Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/ С.А. Махновский
«23» марта 2017 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.01 МАТЕМАТИКА
программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности СПО
15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям)**

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
Математических и
естественнонаучных дисциплин
Председатель: Е.С. Корытникова
Протокол №7 от 14 марта 2017 г.

Методической комиссией

Протокол №4 от 23 марта 2017 г.

Разработчик

Ю.Ф. Сивилькаева,
преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

СОДЕРЖАНИЕ

1 **ВВЕДЕНИЕ**

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующего федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике, физике, химии, информатике и др.), необходимых в последующей учебной деятельности по общим гуманитарным и социально-экономическим дисциплинам, математическим и естественно-научным, общепрофессиональным дисциплинам.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «математика » предусмотрено проведение практических занятий.

В результате освоения дисциплины обучающийся ***должен уметь:***

- применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;
- применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;
- решать прикладные технические задачи методом комплексных чисел;
- использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 1.1. Руководить работами, связанными с применением грузоподъемных механизмов, при монтаже и ремонте промышленного оборудования.

ПК 1.3. Участвовать в пусконаладочных работах и испытаниях промышленного оборудования после ремонта и монтажа.

ПК 1.5. Составлять документацию для проведения работ по монтажу и ремонту промышленного оборудования.

ПК 2.2 Выбирать методы регулировки и наладки промышленного оборудования в зависимости от внешних факторов;

ПК 2.4 Составлять документацию для проведения работ по эксплуатации промышленного оборудования;

ПК 3.4 Участвовать в анализе процесса и результатов работы подразделения, оценке экономической эффективности производственной деятельности.

В процессе освоения дисциплины у студентов должны формироваться общие компетенции:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «математика » направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

Раздел 1. Комплексные числа

Тема 1.1. Основы теории комплексных чисел

Практическое занятие № 1

1. **Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами**
2. **Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Переход от одной формы к другой.**
3. **Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.**

Цель: Закрепить понятие комплексного числа, научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме. Осуществлять переход от одной формы комплексного числа к другой. Решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, изображать геометрически комплексные числа.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать сопряженные комплексные числа в алгебраической форме;
- решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом;
- изображать комплексные числа на плоскости

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1 Построить данные числа:

Вариант	Даны числа
1	$z_1 = 4 + 4i; z_2 = \sqrt{3} - i; z_3 = 2e^{\frac{11}{12}\pi i}; z_4 = \sqrt{3}(\cos\frac{7}{3}\pi + i\sin\frac{7}{3}$
2	$z_1 = 5 - 5i; z_2 = 4; z_3 = 4e^{\frac{\pi}{3}i}; z_4 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4});$
3	$z_1 = -5 - 5i; \quad z_2 = 4i; z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{4}{3}\pi i}; z_4 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5}{6}$

4	$z_1 = -3+3i; z_2 = 1+\sqrt{3}i; z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}; z_4 = (\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}$
5	$z_1 = \sqrt{3}+i; z_2 = 4; \quad z_3 = e^{\frac{5\pi}{4}i}; z_4 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$
6	$z_1 = -\sqrt{3}+i; z_2 = 2i; z_3 = \sqrt{3}e^{\frac{3}{4}\pi i}; z_4 = \frac{1}{2}(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$
7	$z_1 = -\sqrt{3}-i; \quad z_2 = -2; z_3 = 2e^{\frac{7}{4}\pi i}; z_4 = \sqrt{2}(\cos 2\pi + i\sin 2$
8	$z_1 = \sqrt{3}-i; z_2 = -2i; \quad z_3 = 2e^{\frac{3\pi}{6}i}; z_4 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5}{4}$
9	$z_1 = 4-4i; z_2 = \sqrt{3}-i; z_3 = 3e^{\pi i}; z_4 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$
10	$z_1 = -4-4i; z_2 = -\sqrt{3}+i; z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}; z_4 = 3(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin$
11	$z_1 = -4+4i; z_2 = -\sqrt{3}-i; z_3 = e^{\frac{7}{6}\pi i}; z_4 = \sqrt{2}(\cos\pi + i\sin\pi$
12	$z_1 = 4+4i; z_2 = \sqrt{3}-i; z_3 = 2e^{\frac{11}{12}\pi i}; z_4 = \sqrt{3}(\cos\frac{7}{3}\pi + i\sin\frac{7}{3}$
13	$z_1 = 4; \; z_2 = 2\sqrt{3}+2i; \; z_3 = 3e^{\frac{11}{12}\pi i}; z_4 = \sqrt{2}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi$
14	$z_1 = 4i; z_2 = -2\sqrt{3}+2i; z_3 = \sqrt{3}e^{2\pi i}; z_4 = 2(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}$

