множество ее решений.

Чаще всего преобразования выполняются не с самой системой, а с ее расширенной матрицей, при этом элементарные преобразования системы легко превращаются в элементарные преобразования матрицы.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 5
Решение систем линейных уравнений в Mathcad

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений выполнять операции с матрицами и решать системы линейных уравнений в математическом пакете Mathcad.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции с матрицами в математическом пакете Mathcad;

- решать системы линейных уравнений в математическом пакете Mathcad.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (инструкция).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Общие сведения

Задачи линейной алгебры, решаемые в MathCAD, можно условно разделить на два класса. Первый - это простейшие матричные операции, которые сводятся к определенным арифметическим действиям над элементами матрицы. Они реализованы в виде операторов и нескольких специфических функций, предназначенных для создания, объединения, сортировки, получения основных свойств матриц и т. д. Второй класс - это более сложные действия, которые реализуют алгоритмы вычислительной линейной алгебры, такие как вычисление определителей и обращение матриц, вычисление собственных векторов и собственных значений, решение систем линейных алгебраических уравнений и различные матричные разложения.

Простейшие операции матричной алгебры реализованы в MathCAD в виде операторов, причем их запись максимально приближена к математическому значению. Каждый оператор выражается соответствующим символом. Некоторые операции применимы только к квадратным матрицам $N \times N$, некоторые допускаются только для векторов (например, скалярное произведение), а другие, несмотря на одинаковое написание, по-разному действуют на векторы и матрицы.

Создание матриц

Имеется два способа создать матрицу.

1-й способ. Использование команды создания массивов:

- Воспользоваться командой Вставка/ Матрица;
- нажатие клавиш Ctrl+M;

- выбор пиктограммы с изображением шаблона матрицы на панели инструментов Матрицы.

В диалоговом окне указать размерность матрицы, т. е. количество ее строк *m* (Rows) и столбцов n (Columns).

Для векторов один из этих параметров должен быть равен 1. При *m= 1* получим вектор-столбец, а при *n*= 1- вектор-строку.

Далее на экране появится шаблон $\begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$, в который нужно ввести значения элементов массива.

Обращаться к отдельным элементам вектора или матрицы можно используя нижний индекс. Для элемента матрицы указываются два индекса, один - для номера строки, другой - для номера столбца.

Чтобы ввести нижний индекс, нужно нажать клавишу [после имени вектора или матрицы или выбрать команду x_n на панели Матрицы.

2-й способ. Использование ранжированной переменной.

Ранжированная переменная используется для определения индекса (номера) элемента массива.

Например:

1) Создать матрицу B, состоящую из 2 строк и 3 столбцов.

$ORIGIN := 1$ Çàäàäèì начальный индекс массива равным

$i := 1..2$ Êîëè÷åñòâî строк

$j := 1..3$ Êîëè÷åñòâî столбцов

$B_{i,j} := i + j$ Элементы матрицы рассчитываются по заданной формуле

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Создать вектор S, состоящий из 3 элементов

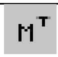
$ORIGIN := 1$ Çàäàäèì начальный индекс массива равным

$i := 1..3$ Êîëè÷åñòâî элементов вектора

$S_i := i^2$

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Команды панели инструментов Матрицы

Кнопка	Назначение
	Создание матрицы
	Обратная матрица
	Определитель матрицы
	Транспонирование матрицы
	Выделение столбца матрицы

Операторы для работы с массивами

Обозначения: для векторов - V, для матриц - M и для скалярных величин - z.

Оператор	Ввод	Назначение оператора
V1+V2	V1+V2	Сложение двух векторов V1 и V2
V1-V2	V1-V2	Вычитание двух векторовV1 и V2
-M	-M	Смена знака у элементов матрицы M
V-z	V-z	Вычитание из вектора V скаляра z
z*V, V*z	z*V, V*z	Умножение вектора V на скаляр z
z*M, M*z	z*M, M*z	Умножение матрицы M на скаляр z
V1*V2	VI*V2	Умножение двух векторов V1 и V2
M*V	M*V	Умножение матрицы M на вектор V
M1*M2	M1*M2	Умножение двух матриц M1 и M2
$\frac{V}{z}$	V/z	Деление вектора V на скаляр z
$\frac{M}{z}$	M/z	Деление матрицы M на скаляр z
M^n	M^n	Возведение матрицы M в степень *n*

Фрагмент документа MathCAD:

Äåéñòâèÿ с матрицами

$ORIGIN := 1$ Çàäàåì начальный индекс массива равным 1

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A| = 12$$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 6 & 16 & 18 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.25 & 0.5 & -0.25 \\ -1.5 & 0 & 0.5 \\ 1.417 & -0.167 & -0.25 \end{pmatrix} \qquad A^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Функции для работы с векторами и матрицами.

Некоторые из них (V должен быть вектором, А может быть вектором либо матрицей):

length(V) -возвращает число элементов в векторе v;

last(V) - возвращает индекс последнего элемента;

max(A) - возвращает максимальный по значению элемент;

min(A) - возвращает минимальный по значению элемент.

Матричные функции

Для работы с матрицами также существует ряд встроенных функций:

augment(M1, M2) - объединяет в одну матрицы M1 и M2, имеющие одинаковое число строк;

identity(n) - создает единичную квадратную матрицу размером $n \times n$, (n – размер матрицы (число));

stack(MI, M2) - объединяет две матрицы M1 и M2, имеющие одинаковое число столбцов, сажая M1 над M2;

diag(V) - создает диагональную матрицу, элемент главной диагонали которой - вектор V;

cols(M) - возвращает число столбцов матрицы M;

rows(M) - возвращает число строк матрицы M;

rank(M) -возвращает ранг матрицы M;

tr(M) - возвращает след (сумму диагональных элементов) квадратной матрицы M;

mean(M) - возвращает среднее значение элементов массива M;

median(M) - возвращает медиану элементов массива M;

eigenvals(M) - возвращает вектор, элементами которого являются собственные значения матрицы M (M должна быть квадратной матрицей.);

submatrix(M,ir,jr,ic,jc) - возвращает подмассив, состоящий из всех элементов, которые содержатся в строках с ir по jr и столбцах с ic по jc массива M.

Задания для самостоятельной работы

1. Ввести в документ название лабораторной работы, вариант задания и фамилию студента.
2. Создать квадратные матрицы A, B, D, размером (5,5,4 соответственно) первым способом
3. Исследовать следующие свойства матриц на примере преобразования заданных массивов:

- транспонированная матрица суммы двух матриц равна сумме транспонированных матриц $(A+B)^T=A^T+B^T$;
- транспонированная матрица произведения двух матриц равна сумме произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке: $(A*B)^T=B^T*A^T$;
- при транспонировании квадратной матрицы определитель не меняется: $|D|=|D^T|$;
- произведение квадратной матрицы на соответствующую ей квадратную дает единичную матрицу (элементы главной диагонали единичной матрицы равны 1, а все остальные – 0) $D*D^{-1}=E$.

4. Для матриц A,B найти обратные матрицы.
5. Найти определители матриц A,B.
6. Для матрицы A увеличить значения элементов в № раз, где № - номер варианта.
7. Для матрицы B увеличить значения элементов на №.
8. Создать вектор C вторым способом, количество элементов которого равно 6.
9. Применить к матрицам A, B, D встроенные матричные функции (всевозможные) из приведенных в пункте “Функции для работы…..”
10. Применить к вектору C встроенные векторные функции.
11. Применить ко всем матрицам и вектору общие встроенные функции.
12. Сохранить документ.

Решение систем уравнений с помощью функции Lsolve

Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции lsolve.

Функция lsolve(A, b) - возвращает вектор решения x такой, что Ax = b.

Фрагмент решения системы линейных уравнений матричным способом и с помощью функции *lsolve* в Mathcad:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

Запишем в матричном виде:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4$$

$$x := A^{-1} \cdot b \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x := \mathrm{lsolve}(A, b)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение системы уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса, его еще называют методом Гауссовых исключений, состоит в том, что систему уравнений приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей.

В матричной записи это означает, что сначала (прямой ход метода Гаусса) элементарными операциями над строками приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, а затем (обратный ход метода Гаусса) эту ступенчатую матрицу преобразуют так, чтобы в первых n столбцах получилась единичная матрица. Последний, (n + 1) столбец этой матрицы содержит решение системы.

В MathCAD прямой и обратный ходы метода Гаусса выполняет функция rref(A).

Фрагмент решения системы линейных уравнений методом Гаусса в Mathcad:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$ORIGIN := 1$$

Формирование расширенной матрицы системы:

$$A1 := augment(A, b) \qquad A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Приведение расширенной матрицы к ступенчатому виду
(прямой и обратный ходы метода Гаусса

$$A2 := rref(A1) \qquad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x := submatrix(A2, 1, 4, 5, 5) \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение систем уравнений с помощью функций *Find* или *Minner*

Для решения системы уравнений с помощью функции Find необходимо выполнить следующее:

1. Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений. MathCAD решает систему с помощью итерационных методов;
2. Напечатать ключевое слово Given. Оно указывает MathCAD, что далее следует система уравнений;
3. Введите уравнения и неравенства в любом порядке. Используйте [Ctrl]= для печати символа =. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов <, >, ≥ и ≤;
4. Введите любое выражение, которое включает функцию Find, например: x:= Find(x, y).

Ключевое слово *Given*, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое - либо выражение, содержащее функцию *Find*, называют блоком решения уравнений.

Фрагмент решения системы линейных уравнений с помощью функции *Find* в Mathcad:

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0 \quad x4 := 0$ Начальные приближения

Given

$x1 + 2x2 + 3x3 + 4x4 = 30$

$-x1 + 2\cdot x2 - 3\cdot x3 + 4x4 = 10$

$x2 - x3 + x4 = 3$

$x1 + x2 + x3 + x4 = 10$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3, x4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Функция *Minner* очень похожа на функцию *Find* (использует тот же алгоритм). Если в результате поиска не может быть получено дальнейшее уточнение текущего приближения к решению, *Minner* возвращает это приближение. Функция *Find* в этом случае возвращает сообщение об ошибке. Правила использования функции *Minner* такие же, как и функции *Find*.

Функция *Minerr(x1, x2, . . .)* - возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Задания для самостоятельной работы

1. Решить систему линейных уравнений матричным способом и используя функцию lsolve;
2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса;
3. Решить систему линейных уравнений, используя функцию Find.

Вариант	Система линейных уравнений	Вариант	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$

3	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23 \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88 \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72 \\ x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -159 \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать теоретический материал.

2. Получить у преподавателя номер варианта для самостоятельной работы и выполнить задания.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в виде файлов преподавателю.

Тема 2.1. Основы алгебры векторов

Практическое занятие № 6
Операции над векторами

Формируемая компетенция:

ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

Цель работы: формирование умений выполнять операции над векторами; вычислять модуль и скалярное произведение векторов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции над векторами;
- вычислять модуль вектора;
- вычислять скалярное произведение векторов.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Даны векторы $\bar{a} = (4, -2, 4)$ и $\bar{b} = (4, -2, -4)$. Найти: а) векторы $\bar{c} = \frac{1}{2}\bar{a}$ и $\bar{d} = 2\bar{a} + \bar{b}$; б) угол между векторами $\bar{c}$ *и* $\bar{d}$.

