Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледжа

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/ С.А. Махновский
«23» марта 2017 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
БД.04 МАТЕМАТИКА
общеобразовательной подготовки
для специальностей естественнонаучного профиля**

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией Математических и естественнонаучных дисциплин
Председатель: Е.С. Корытникова
Протокол №7 от 14 марта 2017 г.

Методической комиссией
Протокол №4 от 23 марта 2017 г.

Разработчик
Ю.Н. Садчикова, преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и практической подготовки обучающихся составляют практические занятия. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

Состав и содержание практических работ по общеобразовательной подготовке направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике, алгебре, геометрии), необходимых в последующей учебной деятельности по естественнонаучным дисциплинам ЕН.01 Математика.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения у обучающихся должны сформироваться предметные результаты:

– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;
– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
– владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
– владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
– сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;
– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

– сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин.

Предметными результатами освоения учебной дисциплины «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» на углубленном уровне являются:

– *сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;*
– *сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;*
– *владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.*

Содержание практических работ ориентировано на формирование универсальных учебных действий:

Личностных:

4) сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире: *мировоззрение подразумевает наличие собственной точки зрения по тем или иным вопросам, основанной на знаниях, для этого включаем вопросы и задания, предполагающие необходимость аргументировать свои суждения;*

5) сформированность основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности: *достигается включенной в содержание самостоятельной работы студентов (составление опорного конспекта по теме; составление развернутой схемы исследования функции; составление глоссария);*

6) толерантное сознание и поведение в поликультурном мире, готовность и способность вести диалог с другими людьми, достигать в

нём взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения: *достигается применением активных и интерактивных форм занятий (работа в микрогруппах);*

7) навыки сотрудничества со сверстниками, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности: *достигается применением активных и интерактивных форм занятий*;

8) нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей;

9) готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности: *содержание дисциплины может оказать влияние на выбор направления в самообразовании*;

10) эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, общественных отношений;

13) осознанный выбор будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем: *математика играет свою роль при понимании студентами места выбранной профессии среди других профессий*.

Метапредметных:

1) умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях: *развитию данной группы умений способствует построение учебной деятельности на уроке, применение активных и интерактивных форм занятий*;

2) умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты: *развитию данной группы умений способствует построение учебной деятельности на уроке, применение активных и интерактивных форм занятий*;

3) владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания: *развитию данной группы умений способствует самостоятельная работа студентов*;

4) готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в

различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников: *развитию данной группы умений способствует самостоятельная работа студентов*;

5) умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности;

7) умение самостоятельно оценивать и принимать решения, определяющие стратегию поведения, с учётом гражданских и нравственных ценностей;

8) владение языковыми средствами - умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства: *развитию данной группы умений способствует применение активных и интерактивных форм занятий;*

9) владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения: *развитию данной группы умений способствует применение активных и интерактивных форм занятий.*

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» направлено на: *(выбрать)*

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для выполнения практических работ.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 1

«Арифметические действия над действительными числами»

Цель работы: Повторить действия с действительными числами.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– решать задачи по алгебре и началам математического анализа.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Вычислить

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), примените нужную формулу сокращённого умножения.

Ход работы:

П р и м е р . Найти (8 + i) : (2 – 3i) .

Р е ш е н и е . Перепишем это отношение в виде дроби: $\dfrac{8+i}{2-3i}$.

Умножив её числитель и знаменатель на 2 + 3i

и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1+2i.$$

Пусть $z_1 = 2-2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

$z_2 = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Тогда $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}e^{-i\frac{13\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие № 2

«Тождественные преобразования рациональных выражений»

Цель работы: Повторить формулы сокращённого умножения.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– решать задачи по алгебре и началам математического анализа.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Представьте в виде многочлена:
а) $(x^2+5y)^3$
б) $(2 - x)\cdot(2 + x)\cdot(4 + x^2)\cdot(16 + x^4)$
в) $(a - d)^2\cdot(a + d)^2$
г) $(2a - c)\cdot(8a^3 + c^3)\cdot(c^2 + 2ca + 4a^2)$

Порядок выполнения работы:
3. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
4. Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), примените нужную формулу сокращённого умножения.

Ход работы:
Записать задание в тетрадь и решить.
а) $(3p^2 - 2y^3)^3 = 27p^6 - 54p^4y^3 + 36p^2y^6 - 8y^9$
б) $(1 - a)\cdot(1 + a)\cdot(1 + a^2)\cdot(1 + a^4) = (1 - a^2)(1 + a^2)\cdot(1 + a^4) = (1 - a^4)(1 + a^4) = 1 - a^8$
в) $x - m)^2\cdot(x + m)^2 = (x^2-2xm+m^2)(x^2+2xm+m^2) = x^4+2x^3+x^2m^2-2x^3m - -4x^2m^2-2xm^3+m^2x^2+2xm^3+m^4 = x^4 - 2x^2m^2 + m^4$.
г) $(2n - c)\cdot(8n^3 + c^3)\cdot(c^2 + 2cn + 4n^2) = (2n - c)\cdot(4n^2 + 2cn + c^2)(8n^3 + +c^3) = (8n^3 - c^3)(8n^3 + c^3) = 64n^6 - c^6$

Форма представления результата:
Представьте в виде многочлена:

а) $(3p^2 - 2y^3)^3$	$27p^6 - 54p^4y^3 + 36p^2y^6 - 8y^9$
б) $(1 - a)\cdot(1 + a)\cdot(1 + a^2)\cdot(1 + a^4)$	$1 - a^8$
в) $(x - m)^2\cdot(x + m)^2$	$x^4 - 2x^2m^2 + m^4$

г) $(2n - c)\cdot(8n^3 + c^3)\cdot(c^2 + 2cn + 4n^2)$ | $64n^6 - c^6$

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 3

«Решение рациональных уравнений и их систем»

Цель работы: Повторить способы решения рациональных уравнений

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать рациональные уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным;
- использовать графический метод решения уравнений;
- изображать на координатной плоскости решения уравнений;
- составлять и решать уравнения, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите уравнения :

$1)\frac{4x-6}{x+2}-\frac{x}{x+1}=\frac{9}{x^2+3x+2}$ 3) $x^2-81=0$

2) $(x^2-x)\cdot(x-2)=0$ 4) $x^2-7x+16=0$

Краткие теоретические сведения:

Решение уравнений I–II степени с одной переменной

$ax+b=0,\left(x=\frac{-b}{a},a\neq 0\right)$ – линейное уравнение I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ – уравнение II степени с одной переменной.

Порядок выполнения работы:

При решении уравнений используются следующие правила преобразования уравнений в равносильные:

а) какой- либо член уравнения можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком;

б) обе части уравнения можно умножить или разделить на одно то же число, отличное от 0.

Ход работы:

1. Определить вид уравнения и способ его решения.

2. Если уравнение дробно-рациональное, то найти общий знаменатель всех дробей, которые входят в уравнение.

3. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.

4. Решить полученное целое уравнение.

5. Произвести проверку корней, и исключить те из них, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Так как мы решаем дробные рациональные уравнения, то в знаменателях дробей будут переменные. Значит, будут они и в общем знаменателе. Во втором пункте алгоритма мы умножаем уравнение на общий знаменатель. При этом могут появиться посторонние корни, при которых общий знаменатель будет равен нулю, а значит и умножение на него будет бессмысленным. Поэтому в конце обязательно нужно сделать проверку полученных корней.

Решим уравнения:

$$a)\left(3x+1\right)^2+\left(4x-1\right)^2=\left(5x-2\right)^2$$

Раскроем скобки, применяя формулы сокращенного умножения $\left(a+b\right)^2$ и $\left(a-b\right)^2$

$$9x^2+6x+1+16x^2-8x+1=25x^2-20x+4.$$
$$9x^2+6x+1+16x^2-8x+1-25x^2+20x-4=0.$$

Приведем подобные члены, получим

$$18x-2=0 \qquad x=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$$
$$18x=2$$

Ответ: $x=\dfrac{1}{9}$ – корень уравнения.

$$б)\,\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$$

Разложим x^2-4 на множители и перенесем все члены уравнения в левую часть. Приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}-\frac{8}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=0$$

$$\frac{x\left(x+2\right)-7\left(x-2\right)-8}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}=0$$

$$\frac{x^2+2x-7x+14-8}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}=0$$

$$\frac{x^2-5x+6}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}=0$$

дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т. е.

$$\left(x+2\right)\left(x-2\right)\neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad x\neq 2;\; x\neq -2$$

$$x^2-5x+6=0.$$

$D = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{2};$ (корни можно найти по теореме Виета)

$x_1 = 3; x_2 = 2$

но $x \neq 2,$ то $x_2 = 2$ – посторонний корень

решением уравнения будет $x = 3$.

Ответ: $x = 3$

$в) x^2 - x + 4 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$

уравнение не имеет действительных корней.

Задание:

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 3x + 8y = 1. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

При решении систем уравнений используются способы сложения, подстановки и графический.

