

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж



УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Махновский
«23» марта 2017 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.02 КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности СПО**

**15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств
(по отраслям)
базовой подготовки**

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
Информатики и ИКТ
Председатель: И.В. Давыдова
Протокол №7 от 14 марта 2017 г.

Методической комиссией

Протокол №4 от 23 марта 2017 г.

Разработчик

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» Многопрофильный
колледж
Наталья Викторовна Кучерова

Методические указания разработаны на основе рабочей программы
учебной дисциплины «Компьютерное моделирование»

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	4
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	8
Практическое занятие №1 Применение инструмента Подбор параметра для решения простых математических задач в MS Excel	8
Практическое занятие №2 Применение инструмента Подбор параметра для решения уравнений в MS Excel 10	
Практическое занятие №3 Применение инструмента Поиск решения для решения систем линейных уравнений в MS Excel.....	12
Практическое занятие №4 Решение транспортной задачи средствами MS Excel	14
Практическое занятие №5 Решение задач оптимизации средствами MS Excel	18
Практическое занятие №6 Уточнение корней уравнения методом итераций средствами MS Excel	21
Практическое занятие №7 Решение системы линейных уравнений методом Крамера средствами MS Excel.	23
Практическое занятие №8 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса средствами MS Excel....	25
Практическое занятие №9 Система математических расчетов Mathcad: знакомство с интерфейсом программы, вычисление значений алгебраических выражений	28
Практическое занятие №10 Система математических расчетов Mathcad: построение простых графиков, решение уравнений с одним неизвестным двумя способами (графический, функция Root).....	31
Практическое занятие №11 Система математических расчетов Mathcad: решение системы линейных уравнений (Find)	34
Практическое занятие №12 Система математических расчетов Mathcad: метод итераций для решения СЛАУ	37
Практическое занятие №13 Система математических расчетов Mathcad: вычисление производной функции 40	
Практическое занятие №14 Система математических расчетов Mathcad: вычисление определенных интегралов, расчет площади фигуры, ограниченной графиками функций.....	43
Практическое занятие №15 Система математических расчетов Mathcad: построение графиков функций в полярных координатах, построение поверхностей	46
Практическое занятие №16 Реализация метода половинного деления средствами MS Excel и Mathcad.....	49
Практическое занятие №17 Реализация метода наименьших квадратов средствами MS Excel и Mathcad	51
Практическое занятие №18 Реализация метода отделения корней для решения нелинейных уравнений средствами MS Excel и Mathcad	54
Практическое занятие №19 Выполнение анализа результатов эксперимента средствами MS Excel.....	56

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений осуществлять обработку информации средствами прикладных программ профессиональной направленности, необходимых в последующей учебной деятельности по общепрофессиональным дисциплинам и профессиональным модулям.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Компьютерное моделирование», предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности.

Содержание практических занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 4.1. Проводить анализ систем автоматического управления с учетом специфики технологических процессов.

ПК 4.2. Выбирать приборы и средства автоматизации с учетом специфики технологических процессов.

ПК 4.3. Составлять схемы специализированных узлов, блоков, устройств и систем автоматического управления.

ПК 4.4. Рассчитывать параметры типовых схем и устройств.

ПК 4.5. Оценивать и обеспечивать эргономические характеристики схем и систем автоматизации.

А также формированию общих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

Выполнение обучающимися практических работ по учебной дисциплине «Компьютерное моделирование» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования,

пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Разделы/темы	Темы практических/лабораторных занятий	Количество во часов	Требования ФГОС СПО (уметь)
Раздел 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ		24	
2.1. Математические и численные методы решения прикладных задач	№1. Применение инструмента <i>Подбор параметра</i> для решения простых математических задач в MS Excel	2	У1
	№2. Применение инструмента <i>Подбор параметра</i> для решения уравнений в MS Excel	2	У1
	№3. Применение инструмента <i>Поиск решения</i> для решения систем линейных уравнений в MS Excel	2	У1
	№4. Решение транспортной задачи средствами MS Excel	4	У1
	№5. Решение задач оптимизации средствами MS Excel	6	У1
	№6. Уточнение корней уравнения методом итераций средствами MS Excel	4	У1
	№7. Решение системы линейных уравнений методом Крамера средствами MS Excel	2	У1
	№8. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса средствами MS Excel	2	У1
Раздел 3. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ		24	
3.1. Решение прикладных задач	№9. Система математических расчетов Mathcad: знакомство с интерфейсом программы, вычисление значений алгебраических выражений	2	У1
	№10. Система математических расчетов Mathcad: построение простых графиков, решение уравнений с одним неизвестным двумя способами (графический, функция Root)	2	У1
	№11. Система математических расчетов Mathcad: решение системы линейных уравнений (Find)	2	У1
	№12. Система математических расчетов Mathcad: метод итераций для решения СЛАУ	2	У1
	№13. Система математических расчетов Mathcad: вычисление производной функции	2	У1
	№14. Система математических расчетов Mathcad: вычисление определенных интегралов, расчет площади фигуры, ограниченной графиками функций	2	У1
	№15. Система математических расчетов Mathcad: построение графиков функций в полярных координатах, построение поверхностей	2	У1
	№16. Реализация метода половинного деления средствами MS Excel и Mathcad	2	У1

	№17. Реализация метода наименьших квадратов средствами MS Excel и Mathcad	2	У1
	№18. Реализация метода отделения корней для решения нелинейных уравнений средствами MS Excel и Mathcad	2	У1
	№19. Выполнение анализа результатов эксперимента средствами MS Excel	4	У1
ИТОГО		48	

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 2.1 Математические и численные методы решения прикладных задач

Практическое занятие №1

Применение инструмента Подбор параметра для решения простых математических задач в MS Excel

Цель работы:

Освоить технологию применения инструмента Подбор параметра для решения задач в MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У1 работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

Подбор параметра, используется когда известен желаемый результат одиночной формулы (т.е. известно значение функции), но не известны, значения, которые требуется ввести для получения этого результата (значения аргумента функции).

При Подборе параметра MS Excel изменяет значение в одной конкретной ячейке до тех пор пока формула, зависящая от этой ячейки, не возвращает нужный результат.

Задание 1. Решить задачу, используя инструмент Подбор параметра. Какое расстояние можно преодолеть за 12 минут при скорости 75 км в час?

Порядок выполнения задания 1:

1. В ячейку A2 ввести формулу $=A4*(60/A3)$
2. В ячейке A3 ввести число 12.
3. В ячейку A4 ввести формулу $=A2*(A3/60)$
4. Выполнить команду *Данные* → *Анализ «что-если»* → *Подбор параметра*.
5. В поле ввода *Установить в ячейке* ввести A2 или щёлкнуть на ячейке A2.
6. В поле ввода *Значение* ввести число 75.
7. В поле ввода *Изменяя значение ячейки* ввести A4 или щёлкнуть на ячейке A4.
8. Щёлкнуть на кнопке *Ок*.
9. В открывшемся окне *Результат подбора параметра* щёлкнуть на кнопке *ОК*.

Ответ: за 12 минут при скорости 75 км в час можно преодолеть 15км.

Задание 2. Решить задачу, используя инструмент Подбор параметра. Каково значение радиуса круга, если площадь круга равна 17?

Порядок выполнения задания 2:

1. В ячейке A1 ввести число 0 (значение радиуса окружности).
2. В ячейку A2 ввести формулу нахождения площади круга $=\text{ПИ}()*A2^2$
3. Выполнить команду *Данные* → *Анализ «что-если»* → *Подбор параметра*.
4. В поле ввода *Установить в ячейке* ввести A2 или щёлкнуть на ячейке A2.
5. В поле ввода *Значение* ввести число 17.
6. В поле ввода *Изменяя значение ячейки* ввести A1 или щёлкнуть на ячейке A1.
7. Щелкните на кнопке *Ок*.
8. В открывшемся окне *Результат подбора параметра* щёлкнуть на кнопке *ОК*.

Ответ: если площадь круга равна 17, то радиус равен 2.3.

Форма представления результата: файл MS Excel с двумя листами, лист1-«Расстояние», лист2-«Радиус».

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «хорошо» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если задания выполнены не в полном

объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №2

Применение инструмента Подбор параметра для решения уравнений в MS Excel

Цель работы:

Продемонстрировать навык работы с надстройкой Подбор параметра для нахождения корней нелинейных уравнений

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

Подбор параметра, используется когда известен желаемый результат одиночной формулы (т.е. известно значение функции), но не известны значения, которые требуется ввести для получения этого результата (значения аргумента функции).

При Подборе параметра MS Excel изменяет значение в одной конкретной ячейке до тех пор пока формула, зависящая от этой ячейки, не возвращает нужный результат.

Для решения задач этого раздела подготовить рабочий лист, показанный на рис 1. Алгебраическое выражение $ax+by+cz=d$ по значениям переменных a, b, c, x, y , и z вычисляет значение переменной d . Имея значения любых шести переменных, с помощью средства Подбор параметра можно вычислить значение седьмой переменной.

15	Вычисление корней уравнения $ax+by+cz=d$	
16	3 a	4 X
17	3 b	3 Y
18	2 c	5 Z
19	=(A17*C17)+(A18*C18)+(A19*C19)	

Рис.1

Задание 1. Зная значения переменных $a=1$, $b=2$, $d=12$, $x=1$, $y=2$, $z=1$ найти значение переменной c , используя инструмент Подбор параметра.

Порядок выполнения задания 1:

1. Ввести следующие значения в указанные ячейки:

- A16=1
- A17=2
- A19=12
- C16=1
- C17=2
- C18=1

2. Выполнить команду *Данные* → *Анализ «что-если»* → *Подбор параметра*.

3. В поле ввода *Установить в ячейке* ввести A19 или щелкнуть на ячейке A19

4. В поле ввода *Значение* ввести число 12

5. В поле ввода *Изменяя значение ячейки* ввести A18 или щелкнуть на ячейке A18

6. Щелкнуть по кнопке ОК

7. В открывшемся окне *Результат подбора параметра* щелкнуть на кнопке ОК

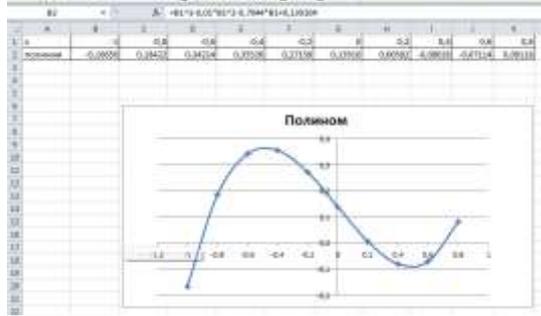
Ответ: если $a = 1, b = 2, d = 12, x = 1, y = 2, z = 1$, то $c = 7$

Задание 2. Найти корни кубического уравнения (полинома) с одним неизвестным $x^3 - 0.01x^2 - 0.7044x + 0.139104 = 0$ помощью средства Подбор параметров.

Порядок выполнения задания 2:

1. Найти интервалы, на которых существуют корни полинома. Такими интервалами, являются промежутки, на концах которых функция меняет знак. С этой целью построить таблицу значений полинома на интервале $(-1, 1)$ с шагом 0,2 и построить график.

2. Ввести в ячейку A2 значение -1 , а в A3 – значение: -0.8
3. Используя маркер заполнения, заполнить ячейки до A12.
4. В ячейку B2 ввести формулу: $=A2^3-0,01*A2^2-0,7044*A2+0,139104$.
5. Заполняем диапазон B3:B12.
6. По полученным значениям построить график заданного полинома.



7. Полином меняет знак на интервалах $[-1,-0.8]$, $[0.2,0.4]$ и $[0.6,0.8]$, т.е. пересекается с осью x. Интервалов три – столько корней имеет уравнение третьей степени.
8. Задать точность нахождения значений корней. *Файл*→ *Параметры*→ *Формулы*→ *Параметры вычислений*.
9. В появившемся окне задать *относительную погрешность* 0,00001 и *предельное число итераций* 1000.
10. Ввести на Листе2 в ячейке A2 значение, являющееся первым приближением к искомому корню, среднее значение из первого интервала -0,9.
11. В ячейки A3 и A4 ввести приближенные значения для второго и третьего корней соответственно: 0,3 и 0,7.
12. В ячейку B2 ввести формулу: $=A2^3-0,01*A2^2-0,7044*A2+0,139104$.
13. Скопировать формулу ячейки B3 и B4.
14. Выполнить команду *Данные*→ *Анализ «что-если»*→ *Подбор параметра*.
15. В поле ввода *Установить в ячейке* ввести или щелкнуть на ячейке B2.
16. В поле ввода *Значение* ввести число 0.
17. В поле ввода *Изменяя значение ячейки* ввести A2 или щелкнуть на ячейке A2.
18. Щелкнуть по кнопке ОК.
19. В открывшемся окне *Результат подбора параметра* щелкнуть на кнопке ОК.
20. Найденное приближенное значение первого корня будет отображаться в ячейке B2. В данном случае оно равно -0,92034.
21. Повторить действия п.14-19 для остальных двух корней.
22. Ответ: B2=-0,92034, B3=0,21021, B4=0,72071.

Форма представления результата: файл MS Excel с двумя листами, лист1-«Значение C», лист2-«Корни полинома».

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №3

Применение инструмента Поиск решения для решения систем линейных уравнений в MS Excel

Цель работы:

Изучить надстройку «Поиск решения» для нахождения корней системы уравнений

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

Надстройка Поиск решения является мощным средством анализа данных в Excel . С ее помощью можно определить, при каких значениях указанных влияющих ячеек формула в целевой ячейке принимает нужное значение (минимальное, максимальное или равное какой-либо величине). Для процедуры поиска решения можно задать ограничения, причем не обязательно, чтобы при этом использовались те же влияющие ячейки. Для расчета заданного значения применяются различные математические методы поиска. Вы можете установить режим, в котором полученные значения переменных автоматически заносятся в таблицу.

В основе поиска решения лежит итерационный (приближенный) метод. Его особенности:

- *Поиск решения* позволяет использовать одновременно большое количество переменных, более 200;
- *Поиск решения* может задавать ограничения для изменяемых ячеек;
- *Поиск решения* обеспечивает поиск наилучшего результата из всех возможных;
- *Поиск решения* для сложных задач может генерировать множество различных решений и при этом сохранять каждое из полученных решений, определяя для них сценарий.