2. Найти координаты и длину вектора $\overline{AB}$, если $A(2, -3)$, $B(4, -2)$.

3. Даны векторы $\bar{a} = (3, -1)$, $\bar{b} = (1, -2)$, $\bar{c} = (-1, 7)$. Найти: а) длину вектора $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$; б) разложить вектор $\bar{p}$ по векторам $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$.

4. Построить в системе координат вектор $\bar{p} = \bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}$, взяв координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ из задания 3.

5. Найти угол между векторами $\bar{m} = 3\bar{a} - 4\bar{b}$ и $\bar{n} = -\bar{a} + 2\bar{b}$, если $\bar{a} = (3, -6, -1)$, $\bar{b} = (1, 4, -5)$.

6. Найти координаты и длину вектора $\overline{MN}$, если $M(3, 2, -7)$, $N(-3, 4, 2)$.

7. Найти периметр треугольника *ABC,* если известны координаты его вершин $A(-4, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(0, 1)$.

Краткие теоретические сведения:

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ с начальной точкой *A* и конечной точкой *B*. Векторы могут обозначаться: $\overline{a} = \overline{AB}$.

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \textit{или} \quad \left|\overline{a}\right| = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad (1)$$

Линейные операции над векторами в координатной форме. Пусть вектор $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тогда

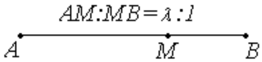
$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$,

$\overline{d} = \overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)$,

а произведение вектора $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на число λ есть вектор $\overline{f} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Если даны точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{MN}$ будет иметь координаты: $\overline{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $A = (x_1, y_1, z_1)$ и $B = (x_2, y_2, z_2)$, а точка *M* определена условием *AM=λMB, λ>0.*



Тогда координаты *x, y, z* точки *M* определяются равенствами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частном случае *λ=1* и точка *M* будет серединой отрезка *AB*.

Скалярным произведением $(\overline{a}, \overline{b})$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \overline{a}\ \overline{b} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi.$$

Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$.

Скалярное произведение $(\overline{a}, \overline{b})$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \overline{a}\ \overline{b} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (2)$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*:*

$$\left(\overline{a}, \overline{a}\right) = \overline{a}^{\,2} = \left|\overline{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \qquad (3)$$

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (4)$$

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 2.2. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве

Практическое занятие № 7
Составление уравнений прямых

Формируемая компетенция:

ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

Цель работы: формирование умений составлять уравнения прямых.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- составлять уравнения прямых;
- решать задачи, используя уравнения прямых.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Даны вершины *A(3, 1), B(-13, -11), C(-6, 13)* треугольника *ABC*. Составить уравнения сторон треугольника *ABC* и найти угол между прямыми *AB* и *BC.*

2. Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями: а) $2x-y+3=0$ и $4x+8y+17=0$; б) $2x-y+3=0$ и $4x-8y-11=0$.

3. Даны вершины *A(4, 3), B(-3, -3), C(2, 7)* треугольника *ABC*. Найти: а) уравнение стороны *AB*; б) уравнение высоты *CH;* в) уравнение медианы *AM*; г) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH;* д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*; е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

Краткие теоретические сведения:

В декартовой прямоугольной системе координат *Oxy* на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени $Ax+By+C=0$, где *A, B, C* – определенные числа, $A^2+B^2\neq 0$. И обратно, всякое уравнение вида $Ax+By+C=0$ определяет прямую на плоскости.

Данное уравнение называется *общим уравнением прямой* на плоскости, коэффициенты уравнения *A, B* определяют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой. Этот вектор называется *нормальным вектором* прямой.

Укажем основные способы задания прямой на плоскости и соответствующие уравнения.

1. Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$. В этом случае прямая описывается общим уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

2. Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{S} = (m, n)$. В этом случае прямая задается *каноническим уравнением* $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ или *параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$

где t – параметр, принимающий любые числовые значения.

3. Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным углом наклона α, определяемым *угловым коэффициентом* $k = tg\alpha$ (рис. 1). В этом случае уравнение прямой имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

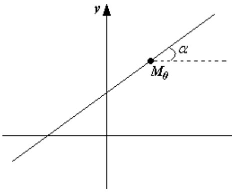


Рис. 1.

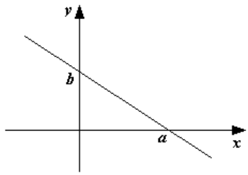


Рис. 2.

4. Прямая отсекает на координатных осях заданные отрезки (рис. 2). В этом случае используют *уравнение прямой в отрезках* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

5. Прямая задана углом наклона α, определяемым угловым коэффициентом $k = tg\alpha$, и отрезком b, отсекаемым на оси Oy. В этом случае используют *уравнение прямой с угловым коэффициентом* $y = kx + b$.

Расстояниеd*от точки* $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 2.3. Кривые второго порядка. Поверхности второго порядка

Практическое занятие № 8
Построение графиков в Mathcad

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений строить графики функций в математическом пакете Mathcad.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- строить графики функций в математическом пакете Mathcad.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (инструкция).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Общие сведения

В MathCAD встроено несколько различных типов графиков, которые можно разбить на две большие группы.

Двумерные графики:

- X-Y (декартовый) график (X-Y Plot);
- полярный график (Polar Plot).

Трехмерные графики:

- график трехмерной поверхности (Surface Plot);
- график линий уровня (Contour Plot);
- трехмерная гистограмма (3D Bar Plot);
- трехмерное множество точек (3D Scatter Plot);
- векторноеполе (Vector Field Plot).

Деление графиков на типы несколько условно, т. к., управляя установками многочисленных параметров, можно создавать комбинации типов графиков, а также новые типы (например, двумерная гистограмма распределения является разновидностью простого X-Y графика).

Для построения графиков используются шаблоны. Их перечень содержится в команде меню Вставка/Графики. Большинство параметров графического процессора, необходимых для построения графиков, по умолчанию задается автоматически. Поэтому для начального построения того или иного вида достаточно задать тип графика. В подменю Graph содержится список из семи основных типов графиков.

График X-Y	График в декартовой системе координат
Полярный график	График в полярных координатах
График поверхности	Трехмерный график
Линии уровня	Контурный график трехмерной поверхности
3D график разброса	График в виде точек (фигур) в трехмерном пространстве
Столбчатая 3D-диаграмма	График для изображения в виде совокупности столбиков в трехмерном пространстве (гистограмма)
Векторное поле	График векторного поля на плоскости

MathCAD представляет пользователю разнообразные средства форматирования графика - изменение толщины и цвета линий, вида осей координат, координатные сетки, текстовые комментарии и др. Для того чтобы изменить вид изображения, нужно щелкнуть дважды по полю графика и установить требуемые параметры в окнах настройки.

Графики любого вида, как любые объекты документа, можно выделять, заносить в буфер обмена, вызывать их оттуда и переносить в любое новое место документа. Их можно и просто перетаскивать с места на место курсором мыши, а также растягивать по горизонтали, по вертикали и по диагонали, цепляясь за специальные маркеры выделенных графиков курсором мыши.

Порядок действий при построении всех графиков одинаков. После выбора шаблона построения графика в рабочем документе открывается поле построения графика с помеченными для ввода позициями, которые нужно заполнить для определения графика.

Когда график определен (заполнены все помеченные позиции), то для построения графика при автоматическом режиме вычислений достаточно щелкнуть мышью вне поля графика.

Заполнение шаблона для разных типов графиков имеет свои особенности.

Можно начертить несколько кривых на одном и том же чертеже. Чтобы представить графически несколько выражений по оси ординат относительно одного выражения по оси абсцисс, введите первое выражение по оси ординат, сопровождаемое запятой. Непосредственно под первым выражением появится пустое поле. Введите туда второе выражение, сопровождаемое другой запятой, чтобы получить пустое поле, и т. д.

Чтобы построить несколько независимых кривых на одном чертеже, введите два или более выражения, отделяемых запятыми по оси абсцисс, и то же самое выражение по оси ординат. MathCAD согласует выражения попарно - первое выражение по оси абсцисс с первым выражением по оси ординат, второе со вторым и т. д. Затем рисуется график каждой пары.

Можно построить до 16 функций по оси ординат в зависимости от одного аргумента по оси абсцисс. Однако если для каждой кривой используется свой аргумент, то можно отобразить только до 10 графиков.

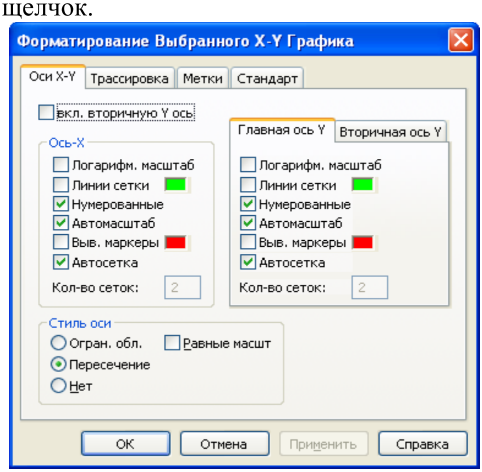
Точно так же можно построить несколько графиков на одном и том же чертеже в полярных координатах, используя эту же технологию заполнения шаблона графика.

Форматирование графиков

Чтобы изменить формат графика, необходимо дважды щелкнуть мышью в области графика.

Если строим график в декартовой системе координат, то появится следующее диалоговое окно для форматирования графика (разные типы графиков имеют разный вид диалоговых окон, но аналогичную технологию форматирования).

Форматирование оси графика можно также произвести, выполнив на ней двойной щелчок.



В MathCAD можно делать следующие надписи на чертеже:

- заголовок выше или ниже графика;
- названия осей, чтобы описать, что отложено на каждой оси;
- имена кривых, идентифицирующих отдельные графики;
- переменные - выражения, определяющие координаты.

Можно использовать эти надписи все вместе или в любой комбинации.

Для того чтобы добавить заголовок к графику в диалоговом окне для форматирования графика, следует щелкнуть по закладке Labels (Метки) и напечатать заголовок графика в поле Title (Название).

Пометить место размещения заголовка: кнопка Above (Вверху) или Below (Внизу) и удостовериться, что флажок Show Title (Выводить) отмечен.

Чтобы надписать одну или обе оси графика, необходимо указать название осей в поле Метки осей.

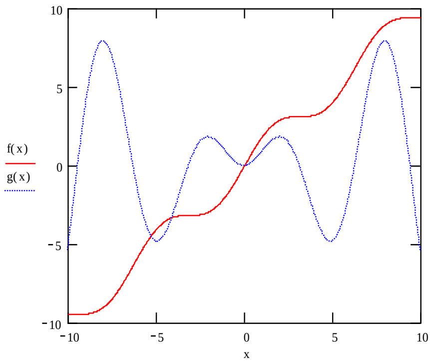
Можно построить до 16 разных графиков. Каждому графику соответствует строка в прокручивающемся списке, который откроется, если в диалоговом окне для форматирования графика щелкнуть по вкладке Traces (Трассировка). На этой вкладке можно изменить параметры: тип, цвет, толщину линии.