Ход работы:

Решим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

1) $\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases}$

Решим систему всеми способами, т.е. убедимся, что результат получается одинаковый и определимся, какой из методов более рационально применим для данной системы.

1) <u>Способ подстановки</u>.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ 10x + 7y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \dfrac{8}{3} y = \dfrac{31}{3} \\ 10x + 7y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{31}{3} - \dfrac{8}{3} y \\ 10\left(\dfrac{31}{3} - \dfrac{8}{3} y \right) + 7y = 5 \end{cases}$$

Решаем второе уравнение относительно «*y*»: $\frac{310}{3}-\frac{80}{3}y+7y=5$, приведем к общему знаменателю и так как $3\neq 0$, то

$$310-80y+21y=15$$

$$-59y=15-310$$

$$-59y=-295;\quad y=\frac{-295}{-59}=5$$

$$y=5,\ \text{тогда}\ x=\frac{31}{3}-\frac{8}{3}\cdot 5=\frac{31}{3}-\frac{40}{3}=-\frac{9}{3}=-3$$

Ответ: $x = –3$; $y = 5$.

2) Способ алгебраического сложения

$$\begin{cases}3x+8y=31\\-10x-7y=-5\end{cases}$$

уравняем по модулю коэффициенты при x, для этого умножим первое уравнение на 10, а второе – на 3.

$$\begin{cases}3x+8y=31\\-10x-7y=-5\end{cases}\left|\begin{matrix}10\\3\end{matrix}\right.\qquad\qquad \begin{cases}30x+80y=310\\-30x-21y=-15\end{cases}\text{почленно}$$

сложим и получим:

$$59y=295$$

$$y=5$$

подставим $y = 5$ в любое из уравнений системы, например в первое, затем найдем *x:*

$$3x+8\cdot 5=31$$

$$3x+40=31$$

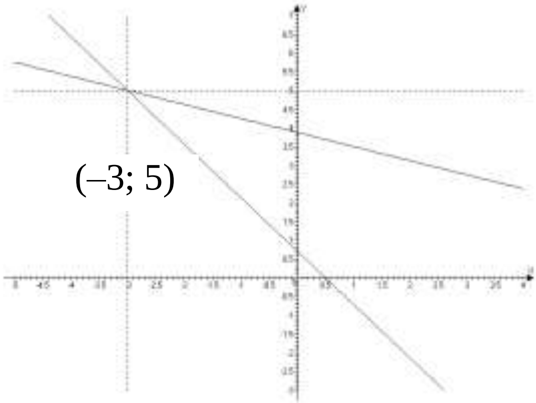
$$3x=-9$$

$$x=-3$$

получаем $x = –3$; $y = 5$, как и в первом случае.

3) графически (следует помнить, что результаты могут быть получены приближенно, что можно объяснить нашим зрением, умением проводить линии, выбором масштаба, неудобством записи числа и т.д.)

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases}$$



Графиком каждого
уравнения является прямая, а прямая определяется двумя точками.

$$3x + 8y = 31$$

$$x = 0; \quad y = \frac{31}{8} = 3\frac{7}{8}$$

$$x = 2; 6 + 8y = 31;$$

$$y = \frac{31-6}{8} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$

$$-10x - 7y = -5$$

$$10x + 7y = 5$$

$$x = 0; y = \frac{5}{7}$$

$$x = 2; 20 + 7y = 5;$$

$$7y = -15; y = -\frac{15}{7} = -2\frac{1}{7}$$

Мы видим, что способ сложения в данном примере наиболее рациональный.

Ответ: (–3; 5).

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 4

«Решение рациональных неравенств и их систем»

Цель работы: Повторить способы решения рациональных неравенств.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– решать рациональные неравенства;
– использовать графический метод решения рациональных неравенств;
– изображать на координатной плоскости решение рациональных неравенств;
– составлять и решать рациональные неравенств, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите неравенства:

1. $\frac{3x+1}{4} - \frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} + \frac{3x}{5}$;
2. $|3-2x| < 1$;
3. $5x^2 + 3x - 8 > 0$;

Порядок выполнения работы:
При решении неравенств используются следующие правила преобразования неравенств в равносильные:
а) какой- либо член неравенства можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком, оставив при этом без изменения знак неравенства;
б)обе части неравенства можно умножить или разделить на одно то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства;
в) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный
При решении систем неравенств нужно решить каждое из них и выбрать общее решение.

Ход работы:
Решим неравенства.
1. $5x - \frac{7x-1}{2} + \frac{2x-5}{5} > \frac{7}{10}$
Перенесем все члены в левую часть и приведем к общему знаменателю. общий знаменатель 10; так как знаменатель не содержит переменной, то в дальнейшем его можно не писать (опустить).

$$50x - 5(7x-1) + 2(2x-5) - 7 > 0$$

$$50x - 35x + 5 + 4x - 10 - 7 > 0$$

$$19x - 12 > 0$$

$$19x > 12$$

$$x > \frac{12}{19}$$

$\frac{12}{19}$

$$x \in \left(\frac{12}{19}; +\infty\right)$$

2. $\left|5-2x\right|<3$, то есть

$$-3<5-2x<3$$

Используя свойства числовых неравенств, имеем

$$-3-5<5-2x-5<3-5$$

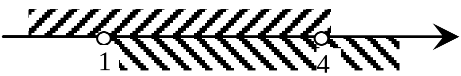
$-8<-2x<-2;$ делим на (-2), знак неравенства меняется

$$4>x>1 \quad \Leftrightarrow \quad 1<x<4$$

Или можно записать в виде системы неравенств

Ответ: $x\in(1;4)$

$$\begin{cases}5-2x<3\\5-2x>-3\end{cases}\quad\begin{cases}-2x<3-5\\-2x>-3-5\end{cases}\quad\begin{cases}-2x<-2\\-2x>-8\end{cases}\qquad\begin{cases}x>1\\x<4\end{cases}$$



Ответ: $x\in(1;4)$

3. $5x-2-3x^2>0$

умножим на (–1)

$$3x^2-5x+2<0$$

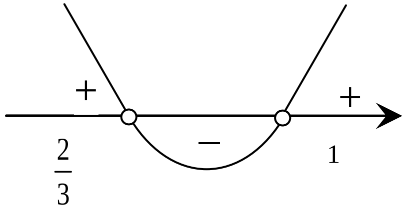
квадратное неравенство
Найдем корни уравнения

$$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6}; \qquad x_1 = 1; x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Графиком функции $y = 3x^2 - 5x + 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а точки пересечения параболы и оси ОХ $x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{2}{3}$

Изобразим геометрически:



Так как мы решаем неравенство $3x^2 - 5x + 2 < 0$, то решением неравенства будет промежуток (интервал) $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$

Решим систему двух линейных неравенств :

$$\begin{cases} 10x - 3 \leq 2x + 4, \\ 5x + 3 > 2x - 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 2x \leq 4 + 7, \\ 5x - 2x > 3 + 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x \leq 7, \\ 3x > 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq \frac{7}{8} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases},$$

$\frac{1}{3} < x \leq \frac{7}{8}.$

Следовательно , решением данного неравенства является прмежуток: $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{8}\right]$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 5

«Решение неравенств методом интервалов»

Цель работы: Повторить способы решения рациональных неравенств.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать рациональные неравенства;
- использовать графический метод решения рациональных неравенств;
- изображать на координатной плоскости решение рациональных неравенств;
- составлять и решать рациональные неравенств, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите неравенства:

4. $\frac{3x+1}{4} - \frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} + \frac{3x}{5}$;

5. $5x^2 + 3x - 8 > 0$;

Порядок выполнения работы:

При решении неравенств используются следующие правила преобразования неравенств в равносильные:

а) какой- либо член неравенства можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком, оставив при этом без изменения знак неравенства;

б)обе части неравенства можно умножить или разделить на одно то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства;

в) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный

При решении систем неравенств нужно решить каждое из них и выбрать общее решение.