Задачи, для решения которых используется Поиск решения, имеет ряд свойств:

1. Имеется *единственная* целевая ячейка.

Целевая ячейка – это та ячейка, для которой нужно найти максимальное, минимальное или заданное значения.

2. Формула в целевой функции содержит ссылки на ряд *изменяемых ячеек* (прямо или косвенно), содержащие переменные неизвестные для решаемой задачи.

Изменяемые ячейки – это те ячейки, от которых зависит значение целевой ячейки.

Поиск решения заключается в том, чтобы подобрать такие значения изменяемых ячеек, которые давали бы оптимальные значения для формул целевой ячейки.

3. Может быть задано некоторое количество *ограничений* – условий или соотношений, которым должны удовлетворять некоторые из изменяемых ячеек.

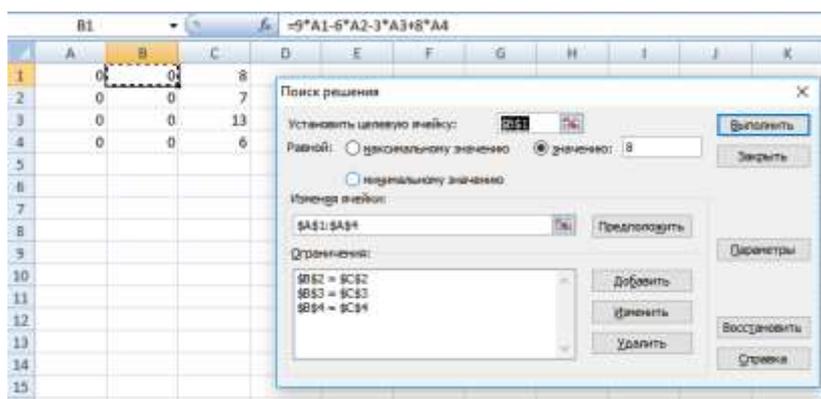
Задание 1. Решить систему уравнений, используя надстройку *Поиск решения*.

$$\begin{cases} 9x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 8 \\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 13 \\ 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 6 \end{cases}$$

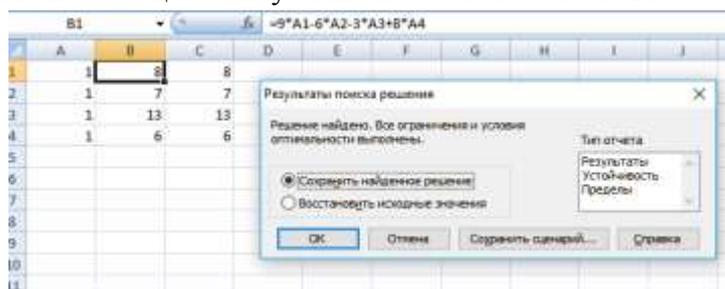
Порядок выполнения задания 1:

1. Ввести в столбец А начальное приближение для значений всех неизвестных. Пусть

- это будут 0.
- В столбец В ввести формулу, описывающие левые части уравнений.
 - В столбец С ввести значения правых частей уравнений.
 - Установить курсор в ячейку В1 и запустить надстройку *Поиск решения*:
 - В поле ввода *Установить целевую ячейку* щелкнуть на ячейке В1.
 - В поле ввода *Значение* установить значение ячейки С1.
 - В поле ввода *Изменяя значение ячейки* ввести $\$A\$1:\$A\4 .
 - К ограничениям добавить все уравнения, кроме первого.
 - Для данной системы уравнений диалоговое окно *Поиск решения* будет выглядеть так.



- Нажать кнопку *Выполнить*.
- В столбце А получили значения неизвестных.



Форма представления результата: файл MS Excel «Система.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №4

Решение транспортной задачи средствами MS Excel

Формируемая компетенция:

Цель работы:

Научиться решать транспортные задачи средствами MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

В инженерных, маркетинговых, бухгалтерских исследованиях решаются задачи, которые требуют отыскать одно из оптимальных решений. Для отыскания таких решений в Excel имеется средство *Поиска решения*.

К задачам такого типа относятся:

- ◆ транспортная задача;
- ◆ задача о выборе оптимального меню;
- ◆ задача о назначениях;
- ◆ задача о выборе портфеля ценных бумаг;
- ◆ задачи линейной алгебры;
- ◆ и т.д.

Транспортная задача может быть сформулирована различными способами. *Постановка задачи А.* Пусть имеется m источников финансирования A_1, A_2, \dots, A_m и n периодов финансирования B_1, B_2, \dots, B_n . Известны затраты, связанные с выделением единицы денежных ресурсов C_{ij} из i -го источника в j -ом периоде, а также объемы финансирования из каждого i -го источника в течение всего времени – a_i . Известны суммарные объемы финансирования из всех источников в каждый j -й период времени – b_j . Требуется определить объемы финансирования x_{ij} из i -го источника в j -ом периоде, чтобы:

1. Ресурсы всех источников были реализованы.
2. Обеспечить финансирование в полном объеме в каждом периоде.
3. Достигнуть экстремума выбранного критерия оптимизации.

Постановка задачи В. Пусть имеется n пунктов производства (хранения) A_1, A_2, \dots, A_n , некоторого однородного ресурса, запасы которого составляют a_1, a_2, \dots, a_n условных единиц соответственно. Кроме этого, имеется m пунктов потребления B_1, B_2, \dots, B_m данного ресурса с потребностями b_1, b_2, \dots, b_m условных единиц. Кроме этого, известна матрица перевозок C , элементы которой c_{ij} – затраты на перемещение единицы ресурса из A_i – пункта хранения в B_j – пункт потребления.

Требуется вывезти все ресурсы из пунктов хранения A_i , удовлетворить потребности во всех пунктах B_j , все перевозки выполнить с минимальными суммарными затратами.

Для решения поставленной задачи сформулируем её математическую модель, первоначально сведя исходные данные в следующую таблицу:

$A_i \backslash B_j$	B1	B2	...	Bm	Запасы a_i
A1	c11	c12	...	c1m	a1
A2	c21	c22	...	c2m	a2
...
An	cn1	cn2	...	cnm	an
Потребности b_j	b1	b2	...	Bm	$\sum_{i=1}^n a_i$ m $\sum_{j=1}^m b_j$

Различают закрытую (сбалансированную) и открытую (несбалансированную) транспортную задачу. При этом, если

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$$

то задача называется сбалансированной, в противном случае – несбалансированной.

Для решения, сформулированной задачи, составим ее математическую модель.

Математическая модель закрытой транспортной задачи. Для построения математической модели задачи:

1. Определим неизвестные и их количество.

Обозначим через x_{ij} количество ресурса, перемещаемого из A_i пункта хранения в B_j пункт потребления. Таким образом, элементы x_{ij} образуют матрицу перевозок X $n \times m$.

2. Запишем целевую функцию – суммарные затраты на перевозку ресурсов, которую необходимо минимизировать

$$F(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} * x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ресурсы из всех пунктов отправления должны быть вывезены. Это ограничение можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Т.е. сумма элементов каждой строки матрицы перевозок X равна запасу ресурса в данном пункте хранения.

3.2. Необходимо удовлетворить запросы каждого потребителя в данном ресурсе. Это ограничение можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

3.3. Введем граничные условия, которые определяют предельно допустимые значения искомых переменных. Для нашей задачи их можно представить в виде:

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

Таким образом, целевая функция (1) и ограничения (2-4) образуют математическую модель сбалансированной транспортной задачи.

образуют

Порядок выполнения задания 1:

1. Идентифицировать свою работу, переименовав Лист1 в Титульный лист и записав номер лабораторной работы, ее название, кто выполнил и проверил.
2. На следующем листе, с именем Сбалансированная ТЗ, создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные.
3. Записать матрицу затрат на перевозки $C_{4 \times 4}$.
4. Составить матрицу перевозок $X_{4 \times 4}$ с пока нулевыми значениями x_{ij} .
5. Дополнить матрицу перевозок двумя столбцами справа и двумя строками снизу, которые записать:
 - запасы песка a_j и количество вывезенного ресурса из каждого карьера, используя встроенную функцию MS Excel – СУММ();
 - потребности в песке b_j и количество доставленного песка на каждую стройку, используя встроенную функцию MS Excel – СУММ().

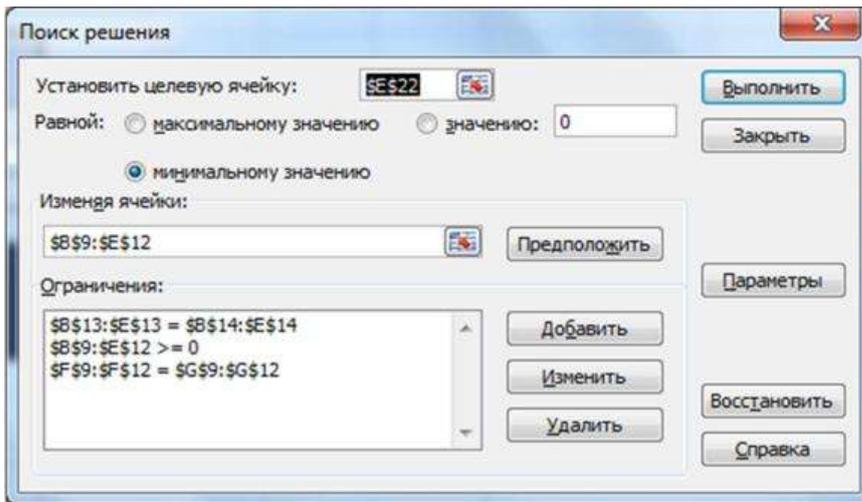
	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица себестоимости перевозок C:						
2		Стройка 1	Стройка 2	Стройка 3	Стройка 4		
3	Карьер 1	10	15	20	20		
4	Карьер 2	15	15	10	20		
5	Карьер 3	20	10	15	25		
6	Карьер 4	10	10	25	25		
7	Матрица перевозок X:						
8		Стройка 1	Стройка 2	Стройка 3	Стройка 4	Вывезено	Производительность карьера
9	Карьер 1	0	0	0	0	0	350
10	Карьер 2	0	0	0	0	0	200
11	Карьер 3	0	0	0	0	0	250
12	Карьер 4	0	0	0	0	0	400
13	Доставлено	0	0	0	0		
14	Потребность стройки	500	500	100	100		

6. Проверить задачу на сбалансированность и записать целевую функцию $F(X)$, используя встроенную функцию MS Excel – СУММПРОИЗВ().

	A	B	C	D	E	F	G	
7	Матрица перевозок X:							
8		Стройка 1	Стройка 2	Стройка 3	Стройка 4	Вывезено	Производительность карьера	
9	Карьер 1	0	0	0	0	0	350	
10	Карьер 2	0	0	0	0	0	200	
11	Карьер 3	0	0	0	0	0	250	
12	Карьер 4	0	0	0	0	0	400	
13	Доставлено	0	0	0	0			
14	Потребность стройки	500	500	100	100			
15								
16	Суммарные потребности=	1200						
17								
18	Суммарные затраты=	1200						
19								
20	Следовательно, ТЗ сбалансирована.							
21								
22		Целевая функция $F(x)=$				0		

7. Вызвать диалоговое окно надстройки «Поиск решения» и выполнить

необходимые установки.



8. Сохранить и проанализировать полученное решение.

	A	B	C	D	E	F	G
7							
		Матрица перевозок X:					
		Стройка 1	Стройка 2	Стройка 3	Стройка 4	Вызвано	Проводимость карьера
9	Карьер 1	350	0	0	0	350	350
10	Карьер 2	0	0	100	100	200	200
11	Карьер 3	0	250	0	0	250	250
12	Карьер 4	150	250	0	0	400	400
13	Доставлено	500	500	100	100		
14	Потребность стройки	500	500	100	100		
15							
16	Суммарные потребности	1200					
17							
18	Суммарные затраты	1200					
19							
20		Следовательно, ТЗ сбалансирована.					
21							
22							
						Целевая функция F(x) =	13000

Форма представления результата: файл MS Excel «Транспортная задача.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №5

Решение задач оптимизации средствами MS Excel

Цель работы:

Научиться решать задачи оптимизации средствами MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Задание 1 : Составить план выгодного производства. Фирма производит несколько видов продукции из одного и того же сырья – А, В, С. Реализация продукции А дает прибыль 10 р., В – 15 р., С – 20 р. на единицу изделия.

Продукцию можно производить в любых количествах, поскольку известно, что сбыт, обеспечен, но ограничены запасы сырья. Необходимо определить, какой продукции и сколько надо произвести, чтобы прибыль от реализации была максимальной.

Порядок выполнения задания 1:

1. Создайте электронную таблицу по образцу:

	А	В	С	Д	Е	Ф
1	План выгодного производства					
2						
3	Сырье	Норма расхода сырья			Запас сырья	Расход сырья
4		А	В	С		
5	Сырье 1	18	15	12	350	
6	Сырье 2	6	4	8	200	
7	Сырье 3	5	3	3	100	
8	Прибыль на ед. изд.	10	15	20		
9	Количество					
10	Общая прибыль					
11						

Введите исходные данные.

2. Расчетные формулы имеют вид:

Расход сырья 1 – (количество сырья 1)*(норма расхода сырья А)+(количество сырья 1)*(норма расхода сырья В)+(количество сырья 1)*(норма расхода сырья С).

Значит, в ячейку F5 нужно ввести формулу =B5*\$B\$9+C5*\$C\$9+D5*\$D\$9

Обратите внимание, что значения количества сырья каждого вида пока не известны и будут подобраны в процессе решения задания (ячейки B9: D9 пока пусты).

(Общая прибыль по А)=(прибыль на ед. изделий А)*(количество А),

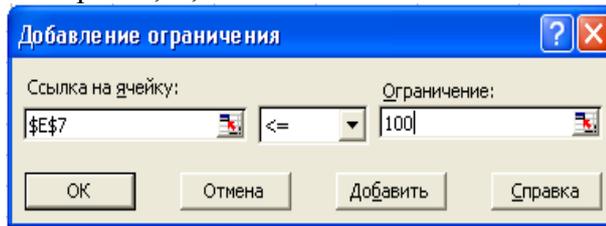
следовательно в ячейку B10 следует ввести формулу =B8*B9.