15	$z_1=-\sqrt{3}+i;\quad z_2=2i; z_3=\sqrt{3}e^{\frac{3}{4}\pi i}; z_4=\frac{1}{2}(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}$

1) Вычислить:

а) $2z_1 \pm 3z_2;\ z_3-2z_4$ – в алгебраической форме;

б) $z_1\cdot z_2;\ z_1\cdot z_3;\ z_2\cdot z_4;\ \frac{z_1}{z_2};\ \frac{z_3}{z_4};\ \frac{z_1}{z_3};\ \frac{z_4}{z_2};$ – в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;

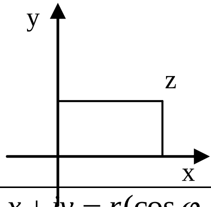
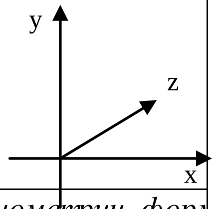
в) $z_1^4;\ z_3^5;\ z_4^{10};\ \sqrt[3]{z_2};\ \sqrt[3]{z_3};\ \sqrt[5]{z_4};$ – в тригонометрической и показательной формах;

I. Решить уравнение

Вариант	Уравнение
1	$z^6+4z^3+5=0$
2	$z^6+2z^6+10=0$
3	$z^6+2z^3+17=0$
4	$z^6-z^3+2=0$
5	$z^6+6z^3+18=0$
6	$z^6+2z^3+25=0$
7	$z^6+6z^3+13=0$
8	$z^6-6z^3+10=0$
9	$z^6-4z^3+20=0$
10	$z^6+4z^6+13=0$
11	$z^6-4z^3+8=0$
12	$z^6-2z^3+17=0$
13	$z^6-2z^3+10=0$
14	$z^6 2-2z^3+5=0$
15	$z^6-8z^3+1750=0$

Краткие теоретические сведения:

Учебная карта «Комплексные числа и действия над ними»

Определение и изображение	$z = x + iy,$ $где\ i = \sqrt{-1}\ (мнимая\ единица),$ $x, y - действительные\ числа$  или 
Форма записи	$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - тригонометрич.\ форм$ $где\ r = \sqrt{x^2 + y^2} - модуль\ комплексного\ числа,\ \varphi -$ $z = re^{i\varphi} - показательная\ форма$ $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi - формула\ Эйлера$

Действия над комплексн ыми числами	$z_1 + z_2 = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$ $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 =$ $=(ac-bd)+(bc+ad)i, \qquad i^2=-1$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} =$ $= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$ $z^n = (a+bi)^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n$ *или* $z^n = (re^{n\varphi})^n - r^n e^{n\varphi}$ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$ $= \sqrt[n]{z}(\frac{\cos\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), \qquad$ *где* $k = 0,1,2,\ldots,n$ *или* $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{re^{i(\frac{\varphi+2\pi k}{n})}}, \qquad$ *где* $k = 0,1,2,\ldots,n$ $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$ $= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ *или* $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi$ *или* $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

III. Решение типовых задач

1. Представьте данное число во всех четырех формах

$$z_1 = -\sqrt{3} - i; z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}; \qquad z_4 = -2i; z_5 = 3;$$

$$z_6 = 2(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi);$$

$$z_1 = -\sqrt{3} - i; r_1 = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2;$$

$$tg\varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = -(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\frac{5}{6}\pi;$$

$$z_1 = -\sqrt{3} - i = 2(\cos(-\frac{5}{6}\pi) + i\sin(-\frac{5}{6}\pi)) = 2e^{-i\frac{5}{6}\pi}$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i$$