По мере появления новых графиков MathCAD ставит в соответствие каждому одну из этих строк.

Построение графика функции y = f(x)

Пример 1. Построение двух графиков в одной системе координат:

$f(x) := x + \sin(x) \qquad g(x) := x \cdot \sin(x)$

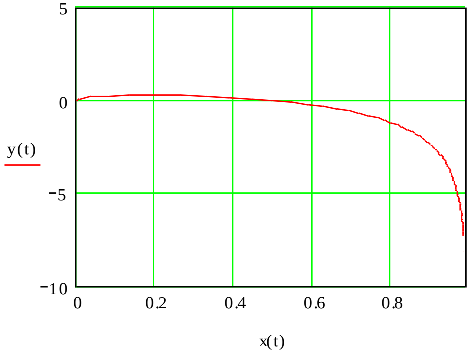


Построение кривой, заданной параметрически

Построение кривой, заданной параметрически, осуществляется аналогично. Отличие состоит в том, что в позиции аргумента и функции вводятся выражения или имена соответствующих функций.

Пример 2. Построение графика функции, заданной параметрически.

$x(t) := \frac{t^2}{1+t^2} \qquad y(t) := \frac{t \cdot (1-t^2)}{1+t^2} \qquad t := 0, 0.1 .. 10$



Графики в полярной системе координат

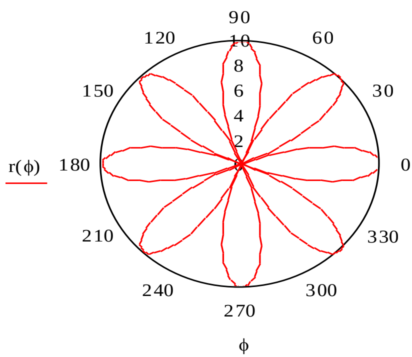
В полярной системе координат каждая точка задается углом φ и модулем радиуса-вектора r(φ). График функции обычно строится в виде линии, которую описывает конец радиуса-вектора при изменении угла φ в определенных пределах, чаще всего от 0 до 2π. Опция Полярные координаты (Polar Plot) выводит шаблон таких графиков в форме окружности с шаблонами данных.

Перед построением таких графиков надо задать значения переменной φ и функцию r(φ).

Пример 3. Построение графика функции, заданной в полярной системе координат.

$a := 10 \qquad m := 4$

$\phi := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{120} .. \pi \qquad r(\phi) := a \cdot \cos(m \cdot \phi)$



Графики поверхностей

Трехмерные, или 3D-графики, отображают функции двух переменных вида Z(X, Y).

При построении трехмерных графиков в ранних версиях MathCAD поверхность нужно было определить математически.

Теперь применяют функцию MathCAD CreateMesh.

Функция *CreateMesh*(F (или G, или f1, f2, f3), x0, x1, y0, y1, xgrid, ygrid, fmap) - создает сетку на поверхности, определенной функцией F.

x0, x1, y0, y1 – диапазон изменения переменных; xgrid, ygrid – размеры сетки переменных; fmap – функция отображения.

Функция C*reateMesh* по умолчанию создает сетку на поверхности с диапазоном изменения переменных от –5 до 5 и с сеткой 20×20 точек.

Пример 4. Построение графиков поверхности двумя способами.

1 способ

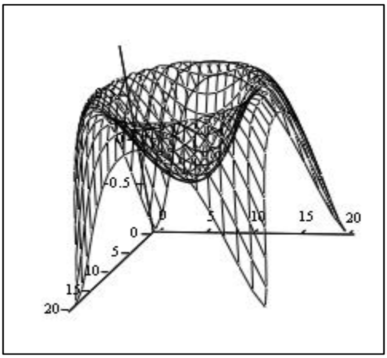
$f(x,y) := \sin\left(x^2 + y^2\right)$

$i := 0..20 \quad j := 0..20$

$x_i := -1.5 + i\cdot 0.15$

$y_j := -1.5 + j\cdot 0.15$

$MT_{i,j} := f\left(x_i, y_j\right)$

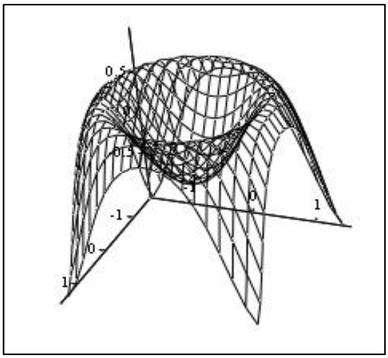


MT

2 способ

$f(x,y) := \sin\left(x^2 + y^2\right)$

$MM := CreateMesh\,(f, -1.5, 1.5, -1.5, 1.5, 20, 20)$



MM

Нередко поверхности и пространственные кривые представляют в виде точек, кружочков или иных фигур. Такой график создается операцией Вставка → График → 3D Точечный, причем поверхность задается параметрически – с помощью трех матриц (X, Y, Z).

Для определения исходных данных для такого вида графиков используется функция CreateSpace.

Функция *CreateSpace* (F, t0, t1, tgrid, fmap) - возвращает вложенный массив трех векторов, представляющих x, y, и z - координаты пространственной кривой, определенной функцией F. t0 и t1 – диапазон изменения переменной, tgrid – размер сетки переменной, fmap – функция отображения.

Еще один вид представления поверхности - векторное представление. Оно задается построением коротких стрелочек - векторов. Стрелки обращены острием в сторону нарастания высоты поверхности, а плотность расположения стрелок зависит от скорости этого нарастания.

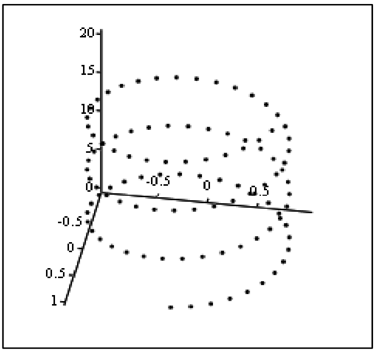
Для его построения используется шаблон Vector Field Plot (график векторного поля на плоскости). В шаблон необходимо внести имя матрицы M.

Пример 5. Построение точечного графика двумя способами.

1 способ

$t := 0..100$

$x_t := \cos\left(\frac{t}{5}\right) \quad y_t := \sin\left(\frac{t}{5}\right) \quad z_t := \frac{t}{5}$

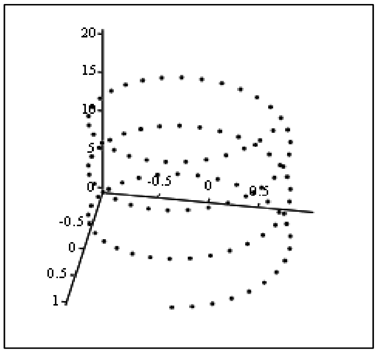


(x, y, z)

2 способ

$F(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

$M := \mathrm{CreateSpace}(F, 0, 20, 100)$



M

Построение пересекающихся фигур

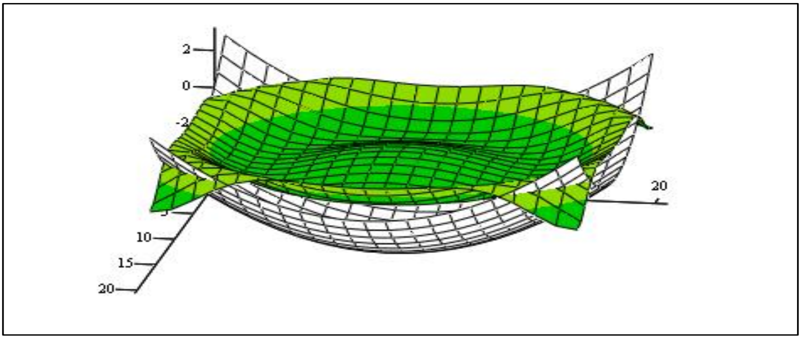
Особый интерес представляет собой возможность построения на одном графике ряда разных фигур или поверхностей с автоматическим учетом их взаимного пересечения. Для этого надо раздельно задать матрицы соответствующих поверхностей и после вывода шаблона 3D-графика перечислить эти матрицы под ним с использованием в качестве разделителя запятой.

Пример 6. Построение двух пересекающихся поверхностей.

$x := 0..20 \qquad y := 0..20$

$f1(x,y) := -\sin\left(x^2 + y^2\right) \qquad f2(x,y) := x^2 + y^2 - 5$

$M1_{x,y} := f1\left(\frac{x-10}{5}, \frac{y-10}{5}\right) \qquad M2_{x,y} := f2\left(\frac{x-10}{5}, \frac{y-10}{5}\right)$



M1, M2

Задания для самостоятельной работы

Вариант	Функция одной переменной	Функция задана параметрически	Функция двух переменных
1	$y = \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$	$x = t^3 - 3\pi$ $y = t^3 - 6 \cdot arctg(t)$	$z = \sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{y}{x}\right)$
2	$y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}$	$x = 4\cos^2(t)$ $y == 4\sin^2(t)$	$z = \frac{1}{arctg\left(\frac{y}{x}\right)}$
3	$y = \ln(3x) + \frac{\exp(-3x)}{\sqrt{x}}$	$x = sh(t) - t$ $y = ch(t) - 1$	$z = x^3 y - xy^3$
4	$y = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - x}$	$x = t$ $y = t + 2arctg(t)$	$z = \exp\left(-\frac{x}{y}\right)$
5	$y = \frac{x^2}{x^3 + 1}$	$x = 2 \cdot (3\cos(t) + \cos(3t))$ $y = 2 \cdot (3\sin(t) + \sin(3t))$	$z = 4.25x \cdot \exp(-t) + 6t$

6	$y=\sin(x)-4\cos(x)$	$x=t^3+3t+1$ $y=t^3-3t+1$	$z=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
7	$y=x^2\cdot tg(x)$	$x=\dfrac{3t}{1+t^3}$ $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$	$z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$
8	$y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\cos(x)}$	$x=t\cdot\exp(t)$ $y=t\cdot\exp(-t)$	$z=\ln\left(tg\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)$
9	$y=\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$	$x=3t+1$ $y=t^3+2t$	$z=\ln\left(x^2+y^2\right)$
10	$y=\left(1+x^2\right)\arccos(x)$	$x=t+\exp(-t)$ $y=2t+\exp(-2t)$	$z=x^{x\cdot y}$

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать теоретический материал.
2. Выполнить задания, описанные в примерах 1-6.
3. Получить у преподавателя номер варианта для самостоятельной работы и выполнить задания.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в виде файлов преподавателю.

Тема 3.1. Теория пределов

Практическое занятие № 9
Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей

Формируемая компетенция:

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

Цель работы: формирование умений вычислять пределы с помощью замечательных пределов, раскрывать неопределенности.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- раскрывать неопределенности;
- вычислять пределы с помощью замечательных пределов.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+x-5)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-x^2}{5x^3-4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x}{x^2+x+1}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+3x}$; з) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2x-7}{x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{5x-2x^2-2}{2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число e): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Нахождение пределов. Раскрытие неопределенностей различных типов

Для того чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения этой функции, нужно в выражение функции вместо аргумента подставить его предельное значение.