Итоговая общая прибыль = (Общая прибыль по А)+(Общая прибыль по В)+(Общая прибыль по С), значит в ячейку E10 следует ввести формулу =СУММ(B10:D10).

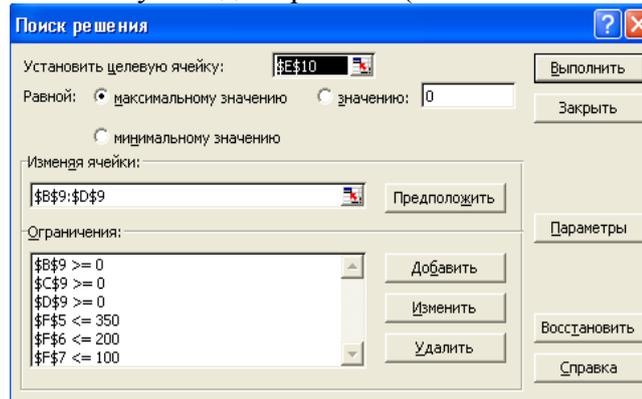
3. В меню Сервис активизируйте команду **Поиск решения** и введите параметры поиска:

- ☞ В качестве **целевой ячейки** укажите ячейку "Итоговая общая прибыль" (E10). Поскольку необходимо найти максимальное значение суммарной прибыли, активизируйте кнопку *равный* – *Максимальному значению*.
- ☞ В качестве **изменяемых ячеек** введите ячейки количества сырья – (B9: D9).

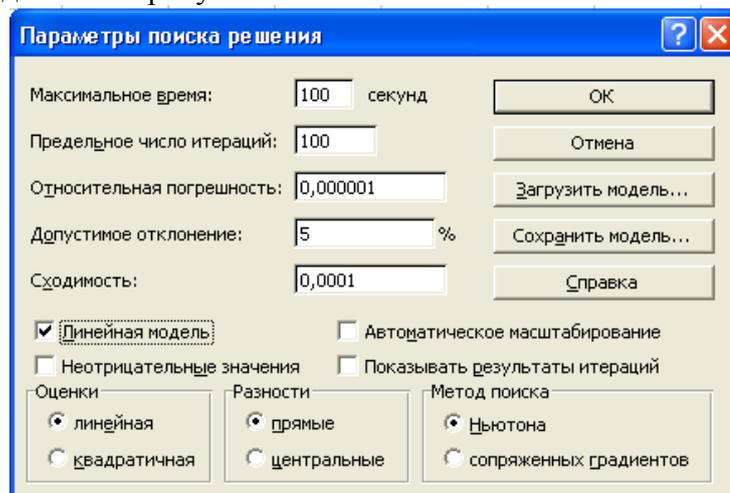
- Используя кнопку *Добавить* в окнах *Поиск решения* и *Добавление ограничений*, опишите все **ограничения** задачи на запас сырья:
Расход сырья 1 ≤ 350 ; расход сырья 2 ≤ 200 ; расход сырья 3 ≤ 100 , а также положительные значения сырья А, В, С ≥ 0 .



- Установите **параметры поиска решения**. Для этого кнопкой *Параметры* откройте диалоговое окно *Параметры поиска решения*, установите параметры по образцу, задайте линейную модель расчета (*Линейность модели*).



4. Кнопкой *Выполнить* запустите **Поиск решения**. Если вы сделали все верно, то решение будет как на рисунке.



5. Сохраните созданный документ в своей папке с именем "План производства".

	А	В	С	Д	Е	Ф
1	План выгодного производства					
2						
3	Сырье	Норма расхода сырья			Запас сырья	Расход сырья
4		А	В	С		
5	Сырье 1	18	15	12	350	350,00
6	Сырье 2	6	4	8	200	200,00
7	Сырье 3	5	3	3	100	83,33
8	Прибыль на ед. изд.	10	15	20		
9	Количество	0	5,56	22,22		
10	Общая прибыль	0	83,33	444,44	527,78	

Выводы. Из решения видно, что оптимальный план выпуска предусматривает изготовление 5,56 кг продукции В и 22,22 кг продукции С. Продукцию А производить не стоит. Полученная прибыль при этом составит 527,78 р.

Форма представления результата: файл MS Excel «Задача оптимизации.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №6

Уточнение корней уравнения методом итераций средствами MS Excel

Цель работы:

Научиться решать нелинейные уравнения, используя численные методы средствами MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

Пусть корень уравнения $F(x)=0$ отделен на отрезке $[a;b]$. Требуется найти значение корня с точностью ε .

Процедура уточнения положения корня заключается в построении последовательности вложенных друг в друга отрезков, каждый из которых содержит корень уравнения. Для этого находится середина текущего интервала неопределенности (1):

$$C_k = \frac{a_k + b_k}{2}, k = 0, 1, \dots$$

В качестве следующего интервала неопределенности из двух возможных выбирается тот, на концах которого функция $f(x) = 0$ имеет разные знаки. Точность будет достигнута, если:

$$|b_n - a_n| \leq 2\varepsilon$$

Корень уравнения вычисляется по формуле $x = (a_n + b_n)/2$.

Задание1. Уточнить корень уравнения $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$, отделенный на отрезке $[-3;-1]$ с погрешностью 0,005, по рассмотренному ниже примеру. Оформить все вычисления в тетради.

Методом деления отрезка пополам уточнить корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$, отделенный на отрезке $[1, 2]$. Найти значение корня уравнения с погрешностью, не превышающей 0,005.

Решение. $f(x) = x^3 - x - 1$, $a = 1$, $b = 2$, $x_0 = \frac{1+2}{2} = 1,5$;
 $f(1) = -1 < 0$, $f(1,5) = 0,875 > 0$, $f(2) = 5 > 0$.

n	$[a_n, b_n]$	x_n	$f(x_n) = x_n^3 - x_n - 1$		Знаки		
			x_n^3	$f(x_n)$	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(b_n)$
0	[1; 2]	1,5	3,375	0,875	-	+	+
1	[1; 1,5]	1,2	1,728	-0,472	-	-	+
2	[1,2; 1,5]	1,3	2,197	-0,103	-	-	+
3	[1,3; 1,5]	1,4	2,744	0,344	-	+	+
4	[1,3; 1,4]	1,35	2,460	0,110	-	+	+
5	[1,3; 1,35]	1,33	2,353	0,023	-	+	+
6	[1,3; 1,33]	1,32	2,300	-0,020	-	-	+
7	[1,32; 1,33]	1,325					

Поэтому $x^* \approx 1,325[0,005]$.

Задание2.

Уточнить корень уравнения $\cos(2x) + x - 5 = 0$, отделенный на отрезке $[5;6]$ с точностью до 0,00001, используя электронные таблицы MS Excel

Порядок выполнения задания 2:

- Заполнить ячейки A1:H1 последовательно следующим образом $a, b, c = (a+b)/2, f(a), f(b), f(c), |b-a| \leq 2 \cdot \varepsilon, \varepsilon$.
- Ввести в ячейку A2 число 5, в ячейку B2 – число 6.

3. В ячейку C2 ввести формулу: $=(A2+B2)/2$.
4. В ячейку D2 ввести формулу: $=\cos(2*A2)+A2-5$, скопировать эту формулу в ячейки E2:F2.
5. Ввести в ячейку G2 формулу: $=\text{ЕСЛИ}(\text{ABS}(B2-A2)\leq 2*\$H\$2;C2;“-”)$.
6. Ввести в ячейку H2 число 0,0001.
7. В ячейку A3 ввести формулу: $=\text{ЕСЛИ}(D2*F2<0;A2;C2)$.
8. В ячейку B3 ввести формулу: $=\text{ЕСЛИ}(D2*F2<0;C2;B2)$.
9. Диапазон ячеек C2:G2 скопировать в диапазон ячеек C3:G3.
10. Выделить диапазон ячеек A3:G3 и с помощью маркера заполнения заполнить все нижестоящие ячейки до получения результата в одной из ячеек столбца G (это ячейки A3:G53).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	$c=(a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$ b-a \leq 2*e$	e
2	5	6	5,5	-0,839072	1,843854	0,504426	-	0,00001
3	5	5,5	5,25	-0,839072	0,504426	-0,225537	-	
4	5,25	5,5	5,375	-0,225537	0,504426	0,131887	-	
5	5,25	5,375	5,3125	-0,225537	0,131887	-0,049651	-	
6	5,3125	5,375	5,34375	-0,049651	0,131887	0,040526	-	
7	5,3125	5,34375	5,328125	-0,049651	0,040526	-0,004725	-	
8	5,32813	5,34375	5,335938	-0,004725	0,040526	0,017862	-	
9	5,32813	5,33594	5,332031	-0,004725	0,017862	0,006558	-	
10	5,32813	5,33203	5,330078	-0,004725	0,006558	0,000914	-	
11	5,32813	5,33008	5,329102	-0,004725	0,000914	-0,001906	-	
12	5,3291	5,33008	5,32959	-0,001906	0,000914	-0,000496	-	
13	5,32959	5,33008	5,329834	-0,000496	0,000914	0,000209	-	
14	5,32959	5,32983	5,329712	-0,000496	0,000209	-0,000144	-	
15	5,32971	5,32983	5,329773	-0,000144	0,000209	0,000033	-	
16	5,32971	5,32977	5,329742	-0,000144	0,000033	-0,000055	-	
17	5,32974	5,32977	5,329758	-0,000055	0,000033	-0,000011	-	
18	5,32976	5,32977	5,329765	-0,000011	0,000033	0,000011	5,32976532	

Форма представления результата: расчеты в тетради по методу итераций, файл MS Excel «Метод итераций.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №7

Решение системы линейных уравнений методом Крамера средствами MS Excel

Цель работы:

Научиться решать систему линейных уравнений методом Крамера средствами MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

Метод Крамера.

Предположим у нас есть система из n линейных уравнений с n неизвестными.

Тогда, при определителе матрицы системы D , отличном от нуля, решение записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad x_i = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Задание1.

Решить систему из 3 линейных уравнений с 3 неизвестными.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Порядок выполнения задания 1:

1. Записать систему линейных уравнений в матричном виде $Ax = B$ в тетрадь.
2. Ввести матрицы A (диапазон ячеек **B3:D5**) и B (диапазон ячеек **G3:G5**)
3. В ячейке **B7**, с помощью функции МОПРЕД, записать расчет определителя матрицы A :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Общий вид системы линейных уравнений $Ax = B$								
2									
3		3	-2	4			21		
4	A =	3	4	-2		B =	9		
5		2	-1	-1			10		
6									
7	 A =	-60							

4. В случае если определитель системы не равен нулю, то система имеет единственное решение и систему можно решить методом Крамера. Для поиска решения вычислим 3 дополнительных определителя матриц (диапазоны ячеек **B9:D11**, **B13:D15** и **B17:D19**), в каждом из которых вместо одного из столбцов подставляется матрица B .

5. Например, вместо первого столбца (коэффициенты при переменной x_1), ставим столбец матрицы В (свободные коэффициенты):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9		21	-2	4					
10	Dx1 =	9	4	-2	=	-300		x1 =	5,0
11		10	-1	-1					
12									
13		3	21	4					
14	Dx2 =	3	9	-2	=	60		x2 =	-1,0
15		2	10	-1					
16									
17		3	-2	21					
18	Dx3 =	3	4	9	=	-60		x3 =	1,0
19		2	-1	10					

6. В ячейках **F10**, **F14** и **F18** рассчитать определители матриц и записать в ячейки **I10**, **I14** и **I18** (выделены голубым цветом) решение системы, по формуле Крамера получаем как отношение определителя дополнительных матриц к определителю матрицы системы

$$I_{10} = F_{10}/B_7, \quad I_{14} = F_{14}/B_7, \quad I_{18} = F_{18}/B_7.$$

Форма представления результата: тетрадь с представлением СЛЮ в матричном виде, файл MS Excel «Метод Крамера.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №8

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса средствами MS Excel

Цель работы:

Научиться решать системы линейных уравнений методом Гаусса средствами MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных: в одном уравнении остается одна неизвестная, во втором — две, в третьем — три, и т.п. А потом начинаем вычислять неизвестные, начиная с уравнения, где она одна. Затем подставляем найденное значение первой неизвестной в уравнение с двумя неизвестными и вычисляем вторую и т.п.

Основные действия:

1. записать уравнение в виде двух таблиц: матрицы коэффициентов и вектора-столбца свободных членов;
2. убедиться, что определитель матрицы коэффициентов не равен нулю, воспользовавшись функцией «МОПРЕД»;
3. найти матрицу, обратную матрице коэффициентов, с помощью функции «МОБР»;
4. умножить обратную матрицу на вектор-столбец свободных членов с помощью функции «МУМНОЖ».

Задание 1.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

Порядок выполнения задания 1:

1. Коэффициенты записать в матрицу А. Свободные члены – в матрицу В.

	A	B	C	D	E
1					
2		3	2	-5	-1
3		2	-1	-3	13
4		1	2	-1	9

2. Если в первой ячейке матрицы А оказался 0, нужно поменять местами строки, чтобы здесь оказалось отличное от 0 значение.
3. Привести все коэффициенты при а к 0. Кроме первого уравнения. Скопировать значения в первой строке двух матриц в ячейки В6:Е6.
4. В ячейку В7 ввести формулу: =B3:E3-\$B\$2:\$E\$2*(B3/\$B\$2).
5. Выделить диапазон В7:Е7. Нажать F2 и сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. Мы отняли от второй строки первую, умноженную на отношение первых элементов второго и первого уравнения.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		3	2	-5	-1	
3		2	-1	-3	13	
4		1	2	-1	9	
5						
6		3	2	-5	-1	
7		0	-2,3	0,3	13,7	

6. Скопировать введенную формулу на 8 и 9 строки. Так мы избавились от коэффициентов перед а. Сохранили только первое уравнение.