$$z_4 = -2i = 0 - 2i$$

$$z_4 = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

$$tg\varphi = \frac{-2}{0}$$

$$tg\varphi - \textit{не существует}, \Rightarrow \varphi = \frac{-\pi}{2}$$

$$z_4 = -2i = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$z_5 = 3 = 3 + 0i$$

$$z_5 = \sqrt{3^2} = 3$$

$$tg\varphi = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$z_5 = 3 = 3(\cos 0 + i\sin 0) = 3e^{0\cdot i}$$

$$z_6 = 2(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)^{12} = 2e^{\frac{7}{6}\pi}$$

$$7 \quad \pi \quad \pi \quad \sqrt{3}$$

2. Даны комплексные числа

$$z_1 = 2+3i; \qquad z_2 = 3-4i; \qquad z_3 = 1+i;$$

$$\textit{Найти}: z = \frac{z_1 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2}{z_1 + z_3}$$

$$\textit{Последовательно вычисляем}: z_1 + z_2 = (2+3i)+(1+i) = 3+4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(3-4i) = (6+12)+i(9-8) = 18+i$$

$$z_2^2 = (3-4i)^2 = 9-24i-16 = -7-24i$$

$$z_1 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2 = 2+3i+18+i-7-24i-13-20i$$

$$\textit{Тогда}\ z = \frac{13-20i}{3+4i} = \frac{(13-20i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{(39-80)+i(-60-52)}{25}$$

$$= \frac{41}{25} - i\frac{112}{25}$$

3. Вычислить $(1+i)^{12}$

Представим число $z = 1+i$ *в тригонометрической или показательной форме*

$$z = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \qquad tg\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i};$$

$$z^{12} = (\sqrt{2})(\cos 12\frac{\pi}{4} + i\sin 12\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2^{12}}e^{3\pi i} = 64(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 6$$

$$= 64(\cos\pi + i\sin\pi) = 64(-1+i\cdot 0) = -64$$

4. Найти корни уравнения

$$z^6+1=0 \Rightarrow z^6=-1 \text{ или } z=\sqrt[6]{-1} \text{ но } -1=1(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$z=\sqrt[6]{-1}=1\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{6}}, \quad k=0,1,2,3,4,5$$

$$z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i=e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$z_2=\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5}{6}\pi i}$$

$$z_3=\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{7}{6}\pi i}=e^{\frac{3}{6}\pi i}$$

$$z_4=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=-i=e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

$$z_5=\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=e^{\frac{11}{6}\pi i}=e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

5. Решить уравнение

$$z^6 - 2x^3 + 5 = 0$$

$$z^3 = y$$

$$y^2 - 2y + 5 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 5 = -16$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$z^3 = 1 \pm 2i$$

$$z_1^3 = 1 + 2i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1 + 2i}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$tg\varphi = \frac{2}{1} = 2 \to \varphi = 73°$$

$$z_1 = \sqrt[3]{5}(\cos\frac{73° + 360°k}{3} + i\sin\frac{73° + 360°k}{3}), k = 0,1,2$$

Порядок выполнения работы:

1 Изучается теоретический материал по конспекту лекции.

2 Решаются задания практической работы по образцу.

3 Задания решаются только в установленном порядке.

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Раздел 2. Интегральное и дифференциальное исчисление

Практическое занятие №2

Вычисление производных элементарных и сложных функций. Применение производной к исследованию функций. Интегрирование различными методами. Решение прикладных задач с использованием интегрального исчисления

Цель работы: научить вычислять производные элементарных и сложных функций, учить проводить исследование функции и строить ее график. научить вычислять производные элементарных и сложных функций, учить проводить исследование функции и строить ее график. Научить применять метод непосредственного интегрирования, метод подстановки, метод интегрирования по частям; научить вычислять площади плоских фигур с помощью определенного интеграла; познакомить студентов с применением определенного интеграла к решению некоторых физических и технических задач.

Выполнив работу, Вы будете:
Уметь: вычислять производные элементарных и сложных функций, используя правила и формулы дифференцирования, проводить исследование функции и строить ее график; вычислять производные элементарных и сложных функций, используя правила и формулы дифференцирования, проводить исследование функции и строить ее график; использовать основные свойства интеграла для нахождения простейших интегралов; находить интегралы методом непосредственного интегрирования, методом подстановки, методом интегрирования по частям; уметь вычислять площади плоских фигур с помощью определенного интеграла; иметь понятие о применении интеграла для решения прикладных задач.