Ход работы:

3. $5x - 2 - 3x^2 > 0$

умножим на (–1)

$3x^2 - 5x + 2 < 0$

квадратное неравенство

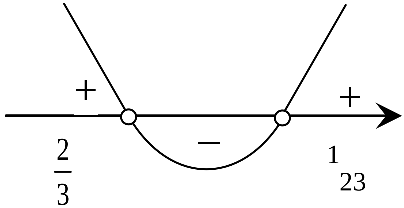
Найдем корни уравнения

$$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$

$3x^2 - 5x + 2 = 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6}; \qquad x_1 = 1; x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Графиком функции $y = 3x^2 - 5x + 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а точки пересечения параболы и оси ОХ $x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{2}{3}$

Изобразим геометрически:



Так как мы решаем неравенство

$3x^2 - 5x + 2 < 0$, то решением неравенства будет промежуток (интервал) $x \in \left(\frac{2}{3};1\right)$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 6

«Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств»

Цель работы: Повторить способы решения рациональных неравенств.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать рациональные неравенства;
- использовать графический метод решения рациональных неравенств;
- изображать на координатной плоскости решение рациональных неравенств;

– составлять и решать рациональные неравенств, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 3x+8y=1. \end{cases}$$

графически (следует помнить, что результаты могут быть получены приближенно, что можно объяснить нашим зрением, умением проводить линии, выбором масштаба, неудобством записи числа и т.д.)

$$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$$

Графиком каждого уравнения является прямая, а прямая определяется двумя точками.

$$3x+8y=31$$

$$x=0; \quad y=\frac{31}{8}=3\frac{7}{8}$$

$$x=2; 6+8y=31;$$

$$y=\frac{31-6}{8}=\frac{25}{8}=3\frac{1}{8}$$

$-10x-7y=-5$

$10x+7y=5$

$x=0;\ y=\dfrac{5}{7}$

$x=2;\ 20+7y=5;$

$7y=-15;\ y=-\dfrac{15}{7}=-2\dfrac{1}{7}$

Мы видим, что способ сложения в данном примере наиболее рациональный.
Ответ: (–3; 5).

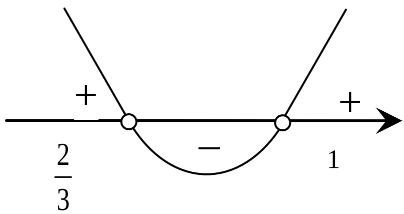
3. $5x-2-3x^2>0$
умножим на (–1)
$3x^2-5x+2<0$
квадратное неравенство
Найдем корни уравнения

$$D=25-4\cdot 6=1$$

$3x^2-5x+2=0$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{6};\qquad x_1=1;\ x_2=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

Графиком функции $y=3x^2-5x+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а точки пересечения параболы и оси ОХ $x_1=1;\quad x_2=\dfrac{2}{3}$

Изобразим геометрически:



Так как мы решаем неравенство $3x^2-5x+2<0$, то решением неравенства будет промежуток (интервал)

$$x \in \left(\frac{2}{3};1\right)$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Функции, их свойства, графики

Практическая работа №7

«Нахождение области определения функций»

Цель работы: научиться определять четность нечетность функции, проводить исследование функции на монотонность, экстремумы, нули функции и промежутки знакопостоянства

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;

– определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;

– строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;

– использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1) Исследовать функцию $y = -1/4(x^3-3x^2+4)$ на промежутки знакопостоянства:

а) $y = -1/4(x^3-3x^2+4)$; б) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

2) Исследовать функцию на четность:

а) $y = \dfrac{x^4 - 1}{4x^2}$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

3) Исследовать функцию на монотонность:

а) $y = \sqrt{5x - 1}$; б) $y = \dfrac{3}{x} - \sqrt{x}$.

Порядок выполнения работ

1) Найдите область определения функции.

Для нахождения промежутков знакопостоянства найдите точки пересечения с осью абсцисс, решив уравнение $y=0$. Найденные корни расставьте на оси Ох в порядке возрастания и найдите знак функции на каждом из полученных интервалов. Запишите результат.

2) Найдите область определения функции. Убедитесь, что она симметрична.

1.Замените аргумент функции х на "-х". Подставьте этот аргумент в функциональное выражение.

2.Упростите выражение.

3.Таким образом, вы получили одну и ту же функцию, записанную для аргументов "х" и "-х". Посмотрите на две эти записи.

Если $y(-x) = y(x)$, то это четная функция.

Если $y(-x) =- y(x)$, то это нечетная функция.

Если же про функцию нельзя сказать, что $y(-x)=y(x)$ или $y(-x)=-y(x)$, то по свойству четности это функция общего вида. То есть, она не является ни четной, ни нечетной.

4.Запишите сделанные вами выводы.

3) Найдите область определения функции и нули функции, если они есть. Исследуйте функцию на монотонность на полученных интервалах.

Функция F(x) называется **возрастающей на отрезке [a,b]** , если для любых двух точек x_1 и x_2 из **[a,b]** справедливо неравенство $F(x_1) \prec F(x_2)$, когда $x_1 \prec x_2$.
Функция F(x) называется **убывающей на отрезке [a,b]** , если для любых двух точек x_1 и x_2 из **[a,b]** справедливо неравенство $F(x_1) \succ F(x_2)$, когда $x_1 \prec x_2$.

Ход работы:

1) Найти область определения функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x}}$ и промежутки знакопостоянства.

Решение:

1. Область определения функции:

$x^2 + x \succ 0, x(x+1) \succ 0, x_1 = 0, x_2 \neq -1.$ Рассмотрим три интервала $(-\infty;-1), (-1;0) u (0;+\infty)$. На интервалах $(-\infty;-1) u (0;+\infty)$ $x^2 + x \succ 0$, а на интервале (-1;0) $x^2 + x \prec 0$. Получаем, что D(y)= $\underline{(-\infty;-1) \cup (0;+\infty).}$

2. Нулей функции нет, т.к. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x}} \neq 0$, следовательно график не пересекает ось абсцисс.

3. Найдем знак функции на интервалах $(-\infty;-1) u (0;+\infty)$. На интервале $(-\infty;-1)$ $y \prec 0$, на интервале $(0;+\infty)$ $y \succ 0$.

2) Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{2(x+5)^2}$ на четность.

Решение: Область определения. Функция определена для всех x кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль: x=-5, то есть D(y)= $(-\infty;-5) \cup (-5;+\infty).$ Т.к. область определения не симметрична , то по свойству четности это функция общего вида. То есть, она не является ни четной, ни нечетной.

3) Исследовать функцию $y = 6\sqrt{x} \cdot (2x - 1)$ на монотонность и промежутки знакопостоянства.

Решение: Область определения функции: $x \geq 0$, т.е. **D(y) =** $[0;+\infty).$

Нули функции: $x_1=0$, $x_2 = 0,5$.

Промежутки знакопостоянства: на интервале (0;0,5) $y \prec 0$, на интервале $(0,5;+\infty)$ $y \succ 0$.

Промежутки монотонности: логично рассматривать интервал $(0,5;+\infty)$. С возрастанием аргумента от 0,5 до $+\infty$ функция возрастает.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Функции, их свойства, графики

Практическая работа №8

«Чтение графиков функций»

Цель работы: Научиться строить графики функций

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;
- определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;
- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1)Построить график функции $y= - 5x^2+3x+2$, применяя алгоритм для построения графика функции.
2) Построить график функции $У= X^2 – 6X +4$, используя преобразования.
3)Построить график функции $y= x^2+3$, используя преобразования.

Порядок выполнения работы

1)График функции $y=ax^2+вx+c$, где $a\neq 0$ строится по следующему **алгоритму:**

- Описать функцию, заданную формулой $y=ax^2+вx+c$, где $a\neq 0$;
- задать координаты вершины $x_{в}=-\dfrac{в}{2a}; y_в = ax^2 + вx + c$ и построить

точку на координатной плоскости;

- провести ось симметрии параболы;
- определить нули функции (если это возможно), построить точки по соответствующим координатам;
- найти координаты точки пересечения графика функции с осью ординат и постройте ее, а также постройте точку, ей симметричную, на координатной плоскости;
- найти, если необходимо, координаты дополнительных точек;

2)График функции $y=x^2+px+q$, где $a\neq 0$ строится по следующему **алгоритму:**

- В квадратном трехчлене x^2+px+q выделим полный квадрат: $x^2+px+q = (x-a)^2+в$
- Построим график функции $y=x^2$

- Делаем параллельный перенос графика функции $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на IaI единиц вправо, если a> 0 или влево, если a< 0.
- Делаем параллельный перенос вдоль оси ординат на IвI единиц вверх, если в> 0 или вниз, если в< 0.

3) Чтобы построить график функции $y=x^2+3$ построим график функции $y=x^2$ и сделаем параллельный перенос вдоль оси Оу на 3 единицы вверх.

Ход работы:

1)Построим график функции $y=-3x^2-6x-4$.

Решение: $y=-3x^2-6x-4$ – квадратичная, график – парабола, $a=-3, \quad -3<0,$ следовательно, ветви направлены вниз.

Координаты вершины: **(–1;–1).**

$$x_в=\frac{6}{2(-3)}=\frac{6}{-6}=-1;$$
$$y_в=-3(-1)^2-6(-1)-4=-3+6-4=-1;$$

Нули функции:

$$-3x^2-6x-4=0,$$
$$3x^2+6x+4=0,$$
$$a=3, \quad m=3, \quad c=4,$$
$$D=m^2-ac,$$
$D=9-3\cdot 4=9-12=-3, \quad -3<0.$ Значит корней нет. То есть нет точек пересечения с осью абсцисс.