	A	B	C	D	E
1					
2		3	2	-5	-1
3		2	-1	-3	13
4		1	2	-1	9
5					
6		3	2	-5	-1
7		0	-2,3	0,3	13,7
8		0	1,33	0,7	9,33

Приведем к 0 коэффициенты перед в в третьем и четвертом уравнении. Копируем строки 6 и 7 (только значения). Переносим их ниже, в строки 10 и 11. Эти данные должны остаться неизменными. В ячейку B12 вводим формулу массива.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		3	2	-5	-1	
3		2	-1	-3	13	
4		1	2	-1	9	
5						
6		3	2	-5	-1	
7		0	-2,3	0,3	13,7	
8		0	1,33	0,7	9,33	
9						
10		3	2	-5	-1	
11		0	-2,3	0,3	13,7	
12		0	-0	0,9	17,1	

Прямую прогонку по методу Гаусса сделали. В обратном порядке начнем прогонять с последней строки полученной матрицы. Все элементы данной строки нужно разделить на коэффициент при с. Введем в строку формулу массива: $\{=B12:E12/D12\}$.

10		3	2	-5	-1
11		0	-2,3	0,3	13,7
12		0	-0	0,9	17,1
13					
14					
15					
16		0	-0	1	20

В строке 15: отнимем от второй строки третью, умноженную на коэффициент при с второй строки ($\{=(B11:E11-B16:E16*D11)/C11\}$). В строке 14: от первой строки отнимаем вторую и третью, умноженные на соответствующие коэффициенты ($\{=(B10:E10-B15:E15*C10-B16:E16*D10)/B10\}$). В последнем столбце новой матрицы получаем корни уравнения.

2		3	2	-5	-1
3		2	-1	-3	13
4		1	2	-1	9
5					
6		3	2	-5	-1
7		0	-2,3	0,3	13,7
8		0	1,33	0,7	9,33
9					
10		3	2	-5	-1
11		0	-2,3	0,3	13,7
12		0	-0	0,9	17,1
13					
14		1	-0	0	35,2
15		0	1	0	-3,3
16		0	-0	1	20

Форма представления результата: файл MS Excel «Метод Гаусса.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №9

Система математических расчетов Mathcad: знакомство с интерфейсом программы, вычисление значений алгебраических выражений

Цель работы:

Научиться выполнять простые вычисления в программе Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

К основным элементам математических выражений MathCAD относятся *типы данных, операторы, функции и управляющие структуры.*

Операторы

Операторы - элементы MathCAD, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например, относятся символы арифметических операций, знаки вычисления сумм, произведений, производной и интеграла и т.д.

Оператор определяет:

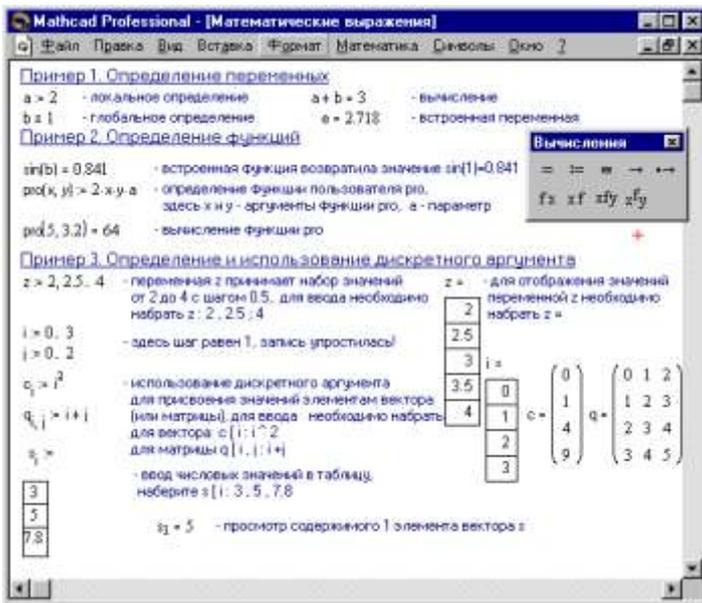
1. действие, которое должно выполняться при наличии тех или иных значений операндов;
2. сколько, где и какие операнды должны быть введены в оператор.

Операнд – число или выражение, на которое действует оператор. Например, в выражении $5! + 3$ число 3 и выражение $5!$ – операнды оператора $+$ (плюс), а число 5 операнд оператора факториал (!). После указания *операндов* операторы становятся исполняемыми по документу блоками. В Приложении 2 данного пособия приведен список наиболее часто используемых операторов.

Типы данных

К *типам данных* относятся числовые константы, обычные и системные переменные, массивы (векторы и матрицы) и данные файлового типа.

Константами называют поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены. **Переменные** являются поименованными объектами, имеющими некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Тип переменной определяется ее значением; переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т. д. Имена констант, переменных и иных объектов называют *идентификаторами*. Идентификаторы в MathCAD представляют собой набор латинских или греческих букв и цифр.



Задание 1.

Вычислить значение выражения: $15 - 8/104,5$.

Порядок выполнения задания 1:

1. После щелчка в любом месте рабочего документа появляется небольшой крестик.
2. Весь ввод с клавиатуры будет размещаться теперь в рабочем документе, начиная с

места расположения крестика. Набрать с клавиатуры выражение $15 - \frac{8}{104,5}$

3. После набора знака « \Rightarrow », Mathcad вычисляет выражение и выводит результат.

На экране должно получиться:

$$15 - \frac{8}{104,5} = 14,923$$

Задание 2.

Вычислить значение выражения: $\frac{\sqrt{c-d}}{c^2 \cdot \sqrt{2 \cdot c}} \cdot \left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}} + \sqrt{\frac{c^2+c \cdot d}{c^2-c \cdot d}} \right)$ при $c=2, d=1/4$

Порядок выполнения задания 2:

1. Определить значения переменных: $c := 2d := \frac{1}{4}$
2. Набрать с клавиатуры выражение и нажать знак « \Rightarrow »:

$$\frac{\sqrt{c-d}}{c^2 \cdot \sqrt{2 \cdot c}} \cdot \left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}} + \sqrt{\frac{c^2+c \cdot d}{c^2-c \cdot d}} \right) = 0,333$$

Задание 3.

Вычислить значения выражений:

- 1) $13 - \frac{36}{18 \cdot 14}$
- 2) $\frac{85}{120 : 6 - 15}$
- 3) $6 \frac{5}{18} - \frac{7}{105,3}$
- 4) $4 - \frac{17}{20} \cdot 0,44$
- 5) $\frac{6}{17} \cdot 0,24 + 1,8 \cdot \frac{12}{13}$
- 6) $\frac{2 \cdot 17,5}{132,6 - 98,5}$

$$\frac{\sqrt{a^2 - b + \sqrt{c}} \sqrt{a - \sqrt{b + \sqrt{c}}} \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b} - 2a + \frac{b}{a} - \frac{c}{ab}}} \text{ при } a=4.8, b=1.2, c=0$$

7)

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} \div \frac{a^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} \text{ при } a=1.2, b=3/5.$$

8)

$$\frac{|2x-3|+6}{2x-3} \sqrt{\frac{1}{x}(9x^{-1}+4x-12)} \text{ при } x=-3.$$

9)

$$\left[\frac{\frac{x^3-1}{x+1} \cdot \frac{x}{x^3+1}}{\left((x+1)^2 - x \right) \div \left((x-1)^2 + x \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \right]^{-\frac{1}{2}} \text{ при } x=-2.$$

10)

Форма представления результата: файл Mathcad «Вычисления.mcdx»

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №10

Система математических расчетов Mathcad: построение простых графиков, решение уравнений с одним неизвестным двумя способами (графический, функция Root)

Цель работы:

Научиться решать уравнения с одним неизвестным в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы

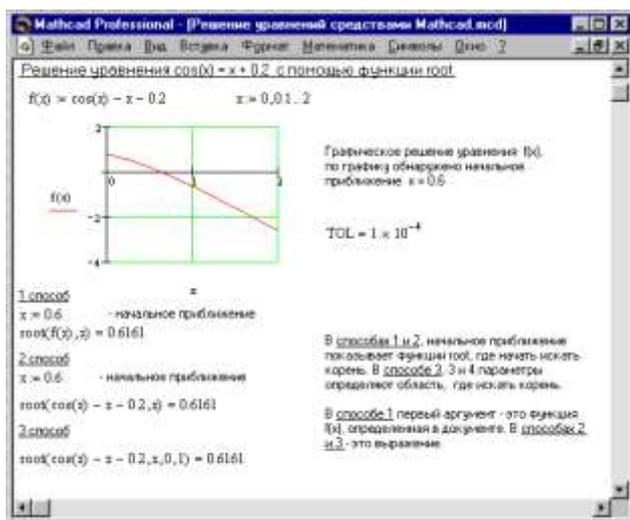


Рисунок 1. Решение уравнений средствами Mathcad

Краткие теоретические сведения.

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Однако такие уравнения могут решаться численными методами с заданной

точностью (не более значения заданной системной переменной **TOL**).

Численное решение нелинейного уравнения

Для простейших уравнений вида $f(x) = 0$ решение в Mathcad находится с помощью функции *root* (Рисунок 1).

root($f(x1, x2, \dots)$, $x1, a, b$)

Возвращает значение $x1$, принадлежащее отрезку $[a, b]$, при котором выражение или функция $f(x)$ обращается в 0. Оба аргумента этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр.

Аргументы:

$f(x1, x2, \dots)$ - функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение. Выражение должно возвращать скалярные значения.

$x1$ - имя переменной, которая используется в выражении. Этой переменной перед использованием функции *root* необходимо присвоить числовое значение. Mathcad использует его как начальное приближение при поиске корня. a, b – необязательны, если используются, то должны быть вещественными числами, причем $a < b$.

Приближенные значения корней (*начальные приближения*) могут быть:

1. Известны из физического смысла задачи.
2. Известны из решения аналогичной задачи при других исходных данных.
3. Найдены графическим способом.

Наиболее распространен *графический способ* определения начальных приближений.

Принимая во внимание, что действительные корни уравнения $f(x) = 0$ - это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить точки пересечения $f(x)$ с осью Ox , или отметить на оси Ox отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить,

заменяв уравнение $f(x) = 0$ равносильным ему уравнением:

$$f_1(x) = f_2(x),$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Отсутствие сходимости функции root

Если после многих итераций Mathcad не находит подходящего приближения, то появится сообщение Can't converge to a solution. (отсутствует сходимость). Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

- Уравнение не имеет корней.
- Корни уравнения расположены далеко от начального приближения.
- Выражение имеет локальные *max* и *min* между начальным приближением и корнями.
- Выражение имеет разрывы между начальными приближениями и корнями.
- Выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, исследуйте график $f(x)$. Он поможет выявить наличие корней уравнения $f(x) = 0$ и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет *root* сходиться.

Рекомендации по использованию функции root

- Для изменения точности, с которой функция *root* ищет корень, нужно изменить значение системной переменной TOL. Если значение TOL увеличивается, функция *root* будет сходиться быстрее, но ответ будет менее точен. Если значение TOL уменьшается, то функция *root* будет сходиться медленнее, но ответ будет более точен. Чтобы изменить значение TOL в определенной точке рабочего документа, используйте определение вида $TOL := 0.01$. Чтобы изменить значение TOL для всего рабочего документа, выберите команду **Математика** \Rightarrow **Параметры...** \Rightarrow **Переменные** \Rightarrow **Допуск сходимости (TOL)**.
- Если два корня расположены близко друг от друга, следует уменьшить TOL, чтобы различить их.
- Если функция $f(x)$ имеет малый наклон около искомого корня, функция $root(f(x), x)$ может *сходиться* к значению r , отстоящему от корня достаточно далеко. В таких случаях для нахождения более точного значения корня необходимо уменьшить значение TOL. Другой вариант заключается в замене уравнения $f(x) = 0$ на $g(x) = 0$

$$g(x) = \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)}.$$

- Для выражения $f(x)$ с известным корнем a нахождение дополнительных корней $f(x)$ эквивалентно поиску корней уравнения $h(x) = f(x)/(x - a)$. Подобный прием полезен для нахождения корней, расположенных близко друг к другу. Проще искать корень выражения $h(x)$, чем пробовать искать другой корень уравнения $f(x) = 0$, выбирая различные начальные приближения.

Задание 1.

Графически отделить корни уравнения:

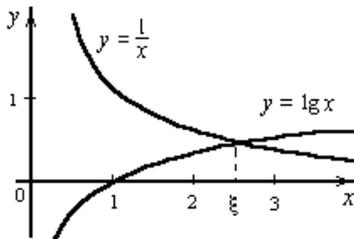
$$x \lg x = 1. \tag{1}$$

Порядок выполнения задания 1:

1. Переписать уравнение (1) в виде равенства:

$$\lg x = \frac{1}{x}.$$

2. Корни уравнения (1) могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$.
3. Построить эти кривые.



4. По графику найти единственный корень $\xi \approx 2,5$ уравнения (1) или определить его содержащий отрезок $[2, 3]$.

Задание 2.

Найти a - решение уравнение уравнения $e^x = x^3$.

Порядок выполнения задания 2:

1. Определить начальное значение переменной x графическим способом.
2. Присвоить переменной x полученное значение $x := 3$
3. Определить выражение, которое должно быть обращено в ноль. Для этого переписать уравнение $x^3 = e^x$ в виде $x^3 - e^x = 0$. Левая часть этого выражения является вторым аргументом функции ROOT.
4. Определить переменную a как корень уравнения:
 $a := \text{root}(x^3 - e^x, x)$
5. Найти значение корня:

$$a = 1.857$$

Помните! Начальное значение переменной должно быть присвоено до начала использования функции `root`.

Форма представления результата: файлы Mathcad: «Уточнение корней.mcdx», «Нахождение корней.mcdx»

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №11

Система математических расчетов Mathcad: решение системы линейных уравнений (Find)

Цель работы:

Научиться решать системы линейных уравнений в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения.

MathCAD дает возможность решать также и системы уравнений. Максимальное число уравнений и переменных равно 50. Результатом решения системы будет численное значение искомого корня.

Для решения системы уравнений необходимо выполнить следующее:

- Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений. Mathcad решает систему с помощью итерационных методов.
- Напечатать ключевое слово *Given*. Оно указывает Mathcad, что далее следует система уравнений.
- Введите уравнения и неравенства в любом порядке. Используйте [Ctrl]= для печати символа =. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов $<$, $>$, \geq и \leq .
- Введите любое выражение, которое включает функцию *Find*, например: $a := \text{Find}(x, y)$.