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $\left(\infty^{0}\right)$, $\left(0^{0}\right)$. Рассмотрим несколько типов примеров, классифицируя их по виду неопределенности и предельному значению x.

1-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ в общем случае – сложные степенные или показательные функции. В случае степенных функций необходимо выносить за скобку в числителе и в знаменателе дроби x с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; в случае показательных функций за скобку выносится наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

Полезно запомнить правило:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0},\ \text{если}\ n=m,\\ \infty,\ \text{если}\ n>m.\end{cases}$$

2-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

3-й тип. Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $(\infty - \infty)$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится ко 2-му типу после приведения дробей к общему знаменателю. Если упомянутая функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность устраняется или приводится к 1-му типу путем домножения и деления функции на одно и то же (сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

К пределам ***4-го типа*** отнесем примеры с неопределенностью вида $\left(1^{\infty}\right)$. В этом случае выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой степенно-показательную функцию, в основании которой необходимо выделить целую часть дроби (которая должна быть равна 1). Неопределенность устраняется при помощи выделения второго замечательного предела.

5-й тип. К этому типу отнесем функции, сводящиеся к первому замечательному пределу.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 10
Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва

Формируемая компетенция:

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

Цель работы: формирование умений вычислять односторонние пределы иклассифицировать точки разрыва.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- классифицировать точки разрыва.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Исследовать на непрерывность и построить график функции:

а) $y=\dfrac{x^3+1}{x+1}$; б) $y=3^{\frac{1}{x+1}}+1$; в) $y(x)=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ 1-x, & 0<x\le 1, \\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1. \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Непрерывность функции определяется в точках, принадлежащих области определения функции. Пусть функция *f(x)* определена в окрестности точки x_0. Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0, если:

1) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ функции *f(x)* в точке x_0;

2) этот предел равен значению функции в точке x_0.

Иначе говоря, *f* непрерывна в точке $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. (1)

Непрерывность функции *f(x)* в точке x_0 означает, что в этой точке существуют односторонние пределы, равные значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0), \qquad (2)$$

где $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$ – правосторонний предел функции *f* в точке x_0; $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ – левосторонний предел функции *f* в точке x_0; $f(x_0)$ – значение функции *f* в точке x_0.

Если условия (1) или (2) в точке x_0 не выполняются, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции *f(x)*.

Если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, причем не все три числа $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0)$ равны между собой, то x_0 называют *точкой разрыва первого рода*.

Если в точке разрыва x_0 хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ не существует или бесконечен, то x_0 называют *точкой разрыва второго рода*.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 3.2. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 11
Вычисление производных сложных функций. Правило Лопиталя

Формируемая компетенция:

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

Цель работы: формирование умений вычислять производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять производные сложных функций.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти производные функций: а) $y=x^2-5x+4$; б) $y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}$; в) $y=x^5\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)$; г) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$; д) $y=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x}$; е) $y=(1+5x)^3$; ж) $y=\sin 5x$; з) $y=\cos^2 x$; и) $y=\sin x^2$; к) $y=\sqrt[3]{2+x^4}$; л) $y=\ln\cos 3x$; м) $y=arctg\,\frac{1}{x}$.

2. Найти производные x'_y обратных функций: а) $y=x-\cos x$; б) $y=2x+x^3$; в) $y=2^x\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$.

3. Найти производные функций: а) $y=e^{\sin 2x}$; б) $y=\left(\frac{1+x^2}{x^2+x}\right)^3$; в) $y=5\log_{10}(4x-2)$.

4. Найти пределы, используя правило Лопиталя: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\ln(1+x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln\left(e^{x^2}+1\right)}$.

Краткие теоретические сведения:

Правила дифференцирования

Пусть c – постоянная, $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

1. $c'=0$;
2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
3. $(uv)'=u'v+uv'$;
4. $(cu)'=cu'$;
5. $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$;
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2},\ v(x)\neq 0$;
7. $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=\dfrac{cv'}{v^2},\ v(x)\neq 0$.

Пусть $y=f(u)$ и $u=u(x)$ – дифференцируемые функции и определена сложная функция $y=f(u(x))$. Тогда сложная функция дифференцируема и равна произведению производной функции $y=f(u)$ в точке $u=u(x)$ и производной функции $u=u(x)$ в точке x, т.е. $y'=f'(u)\cdot u'$.

Если $y=f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на промежутке X, то функция, обратная к данной $x=\varphi(y)$, также дифференцируема и ее производная определяется соотношением: $x'_y=\dfrac{1}{y'_x},\ \ y'_x\neq 0$.

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е. $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Дифференцирование функций, т.е. вычисление их производных, выполняется с использованием сформулированных правил дифференцирования и *таблицы производных основных элементарных функций:*

1. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$;
2. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ (x>0)$;
3. $\left(e^x\right)'=e^x$;
4. $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$;
5. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x},\ (x>0)$;
8. $(\cos x)'=-\sin x$;
9. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$;
10. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-1-ctg^2x$;
11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (|x|<1)$;
12. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (|x|<1)$;

6. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $(x > 0,\ a > 0)$;

7. $\left(\sin x\right)' = \cos x$;

13. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

14. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Правило Лопиталя состоит в следующем. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле: $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Таким образом, правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 12
Производные и дифференциалы высших порядков

Формируемая компетенция:

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

Цель работы: формирование умений вычислять производные и дифференциалы высших порядков; вычислять пределы по правилу Лопиталя.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять производные и дифференциалы высших порядков;
- вычислять пределы по правилу Лопиталя.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти пределы, используя правило Лопиталя: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\ln(1+x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{2}}{\ln\left(e^{x^{2}}+1\right)}$.

2. Найти производные 2-го порядка функций: а) $y=x^{3}-4x^{2}+5x-1$; б) $y=x^{2}\sqrt{1-x^{2}}$; в) $y=x\ln(x+1)$.

3. Вычислить приближенно а) $\sqrt{1{,}1}$; б) $e^{-0{,}1}$.

Краткие теоретические сведения:

Производной второго порядка, или второй производной, функции *f(x)*называется производная от ее первой производной. Обозначается вторая производная одним из символов y'', $f''(x)$, $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

Производная n-го порядка $y^{(n)}$ функции *y=f(x)*определяется по индукции: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$. Обозначается: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$.

Понятие дифференциала функции

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x\in X$. Тогда существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x\to 0$, откуда $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых: 1) линейного относительно Δx; 2) нелинейного (представляющего бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx).

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной: $dy=f'(x)\cdot\Delta x$.

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx=\Delta x$.

Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде $dy=f'(x)\cdot dx$.

Свойства дифференциала в основном аналогичны свойствам производной.

1.	$dc=0$, *где* $c=const$.	4.	$d(uv)=v\,du+u\,dv$.
2.	$d(cu)=c\,du$.	5.	$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$
3.	$d(u\pm v)=du\pm dv$.		

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Из изложенного выше следует, что приращение функции Δy отличается от её дифференциала dy на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем $dy=f'(x)\cdot\Delta x.$ Поэтому при достаточно малых значениях Δx $\Delta y\approx dy$ или $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot\Delta x,$ откуда $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x.$

Чем меньше значение Δx , тем точнее формула.

Данную формулу можно использовать для вычисления приближенных значений некоторых выражений, например: а) вычисление корня *n-й* степени; б) возведение числа в *n-ю* степень; в) вычисление значения тригонометрической функции, и т.д.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 13
Вычисление пределов, производных в Mathcad

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений выполнять вычисления в математическом пакете Mathcad.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять производные и пределы функций в математическом пакете Mathcad.

Материальное обеспечение:

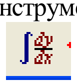
Раздаточный материал (инструкция).

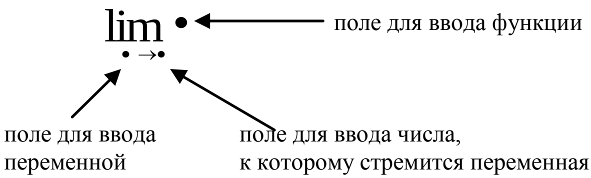
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Ход работы

1. Запустите программу Mathcad.
2. Откройте панель «Математика» (если она не активна): *Вид\ Панели инструментов/ Математика*.

Рассмотрим работу оператора, вычисляющего пределы, на примере. Для того чтобы вычислить предел функции *$y=x^2+2$, при $x\to -5$*, т.е. найти $\lim\limits_{x\to -5}(x^2+2)$, необходимо выполнить следующие действия:

- щёлкните в любом месте рабочего стола;
- откройте панель инструментов **Calculus**(Исчисление или Матанализ),щелкнув по кнопке  на панели «Математика»;
- щёлкните по кнопке $\lim\limits_{\to a}$ на панели инструментов «Исчисление» или нажмите **Ctrl+[L]**, в результате появится запись



- заполните поля, для этого в поле для ввода функции наберите **(x^2+2),** в поле для ввода переменной наберите **x,** в поле для ввода числа наберите **-5;**
- заключите выражение в выделяющую рамку и нажмите **Shif+[F9]** для получения ответа.

3. Вычислите значения пределов следующих функций. Ответы запишите в тетрадь.

Задание 1.

1.1. *$y=x^3-5x^2+2$, при $x\to -3$;*

1.2. $y=\dfrac{x^2-2}{x+2}$*,при $x\to\infty$;*

1.3. $y=\sqrt[3]{x^3-x}$*, при $x\to 5$;*

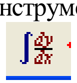
1.4. $y=\dfrac{\sqrt[4]{x+2x^2-4}}{-4x+5}$*, при $x\to 4$;*

1.5. $y = \dfrac{\left(2x - x^2 + 9\right)^3}{-2x}$, *при x→-2;*

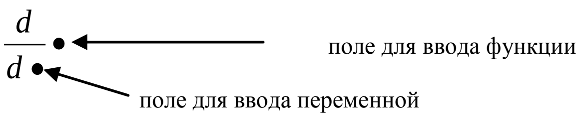
1.6. $y = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n$, *при n→∞.*

4. Результаты сохраните в своей папке под именем *предел.mcd.*
5. Откройте новый лист: Файл\Новый\Чистый лист.

Теперь рассмотрим работу оператора, вычисляющего производные в символьном виде, на примере. Для того чтобы вычислить производную функции $y=2x^3+3x-7$ необходимо выполнить следующие действия:

- щёлкните в любом месте рабочего стола;
- откройте панель инструментов **Calculus**(Исчисление или Матанализ),щелкнув по кнопке  на панели «Математика»;

щёлкните по кнопке $\dfrac{d}{dx}$ на панели инструментов «Исчисление» или нажмите **Ctrl+[/]**, в результате появится запись



- заполните поля, для этого в поле для ввода функции наберите **(2x³+3x-7),** в поле для ввода переменной наберите **x;**
- заключите выражение в выделяющую рамку и нажмите **Shif+[F9]** для получения ответа.

6. Вычислите значения производной для следующих функций. Ответы запишите в тетрадь.

Задание 2.