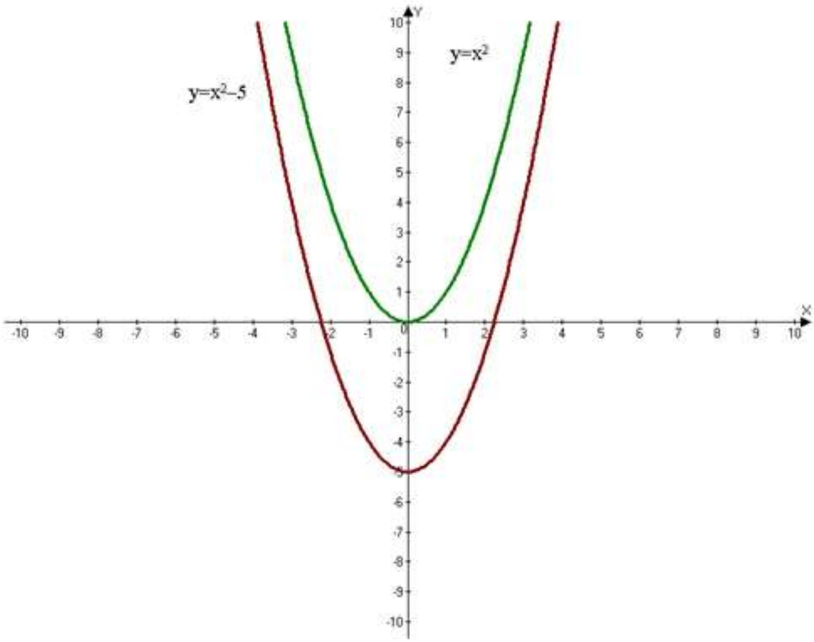
Точка пересечения с ОУ: (**0; – 4).**

Если $x = 0,$ то $y = 0 + 0 - 4 = -4.$

Дополнительные точки: **(1; –13)** , так как y(1) =-
$3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 4 = -3 - 6 - 4 = -13;$

Строим график.

2)Построим график функции $y=x^2-4x+3$ с помощью преобразований.$y=x^2-4x+3$– квадратичная, график – парабола, a=1, $1 \succ 0$ следовательно, ветви направлены вверх.Т.К. $x^2-4x+3 = (x-2)^2 - 1$, то $y= (x-2)^2 - 1$. Строим график функции $y=x^2$ и делаем параллельный перенос вдоль оси абсцисс на 2 единицы вправо и вдоль оси ординат на 1 единицу вниз. 3) Построим график функции $y=x^2-5$ с помощью преобразований. Чтобы бы построить график функции $y=x^2-5$ построим график функции $y=x^2$ и сделаем параллельный перенос вдоль оси Оу на 5 единиц вниз.



Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Функции, их свойства, графики

Практическая работа №9

«Построение графиков функций»

Цель работы: Научиться строить графики функций

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;
- определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;
- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1)Построить график функции $y= - 5x^2+3x+2$, применяя алгоритм для построения графика функции.
2) Построить график функции $У= Х^2 – 6Х +4$, используя преобразования.
3)Построить график функции $y= x^2+3$, используя преобразования.

Порядок выполнения работы

1)График функции $y=ax^2+вx+c$, где $a\neq 0$ строится по следующему **алгоритму:**

- Описать функцию, заданную формулой $y=ax^2+вx+c$, где $a\neq 0$;
- задать координаты вершины $x_в=-\frac{в}{2a}; y_в = ax^2 + вx + c$ и построить

точку на координатной плоскости;

- провести ось симметрии параболы;
- определить нули функции (если это возможно), построить точки по соответствующим координатам;
- найти координаты точки пересечения графика функции с осью ординат и постройте ее, а также постройте точку, ей симметричную, на координатной плоскости;
- найти, если необходимо, координаты дополнительных точек;

2)График функции $y=x^2+px+q$, где $a\neq 0$ строится по следующему **алгоритму:**

- В квадратном трехчлене x^2+px+q выделим полный квадрат: $x^2+px+q = (x-a)^2+в$
- Построим график функции $y=x^2$
- Делаем параллельный перенос графика функции $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на $|a|$ единиц вправо, если $a> 0$ или влево, если $a< 0$.
- Делаем параллельный перенос вдоль оси ординат на $|в|$ единиц вверх, если $в> 0$ или вниз, если $в< 0$.

3) Чтобы построить график функции $y=x^2+3$ построим график функции $y=x^2$ и сделаем параллельный перенос вдоль оси Оу на 3 единицы вверх.

Ход работы:

1)Построим график функции $y=-3x^2-6x-4$.

Решение: $y=-3x^2-6x-4$ – квадратичная, график – парабола, $a=-3, \quad -3<0,$ следовательно, ветви направлены вниз.

Координаты вершины: **(–1;–1).**

$$x_в = \frac{6}{2(-3)} = \frac{6}{-6} = -1;$$
$$y_в = -3(-1)^2 - 6(-1) - 4 = -3 + 6 - 4 = -1;$$

Нули функции:

$$-3x^2 - 6x - 4 = 0,$$
$$3x^2 + 6x + 4 = 0,$$
$$a = 3, \quad m = 3, \quad c = 4,$$
$$D = m^2 - ac,$$
$$D = 9 - 3 \cdot 4 = 9 - 12 = -3, \quad -3 < 0.$$

Значит корней нет. То есть нет точек пересечения с осью абсцисс.

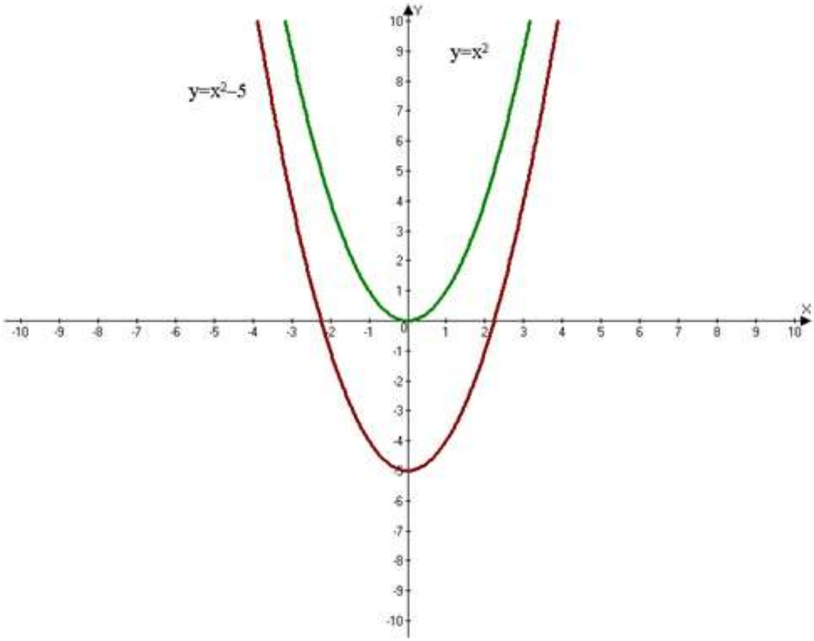
Точка пересечения с ОУ: (**0; – 4).**

Если $x=0,$ то $y=0+0-4=-4.$

Дополнительные точки: **(1; –13)** , так как y(1) =-
$3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 4 = -3 - 6 - 4 = -13;$

Строим график.

2)Построим график функции $y=x^2-4x+3$ с помощью преобразований.$y=x^2-4x+3$– квадратичная, график – парабола, $a=1$, $1 \succ 0$ следовательно, ветви направлены вверх.Т.К. $x^2-4x+3 = (x-2)^2 - 1$, то $y= (x-2)^2 - 1$. Строим график функции $y=x^2$ и делаем параллельный перенос вдоль оси абсцисс на 2 единицы вправо и вдоль оси ординат на 1 единицу вниз. 3) Построим график функции $y=x^2-5$ с помощью преобразований. Чтобы бы построить график функции $y=x^2-5$ построим график функции $y=x^2$ и сделаем параллельный перенос вдоль оси Oy на 5 единиц вниз.



Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 10

«Решение иррациональных уравнений»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении различных видов иррациональных уравнений.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать иррациональные уравнения.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1)Решите уравнение $\sqrt{5-4x}=2x+5$.

2)Решить уравнение $9+\sqrt{x-3}=x$.

3)Решить уравнение $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3-4x}$.

4)Решить уравнение $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$

Порядок выполнения работы

1)При возведении уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Поэтому возможно появление посторонних решений уравнения, но не возможна потеря корней. Причина приобретения корней состоит в том, что при возведении в четную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и тот же результат.

Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной только в первоначальное уравнение, а не в какие-то промежуточные.

2) При решении иррациональных уравнений полезно перед возведением обеих частей уравнения в некоторую степень "уединить радикал", то есть представить уравнение в виде $C(x) = \sqrt[n]{D(x)}$.

Тогда после возведения обеих частей уравнения в *n*-ую степень радикал справа исчезнет.

3) Уравнение $\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)}$ равносильно каждой из двух систем

$$\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x), \\ A(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку после возведения в четную степень получаем уравнение-следствие $A(x) = B(x)$. Мы должны, решив его, выяснить, принадлежат ли найденные корни области определения исходного уравнения, то есть выполняется ли неравенство $A(x) \geq 0$ (или $B(x) \geq 0$). Из этих систем выбирают для решения ту, в которой неравенство проще.