Find(z1, z2, ...)

Возвращает точное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Ключевое слово *Given*, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое-либо выражение, содержащее функцию *Find*, называют **блоком решения уравнений**.

Следующие выражения недопустимы внутри блока решения:

- Ограничения со знаком \neq .
- Дискретный аргумент или выражения, содержащие дискретный аргумент в любой форме.
- Неравенства вида $a < b < c$.

Блоки решения уравнений не могут быть вложены друг в друга, каждый блок может иметь только одно ключевое слово *Given* и имя функции *Find*.

Функция, которая завершает блок решения уравнений, может быть использована аналогично любой другой функции. Можно произвести с ней следующие три действия:

- Можно вывести найденное решение, напечатав выражение вида:

$\text{Find}(var1, var2, \dots) =$

- Определить переменную с помощью функции *Find*:

$a := \text{Find}(x)$ – скаляр,

$var := \text{Find}(var1, var2, \dots)$ – вектор.

Это удобно сделать, если требуется использовать решение системы уравнений в другом месте рабочего документа.

- Определить другую функцию с помощью *Find*

$f(a, b, c, \dots) := \text{Find}(x, y, z, \dots)$.

Эта конструкция удобна для многократного решения системы уравнений для различных значений некоторых параметров a, b, c, \dots , непосредственно входящих в систему уравнений.

No solution was found. Try changing the guess value or the value of TOL or CTOL.

Сообщение об ошибке (Решение не найдено) при решении уравнений появляется, когда:

- Поставленная задача может не иметь решения.
- Для уравнения, которое не имеет вещественных решений, в качестве начального приближения взято вещественное число и наоборот.
- В процессе поиска решения последовательность приближений попала в точку локального минимума невязки. Для поиска искомого решения нужно задать различные начальные приближения.
- Возможно, поставленная задача не может быть решена с заданной точностью. Попробуйте увеличить значение TOL.

Задание 1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Порядок выполнения задания 1:

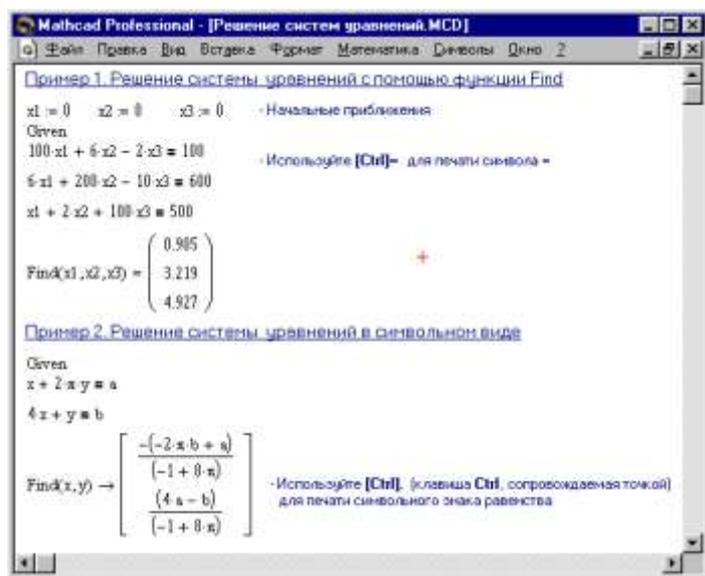
1. Определить начальные значения для всех переменных:
 $x := 1 \quad y := 1$
2. Ввести систему уравнений после ключевого слова Given:

Given

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x + y = 2$$

3. Ввести выражение, которое включает функцию Find:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y)$$

4. Найти решение системы:

$$x = -1.646$$

Задание 2.

Решить следующие системы уравнений :

$$1. \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{1}{5}x + y = 7.6 \\ \frac{1}{7}x - y = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 0.4x - y = -5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 84 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{4}x + y = -5 \\ 7x - y = 3.5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 21x - y = -4 \\ 17x + y = -7 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 6x + y = -0.2 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

Форма представления результата: файл Mathcad «Решение СЛУ.mcdx»

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

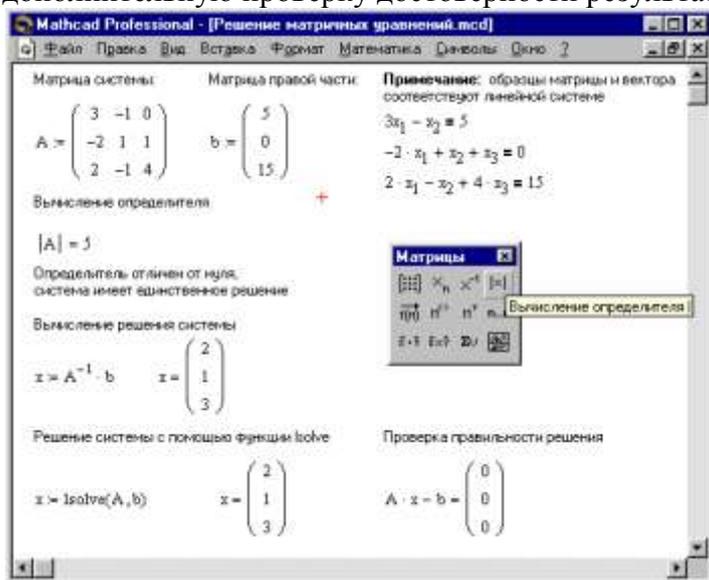
к решению, *Minerr* возвращает это приближение. Функция *Find* в этом случае возвращает сообщение об ошибке.

Правила использования функции *Minerr* такие же, как и функции *Find*.

Minerr(z1, z2, ...)

Возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Если *Minerr* используется в блоке решения уравнений, необходимо всегда включать дополнительную проверку достоверности результатов.



Задание 1.

1. Преобразовать нелинейные уравнения системы из таблицы к виду $f_1(x) = y$ и $f_2(y) = x$.
2. Построить их графики и определить начальное приближение решения.
3. Решить систему нелинейных уравнений с помощью функции *Minerr*.

№ варианта	Система нелинейных уравнений	№ варианта	Система нелинейных уравнений
1	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2, \\ \cos(y-1) + x = 0,7. \end{cases}$	9	$\begin{cases} \sin y + x = -0,4, \\ 2y - \cos(x+1) = 0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin(x+0,5) - y = 1, \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$	10	$\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1,5, \\ \cos(y-2) + x = 0,5. \end{cases}$
3	$\begin{cases} \cos x + y = 1,5, \\ 2x - \sin(y-0,5) = 1. \end{cases}$	11	$\begin{cases} \cos(x+0,5) - y = 2, \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \cos(x+0,5) + y = 0,8, \\ \sin y - 2x = 1,6. \end{cases}$	12	$\begin{cases} \cos(x-2) + y = 0, \\ \sin(y+0,5) - x = 1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1,3 - y, \\ x - \sin(y+1) = 0,8. \end{cases}$	13	$\begin{cases} \cos(x+0,5) + y = 1, \\ \sin(y+0,5) - x = 1. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \cos(x+0,5) + y = 1, \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$	14	$\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1, \\ \cos(y+0,5) - x = 2. \end{cases}$
7	$\begin{cases} -\sin(x+1) + y = 0,8, \\ \sin(y-1) + x = 1,3. \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2y - \sin(x-0,5) = 1, \\ \cos(y) + x = 1,5. \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1, \\ \sin(y-1) + x = 1,3. \end{cases}$		

Форма представления результата: файл Mathcad «Метод итераций для СЛУ.mcdx»

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №13

Система математических расчетов Mathcad: вычисление производной функции

Цель работы:

Научиться вычислять производные в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Краткие теоретические сведения.

Оператор производной Mathcad предназначен для нахождения численного значения производной функции в заданной точке. Для вычисления производной используется клавиша со знаком $\frac{d}{dx}$.

Для того, чтобы найти производную функции и вычислить ее численное значение, необходимо сделать следующее:

- Сначала определить точку, в которой необходимо найти производную.
- Щелкнуть ниже определения этой точки. Затем набрать $\frac{d}{dx}$. Появится оператор производной с двумя полями: $\frac{d}{dx}$
- Щелкнуть на поле в знаменателе и набрать имя переменной, по которой проводится дифференцирование.
- Щелкнуть на поле справа от $\frac{d}{dx}$ и набрать выражение, которое нужно дифференцировать.
- Чтобы увидеть результат, нажать знак =.

Задание1.

Найти производную x^3 по x в точке $x=2$.

Порядок выполнения задания 1:

1. Определить точку, в которой необходимо найти производную:
 $x := 2$
2. Ввести оператор производной, заполнить поля и вычислить производную:

$$\frac{d}{dx} x^3 = 12$$

Помните!

Результат дифференцирования есть не функция, а число – значение производной в указанной точке переменной дифференцирования.

Хотя дифференцирование возвращает только одно число, можно определить одну функцию как производную другой функции. Например: $f(x) := \frac{d}{dx} g(x)$.

Вычисление $f(x)$ будет возвращать в численной форме производную $g(x)$ в точке x .

Выражение, которое нужно дифференцировать, может быть вещественным или комплексным.

Переменная дифференцирования должна быть простой неиндексированной переменной.

Задание2.

Дана функция $y=f(x)$. Построить график функции и касательную к графику в точке с абсциссой $x=x_0$, если $f(x)=x^2 - 2x$, $x_0=0,5$, $y=f(x_0) \cdot (x-x_0) + f(x_0)$ - уравнение касательной.

Порядок выполнения задания 2:

1. Ввести данную функцию и найдем ее значение в точке x_0 :

$$f(x) := x^2 - 2 \cdot x$$

$$x_0 := 0.5$$

$$f(x_0) = -0.75$$

2. Найти значение производной данной функции в точке x_0 :

$$F(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

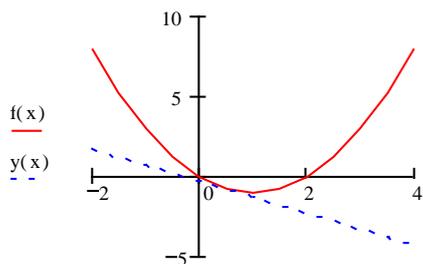
$$F(x_0) = -1$$

3. Записать уравнение касательной для данной функции:

$$y(x) := F(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

4. Построить график данной функции и касательную к ней.

$$x := -2, -1.5, 4$$



Задание3.

Найти производную функции в произвольной точке.

1. $y = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$

5. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$

9. $y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$

2. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

6. $y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}$

10. $e^x \sin x \cos^3 x$

3. $y = x \lg x$

7. $y = \cos 2x \lg x$

4. $y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

8. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}$

Задание4.

Дана функция $y=f(x)$. Построить график функции и касательную к графику в точке с абсциссой $x=x_0$. $Y=f(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ – уравнение касательной.

1. $f(x) = \frac{1}{x^4} + 2, x_0 = 1$

6. $f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(4x - \frac{\pi}{3} \right), x_0 = \pi/6$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x_0 = 2$

7. $f(x) = x^2 - 2x - 8, x_0 = -1$

3. $f(x) = x \ln x, x_0 = e$

8. $f(x) = \cos x, x_0 = -\pi/2$

4. $f(x) = x^2 + 1, x_0 = -1$

9. $f(x) = x^2 - 3x + 2, x_0 = 3$

5. $f(x) = -x^2 + 1, x_0 = 1$

10. $f(x) = e^{2x+3}, x_0 = -2$

Форма представления результата: файлы Mathcad: «Производная.mcdx» и «Графики.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №14

Система математических расчетов Mathcad: вычисление определенных интегралов, расчет площади фигуры, ограниченной графиками функций

Цель работы:

Научиться вычислять определенные интегралы в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Краткие теоретические сведения.

Определенный интеграл.

Оператор интегрирования в Mathcad предназначен для численного вычисления определенного интеграла функции по некоторому интервалу.

Знак интеграла выводится при нажатии клавиши со знаком **&**.

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл, необходимо сделать следующее:

- Щелкнуть в свободном месте и набрать знак **&**. Появится знак интеграла с пустыми полями для подынтегрального выражения, пределов интегрирования и переменной интегрирования: \int
- Щелкнуть на поле внизу и набрать нижний предел интегрирования. Щелкнуть на верхнем поле и набрать верхний предел интегрирования.
- Щелкнуть на поле между знаком интеграла и **d** и набрать выражение, которое нужно интегрировать.
- Щелкнуть на последнее пустое поле и набрать переменную интегрирования.
- Чтобы увидеть результат, нажать знак **=**.

Задание1.

Вычислить определенный интеграл $\sin(x)^2$ от 0 до $\pi/4$

Порядок выполнения задания 1:

1. Ввести знак интеграла и заполнить пустые поля;
2. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x)^2 dx = 0.143$$

Помните!

- Пределы интегрирования должны быть вещественными. Выражение, которое нужно интегрировать может быть вещественным, либо комплексным.
- Кроме переменной интегрирования, все переменные в подынтегральном выражении должны быть определены ранее в другом месте рабочего документа.
- Переменная интегрирования должна быть простой переменной без индекса.
- Если переменная интегрирования является размерной величиной, верхний и нижний пределы интегрирования должны иметь ту же самую размерность.

Задание2.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y=x^2 - 2 \cdot x + 2, y=2 + 4 \cdot x - x^2$$

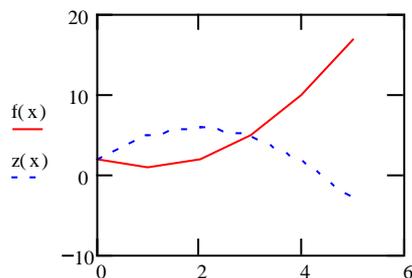
Порядок выполнения задания 2:

1. Построить графики этих функций в одном графическом блоке:

$$x := 0..5$$

$$f(x) := x^2 - 2 \cdot x + 2$$

$$z(x) := 2 + 4 \cdot x - x^2$$



2. Вычислить площадь полученной фигуры:

$$\int_0^3 (2 + 4x - x^2) dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = 9 \text{ (кв.ед.)}$$

Задание3.