2.1. $y=(2x^2+3x-5)^4-(x-24x^3+7);$

2.2. $y = \ln\left(\sqrt{1+e^x} - 1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^x} + 1\right);$

2.3. $y = \dfrac{\left(2x^2 - 3x^3\right)}{x^2 + 4x} - \dfrac{24x}{\left(x^2 + 6\right)^3};$

2.4. $y = 4e^{\sqrt{\ln(x)}}\left(1 - \sqrt{\ln(x)}\right);$

2.5. *y=cos(x)+sin(x)-ln(x-4x³);*

2.6. $y = \frac{1}{2}\ln\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{\cos(x)}{2\sin^2(x)}$.

7. Результаты сохраните в своей папке под именем *производная.mcd*.

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать теоретический материал.
2. Выполнить задания 1 и 2.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в виде файлов преподавателю.

Практическое занятие № 14
Полное исследование функции с использованием Mathcad

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений выполнять вычисления в математическом пакете Mathcad.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- проводить исследование функции в математическом пакете Mathcad.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (инструкция).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Исследовать функции и построить их график: а) $y = \frac{2x}{1-x^2}$; б) $y = x\ln x$.

Краткие теоретические сведения:

Схема исследования функции $y = f(x)$ *на экстремум:*

1) найти производную $y' = f'(x)$;
2) найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует;
3) исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции;
4) найти экстремальные значения функции.

Схема исследования функции $y = f(x)$ *на выпуклость и точки перегиба:*

1) найти вторую производную функции $f''(x)$;

2) найти точки, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует;

3) исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба;

4) найти значения функции в точках перегиба.

Общая схема исследования функций и построения графиков:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность – нечетность;

3) найти вертикальные асимптоты;

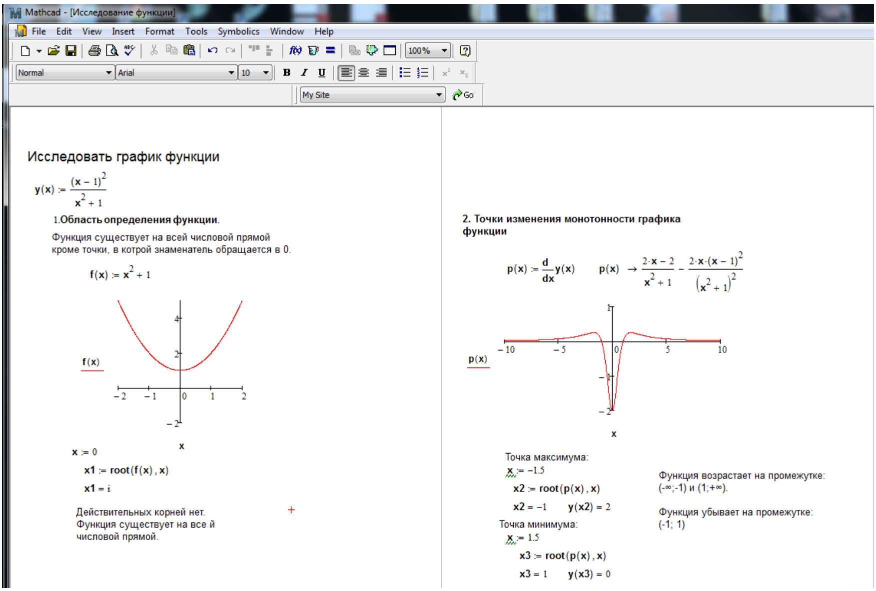
4) исследовать поведение функции в бесконечности; найти горизонтальные и наклонные асимптоты;

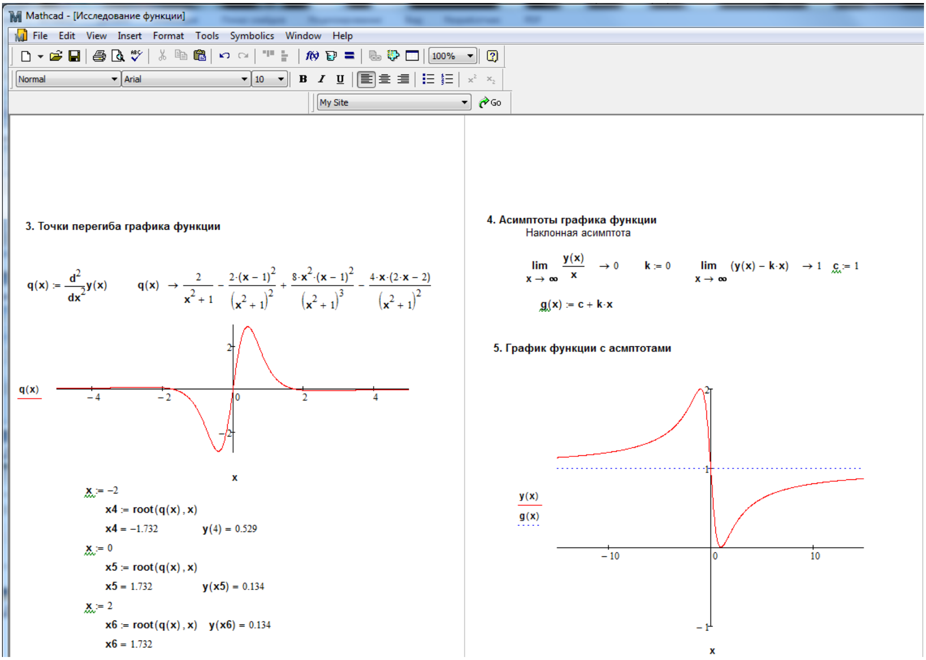
5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;

6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Пример выполнения задания по исследованию функции средствами MathCad.





Порядок выполнения работы:

1. Прочитать теоретический материал.
2. Выполнить задания, описанные в примерах 1-6.
3. Получить у преподавателя номер варианта для самостоятельной работы и выполнить задания.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в виде файлов преподавателю.

Тема 3.3. Интегральное исчисление

Практическое занятие № 15
Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле

Формируемая компетенция:

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

Цель работы: формирование умений находить неопределенные интегралы методами замены переменной и по частям.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом замены переменной;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти неопределенные интегралы, используя метод замены переменной: а) $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$; б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; г) $\int \sqrt[5]{3x+2}dx$.

2. Найти неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям: а) $\int xe^{5x}dx$; б) $\int \ln(1-x)dx$; в) $\int x\sin 3xdx$.

Краткие теоретические сведения:

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ где C – произвольное число;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;

5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенныхинтегралов

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
6. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$;
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$ $-a < x < a,\ a > 0;$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0$;
14. $\int e^x dx = e^x + C$;
15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;
16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула: $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 16
Вычисление определенных интегралов

Формируемая компетенция:

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

Цель работы: формирование умений вычислять определенные интегралы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенные интегралы, используя методы замены переменной и по частям.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти определенные интегралы: а) $\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx$; б) $\int\limits_1^e x\ln x dx$; в) $\int\limits_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

2. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями: а) $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $x=3$, $y=0$; б) $y=2x-x^2$, $x=3$, $y=0$.

Краткие теоретические сведения:

Свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx$, где α – некоторое число;

2) $\int\limits_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4) $\int\limits_a^a \alpha f(x)dx = 0$;

5) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Формула Ньютона–Лейбница

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции *f(x)* равен приращению любой ее первообразной *F(x)* на этом отрезке:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ и функция *f(x)* непрерывна в каждой точке $x = \varphi(t)$, где $t \in [\alpha;\beta]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Интегрирование по частям определенного интеграла

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

Пример.Вычислить определенные интегралы: а) $\int\limits_1^2 \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{x}dx$; б) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x - 1}dx$; в) $\int\limits_{0,5}^0 \ln(1 - x^2)dx$.

Решение. а) Используя эквивалентное преобразование подынтегральной функции (почленное деление числителя на знаменатель) и свойства (1), (2) определенного интеграла, получаем

$$\int_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}dx=\int_1^2\left(3x^3-5x+\frac{7}{x}\right)dx=3\int_1^2 x^3dx-5\int_1^2 xdx+7\int_1^2\frac{dx}{x}=3\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2-$$

$$-5\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2+7\ln|x|\Big|_1^2=\frac{3}{4}(16-1)-\frac{5}{2}(4-1)+7(\ln 2-\ln 1)=3{,}75+7\ln 2.$$

б) Воспользуемся заменой переменной: пусть $\sqrt{e^x-1}=t$. Найдем пределы интегрирования по переменной t:

$$\int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x-1}dx=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{e^x-1}=t & x=\ln 2\;\; t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=1\\ e^x-1=t^2 & x=0\;\; t=\sqrt{e^0-1}=0\\ e^x=t^2+1 & dx=\dfrac{2tdt}{t^2+1}\\ e^xdx=2tdt & \end{array}\right|=\int_0^1(t^2+1)t\frac{2tdt}{t^2+1}=$$

$$=2\int_0^1 t^2dt=2\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{2}{3}\left(1^3-0^3\right)=\frac{2}{3}.$$

в) Воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$\int_{0{,}5}^0\ln(1-x^2)dx=\left|\begin{array}{lll}u=\ln(1-x^2) & \to \textit{дифференцируем} \to & du=\dfrac{-2xdx}{1-x^2}\\ dv=dx & \to \textit{интегрируем} \to & v=\int dx=x\end{array}\right|=$$

$$x\ln(1-x^2)\Big|_{0{,}5}^0+\int_{0{,}5}^0\frac{2xdx}{1-x^2}=0{,}5\ln\frac{4}{3}-2\int_{0.5}^0\frac{(x^2-1)+1}{x^2-1}dx=0{,}5\ln\frac{4}{3}-2\int_{0.5}^0 dx-$$

$$-2\int_{0.5}^0\frac{dx}{x^2-1}=0{,}5\ln\frac{4}{3}-2x\Big|_{0{,}5}^0-2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{0{,}5}^0=1+0{,}5\ln 12.$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x)>0$ при $x\in[a;b]$. Фигура, образованная линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

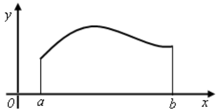


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

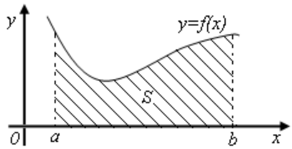


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

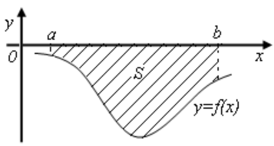


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

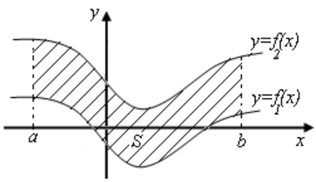


Рис. 4

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 3.4. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных

Практическое занятие № 17
Вычисление частных производных и дифференциалов функцийнескольких переменных

Цель работы: формирование умений вычислять частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять частные производные функций нескольких переменных;
- вычислять дифференциалы функций нескольких переменных.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание

1. Найти частные производные функций: а) $z = e^{x-y}(2x-1)$; б) $z = xe^y + x^y$; в) $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$.
2. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных $z = \sin\left(x + \sqrt{y}\right)$.
3. Найти дифференциал функции двух переменных $z = \ln\left(1 + e^x + y^2\right)$.

Порядок выполнения работы

Пусть имеется nпеременных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана *функция нескольких переменных* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *независимыми переменными* или *аргументами*, z – *зависимой переменной*, а символ f означает *закон соответствия*. Множество X называется *областью определения функции*.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по x называют производную функции $z = f(x, y)$ по x при фиксированной переменной y и обозначают $f'_x(x, y)$.

