

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж



УТВЕРЖДАЮ
Директор
Е.А. Махновский
«23» марта 2017 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ЛАБОРАТОРНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

**по учебной дисциплине
МАТЕМАТИКА**

**для студентов специальности 13.02.11 Техническая эксплуатация и
обслуживание электрического и электромеханического оборудования
(по отраслям)
базовой подготовки**

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
Предметной комиссией
Математических и
естественнонаучных дисциплин
Председатель Е.С. Корытникова
Протокол №7 от 14.03.2017

Методической комиссией МпК
Протокол №4 от 23.03.2017 г.

Составитель:

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК
Форыкина Елена Витальевна

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 13.02.11 Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям) (базовой подготовки) и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	4
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	7
Практическая работа № 1	7
Практическая работа №2.....	9
Практическая работа №3.....	13
Практическая работа №4.....	16
Практическая работа №5.....	24
Практическая работа № 6.....	29
Практическая работа № 7.....	32
Практическая работа № 8.....	35

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Содержание практических занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 1.1 Выполнять наладку, регулировку и проверку электрического и электромеханического оборудования.

ПК 1.2 Организовывать и выполнять техническое обслуживание и ремонт электрического и электромеханического оборудования.

ПК 1.3 Осуществлять диагностику и технический контроль при эксплуатации электрического и электромеханического оборудования.

ПК 1.4 Составлять отчетную документацию по техническому обслуживанию и ремонту электрического и электромеханического оборудования.

ПК 2.1 Организовывать и выполнять работы по эксплуатации, обслуживанию и ремонту бытовой техники.

ПК 2.2 Осуществлять диагностику и контроль технического состояния бытовой техники.

ПК 2.3 Прогнозировать отказы, определять ресурсы, обнаруживать дефекты электробытовой техники.

ПК 3.1 Участвовать в планировании работы персонала производственного подразделения.

А также формированию **общих компетенций**:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9 Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Выполнение обучающимися практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проективных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Раздел 1 Комплексные числа

Практическая работа № 1

Алгебраическая форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в алгебраической форме;
- выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7;2;7;2)$, $z_3=(2;6)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:

- 1) $z_1 + z_2$;
- 2) $z_2 - z_3$;
- 3) z_1 / z_3 ;
- 4) $z_2 * z_3$;
- 5) z_1^5 .

3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2} + \frac{1+4i}{1+3i} + i^{13}$$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Ход работы:

1. Даны комплексные числа: $z_1 = (7; 1)$, $z_2 = (-1,5; 1,5)$, $z_3 = (4; -3)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид: $z = a + bi$, то числа в алгебраической форме будут записаны в виде:

$$z_1 = 7 + i; \quad z_2 = -1,5 + 1,5i; \quad z_3 = 4 - 3i.$$

2. Вычислить:

$$z_1 + z_2 = (7 - 1,5) + (1 + 1,5)i = 5,5 + 2,5i;$$

$$z_2 - z_3 = (-1,5 - 4) + (1,5 + 3)i = -5,5 + 4,5i;$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+4i+21i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1 + i;$$

$$z_2 \cdot z_3 = (-1,5 + 1,5i)(4 - 3i) = -6 + 4,5i + 6i - 4,5i^2 = -6 + 10,5i + 4,5 = -1,5 + 10,5i;$$

$$z_1^5 = (7 + i)^5 = ((7 + i)^2)^2 (7 + i) = (49 + 14i + i^2)^2 (7 + i) = (48 + 14i)^2 (7 + i) = (2304 + 1344i + 196i^2)(7 + i) = (2304 + 1344i - 196)(7 + i) = 2108 + 1344i + 7i - 13412 + 11516i;$$

3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2,1 - 2,7i;$$

$$1) \frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{-i-3-3i^2-9i}{-i^2+9} = \frac{-10i}{10} = -i$$

$$2) \frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-9i^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1,1 - 1,7i$$

$$3) i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$$

$$4) -i - 1,1 - 1,7i - 1 = -2,1 - 2,7i$$

Форма представления результата: выполненная работа

Раздел 1 Комплексные числа

Практическая работа №2

Тригонометрическая форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Переход от одной формы комплексных чисел к другой.

Цель: Научиться записывать комплексные числа в тригонометрической форме, выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в тригонометрической форме;
- выполнять действия в тригонометрической форме;
- переходить из тригонометрической формы в алгебраическую.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7,2;7,2)$, $z_3=(2;6)$.
Записать эти числа в тригонометрической форме.

2. Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;

2) $\frac{z_1}{z_3}$;

3) z_1^5 ;

$$4) \sqrt{z_2};$$

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$a) \left(3 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)\right)^2 \quad б) \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}.$$

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ z^n &= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \end{aligned}$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ используется формула :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \text{ где } \sqrt[n]{r} - \text{ арифметический корень, } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:
Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.

1) Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos \varphi = \frac{a}{r}, \sin \varphi = \frac{b}{r}.$

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить, в какой четверти находится точка (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z = a + bi$
- Решив уравнение $tg \varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \arg z = \varphi &= \arctg \frac{b}{a} \quad \text{для внутренних точек 1 и 4 четвертей,} \\ \arg z = \varphi &= \arctg \frac{b}{a} + \pi \quad \text{для внутренних точек 2 четверти,} \\ \arg z = \varphi &= \arctg \frac{b}{a} - \pi \quad \text{для внутренних точек 3 четверти.} \end{aligned}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ или $z = r e^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.
2. Выполните заданные действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

1. Записать числа z_1 , z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

$$1) \quad z_1 = 7 + i$$

$$|z_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

Число находится в первой четверти, значит

$$\varphi = \arctg \frac{1}{7} = \arctg 0,1429.$$

$$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8^\circ 8' + i \sin 8^\circ 8').$$

$$2) \quad z_2 = -1,5 + 1,5i$$

$$|z_2| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{2,25 + 2,25} = \sqrt{4,5} = 2,1$$

Число находится во второй четверти, значит $\varphi = \arctg \frac{b}{a} + \pi = \arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;

$$z_2 = -1,5 + 1,5i = 2,1(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).$$

$$3) \quad z_3 = 4 - 3i$$

$$|z_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Число находится в четвертой четверти, значит

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-3}{4} = \operatorname{arctg}(-0,75) = -36^\circ 52'.$$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36^\circ 52' + i \sin(-36^\circ 52')).$$

2. Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;

2) $\frac{z_1}{z_3}$;

3) z_1^5 ;

4) $\sqrt{z_2}$;

Решение:

$$z_2 \cdot z_3 = 2,1 \cdot 5(\cos(135^\circ - 36^\circ 52') + i \sin(135^\circ - 36^\circ 52')) = 10,5(\cos 98^\circ 8' + i \sin 98^\circ 8');$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}(\cos(8^\circ 8' - (-36^\circ 52')) + i \sin(8^\circ 8' + 36^\circ 52')) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ);$$

$$z_1^5 = (5\sqrt{2})^5(\cos 5 \cdot 8^\circ 8' + i \sin 5 \cdot 8^\circ 8') = 12500\sqrt{2}(\cos 40^\circ 40' + i \sin 40^\circ 40');$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

В нашем примере $n=2$.

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} \right);$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} \right) = \sqrt{2,1}(\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30');$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} \right) = \sqrt{2,1}(\cos 247^\circ 30' + i \sin 247^\circ 30');$$

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$(2 \cdot (\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24}))^6 = 2^6 \left(\cos \frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{24} \cdot 6 \right) =$$

$$64 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 64 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i;$$

$$\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{24}{3} (\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) =$$

$$8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 8 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 + 4\sqrt{3}i;$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Раздел 2 Математический анализ
Тема 2. 1 Теория пределов и непрерывность.

Практическая работа №3
Вычисление пределов.

Цель: Научиться вычислять пределы функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;

- раскрывать неопределенности;

- находить пределы функций, используя формулы замечательных пределов.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} (-x^3 + 2x^2 - 4x - 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{3x^3+24}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+3x}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x^2+10}{3x^3+4x^2-1}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x$

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5) &= \\ 2(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 - 10(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 &= 16 - 40 - \\ 8 + 5 &= -27; \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке $x = 3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию.

Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 11x + 6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 3)$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x - 3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3).$$

Возвращаясь к пределу, имеем: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x - \frac{2}{3})(x - 3)}{2(x + \frac{1}{2})(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \frac{9 - 2}{6 + 1} = \frac{7}{7} = 1.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2}$$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞ , то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4 . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{11x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} - \frac{6x}{x^4} + \frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} - \frac{8x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{11}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{6 - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6} = 0 \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2} x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел, формулу $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Введем новую переменную: $x = -3y, x \rightarrow \infty; y \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{-3y}\right)^{-15y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Раздел 2 Математический анализ
Тема 2.2. Дифференциальное исчисление

Практическая работа №4

Дифференцирование сложных функций. Применение производной к исследованию функций.

Цель: Научиться находить производные сложных функций. Научиться исследовать функции и строить графики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять правила дифференцирования;
- находить производные сложных функций;
- проводить исследование функции с помощью производной;
- строить графики функций.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = \arcsin 4x + \arccos^2 x$
4. $f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

6. 1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.
7. 2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0 , знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ равно b .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Провести анализ заданной функции по общей схеме и построить график.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' \\ &= \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

$$3. y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \\ &= \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x+5x^2)' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x) \ln 2} (3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} = \\ &= \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x) \ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2} \end{aligned}$$

$$4. f(x) = \arcsin \frac{3}{5}x + \arccos 5x$$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}} \left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} (5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$5. f(x) = \arccos \sqrt{1 - e^{2x}}$$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1 - e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' = -\frac{1}{e^x} \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} (-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}$$

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}.$$

$$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

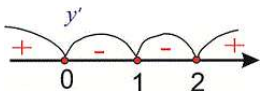
4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравняв ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5. Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ - локального минимума. Найдем значение функции $y_{max} = 0; y_{min} = 2$.

6. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x - 4)(2x - 2)^2 - (2x^2 - 4x) \cdot 2(2x - 2) \cdot 2}{(2x - 2)^4} = \frac{8}{(2x - 2)^3}$$
$$= \frac{8}{8(x - 1)^3} = \frac{1}{(x - 1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Точка $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

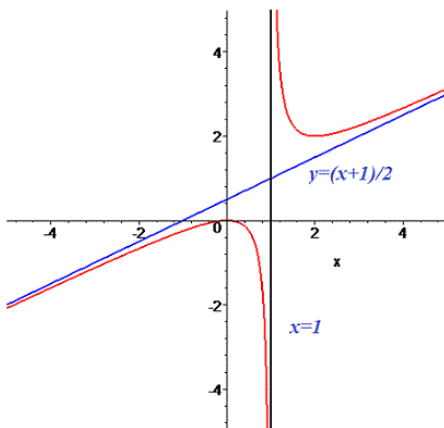
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x - 2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x - 2} - \frac{1}{2}x \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x - 1)}{2(x - 1)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

8. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по ним проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Раздел 2 Математический анализ
Тема 2.3 Интегральное исчисление

Практическая работа №5

Интегрирование различными методами

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные и определенные интегралы методом подстановки;
- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$1) \int (8x^4 - 6x^2 + 2x - 3) dx$$

$$2) \int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$$

$$3) \int \cos(10x - 5) dx$$

$$4) \int 3^{4x^2} x dx$$

$$5) \int \frac{5 dx}{25 + 16x^2}$$

$$6) \int \frac{x^2 dx}{(1 - 2x^3)^2}$$

$$7) \int \frac{2x^4 - 4x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$8) \int (x^2 + 5x + 7) \ln x dx$$

2. Вычислите определенные интегралы

$$1. \int_{-2}^3 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$2. \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$3. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$$

$$4. \int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$6. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернуться к старой переменной.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dV . Затем, после нахождения dU и V , использовать формулу интегрирования по частям.
-Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, где $P(x)$ - многочлен, k - число. Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за dV .

-Интегралы вида

$\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$
 $\int P(x)\text{arcctg} x dx$. Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U .

- Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

$$1) \int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4} = \left[\begin{array}{l} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{dt}{3} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{15dt}{-3t^4}$$

$$= -5 \int t^{-4} dt = -5 \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

$$2) \int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+(\frac{5}{2}x)^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctgt|_0^1 = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ d\cos x = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = \cos 0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{array} \right] = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2} \Big|_1^{0,5}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

$$4) \int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = \ln x$, $dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x} dx, \quad V = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx = \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \frac{1}{x} dx =$$

$$\ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x \right) dx = \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

$$5) \int (x^2 - 2x) \cos 4x dx$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x$, $dV = \cos 4x dx$.

$$dU = (2x - 2) dx, \quad V = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\int (x^2 - 2x) \cos 4x dx = (x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x (2x - 2) dx =$$

$$(x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \int \sin 4x (2x - 2) dx = \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x$$

$$- \frac{1}{2} \int \sin 4x (x - 1) dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$$U = x - 1, \quad dV = \sin 4x dx.$$

$$\begin{aligned} dU &= dx, & V &= \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left(-\frac{1}{4} \cos 4x\right) - \int -\frac{1}{4} \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left(-\frac{1}{4} \cos 4x\right) + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8} ((x - 1) (\cos 4x) - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8} ((x - 1) (\cos 4x) - \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Раздел 4 Линейная алгебра

Тема 4.2.

Системы линейных уравнений.

Практическая работа № 6

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот

определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1

получается из определителя Δ путем замены первого столбца

коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго

столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот

определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1

получается из определителя Δ путем замены первого столбца

коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами

Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2. Запишите и вычислите определитель системы.
3. Вычислите определители каждой неизвестной.
4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2; -1; 0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 4.2.

Системы линейных уравнений.

Практическая работа № 7

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Гаусса;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Краткие теоретические сведения:

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;
- умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;
- прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 4.2.

Системы линейных уравнений.

Практическая работа № 8

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений матричным способом.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить обратную матрицу;

- решать систему линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить систему линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7; \\ 6x_1 + 2x_2 = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$$

Краткие теоретические сведения:

Пусть задана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим матричное уравнение: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы А ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы А;

в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B, состоящую из свободных членов.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Решить систему линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19 \neq 0 \Rightarrow \text{обратная матрица есть.}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решим уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -20 - 18 \\ -12 + 12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -38 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (2; 0).

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}C &= -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -120 + 64 + 56 \\ -310 - 8 - 98 \\ 130 - 104 + 182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ: (0;4;-2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0 + 12 - 2 = 10 \\ 0 - 8 + 4 = -4 \quad . \text{(верно)} \\ 0 - 4 - 10 = -14 \end{cases}$$

Форма представления результата: выполненная работа.