4) Возведете обе части уравнения в квадрат и произведете приведение подобных членов, перенесите слагаемые из одной части равенства в другую. Уедините радикал. Снова возведите обе части уравнения в квадрат. Решите полученное уравнение. Сделайте проверку.

Ход решения:

1) Решить уравнение

$$\sqrt{-3x+3} = x - 1.$$

Решение: Аккуратное возведение в четную степень уравнения вида $\sqrt[2k]{A(x)} = B(x)$ состоит в переходе к равносильной ему системе

$$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^{2k}(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство $B(x) \geq 0$ в этой системе выражает условие, при котором уравнение можно возводить в четную степень, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

Уравнение $\sqrt{-3x+3} = x-1$ равносильно системе

$$\begin{cases} 3-3x = (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, равносильное уравнению $x^2 + x - 2 = 0$, получим корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$.

Второй корень не удовлетворяет неравенству системы и, следовательно, является посторонним корнем исходного уравнения.

Ответ. $x = 1$.

2)Решить уравнение

$$x + \sqrt{2x+3} = 6.$$

Решение: Метод уединения радикала приводит к уравнению $\sqrt{2x+3} = 6 - x$.

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+3 = (6-x)^2, \\ 6-x \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, получим корни $x_1 = 11$ и $x_2 = 3$, но условие $6 - x \geq 0$ выполняется только для $x = 3$.

Ответ. $x = 3$.

3) Решить уравнение $\sqrt{-9x^2 + 3x - 6} = \sqrt{-6x - 24}$.

Решение: Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -9x^2 + 3x - 6 = -6x - 24, \\ -6x - 24 \ge 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, равносильное уравнению $-x^2 + x + 2 = 0$, получим корни $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

Однако при этих значениях *x* не выполняется неравенство $-6x - 24 \ge 0$, и потому данное уравнение не имеет корней.

Ответ. Корней нет.

4)Решить уравнение

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7.$$

Решение: Возведем обе части уравнения в квадрат и произведем приведение подобных членов, перенос слагаемых из одной части равенства в другую и умножение обеих частей на 1/2.

В результате получим уравнение

$\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{20-x} = 12$, являющееся следствием исходного. Снова возведем обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение

$$(x+5)(20-x) = 144$$

которое приводится к виду $x^2 - 15x + 44 = 0$.

Это уравнение (также являющееся следствием исходного) имеет корни

$x_1 = 4$, $x_2 = 11$.

Оба корня, как показывает проверка, удовлетворяют исходному уравнению. **Ответ**.

$x_1 = 4$, $x_2 = 11$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа №11

«Преобразования выражений, содержащих степени и радикалы»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– находить значения корня, степени на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1) Провести упрощение степеней с рациональным показателем: а) $\frac{3c^2d^3}{16x^2y^{-3}}(\frac{-cd}{4xy})^2$.

в) $(\frac{a^{-8}+a^{-2}}{a^{-3}+a^{3}})^{-2}$.

2) Выполнить действия:

$$(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$$

Порядок выполнения работы

1) а) Вынесите знак минус из произведения. Воспользуйтесь свойством степени с отрицательным показателем. Употребите свойство воспроизведения во вторую степень. Для окончательного упрощения этого примера воспользуйтесь правилом умножения дробей. В последнем шаге воспользуйтесь делением степеней с одинаковым показателем.

в) В этом случае надо применит свойство степеней с отрицательным показателем. Чтобы разгрузить полученную дробь, надо преобразовать эту дробь в деление. Привести дробь к общему знаменателю и произвести сложение дробей с общим знаменателем. Последним шагом сделать сокращение.

2) Определите порядок действия. Выражение в первой скобке приведите к общему знаменателю, в числителе сделайте группировку и вынесите общий множитель за скобку. Выполните деление, сократите на общий множитель. Последнее действие – сложение дробей с одинаковыми знаменателями. Приведите подобные слагаемые.

Ход работы:

1) Упростить выражение: $\frac{((x^6)^{-3}(x^2)^4)y^6}{x^2y^3}-\frac{x^7y^5z^7}{x^{10}y^{10}z^{17}}=$

Вначале надо провести раскрытие скобок, для этого воспользуемся свойством степеней.

$=\frac{x^{((-3)6)}x^{(4\cdot 2)}y^{6-3}}{x^2}-x^{7-10}y^{5-10}z^{7-17}=x^{-12}y^3-x^{-3}y^{-5}z^{-10}=$

Воспользуемся свойством степеней с отрицательным показателем.

$=\frac{y^3}{x^{12}}-\frac{1}{x^3y^5z^{10}}$. Ответ: $\frac{y^3}{x^{12}}-\frac{1}{x^3y^5z^{10}}$

2) Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$$

Решение. Введем обозначение $a = \sqrt{x}$,

тогда $x = (\sqrt{x})^2 = a^2$, $x\sqrt{x} = a^2 a = a^3$. Формула из условия задачи после замены будет выглядеть так:

$$\frac{a+1}{a^3+a^2+a} : \frac{1}{a^4-a}.$$

Заметим, что $a^4-a=a(a^3-1^3)=a(a-1)(a^2+a+1)$. Тогда

$$\frac{a+1}{a^3+a^2+a} : \frac{1}{a^4-a} = \frac{a+1}{a(a^2+a+1)} \cdot \frac{a(a-1)(a^2+a+1)}{1} = (a+1)(a-1) = a^2-1.$$

Вернемся к замене: $a^2-1=x-1$. **Ответ**: x-1.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 12

« Решение показательных уравнений и неравенств».

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– решать показательные уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным;

– находить значения корня, степени на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решить уравнение:

а) $3^{x^2-4,5}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{27}$;

в) $0{,}1^{x^2-0,5}\cdot\sqrt{0{,}1}=0{,}001$;

с) $4\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^x-17\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x+4=0\cdot$

Порядок выполнения работы:

а-в) Обе части уравнения приводим к одному основанию: $a^{f(x)}=a^{\Phi(x)}$, где $(a\succ 0, a\neq 1)$.Затем используем следующее свойство: ($a^{f(x)}=a^{\Phi(x)}$)$\Leftrightarrow(f(x)=\Phi(x))$.

с) Решаем квадратное уравнение относительно переменной $(1/4)^x$.

Ход работы:

Записать задание в тетрадь и решить.

Решите уравнение: $0{,}1^{x^2-0{,}5}\cdot\sqrt{0{,}1}=0{,}001$.

Решение: Преобразуем уравнение к виду: $a^{f(x)}=a^{\Phi(x)}$.

$0{,}1^{x^2-0{,}5}\cdot 0{,}1^{0{,}5}=0{,}1^3 \Leftrightarrow 0{,}1^{x^2-0{,}5+0{,}5}=0{,}1^3 \Leftrightarrow 0{,}1^{x^2}=0{,}1^3$.3

атем решаем уравнение: $x^2=3 \Rightarrow x_1=-\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{3}.$

Решить неравенство:

а) $10^{4x-5}>-0{,}1$;

в) $\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-5{,}5}\leq\left(\frac{27}{125}\right)^3$;

с) $3^{\frac{x-4}{x}-3}<\frac{1}{27}$

Порядок выполнения работы:

Обе части неравенства приведите к одному основанию: $a^{f(x)}\succ a^{\Phi(x)}$. При решении данного неравенства имеет место преобразование:

$$a^{f(x)}\succ a^{\Phi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}0\prec a\prec 1\\ f(x)\prec\Phi(x)\end{cases} \text{или} \begin{cases}a\succ 1\\ f(x)\succ\Phi(x)\end{cases}.$$

Ход работы:

Записать задание в тетрадь и решить.

Решите неравенство: $5^x\cdot 2^x\succ 0{,}1^{-3}$.

Решение: Преобразуем неравенство к виду: $a^{f(x)}\succ a^{\Phi(x)}$. Для левой части неравенства используем свойство степеней: $a^x*b^x=(a*b)^x$, для правой части свойство степеней с отрицательным показателем, получаем:

$$(5\cdot 2)^x\succ(10^{-1})^{-3}\Leftrightarrow 10^x\succ 10^3\Rightarrow x\succ 3.$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 13

« Преобразование выражений с логарифмами ».

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– находить значения корня, степени, логарифма на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1) Найдите значения выражений:

a) $\log_5 135 - \log_5 5{,}4$;
b) $\log_4 104 - \log_4 6{,}5$;
c) $\log_3 \log_9 \sqrt[27]{\sqrt[3]{9}}$.

2) Найдите значения выражений:

a) $5^{\log_5 2} + 36^{\log_6 \sqrt{19}}$;
b) $2^{\log_2 5} + 81^{\log_9 \sqrt{19}}$;
c) $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125}$.

Порядок выполнения работ
1) Используйте соответствующие свойства логарифмов и определение логарифма.
2) Используйте основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов.

Ход работы:
1) Вычислите: $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10$.