Частная производная функции $z = f(x, y)$ по y при фиксированной переменной x обозначается $f'_y(x, y)$.

Для частных производных используют также обозначения $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Частные производные второго порядка определяются следующим образом: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Пример. Найти частные производные функций: а) $z = x^3y^5 + 5x^2 - 3y + 1$; б) $z = x^2e^{y^2}$; в) $z = x\ln y + \frac{y}{x}$.

Решение. а) При дифференцировании по *x* считаем постоянной величиной *y*. Таким образом, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^5 + 10x$. При дифференцировании по *y* считаем постоянной величиной *x*, следовательно, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^3y^4 - 3$.

б) При дифференцировании по *x* считаем постоянной величиной *y*. Таким образом, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{y^2}$. При дифференцировании по *y* считаем постоянной величиной *x*, следовательно, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^2e^{y^2} \cdot 2y = 2x^2ye^{y^2}$.

в) При дифференцировании по *x* считаем постоянной величиной *y*. Таким образом, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + y\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln y - \frac{y}{x^2}$. При дифференцировании по *y* считаем постоянной величиной *x*, следовательно,

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x(\ln y)' + \frac{1}{x} \cdot y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

Пример. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных $z = \ln(1 + x + 2y)$.

Решение. Частные производные первого порядка имеют вид: $z'_x = \frac{1}{1 + x + 2y}$, $z'_y = \frac{2}{1 + x + 2y}$. Считая их новыми функциями двух переменных, найдем их частные производные. Получаем: $z''_{xx} = \frac{1}{(1 + x + 2y)^2}$, $z''_{xy} = -\frac{2}{(1 + x + 2y)^2}$, $z''_{yy} = -\frac{4}{(1 + x + 2y)^2}$.

Дифференциалом функции $z = f(x,\ y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения независимых переменных $dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$ или $dz = z'_x dx + z'_y dy$ или $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

<u>Пример</u>. Найти дифференциал функции двух переменных $z = x^2 y - y^3 x$.

Решение. Частные производные первого порядка имеют вид: $z'_x = 2xy - y^3$ и $z'_y = x^2 - 3y^2 x$. Следовательно, $dz = (2xy - y^3)dx + (x^2 - 3y^2 x)dy$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 18
Вычисление двойных интегралов

Цель работы: формирование умений вычислять двойные интегралы в случае области 1 и 2 типа.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять двойные интегралы.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание

1. Вычислить двойной интеграл:а) $\iint\limits_D (12x^2y^2 + 16y^3x^3)dxdy$, где $D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$; б) $\iint\limits_D (36x^2y^2 - 96y^3x^3)dxdy$, где $D: x = 1,\ y = -x3,\ y = \sqrt[3]{x}$.

Порядок выполнения работы

Двойным интегралом от функции $z = f(x,\ y)$ по области Gназывается конечный предел (если он существует) интегральных сумм

$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$ при $\max d_k \to 0$, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения области на элементарные части, ни от выбора точек $P_k(\xi_k,\eta_k)$. Итак,

$$\iint\limits_{(G)} f(x,y)d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k.$$

Двойной интеграл обладает следующими свойствами.

1. $\iint\limits_{(G)} d\sigma = S(G)$, где *S(G)* – площадь области *G*.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла: $\iint\limits_{(G)} Af(x,y)d\sigma = A\iint\limits_{(G)} f(x,y)d\sigma$.
3. Двойной интеграл аддитивен относительно подынтегральной функции: $\iint\limits_{(G)} (f_1 + f_2)d\sigma = \iint\limits_{(G)} f_1 d\sigma + \iint\limits_{(G)} f_2 d\sigma$.
4. Двойной интеграл аддитивен относительно области интегрирования: если $G = G_1 \cup G_2$, причем $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, то $\iint\limits_{(G)} fd\sigma = \iint\limits_{(G_1)} fd\sigma + \iint\limits_{(G_2)} fd\sigma$.

Двойной интеграл имеет простой геометрический смысл: интеграл функции $f(x, y)$ по области *G* выражает объем цилиндрической области, нижним основанием которой служит область *G*, а верхним – график функции $f(x, y)$.

Вычисление двойного интеграла

Пусть область *D* определяется неравенствами: $D: \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases}$ и при этом, всякая прямая, параллельная оси *Oy* пересекает границу области *D* не более чем в двух точках (рис. 1), тогда вычисление двойного интеграла от функции *f(x,y)* в области *D*сводится квычислению, так называемого, повторного интеграла по формуле:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_{a}^{b} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \quad (1)$$

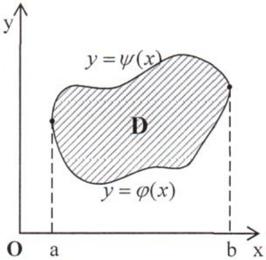


Рис. 1

В формуле (1) сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной *y*, считая при этом *x* величиной постоянной $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$.Затем вычисляется внешний интеграл по переменной *x*.

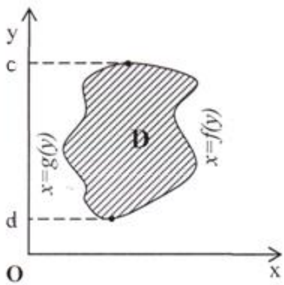


Рис. 2

Если область интегрирования есть $D:\begin{cases} c\le y\le d \\ g(y)\le x\le f(y)\end{cases}$

и при этом, всякая прямая, параллельная оси *Ox* пересекает границу области *D* не более чем в двух точках (рис. 2), тогда двойной интеграл вычисляется через повторный интеграл по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{g(y)}^{f(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

*Замечание 1.*Если область интегрирования более сложная, чем в описанных выше случаях, то ее можно разбить на несколько непересекающихся частей, удовлетворяющих указанным условиям, при помощи прямых параллельных координатным осям. Затем применить свойство аддитивности.

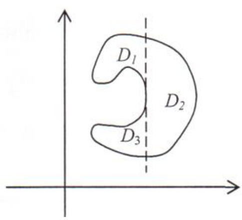


Рис. 3

Например, область, изображенную на рис.3, можно разбить на три области. Тогда

$$\iint\limits_D fdxdy=\iint\limits_{D_1} fdxdy+\iint\limits_{D_2} fdxdy+\iint\limits_{D_3} fdxdy$$

Замечание 2. Пределы интегрирования внешнего интеграла в повторном интеграле всегда постоянны. Пределы интегрирования внутреннего интеграла,в общем случае, будут функциями той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл.

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x-2yx)dxdy$, где

$D: x+y=2,\ y=x^2$.

Решение. Область интегрирования D ограничена прямой $y + x = 2$ и параболой $y = x^2$, проходящей через начало координат, с осью симметрии Oy (рис. 4).Определим точки пересечения графиков функций. Для того решим систему:

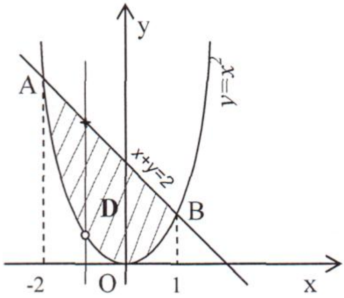


Рис. 4

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-2) = 9$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Имеем две точки пересечения: *A(–2, 4), B(1, 1).* Любая прямая, проходящая через внутренние точки отрезка [–2;1] параллельно оси Oy пересекает границу области D в двух точках: в точке входа "°", в которой $y = x^2$и в точке выхода "×", в которой $y = 2–x$. Таким образом, область интегрирования D можно задать неравенствами: $\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 2 - x \end{cases}$. Тогда по формуле (1) получаем:

$$\iint_D (x - 2yx)dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} (x - 2yx)dy .$$

Сначала вычисляем внутренний интеграл по y, считая x постоянной величиной

$$\int_{x^2}^{2-x} (x - 2yx)dy = x \int_{x^2}^{2-x} (1 - 2y)dy = x\left(y - y^2\right)\Big|_{x^2}^{2-x} = x\left(2 - x - (2-x)^2 - x^2 + x^4\right) =$$

$$= x\left(-2 + 3x - 2x^2 + x^4\right) = -2x + 3x^2 - 2x^3 + x^5.$$

Далее вычисляем внешний интеграл

$$\int_{-2}^{1} \left(-2x + 3x^2 - 2x^3 + x^5\right)dx = \left(-x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{28}{3} = 9.$$

Ответ: $\iint_D (x - 2yx)dxdy = 9$

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 19

Вычисление частных производных и интегралов вMathcad

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений выполнять вычисления в математическом пакете Mathcad.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять значения интегралов в математическом пакете Mathcad;

- вычислять частные производные в математическом пакете Mathcad

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (инструкция).

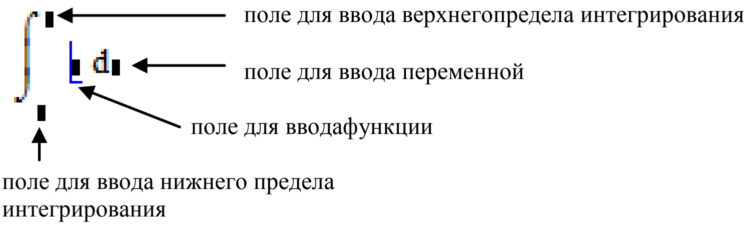
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Ход работы

1. Запустите программу Mathcad.
2. Откройте панель «Математика» (если она не активна): *Вид\ Панели инструментов/ Математика*.

Оператор интегрирования в Mathcadпредназначен для численного вычисления определённого интеграла функции на некотором интервале. Рассмотрим работу оператора на конкретном примере. Для того чтобы вычислить интеграл функции $y = \sin(x)^2$ на интервале от *0* до *π/4*, т.е. найти $\int_0^{\pi/4} \sin(x)^2\,dx$, необходимо выполнить следующие действия:

- щёлкните в любом месте рабочего стола;
- откройте панель инструментов **Calculus**(Исчисление или Матанализ),щелкнув по кнопке  на панели «Математика»;
- щёлкните по кнопке $\int_a^b$ на панели инструментов «Исчисление» или нажмите **[Shift] +[&],** в результате появится запись



- заполните поля, для этого в поле для ввода функции наберите **sin(x)^2,** в поле для ввода переменной наберите **x,** в поле для ввода нижнего предела интегрирования наберите **0**, в поле для ввода верхнего предела интегрирования наберите **π/4;**
- заключите выражение в выделяющую рамку и нажмите **[=]** для получения ответа.

3. Вычислите значения следующих определенных интегралов. Ответы запишите в тетрадь.

Задание 1.

1.1. $\int_{-2}^{3}(2x-4)dx$;

1.2. $\int_{0}^{\pi}\sqrt[4]{\cos(x)+2}dx$;

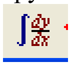
1.3. $\int_{-3}^{2}\frac{3x^3+2x^2-3}{\sqrt{2x-4}}dx$;

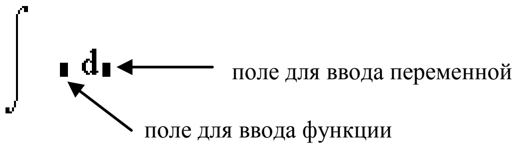
1.4. $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$;

1.5. $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(x)-\sin(x))dx\cdot$

4. Результаты сохраните в своей папке под именем *интеграл.mcd*.
5. Откройте новый лист: Файл\Новый\Чистый лист.