Материальное обеспечение:
Тетрадь с конспектом, таблица «Правила и формулы дифференцирования», таблица «Полное исследование функции и построение графика», карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя, , таблица интегралов, карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание: 1. Найти производную функции
Задание2. Провести полное исследование функции и построить ее график

Задание 3. Вычислить определенный интеграл
Задание 4. Вычислить площадь фигуры

Порядок выполнения работы:

1. Повторение правил и формул
2. Объяснение преподавателя
3. Оценка выполненных заданий
4. Подведение итогов.

Ход работы:

1.Повторение правил и формул

Дайте определение производной функции.
Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
Какая связь существует между непрерывностью функции и ее производной?
Чему равна производная постоянной?
Чему равна производная аргумента?
Как вычисляется алгебраической суммы функций, произведения и частного функций?
Какая функция называется сложной?
Как вычисляется производная сложной функции?

1.Объяснение преподавателя

Задание . Найти производные функций

Задания		**Пояснения**
5.	$(x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9$	$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$
6.	$(\frac{5}{x^{11}})' = (5\cdot x^{-11})' = 5(x^{-11})' = 5(-11)x^{-11-1} = -55x^{-12}$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $(cx)' = c(x)'$; $(x^n)' = nx^{n-1}$
7.	$(2x^{10} - x^8 + 3x^3)' = (2x^{10})' - (x^8)' + (3x^3)' = 2(x^{10})' - (x^8)' + +3(x^3)' = 2 \cdot 10x^9 - 8x^7 + 9x^2$	$(u+v)' = u' + v'$ $(cx)' = c(x)'$
8.	$Y = (7x^4 - 2x + 3)^5$; $У = u^5$, где $u = 7x^4-2x+3$; $y' = 5u^4\cdot u'$; $y' = 5(7x^4-2x+3)^4\cdot(7x^4-2x+3)'$; $y' = 5(7x^4-2x+3)^4\cdot(28x^3-2)$. Найти y'_x при $x = 0$; $y'_0 = 5\cdot 3^4\cdot(-2) = -810$	*Воспользуемся формулой* *$(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, где $n = 5$* $(cx^n)' = c(x^n)'$ $(c)' = 0$
9.	$((x+1) \cdot\sqrt{x}) = (x+1)' \cdot \sqrt{\boldsymbol{x}} +$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(x+1)\left(\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x} + (x+1)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$	(u + v) ’ = u ’+ v’ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (x) ’ = 1
10. $\left((2x-7)^{14}\right)' = 14(2x -$ ***7132x−7′=282x−713***	$y' = f'(u)\cdot u'(x),$ $\left(u^n\right) = nu^{n-1}\cdot u'$

Задание. Провести полное исследование функции у = $\frac{x^2}{x+1}$ и построить ее график.

Решение:

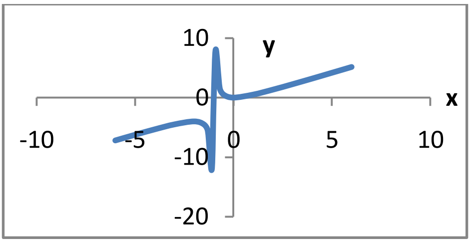
1. D(y)=$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.
2. Так как область определения функции не симметрична относительно начала координат, то исследуемая функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того она не периодична.
3. Функция терпит разрыв при x = -1, следовательно график функции имеет вертикальную асимптоту x = 1 Для отыскания наклонной асимптоты найдем к = $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x+1)} = 1$; $b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x+1} = -1.$ Значит прямая у = x – 1 служит наклонной асимптотой графика.
4. Определим интервалы монотонности и экстремум функции. Дифференцируя данную функцию, получим у’=$\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Производная обращается в нуль при x = -2 и x = 0 и терпит разрыв при x = -1. Этими точками числовая прямая делится на четыре промежутка: $(-\infty,-2), (-2,-1), (-1,0), (0,+\infty)$. найдем знак производной в каждом из них: на$(-\infty,-2)$ у’>0;
на $(-2,-1)$ имеем $y' < 0$; на$(-1,0)$ также $y' < 0$; на$(0,+\infty)$ имеем $y' > 0$. следовательно, в промежутках
$(-\infty,-2)$ и $(0,+\infty)$ функция возрастает, а в промежутках

5. $(-2,-1)$ и $(-1,0)-$ убывает. точки $x=-2$ и $x=0$ являются соответственно точками максимума и минимума.