Вычислить определенный интеграл.

$$1. \int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$5. \int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$$

$$9. \int_1^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$2. \int_4^9 \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$$

$$6. \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

$$10. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$3. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$$

$$7. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$4. \int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2 + x + 1}$$

$$8. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Задание4.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций. Построить эту фигуру.

$$1. y = x^2 - 2x + 2, y = 2 + 4x - x^2$$

$$2. y = x^2, y = \frac{x^2}{x-2}, y = 0, x = 4$$

$$3. y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = 2\pi$$

$$4. y = \sqrt{x}, y = \sqrt{4-3x}, y = 0$$

$$5. y = x^3, y = x^{\frac{1}{3}}, x = 0, x = 1$$

$$6. y = -x^2, y = 2e^x, x = 0, x = 1$$

7. $y = \operatorname{tg} x, y = \frac{2}{3} \cos, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), x = 0$

8. $y = x - 2, y = x^2 - 4x + 2$

9. $y = 6x^2 - 5x + 1, y = \cos \pi x, x = 0, x = 1$

10. $y = \sin x, y = 2 \sin x, x = \frac{5\pi}{4}, x = 0$

Форма представления результата: файлы Mathcad: «Задание1.mcdx», «Задание2.mcdx», «Задание3.mcdx», «Задание4.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №15

Система математических расчетов Mathcad: построение графиков функций в полярных координатах, построение поверхностей

Цель работы:

Научиться строить разные виды графиков функций в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Краткие теоретические сведения.

Трехмерные, или **3D-графики**, отображают функции двух переменных вида $Z(X, Y)$. При построении трехмерных графиков в ранних версиях MathCAD поверхность нужно было определить математически (Рисунок 2, способ 2). Теперь применяют функцию MathCAD *CreateMesh*.

CreateMesh(F (или G , или $f1, f2, f3$), $x0, x1, y0, y1, xgrid, ygrid, fmap$)

Создает сетку на поверхности, определенной функцией F . $x0, x1, y0, y1$ – диапазон изменения переменных, $xgrid, ygrid$ – размеры сетки переменных, $fmap$ – функция отображения. Все параметры, за исключением F , – факультативные. Функция *CreateMesh* по умолчанию создает сетку на поверхности с диапазоном изменения переменных от -5 до 5 и с сеткой 20×20 точек.

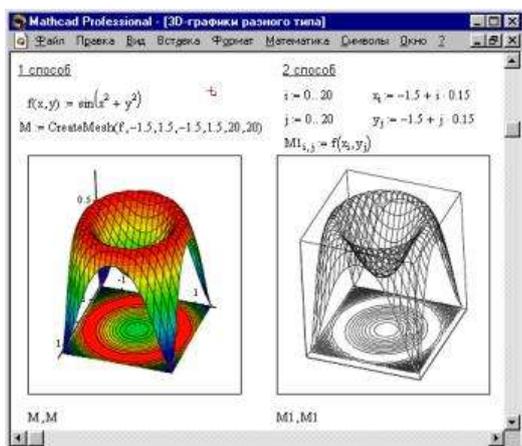


Рисунок 1. Пример построения на одном рисунке двух 3D-графиков разного типа

представляют в виде точек, кружочков или иных фигур. Такой график создается операцией **Вставка** \Rightarrow **График** \Rightarrow **3D Точечный**, причем поверхность задается параметрически – с помощью трех матриц (X, Y, Z) (см. Рисунок 3, способ 2), а не одной как в примере на Рисунок 2. Для определения исходных данных для такого вида графиков используется функция *CreateSpace* (см. Рисунок 3, способ 1).

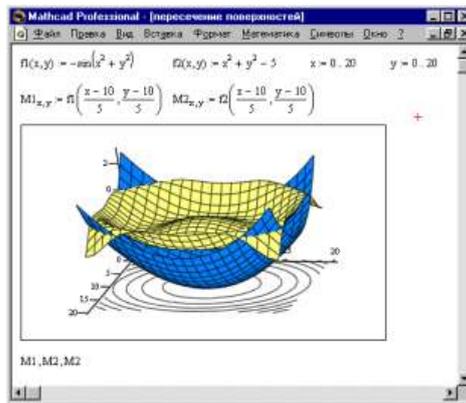
CreateSpace ($F, t0, t1, tgrid, fmap$)

Возвращает вложенный массив трех векторов, представляющих x -, y -, и z -координаты пространственной кривой, определенной функцией F . $t0$ и $t1$ – диапазон изменения переменной, $tgrid$ – размер сетки переменной, $fmap$ – функция отображения. Все параметры, за исключением F , – факультативные.

Построение пересекающихся фигур

Особый интерес представляет собой возможность построения на одном графике ряда разных фигур или поверхностей с автоматическим учетом их взаимного пересечения. Для этого надо отдельно задать матрицы соответствующих поверхностей и после вывода шаблона 3D-графика перечислить эти матрицы под ним с использованием в качестве разделителя запятой (Рисунок 4).

Пример использования функции *CreateMesh* для построения 3D-графиков приведен на Рисунок 2, способ 1. На Рисунок 2 построена одна и та же поверхность разными способами, с разным форматированием, причем изображены поверхности и под ними те же поверхности в виде контурного графика. Такое построение способно придать рисунку большую наглядность. Нередко поверхности и пространственные кривые



Чтобы создать график в полярных координатах, необходимо:

- Выбрать **Полярный график** из меню **Графика**. Mathcad показывает круг с четырьмя полями ввода.
- Выше области графика определить угол Q и функцию угла $R(Q)$.
- Поле ввода внизу предназначено для угловой переменной графика. Ввести туда дискретную переменную или любое выражение, включающее дискретную переменную.
- Поле ввода слева должно содержать выражение для радиуса.
- Два поля ввода справа предназначены для верхнего и нижнего граничных значений радиуса. Mathcad заполняет эти поля по умолчанию.

В Mathcad полярные графики рисуются путем замены R и Q на декартовы координаты x и y с использованием стандартных преобразований $x=R\cos(Q)$ и $y=R\sin(Q)$. Предполагается, что R и Q могут принимать и положительные, и отрицательные значения. **Помните!** Mathcad не обрабатывает график, пока вы не нажмете [F9], или, в автоматическом режиме, не щелкните мышью вне области графика.

Задание1.

Построить график поверхности $f(x,y)=\sin(x+y)$

Порядок выполнения задания 1.

1. Определить функцию двух переменных:
 $f(x,y) := \sin(x^2 + y^2)$
2. Допустим, что по осям x и y необходимо 20 точек. Определим дискретные аргументы i и j , чтобы индексировать эти точки.
 $N := 20 \quad i := 0..N \quad j := 0..N$
3. Определим x и y как равномерно располагаемые точки на осях X и Y .
 $x_i := -1.5 + 0.15 \cdot i \quad y_j := -1.5 + 0.15 \cdot j$
4. Заполнить матрицу M значениями $F(x, y)$
 $M_{i,j} := f(x_i, y_j)$
5. Выбрать **График поверхности** из меню **Графика**.
6. Напечатать M в поле ввода и щелкнем вне графической области.

Задание2.

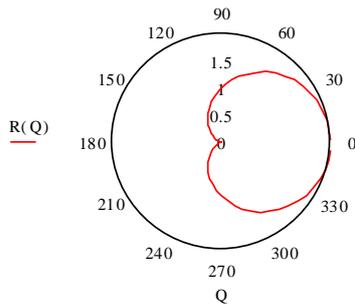
Построить график функции $R(Q)=\cos(Q)+1$

Порядок выполнения задания 2.

1. Определить приращение для Q :
 $N := 50$
2. Определить Q как дискретный аргумент с заданным приращением:
 $Q := 0.2 \cdot \frac{\pi}{N}, 0.2 \cdot \frac{\pi}{N} + 0.1.. 2 \cdot \pi$
3. Определить $R(Q)$ как функцию Q :

$$R(Q) := \cos(Q) + 1$$

4. Отобразить график $R(Q)$ в полярных координатах.



Задание 3.

Построить график поверхности.

$$1. f(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \quad 5. f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad 9. f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$2. f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad 6. f(x, y) = x\sqrt{y} \quad 10. f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$3. f(x, y) = x^2y + x \quad 7. f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$4. f(x, y) = y^2 - x^2 \quad 8. f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$$

Задание 4.

Построить график в полярных координатах.

$$1. \rho = 2 \sin \varphi \quad 5. \rho = 2(\cos \varphi - \sin \varphi) \quad 9. \rho = 2 - \sin 4\varphi$$

$$2. \rho = \frac{\pi}{\varphi} \quad 6. \rho = \frac{15}{3 - 4 \sin \varphi} \quad 10. \rho = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3}$$

$$3. \rho = \left(\frac{1}{2}\right)^\varphi \quad 7. \rho = 4 \sin 2\varphi$$

$$4. \rho = 3 \sin 3\varphi \quad 8. \rho = 3 + \cos 4\varphi$$

Форма представления результата: файлы Mathcad: «Задание1.mcdx», «Задание2.mcdx», «Задание3.mcdx», «Задание4.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №16

Реализация метода половинного деления средствами MS Excel и Mathcad

Цель работы:

Сравнить результаты применения метода половинного деления в среде MS Excel и Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Задание1.

Уточнить корень уравнения $\cos(2x)+x-5=0$, отделенный на отрезке $[5;6]$ с точностью до 0,00001, используя электронные таблицы MS Excel

Порядок выполнения задания 1:

1. Заполнить ячейки A1:H1 последовательно следующим образом a, b, $c=(a+b)/2$, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $|b-a| \leq 2 \cdot e$, e.
2. Ввести в ячейку A2 число 5, в ячейку B2 – число 6.
3. В ячейку C2 ввести формулу: $=(A2+B2)/2$.
4. В ячейку D2 ввести формулу: $=\cos(2 \cdot A2)+A2-5$, скопировать эту формулу в ячейки E2:F2.
5. Ввести в ячейку G2 формулу: $=\text{ЕСЛИ}(\text{ABS}(B2-A2) \leq 2 \cdot \$H\$2; C2; “-”)$.
6. Ввести в ячейку H2 число 0,0001.
7. В ячейку A3 ввести формулу: $=\text{ЕСЛИ}(D2 \cdot F2 < 0; A2; C2)$.
8. В ячейку B3 ввести формулу: $=\text{ЕСЛИ}(D2 \cdot F2 < 0; C2; B2)$.
9. Диапазон ячеек C2:G2 скопировать в диапазон ячеек C3:G3.
10. Выделить диапазон ячеек A3:G3 и с помощью маркера заполнения заполнить все нижестоящие ячейки до получения результата в одной из ячеек столбца G (это ячейки A3:G53).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	$c=(a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$ b-a \leq 2 \cdot e$	e
2	5	6	5,5	-0,839072	1,843854	0,504426	-	0,00001
3	5	5,5	5,25	-0,839072	0,504426	-0,225537	-	
4	5,25	5,5	5,375	-0,225537	0,504426	0,131887	-	
5	5,25	5,375	5,3125	-0,225537	0,131887	-0,049651	-	
6	5,3125	5,375	5,34375	-0,049651	0,131887	0,040526	-	
7	5,3125	5,34375	5,328125	-0,049651	0,040526	-0,004725	-	
8	5,32813	5,34375	5,335938	-0,004725	0,040526	0,017862	-	
9	5,32813	5,33594	5,332031	-0,004725	0,017862	0,006558	-	
10	5,32813	5,33203	5,330078	-0,004725	0,006558	0,000914	-	
11	5,32813	5,33008	5,329102	-0,004725	0,000914	-0,001906	-	
12	5,3291	5,33008	5,32959	-0,001906	0,000914	-0,000496	-	
13	5,32959	5,33008	5,329834	-0,000496	0,000914	0,000209	-	
14	5,32959	5,32983	5,329712	-0,000496	0,000209	-0,000144	-	
15	5,32971	5,32983	5,329773	-0,000144	0,000209	0,000033	-	
16	5,32971	5,32977	5,329742	-0,000144	0,000033	-0,000055	-	
17	5,32974	5,32977	5,329758	-0,000055	0,000033	-0,000011	-	
18	5,32976	5,32977	5,329765	-0,000011	0,000033	0,000011	5,32976532	

Задание2.

Уточнить корень уравнения, отделенный на отрезке $[-3;-1]$ с точностью до 0,00001, используя Mathcad

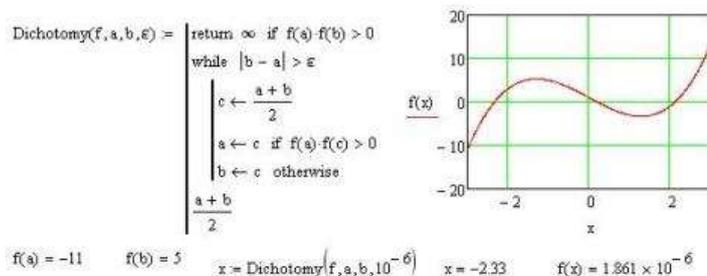
Порядок выполнения задания 2.

1. Определить функцию уравнения $f(x)=0$ как функцию пользователя, интервал поиска решения зададим переменными a и b . Найти этот интервал можно, например, табличным или графическим методом:

$$f(x) := x^3 - 5x + 1 \quad a := -3 \quad b := -1$$

Начальный интервал $[a,b]$ должен быть таким, чтобы значения $f(a)$ и $f(b)$ имели противоположные знаки. Если искомый корень уравнения окажется единственным на интервале, то совсем хорошо :)

2. Логика **метода дихотомии** (возможно, более правильные названия - метод **бисекции**, метод **половинного деления**) довольно проста: если на концах выбранного интервала $[a,b]$ знаки функции совпадают (произведение $f(a)*f(b)>0$), то вернуть результат "недопустимый интервал" (вернём в этом случае ответ "бесконечность"), в противном случае до тех пор, пока длина интервала не станет меньше заданной погрешности ϵ , будем находить середину текущего интервала $c=(a+b)/2$, считать в ней значение функции и проверять, какую из половин отрезка $[a,c]$ или $[c,b]$ нужно отбросить для выполнения следующего шага - а именно, ту, в которой знак $f(c)$ совпадает со знаком функции на левой или правой границе интервала (в листинге - проверка $f(a)*f(c)>0$). Для большей точности вернём середину "последнего" интервала $[a,b]$, меньшего ϵ :



Форма представления результата: файл MS Excel «Задание1.xlsx» и файл Mathcad «Задание2.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №17

Реализация метода наименьших квадратов средствами MS Excel и Mathcad

Цель работы:

Научиться реализовывать метод наименьших квадратов в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Краткие теоретические сведения.