Решение: $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 =$

Используем формулу перехода к новому основанию $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, получим

$$= \frac{\log_{0,5} 0{,}64}{\log_{0,5} 0{,}25} + \log_{0,5} 10 = \frac{1}{2}\log_{0,5} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 =$$

далее используем свойства логарифма степени и логарифма произведения

$$= \log_{0,5} \sqrt{0{,}64} + \log_{0,5} 10 = \log_{0,5}(0{,}8 \cdot 10) = \log_{0,5} 8 = -3.$$

Ответ: -3.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 14

« Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– решать логарифмические, уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным;

– находить значения корня, степени, логарифма на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Решите уравнение: $\ln(x+4)-\ln(x+3)=\ln 3$
Порядок выполнения работы:
1) Используя свойства логарифмов обе части уравнения приводим к одному основанию
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 1$. Потенцируем обе части уравнения, получаем $f(x) = g(x)$. Решаем полученное уравнение. Т.к. потенцирование уравнения может привести к появлению посторонних корней, то делаем проверку. Записываем ответ.

Ход работы:
Записать задание в тетрадь и решить.
Решить уравнение $\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = (x-4)\cdot\log_7 5.$

Решение: Согласно свойствам логарифмической функции :

$$\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = \log_7 5^{x-4} \Leftrightarrow 5^{\sqrt{x+2}} = 5^{x-4} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x-4 \Rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16;$$

Приводим уравнение к стандартному виду $x^2-9x+14=0$. Решаем квадратное уравнение и получаем корни $x_1=2$, $x_2=7$. Проверка показывает, что $x_1=2$ является посторонним корнем. Ответ: 7
Задание:

$$2\log_3(x-1)-\log_3(2x-5)\le 1.$$

Порядок выполнения работы:
1)Работаем по алгоритму**:** используя определение логарифма обе части неравенства приводим к одному основанию, т. е. получаем неравенство вида $\log_a f(x) \prec \log_a g(x)$. Если основание логарифма $a=x-3 \succ 1$, то неравенство $\log_a f(x) \prec \log_a g(x)$ равносильно любой из систем: $\begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ *или* $\begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Если $0 \prec$ x-3 $\prec 1$, то неравенство log $_a$ f(x) $\prec$ log $_a$ g(x) равносильно любой из систем: $\begin{cases} f(x) \succ g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \succ g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$. Решаем полученную систему, записываем ответ.

2)В левой части неравенства делаем преобразования, используя свойства логарифмов- логарифм степени и логарифм частного:

$\log_c a^k = k \cdot \log_c a, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0$;

$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$

.

Получаем неравенство вида log $_a$ f(x) < g(x), a> 1, которое заменяем на равносильную систему: $\begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$. Решаем полученную систему, записываем ответ.

Ход работы:

Записать задание в тетрадь и решить.

1) Решить неравенство

$$\log_{2x}\left(x^2 + 2x + 2\right) \leq 2.$$

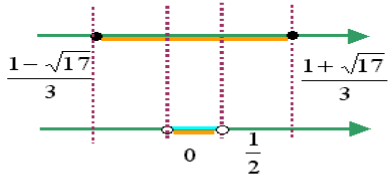
Решение: Неравенство равносильно совокупности систем

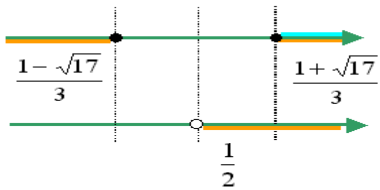
$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 \geq 4x^2, \\ x^2 + 2x + 2 > 0, \\ 0 < 2x < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 2 \leq 4x^2, \\ x^2 + 2x + 2 > 0, \\ 2x > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 \le 0, \\ 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 \ge 0, \\ x > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\left(x - \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \le 0, \\ 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\left(x - \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \ge 0, \\ x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Применим метод интервалов





Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right).$

2) Решить неравенство

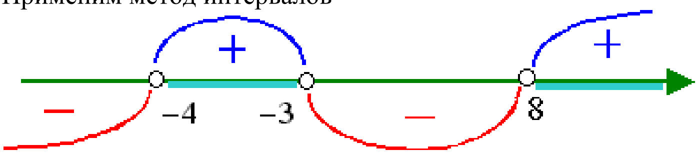
$$\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0$$

Решение:

$$\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < \log_{0,3} 1; \quad \Leftrightarrow \quad \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + x}{x + 4} > 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+3)(x-8)}{x+4} > 0.$$

Применим метод интервалов



$$x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty).$$

При этих значениях x все выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны.

Ответ: $x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty)$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.4. Основы тригонометрии

Практическая работа № 15

«Нахождение значений тригонометрических функций»

Цель работы: Научиться переходить от радианной меры углов к градусной и обратно. Научится находить значения тригонометрических функций по определению.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:
– находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах
а) $150°$ б) $450°$ в) $40°$

2. Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах
а) $\frac{\pi}{10}$ б) 4π в) $\frac{4\pi}{9}$

3. Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для углов:
а) $-210°$ б) $\frac{2\pi}{3}$

Порядок выполнения работы

1. Радианная и градусная меры связаны зависимостью $180° = \pi \text{ радиан}$. Поэтому $1° = \frac{\pi}{180°}$, значит $\propto° = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ радиан}$.
2. Чтобы выразить угол в градусной мере воспользуйтесь соотношением $1\text{рад} = \frac{180°}{\pi}$.
3. Начертите единичную окружность, отложите заданный угол, помня, что положительным считается угол, откладываемый против часовой стрелки, а отрицательным – по часовой стрелке.
   - *Синусом угла α называется ордината точки единичной окружности, полученной при повороте начального радиуса на угол α.*
   - *Косинусом угла α называется абсцисса точки единичной окружности, полученной при повороте начального радиуса на угол α.*
   - *Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки единичной окружности к ее абсциссе.*

- *Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки единичной окружности к ее ординате.*

Ход работы:

1. Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах

а) $120°$ б) $225°$ в) $10°$

а) $120° = \frac{\pi}{180°} \cdot 120° = \frac{2\pi}{3}$; б) $225° = \frac{\pi}{180°} \cdot 225° = \frac{3\pi}{4}$; в) $10° = \frac{\pi}{180°} \cdot 10° = \frac{\pi}{18}$.

2. Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах

а) $\frac{3\pi}{5}$ б) $\frac{2\pi}{9}$ в) $\frac{5\pi}{6}$

а) $\frac{3\pi}{5} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{5} = 108°$ б) $\frac{2\pi}{9} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{9} = 40°$ в) $\frac{5\pi}{6} = \frac{180°}{\pi} \frac{5\pi}{6} = 150°$

3. Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для углов:

а) $-120°$ б) $\frac{3\pi}{5}$

Построим единичную окружность и отложим данные углы. Угол $-120°$ откладываем по часовой стрелке. Точка, соответствующая углу $-120°$ лежит в III четверти, значит,

$\cos(-120°) < 0$, $\sin(-120°) < 0$,

$\mathrm{tg}\,(-120°) > 0$, $ctg(-120°) > 0$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.4. Тригонометрия

Практическая работа № 16

«Преобразование тригонометрических выражений.»

Цель работы: Научиться находить значения тригонометрических функций, используя основные тригонометрические тождества.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Найдите значения тригонометрических функций, если известно:
1) $\sin\alpha = \frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
2) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
3) $tg\,\alpha = -\frac{8}{15}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Порядок выполнения работы

1. Запишите, что дано в задании.

2. Запишите формулы основных тригонометрических тождеств, содержащие данную функцию и ту, которую необходимо найти.
3. Выразите неизвестную функцию. Если необходимо извлечь квадратный корень, то определите знак искомой функции, используя заданную четверть.
4. Вычислите значения всех неизвестных функций.

Ход работы:
Найдите значения тригонометрических функций, если известно:
1) $\cos\alpha = 0{,}8,\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
2) $\sin\alpha = 0{,}6,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
3) $tg\,\alpha = -\frac{3}{4},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

а) Дано: $\cos\alpha = 0{,}8,\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
Найти: $\sin\alpha,\ tg\,\alpha,\ ctg\,\alpha$
Решение: 1)Запишем основное тригонометрическое тождество
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
Выразим из него искомую функцию $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
Так как синус в IV четверти имеет отрицательное значение, то
$\sin\alpha = -\sqrt{1-0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$
2) Запишем основное тригонометрическое тождество
$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию
$$tg\,\alpha = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$
3) Запишем основное тригонометрическое тождество
$tg\,\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
Выразим из него искомую функцию $ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$
$$ctg\,\alpha = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$
б) Дано:) $\sin\alpha = 0{,}6,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
Найти: $\cos\alpha,\ tg\,\alpha,\ ctg\,\alpha$
Решение: 1)Запишем основное тригонометрическое тождество
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
Выразим из него искомую функцию $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
Так как косинус во II четверти отрицателен, то
$\cos\alpha = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg \propto = \frac{sin \propto}{cos \propto}$$

Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию

$$tg \propto = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$tg \propto \cdot ctg\alpha = 1$

Выразим из него искомую функцию $ctg \propto = \frac{1}{tg\propto}$

$$ctg \propto = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

в) Дано: $tg \propto = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$

Найти: $cos \propto,\ sin \propto, ctg \propto$

Решение: 1) Запишем основное тригонометрическое тождество

$tg \propto \cdot ctg\alpha = 1$

Выразим из него искомую функцию $ctg \propto = \frac{1}{tg\propto}$

$ctg \propto = -1\frac{1}{3}$

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$1 + tg^2 \propto = \frac{1}{cos^2 \propto}$$

Выразим из него искомую функцию $cos \propto = \pm \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\propto}}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то

$$cos \propto = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = -\frac{4}{5} = -0,8.$$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$

Выразим из него искомую функцию $sin \propto = \pm\sqrt{1 - cos^2 \propto}$

Так как синус во II четверти положительный, то

$$sin \propto = \sqrt{1 - 0,64} = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.4. Тригонометрия

Практическая работа № 17

«Преобразования тригонометрических выражений.»