Находим значения функции экстремальных точках

$y_{max}=y(-2)=-4, y_{min}=\qquad y(0)=0.$

6. Определим интервалы выпуклости и точки перегиба функции. Найдем y'' $=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4}=2\frac{x^2+2x+1-x^2-2x}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3}$. Вторая производная терпит разрыв при x = -1. Этой точкой числовая ось разбивается на два промежутка: $(-\infty,-1)$ и $(-1,+\infty)$. Определим знак второй производной в этих промежутках: в первом из них y''< 0, а во втором y''> 0. Таким образом, в промежутке $(-\infty,-1)$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $(-1,+\infty)$ выпукла вниз. Точек перегиба нет. Используя полученные данные строим график:



Задание:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$a)\quad y=-x^2+4,\ y=0$

$b)\quad y=x^2,\ \ y=x^3$

$c)\quad y=e^x,\ \ y=e^{-x},\ \ y=4$

2.Вычислить объем тела

$y=x^2,\ \ y=1,\ \textit{вокруг оси}\ OY$

Порядок выполнения работы:

1. построить графики функций
2. найти область, ограниченную этими графиками
3. составит определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

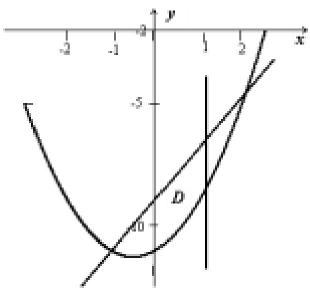
Ход работы:

Пример1: Найти площадь области **D**, ограниченной кривыми **y** = $\mathbf{x}^2$ + **x** + 11, **y** = 2 **x** - 9, при условии,

x<=1

$$D : \begin{cases} y = x^2 + x - 11, \\ y = 2x - 9, \\ x \le 1. \end{cases}$$

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение $\mathbf{x}^2$ + **x** + 11 = 2 **x** - 9 имеет два корня: **x** = -1 и **x** = 2. Подходящий корень - **x** = -1. Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой **x** = 1, крайняя левая точка - **x** = -1 (рис. 14), поэтому



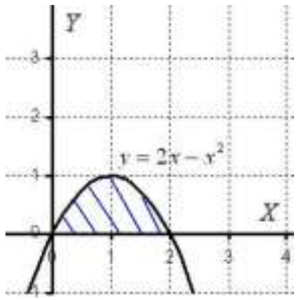
$$S(D) = \int_{-1}^{1} \left[(2x-9) - (x^2 + x - 11)\right] dx = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 + x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части.

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру (рис.15), ограниченную линиями $y = 2x - x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX. В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}\,ед^3. \approx 3{,}35\,ед^3.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 2. Дифференциальное и интегральное исчисление

Практическое занятие №3

Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения первого и второго порядка. Научиться находить общие и частные решения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разделять переменные для решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными;
- находить общее решение дифференциального уравнения;
- выделять из общего решения частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решать задачу Коши);

решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка;

- находить общее и частное решение простейших дифференциальных уравнений второго порядка;
- находить общее и частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$

б) $(y-1)^2dx + (1-x^3)dy = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$dy = (3x^2 - 2x)dx$, *если y=4 при x=*

Порядок выполнения работы:

1) Привести данное уравнение к уравнению с разделяющими переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:

а) Производные функции заменить её дифференциалами;

б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;

в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих" дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$

2) Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

3) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0; y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постояннойС ,а затем С подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

1) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6xdx + 3xy^2dx) - (6ydy + 2x^2ydy) = 0$$

Сгруппируем члены с *dx* и *dy*

$$3x(2+y^2)dx - 2y(3+x^2)dy = 0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3+x^2} = \frac{2ydy}{2+y^2}$$