В Mathcad есть символьный оператор для вычисления неопределённых интегралов. Рассмотрим работу оператора на конкретном примере. Для того чтобы вычислить неопределенный интеграл функции $y=x^2+1$, т.е. найти $\int(x^2+1)dx$, необходимо выполнить следующие действия:

- щёлкните в любом месте рабочего стола;
- откройте панель инструментов **Calculus**(Исчисление или Матанализ),щелкнув по кнопке  на панели «Математика»;
- щёлкните по кнопке $\int$ на панели инструментов «Исчисление» или нажмите **[Shift] +[I],** в результате появится запись



- заполните поля, для этого в поле для ввода функции наберите **(x^2+1),** в поле для ввода переменной наберите **x;**
- заключите выражение в выделяющую рамку и нажмите **Shif+[F9]** для получения ответа.

6. Вычислите значения неопределенных интегралов. Ответы запишите в тетрадь.

Задание 2.

2.1. $\int (2x^2 - 4x + 5)dx$ *;*

2.2. $\int (\cos^2(x) - \sin(x))dx$;

2.3. $\int \sqrt[3]{(2x - 5x^3 - 4}dx$;

2.4. $\int \dfrac{54 - x^4}{23x^2 + 4} dx$;

2.5. $\int (4x - 2x^3 - 5)^2 dx$.

7. Результаты сохраните в своей папке под именем *интеграл_1.mcd.*
8. Откройте новый лист: Файл\Новый\Чистый лист.

Для вычисления частных производных используется тот же оператор, что и для вычисления производных в символьном виде. Если в дифференцируемом выражении фигурирует несколько переменных, Mathcad всегда находит частную производную относительно выделенной переменной (записанной в поле для переменной).

Пример 1. Фрагмент вычисления частных производных в программе Mathcad.

Задана функция, зависищая от двух переменных

$$z(x,y) := x^3 \cdot y - 5x \cdot y^2$$

Частная производная по переменной x

$$\frac{d}{dx} z(x,y) \rightarrow 3 \cdot x^2 \cdot y - 5 \cdot y^2$$

Частная производная по переменной y

$$\frac{d}{dy} z(x,y) \rightarrow x^3 - 10 \cdot x \cdot y$$

Пример 2. Фрагмент вычисления частных производных второго порядка в программе Mathcad.

Задана функция, зависищая от двух переменных

$$z(x,y) := x^5 - x \cdot y^3 + 6x^2 \cdot y^2 + y^5$$

Частная производная второго порядка по переменной x

$$\frac{d^2}{dx^2} z(x,y) \rightarrow 20 \cdot x^3 + 12 \cdot y^2$$

Частная производная второго порядка по переменной y

$$\frac{d^2}{dy^2} z(x,y) \rightarrow 12 \cdot x^2 - 6 \cdot x \cdot y + 20 \cdot y^3$$

Частная производная второго порядка по переменным x и y

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy} z(x,y)\right) \rightarrow 24 \cdot x \cdot y - 3 \cdot y^2$$

9. Вычислите значения частныхпроизводных для следующих функций. Ответы запишите в тетрадь.

Задание 3.

3.1. $z = e^{x-y}(2x-1)$;

3.2. $z = xe^y + x^y$;

3.3. $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$.

3.4. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных $z = \sin\left(x + \sqrt{y}\right)$.Ответ запишите в тетрадь.

3.5. Найти дифференциал функции двух переменных $z = \ln\left(1 + e^x + y^2\right)$
.Ответ запишите в тетрадь.

10. Результаты сохраните в своей папке под именем *Частнаяпроизводная.mcd*.

11. Откройте новый лист: Файл\Новый\Чистый лист.

12. Вычислитезначения двойных интегралов. Ответы запишите в тетрадь.

Задание 4.

4.1. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16y^3x^3\right)dxdy$, где $D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$;

4.2. $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96y^3x^3\right)dxdy$, где $D: x = 1,\ y = -x3,\ y = \sqrt[3]{x}$.

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать теоретический материал.
2. Выполнить задания 1-4.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в виде файлов преподавателю.

Тема 3.5. Теория рядов

Практическое занятие № 20
Нахождение суммы ряда по определению. Исследование рядов на сходимость

Цель работы: формирование умений находить сумму ряда по определению; исследовать сходимость положительных рядов, знакочередующихся рядов; исследовать числовые ряды на абсолютную и условную сходимость.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить сумму ряда по определению;
- исследовать числовые ряды на абсолютную и условную сходимость.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти сумму ряда $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\dots$, доказав его сходимость.
2. Исследовать сходимость ряда, применив необходимый признак сходимости: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+6}{100n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3}-25}{\sqrt{n}+50}$.
3. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\left(1+n^2\right)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.
4. Исследовать сходимость ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; б) $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\dots$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.
5. Исследовать сходимость ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^7}{7n^6+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{2n-1}$.

Краткие теоретические сведения:

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ – числовая последовательность. Символ вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1)

называется *числовым рядом*, а числа a_n – его членами. Выражения вида $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, … называются частичными суммами ряда (1).

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$.

Число S называется *суммой* ряда. В этом смысле можно записать

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S .$$

Если предел частичных сумм бесконечен или не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Важнейшей задачей теории рядов является исследование их сходимости.

Пример. Исследовать сходимость *геометрического ряда*, т.е. ряда, составленного из членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} . \quad (2)$$

Решение. Необходимо установить, при каких значениях знаменателя прогрессии q ряд (2) сходится и при каких – расходится.

Из школьного курса алгебры известно, что сумма n членов геометрической прогрессии, т.е. n–я частичная сумма ряда при $q \neq 1$ равна $S_n = \dfrac{a\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$.

Возможно несколько случаев:

1) если $|q| < 1$, то ряд (2) сходится и его сумма равна $S = \dfrac{a}{q-1}$;

2) если $|q| > 1$, то ряд расходится и его сумма равна $\pm\infty$ в зависимости от знака a;

3) в остальных случаях ряд расходится и предела частичных сумм не существует.

Свойства сходящихся рядов.

1. *Если ряд* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится и имеет сумму S, то и ряд* $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \ldots + \lambda a_n + \ldots$ (полученный умножением данного ряда на число λ) *также сходится и имеет сумму λS.*
2. *Если ряды* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *и* $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$ *сходятся и их суммы соответственно равны* S_1 *и* S_2, *то и ряд* $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$ (представляющий сумму данных рядов) *также сходится, и его сумма равна* $S_1 + S_2$.
3. *Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.*

Ряд вида $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+m} + \ldots$, полученный из данного отбрасыванием его первых n членов, называется *n-м остатком ряда.*

4. *Для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы при* $n \to \infty$ *остаток ряда стремился к нулю.*

Признаки сходимости рядов.

Теорема (необходимый признак сходимости). Если ряд сходится, то предел его общего члена a_n при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если предел общего члена ряда (1) при $n \to \infty$ не равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Замечание. Следует подчеркнуть, что рассмотренная теорема выражает лишь необходимый, но недостаточный признак сходимости ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то из этого еще не следует, что ряд сходится.

Примером является гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$. Необходимый признак сходимости выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Но несмотря на это, гармонический ряд является расходящимся.

Теорема (признак сравнения). Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (*) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (**), причем члены первого ряда не превосходят членов второго, т.е. при любом n $a_n \leq b_n$. Тогда:

а) если сходится ряд (**), то сходится и ряд (*);

б) если расходится ряд (*), то расходится и ряд (**).

«*Эталонные*» ряды, используемые для сравнения:

1) *геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – сходится при $|q|<1$, расходится при $|q|\ge 1$;

2) *гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

3) *обобщенный гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots$ – сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\le 1$.

Теорема (предельный признак сравнения). Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\ne 0$, то ряды одновременно сходятся, либо расходятся.

Теорема (признак Даламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует предел отношения *(n+1)*-го члена к *n*-му члену $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$. Тогда, если *l<1*, то ряд сходится; если *l>1*, то ряд расходится; если *l=1*, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$, то ряд расходится.

Теорема (интегральный признак сходимости). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого положительны и не возрастают, т.е. $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge\ldots$, а функция *f(x),* определенная при $x\ge 1$, непрерывная и невозрастающая и $f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ \ldots,\ f(n)=a_n,\ldots$.

Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Под *знакочередующимся* рядом понимается ряд, в котором члены попеременно то положительны, то отрицательны: $a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$; где $a_n > 0$.

Теорема (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ и предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена: $S \le a_1$.

Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *знакопеременный* ряд (1), в котором любой его член a_n может быть как положительным, так и отрицательным.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда (1) $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ сходится, то сходится и данный ряд.

Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Ряд называется *условно сходящимся*, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 21
Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Цель работы: формирование умений раскладывать элементарные функции в ряд Тейлора.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- раскладывать элементарные функции в ряд Тейлора.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Разложить следующие функции в ряд Тейлора при заданном начальном значении аргумента x_0:

а) $e^x,\ x_0 = -2$; б) $3^{-5x},\ x_0 = -1$; в) $\ln(3+2x),\ x_0 = 1$.

Краткие теоретические сведения:

Ряды Тейлора некоторых элементарных функций. Имеют место следующие разложения:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad x \in (-1; 1]$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1; 1]$$

Эти формулы используются для приближённого вычисления значений указанных функций.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 3.6. Теория комплексных чисел

Практическое занятие № 22

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- пользоваться понятиями теории комплексных чисел;
- выполнять арифметические операции над комплексными числами.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Даны комплексные числа $z_1 = 8+3i$ и $z_2 = 8+6i$. Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Решить квадратные уравнения: а) $3x^2 + 8 = 0$; б) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Краткие теоретические сведения:

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения квадратных уравнений. Так, оставаясь в множестве действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля.

Комплексное число – это число вида $z = x + iy$, где i – мнимая единица, обладающая свойством $i^2 = -1$, а x и y – действительные числа.

Число x называется действительной частью числа , а число y – мнимой чистью числа z.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x + iy$ называются *сопряженными*.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части.

Все арифметические операции над комплексными числами проводятся по правилам действий над многочленами $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, считая $i^2 = -1$. Частное двух комплексных чисел вычисляется с использованием сопряженных чисел: числитель и знаменатель умножаются на число сопряженное знаменателю.

Пример. Даны комплексные числа $z_1 = 12 + 5i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. а) $z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 12 + 5i + 3 - 4i = 15 + i$.

б) $z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 12 + 5i - 3 + 4i = 9 + 9i$.

в) $z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 - 48i + 15i - 20i^2 = 36 - 33i + 20 = 56 - 33i$.

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(12 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{36 + 48i + 15i + 20i^2}{9 - 16i^2} = \frac{36 + 63i - 20}{9 + 16} =$

$= \frac{16 + 63i}{25} = \frac{16}{25} + \frac{63i}{25} = 0{,}64 + 2{,}52i.$

Квадратные уравнения в комплексных числах решаются с помощью тех же формул, что и в случае действительных чисел.