Цель работы: Научиться применять основные тригонометрические тождества, формулы сложения, для доказательства тождеств, упрощения выражений, нахождения значений тригонометрических функций.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Вычислите $\frac{cos12°\cdot cos48° - sin12°\cdot sin48°}{cos54°\cdot sin36° + cos36°\cdot sin54°}$

2. Дано $cos \propto = -\frac{3}{5}$; $cos\beta = -\frac{24}{25}$; $\pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Найдите $\sin(\propto - \beta)$.

3.Докажите тождество: $\frac{\sin(\propto-\beta)cos\beta+\cos(\alpha-\beta)sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)cos\beta-\sin(\alpha-\beta)sin\beta} = tg\alpha$

Порядок выполнения работы

1) Запишите задание и определите, какими формулами тригонометрии нужно воспользоваться.
2) Примените эти формулы.
3) Упростите получившееся выражение. Вычислите, если это необходимо, значение выражения.

Ход решения:

1.Вычислите $\frac{cos71°\cdot cos26° + sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25° + cos20°\cdot sin25°}$

Решение:

$$\frac{cos71° \cdot cos26° + sin71° \cdot sin26°}{sin20° \cdot cos25° + cos20° \cdot sin25°}$$

Для решения нам необходимо использовать формулы сложения:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot sin\beta$$
$$\frac{cos71° \cdot cos26° + sin71° \cdot sin26°}{sin20° \cdot cos25° + cos20° \cdot sin25°} = \frac{\cos(71° - 26°)}{\sin(20° + 25°)} = \frac{cos45°}{sin45°} = tg45°$$

2. Дано $sin \propto = \frac{8}{17}$; $cos\beta = \frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \propto < \pi$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Найдите $\sin(\propto + \beta)$.

Решение: Для решения нам нужно использовать формулу сложения

$\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$

Но нам неизвестны значения $cos \propto$ и $sin\beta$.

Найдем сначала эти значения, используя основное тригонометрическое тождество:

$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$

Выразим из него искомую функцию $cos \propto = \pm\sqrt{1 - sin^2 \propto}$

$$sin\beta = \pm\sqrt{1 - cos^2\beta}$$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{64}{289}} = -\sqrt{\frac{289}{289}-\frac{64}{289}} = -\frac{15}{17}.$$

Так как синус в I четверти положительный, то

$$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Подставим найденные значения в формулу и вычислим значение $\sin(\alpha+\beta)$.

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5} + \left(-\frac{15}{17}\right)\cdot\frac{3}{5} = \frac{32}{85} - \frac{45}{85} = -\frac{13}{85}$$

3.Докажите тождество: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta} = tg\alpha$

Доказательство:

Выпишем отдельно левую часть тождества и преобразуем ее, используя формулы сложения:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta+\beta)}{\cos(\alpha-\beta+\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$$

$$tg\,\alpha = tg\,\alpha$$

Тождество доказано.

Возможен и другой способ доказательства:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta} = \frac{(\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta)\cos\beta+(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)\sin\beta}{(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)\cos\beta-(\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta)\sin\beta} =$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\sin^2\beta}{\cos\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\sin^2\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin\alpha\cdot\sin^2\beta}{\cos\alpha\cdot\cos^2\beta+\cos\alpha\cdot\sin^2\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)}{\cos\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$$

$$tg\,\alpha = tg\,\alpha$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.4. Тригонометрия

Практическая работа № 18

«Тригонометрические уравнения »

Цель работы: Научиться решать простейшие тригонометрические уравнения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;

– находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите тригонометрические уравнения:

1) $cos3x = 0$
2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$
3) $3tg\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
4) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
5) $sin4x \cdot cos3x + cos4x \cdot sin3x = \frac{1}{2}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать уравнение и определить, к какому виду оно относится и какой формулой необходимо воспользоваться.
2. Решить уравнение.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Решите тригонометрические уравнения:

1) $sin2x = 0$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни

находятся по формуле
$x = \pi n, \quad n \in Z$

$2x = \pi n, n\epsilon Z$;
$x = \frac{\pi}{2}n, n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}n, n\epsilon Z$

2) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни

находятся по формуле

$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$

$5x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z$
$5x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z$
$5x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$
$x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} n, \ \ n\epsilon Z$
Ответ: $x = \dfrac{2\pi}{15} + \dfrac{2\pi}{5} n, \ \ n\epsilon Z$
3) $2\cos 3x = -1$
Разделим обе части уравнения на 2. Получим уравнение: $\cos 3x = -\frac{1}{2}$.
Это уравнение не является частным случаем, $a = -\frac{1}{2}, |a| < 1$. Поэтому оно имеет решение, которое находится по формуле: $x = \pm arccosa + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$3x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \ n\epsilon Z$
$3x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z$
$3x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, \ n\epsilon Z$
$3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z$
$x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} n, \ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} n, \ n\epsilon Z$

4) $tg\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Уравнение имеет решение, которое находится по формуле: $x = arctga + \pi n, \ n\epsilon Z$
$6x - \dfrac{\pi}{4} = arctg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n, \qquad n\epsilon Z$

Функция $y = arctgx$ нечетная, поэтому $arctg\,(-x) = -arctgx$.

$6x - \frac{\pi}{4} = -arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n, \ n\epsilon Z$

$6x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\epsilon Z$

$6x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\epsilon Z$
$6x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\epsilon Z$

$x=\frac{\pi}{72}+\frac{\pi}{6}n,\ n\epsilon Z$
Ответ: $x=\frac{\pi}{72}+\frac{\pi}{6}n, \quad n\epsilon Z$
5) $cos6x\cdot cos3x+sin6x\cdot sin3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
Видим, что левую часть можно свернуть по формулам сложения:
$\cos(\alpha\pm\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta\mp sin\alpha\cdot sin\beta$
$\cos(6x-3x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
Теперь уравнение является простейшим и его корни находятся по формуле: $x=\pm arccosa+2\pi n,\ n\epsilon Z$.

$$3x=\pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n,\ n\epsilon Z$$

$$3x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\epsilon Z$$

$x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}n, \quad n\epsilon Z$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1. Производная функции и её применение

Практическая работа № 19

«Предел функции и его вычисление»

Цель работы: Рассмотреть виды последовательностей. Способы заданий последовательностей. Общий член последовательности. Рассмотреть нахождение членов последовательностей.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– находить члены последовательностей и прогрессий.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислите пять первых членов последовательностей:
a) $x_n = 2_n + 5$
b) $x_n = \frac{1}{2_n - 1}$
c) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$
d) $x_n = \frac{3}{(-1)^{n-1}}$
e) $x_n = \frac{1}{2^n} + 2^n$
f) $x_n = 4n^2 + 3n + 1$
2. Напишите общий член последовательности:

a) 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{16}$; …
b) 1; 7; 13; 19; …
c) 2; 4; 8; 16; …
d) 1; 7; 17; 31; …

3. Определите возрастающие или убывающие последовательности:

a) $x_n = \frac{n}{n+1}$
b) $x_n = \frac{n^2}{n^2+2}$
c) $x_n = \frac{3n+5}{2n+1}$

Порядок выполнения работы:
Последовательности бывают возрастающие, убывающие, монотонными, ограниченные сверху(снизу), постоянными. Последовательности задаются формулой, выражающий общий член последовательности через n. Иногда указывается правило, с помощью которого можно вычислить n-й член последовательности. Такой способ задания называется рекуррентным.
Если общий член последовательности вместо n подставлять последовательно числа 1; 2; 3; 4; … , то получится числовая последовательность.
Ход работы:

1) Вычислить 5 первых членов последовательности заданной формулой $x_n = \frac{n-1}{n+2}$ -подставим вместо n последовательно числа 1; 2; 3; 4; 5; , получим: $x_1 = \frac{1-1}{1+1} = 0$; $x_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$; $x_3 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $x_4 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$; $x_5 = \frac{5-1}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
-Запишем последовательность: $0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$…
2) Последовательность задана рекуррентным соотношение
$x_n = 3x_{n-1} + 1$
-Зададим первый член последовательности пусть $x_1 = 2$, полагаем в рекуррентном соотношение n=2, получим
$x_2 = 3x_{2-1} + 1 = 3x_1 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$
-При n=3; 4; 5 соответственно находим:
$x_3 = 3x_2 + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$
$x_4 = 3x_3 + 1 = 3 * 22 + 1 = 67$
$x_5 = 3x_4 + 1 = 3 \cdot 67 + 1 = 202$
-В результате получаем: 2; 7; 22; 67; 202; …

3) Докажите, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{1}{n^2-1}$, монотонно убывает.