Наиболее распространенным методом аппроксимации экспериментальных данных является метод наименьших квадратов. Метод позволяет использовать аппроксимирующие функции произвольного вида и относится к группе глобальных методов. Простейшим вариантом метода наименьших квадратов является аппроксимация прямой линией (полиномом первой степени). Этот вариант метода наименьших квадратов носит также название линейной регрессии.

Критерием близости в методе наименьших квадратов является требование минимальности суммы квадратов отклонений от аппроксимирующей функции до экспериментальных точек:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min$$

Таким образом, не требуется, чтобы аппроксимирующая функция проходила через все заданные точки, что особенно важно при аппроксимации данных, заведомо содержащих погрешности.

Важной особенностью метода является то, что аппроксимирующая функция может быть произвольной. Ее вид определяется особенностями решаемой задачи, например, физическими соображениями, если проводится аппроксимация результатов физического эксперимента. Наиболее часто встречаются аппроксимация прямой линией (линейная регрессия), аппроксимация полиномом (полиномиальная регрессия), аппроксимация линейной комбинацией произвольных функций. Кроме того, часто бывает возможно путем замены переменных свести задачу к линейной (провести линеаризацию). Например, пусть аппроксимирующая функция ищется в виде $y = A \exp(kx)$. Прологарифмируем это выражение и введем обозначения $z = \ln(y)$, $a = \ln(A)$. Тогда в новых обозначениях задача сводится к отысканию коэффициентов линейной функции $z = a + kx$.

Задание1.

Применить метод наименьших квадратов для аппроксимации экспериментальных данных.

Порядок выполнения задания 1.

1. Считать данные из файлов datax и datay

```
x := READPRN (datax) y := READPRN (datay)
```

При использовании MathCAD 2000 имя файла следует заключать в кавычки и записывать его по правилам MS DOS, например, READPRN("c:\mylib\datax.prn").

2. Определяем количество прочитанных данных (число экспериментальных точек).

```
n := last(x) i := 0.. n
```

3. Используем встроенные функции **slope** и **intercept** для определения коэффициентов линейной регрессии (аппроксимация данных прямой линией). Функция **slope** определяет угловой коэффициент прямой, а функция **intercept** – точку пересечения графика с вертикальной осью.

```
A := intercept (x, y) B := slope(x, y)
```

4. Определяем аппроксимирующую функцию: $f1(z) := A + B \cdot z$

5. Коэффициенты линейной регрессии –

$$A = -3.539 \quad B = 1.81$$

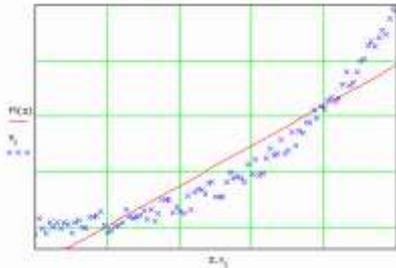
6. Mathcad 2000 предлагает для этих же целей использовать функцию *line*

$$\text{line}(x, y) = \begin{pmatrix} -3.539 \\ 1.81 \end{pmatrix}$$

7. Вычислить стандартное отклонение.

$$S1 := \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \sum_i (f1(x_i) - y_i)^2} \quad S1 = 2.0\epsilon$$

$$z := 0, 0.1 .. 10$$



Задание2.

Подобрать полиномы второй и третьей степени, в качестве аппроксимирующей функции.

Порядок выполнения задания 2.

Для этих целей служат встроенные функции *regress* и уже знакомая нам функция *interp*. (Очевидно, что если в качестве аппроксимирующей функции брать полином степени на единицу меньше числа точек, то задача сведется к задаче глобальной интерполяции и полученный полином будет точно проходить через все заданные узлы.)

1. Вводим степени полиномов:

$$k2 := 2 \quad k3 := 3$$

2. Функция *regress* является вспомогательной, она подготавливает данные, необходимые для работы функции *interp*. Вектор *vs* содержит, в том числе, и коэффициенты полинома

$$vs2 := \text{regress}(x, y, k2) \quad vs3 := \text{regress}(x, y, k3)$$

3. Функция *interp* возвращает значение полинома в точке *z*. Определив новые функции *f2*, *f3*, мы получили возможность находить значение полинома в любой заданной точке.

$$f2(z) := \text{interp}(vs2, x, y, z) \quad f3(z) := \text{interp}(vs3, x, y, z)$$

$$\text{coeffs2} := \text{submatrix}(vs2, 3, \text{length}(vs2) - 1, 0, 0)$$

$$\text{coeffs3} := \text{submatrix}(vs3, 3, \text{length}(vs3) - 1, 0, 0)$$

4. Коэффициенты:

$$(\text{coeffs2})^T = (0.701 \quad -0.76 \quad 0.257)$$

$$(\text{coeffs3})^T = (-0.122 \quad 0.253 \quad 2.377 \cdot 10^{-3} \quad 0.017)$$

$$S2 := \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \sum_i (f2(x_i) - y_i)^2} \quad S2 = 0.67$$

$$S3 := \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \sum_i (f3(x_i) - y_i)^2} \quad S3 = 0.5\epsilon$$

Стандартные отклонения почти не отличают друг от друга, коэффициент при четвертой степени *z* невелик, поэтому дальнейшее увеличение степени полинома нецелесообразно и достаточно ограничиться только второй степенью.

К сожалению, функция *regress* имеется далеко не во всех версиях *Matcad*'а. Однако, провести полиномиальную регрессию можно и без использования этой функции. Для

этого нужно определить коэффициенты нормальной системы и решить полученную систему уравнений, например, матричным методом.

5. Теперь попытаемся аппроксимировать экспериментальные данные полиномами степени m и $m1$, не прибегая к помощи встроенной функции **regress**.

$$m := 2 \quad t := 0..m \quad j := 0..m$$

$$m1 := 3 \quad t1 := 0..m1 \quad j1 := 0..m1$$

6. Вычисляем элементы матрицы коэффициентов нормальной системы

$$p_{t,j} := \sum_i (x_i)^{t+j} \quad p1_{t1,j1} := \sum_i (x_i)^{t1+j1}$$

7. и столбец свободных членов

$$b_j := \sum_i y_i (x_i)^j \quad b1_{j1} := \sum_i y_i (x_i)^{j1}$$

8. Находим коэффициенты полинома, решая систему матричным методом,

$$a := p^{-1} \cdot b \quad a1 := p1^{-1} \cdot b1$$

9. Определяем аппроксимирующие функции

$$f2(z) := \sum_t a_t \cdot z^t \quad f3(z) := \sum_{t1} a1_{t1} \cdot z^{t1}$$

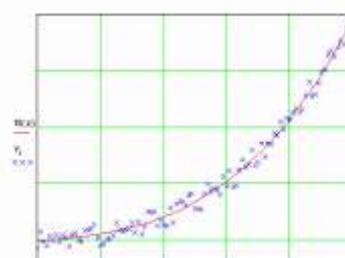
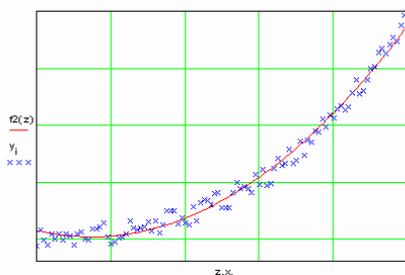
10. Коэффициенты полиномов следующие:

$$a = \begin{pmatrix} 0.701 \\ -0.76 \\ 0.257 \end{pmatrix} \quad a1 = \begin{pmatrix} -0.122 \\ 0.253 \\ 2.377 \cdot 10^{-3} \\ 0.017 \end{pmatrix}$$

11. Вычислим стандартное отклонение

$$s2 := \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \sum_i (f2(x_i) - y_i)^2} \quad s2 = 0.671$$

$$s3 := \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \sum_i (f3(x_i) - y_i)^2} \quad s3 = 0.581$$



Форма представления результата: файл MS Excel «Задание1.xlsx» и файл Mathcad «Задание2.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №18

Реализация метода отделения корней для решения нелинейных уравнений средствами MS Excel и Mathcad

Цель работы:

Сравнить результаты применения метода отделения корней для решения нелинейных уравнений в среде MS Excel и Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

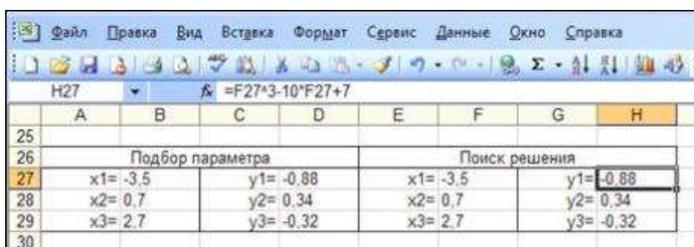
уметь:

- У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

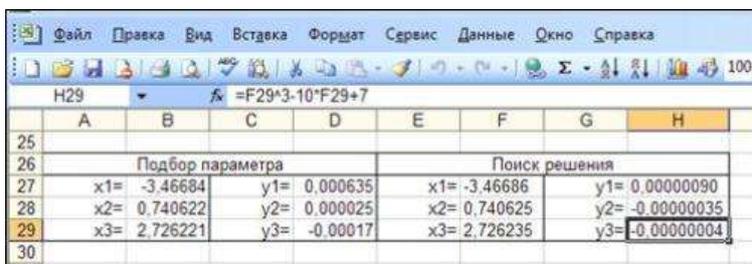
Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Краткие теоретические сведения.

В Excel для уточнения значений корней можно использовать опции «Подбор параметра» и «Поиск решения».



	A	B	C	D	E	F	G	H
25								
26		Подбор параметра			Поиск решения			
27	x1=	-3.5	y1=	-0.88	x1=	-3.5	y1=	-0.88
28	x2=	0.7	y2=	0.34	x2=	0.7	y2=	0.34
29	x3=	2.7	y3=	-0.32	x3=	2.7	y3=	-0.32
30								



	A	B	C	D	E	F	G	H
25								
26		Подбор параметра			Поиск решения			
27	x1=	-3.46684	y1=	0.000635	x1=	-3.46686	y1=	0.00000090
28	x2=	0.740622	y2=	0.000025	x2=	0.740625	y2=	-0.00000035
29	x3=	2.726221	y3=	-0.00017	x3=	2.726235	y3=	-0.00000004
30								

В Mathcad для уточнения корней уравнения можно использовать функцию $\text{root}(\dots)$ или блок решения. Пример использования функции $\text{root}(\dots)$ приведен на рисунке 4, а блока решения на рисунке 5. Следует обратить внимание, что в блоке решения (после заголовка блока Given) между левой и правой частями уравнения должен стоять жирный знак равенства (тождества), который можно получить выбором из соответствующей палитры инструментов, либо нажатием одновременно клавиши Ctrl и =.

Задание 1.

Отделить корни уравнений в среде MS Excel и Mathcad и провести анализ полученных результатов.

- $x = \cos(x)$
- $x^3 + \sin x = 25$
- $x^2 - 2x + 1.5 = 0$
- $x^2 - \cos x = 27$
- $e^x + 1 = x^3$
- $e^x = x^2 + 5$
- $x = \sin^2 x + 7$
- $x = \text{tg} x + 1$
- $x^2 + 3x + 9 = 0$
- $x^5 + \cos x = 32$

Форма представления результата: файл MS Excel «Задание1_1.xlsx» и файл Mathcad «Задание1_2.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №19

Выполнение анализа результатов эксперимента средствами MS Excel

Цель работы:

Выполнить анализ результатов эксперимента средствами MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У1. работать с пакетами прикладных программ профессиональной направленности

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Задание1.

1.Постановка задачи

В результате сброса промышленных стоков возрос уровень загрязнения реки. Каким он будет через сутки, двое и т.д. и когда он будет допустимым, если известно, что за сутки он уменьшается в определенное количество раз?

Провести исследование экологической модели при значениях параметров представленных в таблице:

Вещество	C_0 (мг/л)	$C_{доп}$ (мг/л)	K
Свинец	5	0,03	1,12
Мышьяк	1,5	0,05	1,05
Фтор	0,2	0,05	1,01

C_0 – начальная концентрация вредных примесей,

$C_{доп}$ – предельно допустимая концентрация вредных примесей,

K – коэффициент суточного уменьшения концентрации вредных примесей.

2.План создания модели

Объект исследования – концентрация вредных веществ. Для построения таблицы значений используем электронные таблицы.

Создание модели проходит в два этапа:

- построение математической модели;
- компьютерная реализация модели.

3. Создание модели

а) Построение математической модели (определение аргументов и результатов и связи между ними)

$$C_1 = C_0/K$$

$$C_2 = C_1/K = C_0/K^2$$

$$C_3 = C_2/K = C_0/K^3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$C_n = C_{n-1}/K = C_0/K^n$$

Таким образом функция

$$\underline{C_n = C_0/K^n} \quad (1)$$

Или

$$\underline{C_n = C_{n-1}/K} \quad (2)$$

определяет математическую модель задачи.

Математическая постановка задачи:

При заданных значениях C_0 и K определите целое значение n , при котором соотношения, приведенные выше дают величину C меньше или равную заданной величине $C_{доп}$

б) Компьютерная реализация модели

Формула (2) является рекуррентной, т.е. очередное значение C_i вычисляется по предыдущему значению C_{i-1} . Для реализации модели можно использовать итерационные вычисления. Представим модель в ЭТ. Введем последовательно исходные данные, а также начальные данные и формулы для последующих вычислений, получим таблицу, с помощью которой произведем вычисления, предварительно скопировав формулы с помощью маркера заполнения до нужного результата

	A	B	C
	<i>Экологическая модель</i>		
	<i>Исходные данные</i>		
		начальная концентрация	
	5	вредных примесей	
	0,		
03		Допустимая концентрация	
	1,	коэффициент суточного	
12		уменьшения концентрации	
	<i>Расчетная таблица</i>		
	n	K	C
	0	1,12	5
	=		
0	A9+1	=B9	=C9/B10

4.Проверка адекватности модели

Модель построена в соответствии с формулами, представленными в условии задачи. Для избежания ошибок при копировании необходимо проконтролировать данные, рассчитав самостоятельно.