Пример. Решить квадратные уравнения: а) $x^2 + 9 = 0$; б) $x^2 + 6x + 18 = 0$.

Решение. а) $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9i^2} = \pm 3i$.

б) $x^2 + 6x + 18 = 0 \Rightarrow D = 6^2 - 4 \cdot 18 = -36 < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-36}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{-6 \pm 6i}{2} = -3 \pm 3i$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 23
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- пользоваться понятиями теории комплексных чисел;
- осуществлять переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной и обратно;
- выполнять арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

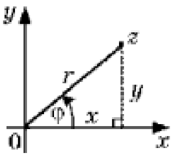
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = \sqrt{3} - i$. Представить их в тригонометрической форме и найти: а) $z_1 z_2$; б) $\dfrac{z_1}{z_2}$; в) z_1^{10}; г) $\sqrt[3]{z_2}$.

Краткие теоретические сведения:

Для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой. Для изображения комплексных чисел используются точки координатной плоскости *Oxy*. Плоскость называется комплексной, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка плоскости $z(x, y)$, причем это соответствие взаимно однозначное (рис. 1).



Оси *Ox* и *Oy*, на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно *действительной* и *мнимой осями*.

Рис. 1.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

С каждой точкой $z(x, y)$ комплексной плоскости связан радиус-вектор этой точки $\overline{Oz}$, длина которого r называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$ (см. рис. 1): $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол φ, образованный радиус-вектором $\overline{Oz}$ с осью *Ox*, называется *аргументом комплексного числаz* и обозначается $Arg\, z$. Из значений $\varphi = Arg\, z$ выделяется главное значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z < \pi$.

Из рис. 1 видно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно представить как $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Данная формула называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

1) Умножение: $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

2) Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

3) Возведение в степень (формула Муавра): $z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

4) Извлечение корня: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Показательная форма комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$, $\varphi = Arg\,z$.

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Пример. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$. Представить их в тригонометрической форме и найти: а) $z_1 z_2$; б) $\dfrac{z_1}{z_2}$; в) z_1^{28}; г) $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение. Найдем модуль комплексного числа z_1: $r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Из соотношений $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ получим аргумент числа z_1: $\cos\varphi_1 = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi_1 = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$, $\varphi_1 = \arg z_1 = -\dfrac{\pi}{4}$. Следовательно, число z_1 в тригонометрической форме выглядит так $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

Аналогично найдем модуль комплексного числа z_2: $r_2 = |z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$. Из соотношений $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ получим аргумент числа z_2: $\cos\varphi_2 = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi_2 = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{2}$,

$\varphi_2 = \arg z_2 = \dfrac{5\pi}{6}$. Следовательно, число z_2 в тригонометрической форме выглядит так $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

а) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

б)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right).$$

в) $z_1^{\,28} = \left(\sqrt{2}\right)^{28}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\cdot 28\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\cdot 28\right)\right) = 2^{14}\left(\cos(-7\pi) + i\sin(-7\pi)\right)$.

г) $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3}\right)$, $k = 0,1,2$, откуда получаем три значения корня:

при $k=0$ $\left(\sqrt[3]{z_2}\right)_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{18} + i\sin\dfrac{5\pi}{18}\right)$,

при $k=1$ $\left(\sqrt[3]{z_2}\right)_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{17\pi}{18} + i\sin\dfrac{17\pi}{18}\right)$,

при $k=2$ $\left(\sqrt[3]{z_2}\right)_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{29\pi}{18} + i\sin\dfrac{29\pi}{18}\right)$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 3.7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 24
Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений решать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными; решать однородные дифференциальные уравнений 1-го порядка; решать линейные дифференциальные уравнений 1-го порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными;
- решать однородные дифференциальные уравнений 1-го порядка;
- решать линейные дифференциальные уравнений 1-го порядка.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Решить уравнения: а) $(3x-1)dy + y^2dx = 0$; б) $xy' + 2y = 2xyy'$.
2. Решить уравнения: а) $(xy - x^2)y' = y^2$; б) $xy' = y\ln\frac{x}{y}$.
3. Решить уравнения: а) $y' - 2y = e^{2x}$; б) $(y^2 + x)y' = 1$.

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением *с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде: $f(x)dx = g(y)dy$.

Решается такое уравнение почленным интегрированием данного равенства.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может быть представлено в виде: $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Замена переменной $z = \frac{y}{x}$, где $z = z(x)$, сводит однородные дифференциальные уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид: $y' + f(x)y = g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые непрерывные функции переменной x. Если функция $g(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Один из способов решения такого уравнения, предложенный Даламбером, – представить неизвестную функцию в виде $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и дифференциальное уравнение запишется в виде
$u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$ или $u'v + u[v' + f(x)v] = g(x)$.

Если функцию v выбрать так, что будет выполняться равенство $v' + f(x)v = 0$, то относительно другой функции u дифференциальное уравнение будет простым: $vu' = g(x)$. Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения (3) распадается на решение двух дифференциальных уравнений: сначала $v' + f(x)v = 0$, а затем $vu' = g(x)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением Бернулли*, если оно имеет вид: $y' + f(x)y = g(x)y^n$, где $n \neq 0,\ n \neq 1$.

Это уравнение приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-n}$ либо может быть непосредственно решено тем же методом, что и линейные уравнения.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 25
Решение дифференциальных уравнений высших порядков

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений решать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка, линейные однородные дифференциальные уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка;
- решать линейные однородные дифференциальные уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Решить уравнения: а) $xy'' + y' = 0$; б) $yy'' = (y')^2$.
2. Решить уравнения: а) $2y'' - y' - y = 0$; б) $4y'' + 4y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
3. Решить уравнения: а) $xy'' + y' = 0$; б) $yy'' = (y')^2$.
4. Решить уравнения: а) $2y'' - y' - y = 0$; б) $4y'' + 4y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид: $y'' = f(x, y, y')$.

Задача Коши для уравнения 2-го порядка состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$, которое удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения 2-го порядка может быть сведено к решению уравнения 1-го порядка, т.е. допускает понижение порядка. Рассмотрим некоторые типы таких уравнений.

Если уравнение второго порядка имеет вид: $y'' = f(x, y')$, т.е. в запись уравнения не входит искомая функция $y = y(x)$, то рекомендуется ввести новую зависимую переменную $z = y'$ при сохранении независимой переменной. Относительно новой зависимой переменной получим дифференциальное уравнение 1-го порядка: $z' = f(x, z)$.

Если дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид: $y'' = f(y, y')$, т.е. не содержит независимой переменной *x*, то понижение порядка достигается заменой $y' = p$, где p рассматривается как функция переменной y: $p = p(y)$. При этом $y'' = p'p$, и мы приходим к уравнению $p'p = f(y, p)$ первого порядка. Решив это уравнение, придем к зависимости y' от x и y, т.е. к дифференциальному уравнению первого порядка относительно y.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $y'' + py' + qy = r(x)$, где p и q – некоторые действительные числа, $r(x)$ – некоторая функция. Если функция $r(x)$ тождественно равна нулю, то соответствующее уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Рассмотрим решение однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Данному уравнению ставится в соответствие характеристическое уравнение: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, где λ – переменная.

В зависимости от значения дискриминанта D квадратного уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеют место три случая:

1) $D > 0$ – уравнение имеет различные действительные корни, т.е. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

2) $D = 0$ – уравнение имеет равные действительные корни, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$.

3) $D < 0$ – уравнение имеет комплексные сопряженные корни $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$.

Рассмотрим теперь решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Это уравнение может быть в частности решено *методом вариации произвольных постоянных*, который состоит в следующем. Сначала находится общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ однородного дифференциального уравнения, имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение. Затем решение неоднородного уравнения находится в виде $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, т.е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями независимой переменной

x. При этом функции $C_1(x)$ и C_2 могут быть найдены как решения системы $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = r. \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Практическое занятие № 26
Решение однородных дифференциальных уравнений с помощью Mathcad

Формируемая компетенция:

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

Цель работы: формирование умений выполнять вычисления в математическом пакете Mathcad.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать обыкновенные дифференциальные уравнения в математическом пакете Mathcad.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (инструкция).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Ход работы

13. Запустите программу Mathcad.
14. Откройте панель «Математика» (если она не активна): *Вид\ Панели инструментов/ Математика*.

Mathcad предлагает способ для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старшей производной. Для этих целей служит уже известный нам блок given совместно с функцией odesolve.

Дифференциальное уравнение совместно с начальными или граничными условиями записывается в блоке given. Производные можно обозначать как штрихами (Ctrl+F7), так и с помощью знака производной $\frac{d}{dx}$. Пример использования функции для решения задачи Коши приведен ниже.

$\beta := 0.1$

Given

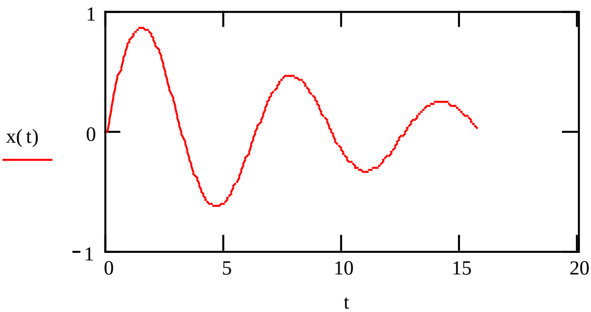
$x''(t) + 2 \cdot \beta \cdot x'(t) + x(t) = 0$

$x(0) = 0$

$x'(0) = 1$

$x := \mathrm{odesolve}(t, 5 \cdot \pi, 0.1)$

$t := 0, 0.1 .. 5 \cdot \pi$



Обратите внимание! У искомой функции явно указан аргумент, знак производной стоит перед скобкой.

Функция odesolve имеет три аргумента. Первый аргумент– независимая переменная, вторая– граница интервала, на котором ищется решение, последний аргумент– шаг, с которым ищется решение. Последний аргумент может быть опущен.

Следующий пример демонстрирует решение краевой задачи. Использован другой способ записи производных, используется odesolve функция с двумя аргументами.

Given

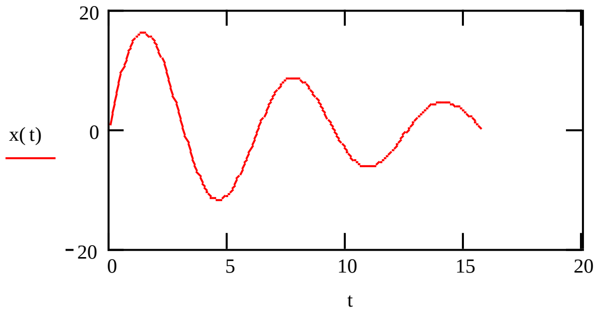
$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2 \cdot \beta \cdot \frac{d}{dt}x(t) + x(t) = 0$$

$x(0) = 1$

$x(5 \cdot \pi) = 0.1$

$x := \mathrm{odesolve}(t, 5 \cdot \pi)$

$t := 0, 0.1 .. 5 \cdot \pi$



Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.