-Интегрируем

$$3\int\frac{xdx}{3+x^2} = 2\int\frac{ydy}{2+y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2}\ln(3+x^2) = \ln(2+y^2) + \ln c$$

$$\ln(3+x^2)^{\frac{3}{2}} = \ln(2+y^2)\cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3+x^2)^3} = (2+y^2)\cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}{2+y^2} = c$$

2) Найти частные решение дифференциальных уравнений

$2(y-3)dx - dy = 0$ *при x=0 , y=4*

-Разделим переменные

$$dy = 2(y-3)dx$$

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx$$

-Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$$

$$\ln(y-3) = 2x + \ln c$$

-По определению логарифма $2x = \ln e^{2x}$

$$\ln(y-3) = \ln(e^{2x}\cdot c)$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{2x}\cdot c + 3$$

-Подставим в это уравнение начальные условия *x=0 , y=4*

$4 = e^0\cdot c + 3$ => $c=1$

-Запишем частное решение

$$y = e^{2x} + 3$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 4 Линейная алгебра

Практическое занятие № 4

Действия над матрицами. Вычисление определителей. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель работы: научить выполнять действия над матрицами, вычислять определители, находить обратную матрицу, вычислять ранг матрицы, приводить матрицу к ступенчатому виду.

Выполнив работу, Вы будете:

Уметь: выполнять действия над матрицами, приводить матрицу к ступенчатому виду, находить обратную матрицу, вычислять определитель 2-го и 3-его порядка, вычислять ранг матрицы, приводить матрицу к ступенчатому виду.

Материальное обеспечение:

Тетрадь с конспектом, таблица «Матрицы и определители», Карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание: 1. Вычислить матрицу *X.*

Задание: 2. Для данной матрицы А найти обратную.

Задание: 3. Найти ранг матрицы А

Порядок выполнения работы:

1) Повторение правил и формул
2) Объяснение преподавателя
3) Оценка выполненных заданий
4) Подведение итогов.

Ход работы:

1) Повторение правил и формул

1. Что называется матрицей, элементами матрицы, размером матрицы? Какие матрицы называются равными?
2. По какому правилу складываются матрицы?

3. Можно ли сложить матрицы размерами 2x3 и3x1?
4. Можно ли из одной матрицы вычесть другую? Как это сделать? Каким условиям должны удовлетворять при этом матрицы? Какие размеры имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
5. Как умножить матрицу на число?
6. Как перемножаются матрицы? Какие матрицы можно перемножать? Какие размеры имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
7. Можно ли умножить матрицу с размерами 2x3 на матрицу с такими же размерами?
8. Какими свойствами обладает операция умножения матриц?
9. Что такое транспонирование матриц?

1) Объяснение преподавателя

Задание 1: Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Выполним задание по действиям:

1) $2xC = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

2) 2CB=

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 2(-1) & 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-6) \cdot 0 \\ 6 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу, транспонированную к А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $3\,A^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2) $2CB + 3A^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 6 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$

<u>Задание 2</u>: Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите матрицу, обратную данной A.

Решение:

Обратную матрицу найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

1. Вычислим определитель матрицы А: $|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

2. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы А

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2;$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$; $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

3. Найдем матрицу, обратную данной $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Правильность вычислений можно проверить, используя равенство $A^{-1} \cdot A = E$.

<u>**Задание 3**</u>: Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Решение:

Чтобы найти ранг матрицы А надо привести ее к ступенчатому виду и подсчитать у последней число ненулевых строк. Это число и будет рангом матрицы А.

Выполним последовательно следующие элементарные преобразования, которые приводят матрицу А к ступенчатому виду: 1) ко 2-ой строке прибавим соответствующие элементы 1-ой строки, предварительно умноженной на -2; к 3-ей строке прибавим соответствующие элементы 1-ой строки, предварительно умноженной на -5; 2) к 3-ей строке прибавим соответствующие элементы 2-ой строки, предварительно умноженной на -2. Получаем $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ ранг матрицы равен 2.

<u>**Задание 4.**</u> Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

2) **Оценка работ студентов.** Форма предоставления результата: выполненные задания
3) **Подведение итогов.**

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.