5.Проверка вычислительного эксперимента и интерпретация результатов.

Сравнивая значения столбца C со значениями ячейки A4(допустимая норма Сдоп), мы должны получить ячейку C_i , значение которой меньше или равно значению A4. Если такая ячейка существует, то определим соответствующее значение ячейки A_i . Это будет номер суток. Если такой ячейки не окажется, следует продолжить копирование ячеек до получения нужного результата.

Экологическая интерпретация полученного решения: «через 46 суток уровень загрязненности достигнет допустимой нормы»

Задание2.

Постановка задачи. Завод, стоящий на берегу реки, сбрасывает в нее ежедневно случайным образом (из-за неисправности очистных сооружений) от 0 до 30 кг вредных веществ. За каждый кг сверх 15 завод обязан заплатить штраф 1000р. Прибыль завода от реализации его продукции 7000р. в день. Проследить рентабельность завода за месяц.

Построение математической модели.

Рассмотрим схему: «уровень выброса»(B) – «штраф»(C) – «прибыль»(D) – «накапливаемая прибыль»(E).

B_n – случайное число от 0 до 30;

При $B_n > 15$, $C_n = (B_n - 15) * 1000$ (иначе - 0);

$D_n = 7000 - C_n$

$E_n = E_{n-1} + D_n$

Для определения рентабельности завода необходимо подсчитать накапливающуюся прибыль и суммарный штраф за месяц.

Компьютерная реализация модели.

	А	В	С	Д	Е
1	Число	Выброс	Штраф	Прибыль	Нак. прибыль
2	1	=СЛЧИС()*30	=ЕСЛИ(В2>15;(В2-15)*100;0)	=7000-С2	=D2
3	2				=E2+D3
3			=СУММ(С2Жс32)		=ЕСЛИ(Е32>С33;«да»;«нет»)

В ячейке E33 вывести ответ о рентабельности завода: «да» - если накапливаемая прибыль больше суммы(С33), «нет →» в противном случае

Задание3.

1.Постановка задачи.

В 2000 году объем древесины на территории лесного массива составлял 120000м³. При заготовке древесины ежегодно вырубается 9500м³. Естественный ежегодный прирост составляет 5,5%. Какой объем древесины будет на территории через 20 лет? Станет ли он меньше минимально допустимого значения (23000м³)? При необходимости откорректировать план лесозаготовки с точностью до 100м³.

2.План создания модели.

Объект исследования – объем древесины. Для построения таблицы значений используем электронные таблицы.

Создание модели проходит в два этапа:

- построение математической модели;
- компьютерная реализация модели.

3. Создание модели.

а) Построение математической модели (определение аргументов и результатов и связи между ними)

Пусть

- объем на начало года V_n
- план PL

$$V_n = V_{n-1} - PL + V_{n-1} * 0,055$$

$$V_0 = 12000$$

Математическая постановка задачи:

При заданных значениях V_0 и PL определите значение при $n = 20$, при котором соотношения, приведенные выше дают величину V_n большей или равную заданной величине $V_{\text{доп}}$ (23000м³)

б) Компьютерная реализация модели.

	А	В	С
1	Год	Объем	План
2	2000	120000	9500
3	2001	=B2-\$C\$2+B2*0,055	
4			

Задание4.

Для снабжения населенных пунктов, расположенных в труднодоступной местности, требуется разместить железнодорожную станцию и аэродром таким образом, чтобы

суммарное расстояние (и, соответственно, стоимость воздушных перевозок от станции к аэродрому и от аэродрома к населенным пунктам было минимальным.

Координаты населенных пунктов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Номера населенных	Координаты населенных	
	X	Y
1	2,0	8,0
2	10,0	9,0
3	1,0	2,0
4	4,0	9,0
5	9,0	5,0

Решение

Из условия задачи следует, что надо найти оптимальное, с точки зрения экономии затрат

на воздушные перевозки, местоположение двух объектов:

аэродрома и железнодорожной станции. Такое возможно, если суммарная протяженность воздушных трасс между всеми объектами будет минимальной. Как известно, кратчайшее расстояние между двумя точками определяется отрезком, соединяющим эти точки

Для решения задачи введем обозначения (табл. 2)

Таблица 2

Объект	Координата	Координата
Населенный пункт №1	X_1	Y_1
Населенный пункт №2	X_2	Y_2
Населенный пункт №3	X_3	Y_3
Населенный пункт №4	X_4	Y_4
Населенный пункт №5	X_5	Y_5
Аэродром	X_A	Y_A
Железнодорожная	X_C	Y_C

Минимальное расстояние от железнодорожной станции до i -го населенного пункта ($i = 1, 2, \dots, 5$) через аэропорт можно определить следующим

образом:

$$F(X_A, Y_A, X_C, Y_C, X_i, Y_i) = \sqrt{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} + \sqrt{(X_A - X_i)^2 + (Y_C - Y_i)^2}$$

Задачу можно решить, используя приложение MS Excel и надстройку «Поиск решения».

Для моделирования подготовим таблицу с координатами населенных пунктов. Для этого :

1. Введите необходимые заголовки, исходные значения координат населенных пунктов (рис. 1).

Рис1.

	A	B	C	D	E
1	Моделирование оптимального расположения аэродрома и железнодорожной станции				
2	Расположение населенных пунктов				Расстояние между
3	Объект, населенный пункт	Координата			аэропортом и населенными
4		X	Y		

					пунктами
5	Населенный пункт №1	2,0	8,0		
6	Населенный пункт №2	10,0	9,0		
7	Населенный пункт №3	1,0	2,0		
8	Населенный пункт №4	4,0	9,0		
9	Населенный пункт №5	9,0	5,0		
10					
11	Оптимальные координаты объектов (аэропорта и железнодорожных станций)				
12	Аэродром				
3					
4	Железнодорожная станция				
5					
6	Оптимальное суммарное расстояние от аэропорта до станции и всех населенных пунктов				

2. В соответствии с соответствующими ячейками введите расчетные формулы.

Таблица 3

№	Адрес	Содержимое ячейки (формула)
1	E5	=КОРЕНЬ((B\$12-B5)^2+(C\$12-C5)^2)
2	E6—E9	Скопировать формулу из E5 в E6—E9
3	B16	=КОРЕНЬ((B14-B12)^2+(C14-C12)^2)+СУММ(E5:E9)

Компьютерное моделирование

Эксперимент № 1.

1. Применяя надстройку Excel «Поиск решения» (Меню Сервис, Поиск решения), назначьте в качестве целевой ячейки B16 и установите переключатель Равной: равным минимальному значению (рис. 2). Укажите в качестве изменяемых ячеек ячейки \$B\$12:\$C\$12; \$B\$14:\$C\$14 (координаты аэродрома и станции).

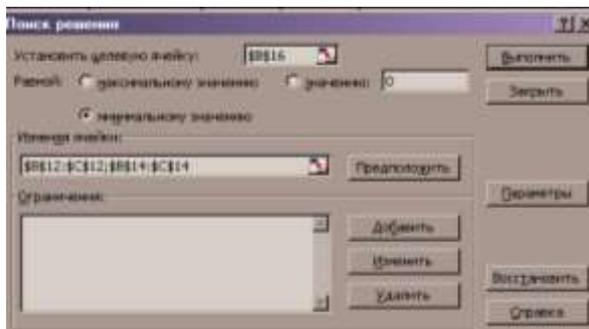


Рис. 2. Окно Поиск решения без ограничений

2. Ограничения не вводите.
3. Щелкните на кнопке Выполнить. Результат вы видите на рис. 3.
4. Постройте диаграмму, выберите тип Точечная (рис. 4).
5. Проанализируйте полученный результат.

На основе полученных данных моделирования можно сделать следующий вывод: моделирование, проводимое в условиях, когда ограничения не заданы, приводит к совпадению координат расположения железнодорожной станции и аэродрома. Это вытекает и из простого анализа расчетной формулы. Минимальное расстояние будет, если координаты объектов совпадут. В реальных условиях такие объекты находятся на безопасном расстоянии друг от друга, кроме того, есть и другие критерии обеспечения нормальных условий функционирования объектов.

Моделирование оптимального расположения аэродрома и железнодорожной станции				
Расположение населенных пунктов			Расстояние между аэропортом и населенными пунктами	
Объект, населенный пункт	Координата			
	X	Y		
Населенный пункт №1	2,0	8,0		2,5
Населенный пункт №2	10,0	9,0		5,7
Населенный пункт №3	1,0	2,0		6,6
Населенный пункт №4	4,0	9,0		1,5
Населенный пункт №5	9,0	5,0		5,2
Оптимальные координаты объектов (аэропорта и железнодорожных станций)				
Аэродром	4,5	7,6		
Железнодорожная станция	4,5	7,6		
Оптимальное суммарное расстояние от аэропорта до станции и всех населенных пунктов	21,5			

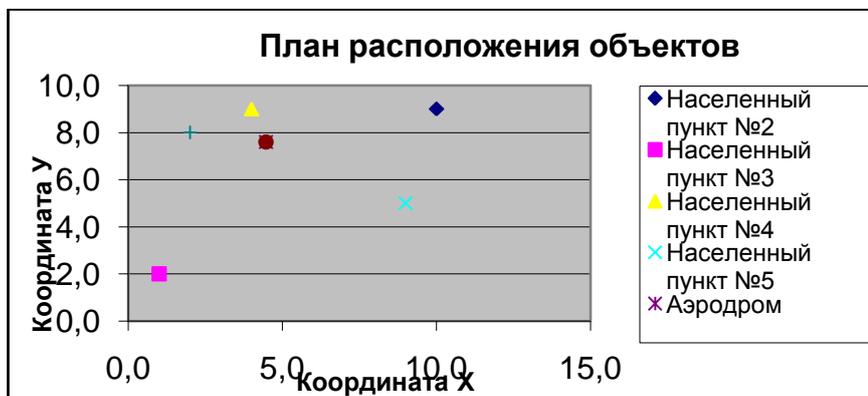


Рис. 4 Диаграмма расположения объектов (без ограничений)

Эксперимент № 2.

Усложним задачу. Введем ограничения. Предположим, что в указанном районе есть озеро и проходит железная дорога.

Координаты, ограничивающие местоположение аэродрома и станции, приведены в табл. 4.

Объект	Координата X	Координата Y
Озеро	≥ 0 и < 4	≥ 3 и ≤ 6
Железная дорога	≥ 6	$= 1$

1. Установите курсор в ячейку B16.

2. Введите условия ограничения на расположение аэродрома и станции (рис. 5). В частности, примите во внимание, что аэродром не должен находиться внутри области, чьи координаты указаны в табл. 4, а железнодорожная станция, наоборот, должна находиться на железной дороге.

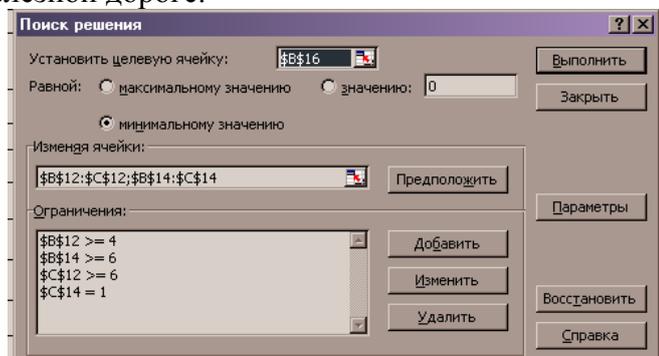


Рис. 2. Окно Поиск решения с ограничениями

3. Произведите поиск решения. Вы получите результат, изображенный на рис. 6.

Моделирование оптимального расположения аэродрома и железнодорожной станции			
Расположение населенных пунктов			Расстояние между аэропортом и населенными пунктами
Объект, населенный пункт	Координата		
	X	Y	
Населенный пункт №1	2,0	8,0	3,8
Населенный пункт №2	10,0	9,0	5,6
Населенный пункт №3	1,0	2,0	5,9

Населенный пункт №4	4,0	9,0		3,2
Населенный пункт №5	9,0	5,0		3,9
Оптимальные координаты объектов (аэропорта и железнодорожных станций)				
Аэродром	5,2	6,1		
Железнодорожная станция				
	6,0	1,0		
Оптимальное суммарное расстояние от аэропорта до станции и всех населенных пунктов				
	27,5			

Рис. 6. Фрагмент рабочего листа (после ввода ограничений)

3. Постройте диаграмму (рис. 7)

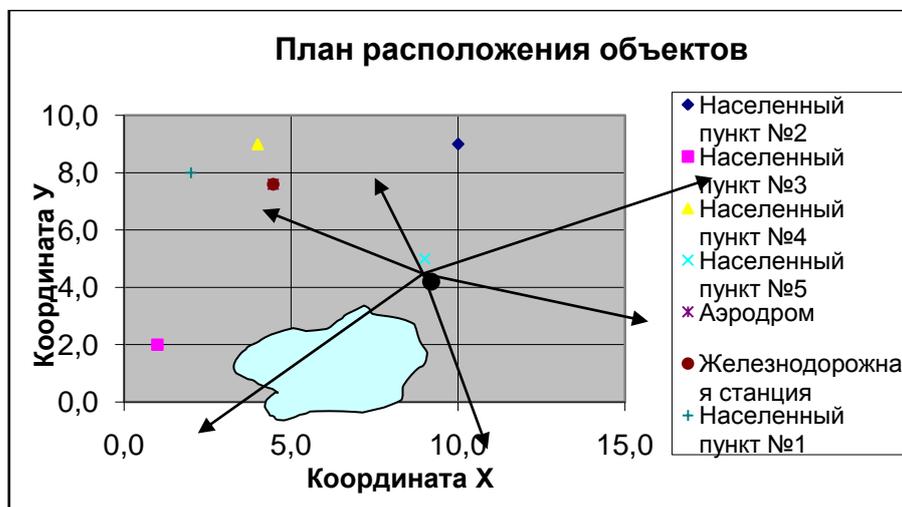


Рис. 7. Оптимальное расположение объектов

Введение ограничений позволяет построить модель, учитывающую особенности местности и наличие железной дороги.

Форма представления результата: файлы MS Excel «Задание1.xlsx», «Задание2.xlsx», «Задание3.xlsx», «Задание4.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «хорошо» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по

замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.