-Для убывающий последовательности выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$ или $\frac{x_n+1}{x_n} < 1$

-Запишем (n+1)-ый член последовательности

$x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n^2+2n+1-1} = \frac{1}{n^2+2n}$, тогда $\frac{x_n+1}{x_n} = \frac{n^2-1}{n^2+2n} < 1$, т.к. $n^2 - 1 < n^2 + 2n$ при любом натуральном n =>данная последовательность убывающая.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1. Пределы, производная

Практическая работа № 20

«Техника дифференцирования»

Цель работы: Разобрать основные правила дифференцирования. Научиться находить производные от функции используя правило дифференцирования

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:
– находить производные элементарных функций;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Найдите производные следующих дифференцирований.

1. $f(x) = (3x^2 + 1)(2x^2 + 3)$
2. $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$
3. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

Порядок выполнения работы:
Обозначения:С-постоянная, х-аргумент, U, ϑ, ω-функции от х, имеющие производные
Основные правила дифференцирования
1. Производная алгебраической суммы функций:
$(u + \vartheta + \omega)' = u' + \vartheta' + \omega'$
2. Производная произведения двух функций: $(u \cdot \vartheta)' = u'\vartheta + \vartheta'u$
3. Производная произведения трёх функций:
$(u\vartheta\omega)' = u'\vartheta\omega + \vartheta'u\omega + \omega'u\vartheta$
4. Производная произведения постоянной: $(cu)' = cu'$
5. Производная частного:
$$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)' = \frac{u'\vartheta - \vartheta'u}{\vartheta^2}$$
Частные случаи:
$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c}u'$$
$$\left(\frac{c}{\vartheta}\right)' = -\frac{c}{\vartheta^2}$$
Ход работы:
Найти производные следующих функций:
1. $y = 4x^3 + 2x^2 + x - 5$
-применив последовательно формулы 1 и 4 получаем:
$y' = (4x^3)' - (2x^2)' + (x)' - 5 = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 2 = 12x^2 - 4x + 1$
2. $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$
-используем формулы 2,1 находим:

$$f'(x) = (x^3-1)'(x^2+x+1) + (x^2+x+1)'(x^3-1) = 3x^2(x^2+x+1) + (2x+1)(x^3-1)$$
$$= 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x^4 + 2x + x^3 - 1 = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$$

3. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

-используя формулы 5 и 1, получаем:

$$y = \frac{(x^2+1)(x^2-1) - (x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2} - 1)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1. Пределы, производная

Практическая работа № 21

«Геометрические приложения производной»

Цель работы: Научиться применять производную к исследованию функции на монотонность, экстремум и с помощью такого исследования строить график данной функции.
Рассмотреть схему исследования функции.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить производные элементарных функций;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Построить график функции
1. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$
2. $y = x^4 - 5x^2 + 4$
3. $y = \frac{1}{5}x^5$

Порядок выполнение работы
Для того, чтобы исследовать функцию и построить графит, необходимо выполнить следующие пункты:
1. Найти область определения функции
2. Выяснить, является ли функция чётной или нечетной, или общего вида.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений)
4. Найти промежутки монотонности функции
5. Найти экстремумы функции
6. Построить график, используя полученные результаты исследования.

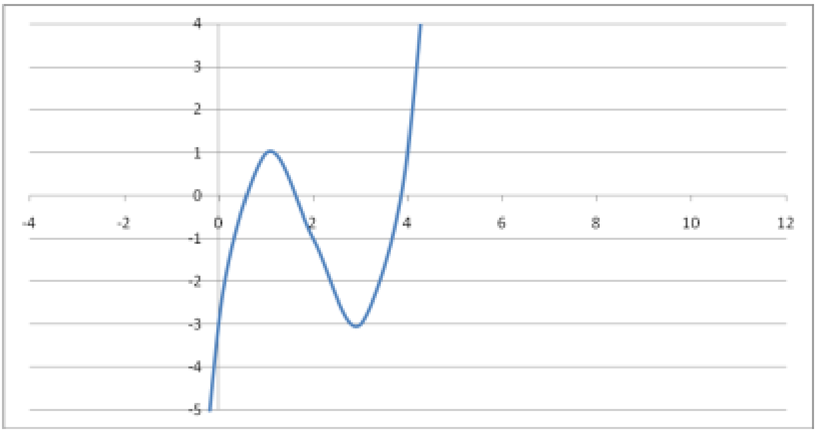
Ход работы:
Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ и построить график.
-функция определенна на всей числовой прямой: $D(x): x \in (-\infty; \infty)$
-данная функция не является ни четной, ни нечетной:
$y(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 3 = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3 = -(x^3 + 6x^2 + 9$

-найдём точку пересечения графика с осью O_y , пологая $x = 0$, получим $y = -3$ точки пересечения графика с осью O_x в данном случае найти затруднительно.
-найдём производную: $y' = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = 3x^2 - 12x + 9$
-найдём критические точки, для этого $y' = 0$,т.е $3x^2 - 12x + 9 = 0$
$x^2 - 4x + 3 = 0; x_1 = 1; x_2 = 3$
-исследуем функцию на монотонность

+ - +

1 3

$(-\infty; 1)$ и $(3; \infty)$ график функции возрастает, $(1; 3)$-убывает
-исследуем функцию на экстремум:
$y(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1; A(1; 1)$точка max
$y(3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3, B(3: -3)$точка min
-используя полученные данные строим искомый график.



Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1. Пределы, производная

Практическая работа № 22

«Решение физических задач с помощью производной»

Цель работы: Научиться составлять уравнение касательной к данной кривой в точке касания; находить угловой коэффициент касательной, проведенный к кривой.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– находить производные элементарных функций;

– использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;

– применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = -x^2 + x$ в точке $x_0 = -2$

2. Найдите угол наклонена к оси касательной, проведенной к кривой $y = x^3$ в точке $x_0 = -2$
3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = \sin 3x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$.

Порядок выполнения работы:
1. Значение производной функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в ёё точке с абсциссой x_0, т.е.
$k' = y'(x_0) = f'(x_0) = \tan \propto$
где $\propto$-угол между касательной к кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ и положительным направлением оси 0_x .
2. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
3. Направление кривой в каждой точке определяется направление касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклонной кривой в данной точке надо вычислить угол между касательной, проведенной в этой точке, и осью .

Ход работы:
1. Найти угол наклона к оси O_x касательной проведенной к кривой $y = \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$
-найдем производную функцию $y = \sin x$ $y' = \cos x$
-найдем значение производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
-тангенс угла наклона касательной в данной точке равен $k = tg \propto$, откуда $\propto = arc\ \mathrm{tg}\frac{1}{2} \approx 26{,}6°$
2. Под какими углами парабола $y = x^2 + x$ пересекает ось O_x ?
-Найдем точки пересечения параболы с осью O_x, решив систему
$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} (-1; 0) \\ (0; 0) \end{cases}$$
-Парабола пересекает ось O_x в точках А$(1; 0); O(0; 0)$. Найдём угловые коэффициенты касательных к параболе в этих точках
$y' = (x^2 + x) = 2x + 1; k(-1) = 2(-1) + 1 = -1, k(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
- вычислили углы $\propto_1$ и $\propto_2$, образуемые касательными в точках пересечения параболы с осью O_x:
$tg \propto_1 = -1, \propto_1 = 135°; tg \propto_2 = 1, \propto_2 = 45°$

3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = 3x^2 - x$ в точке $x_0 = -1$

-найдём производную кривой в точке x_0

$y' = (3x^2 - x)' = 6x - 1\,;\, y'(-1) = 6(-1) - 1 = -7$

-найдем координату точки касания:

$y(-1) = 3(-1) - (-1) = 4;\, M(-1;4)$

-поставим в формулу уравнения касательной:

$y - 4 = -7(x + 1)$

$y - 4 = -7x - 7$

$7x + y + 3 = 0$ – уравнение касательной

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2. Интегралы

Практическая работа № 23

«Нахождение неопределенных интегралов при помощи свойств интегралов »

Цель работы: Научиться находить неопределённые интегралы непосредственным интегрированием при помощи свойств интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– находить интеграл

– вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Найти следующие интегралы:
1. $\int \left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5\right)dx$
2. $\int 3(2x^2 - 1)^2\,dx$
3. $\int x^3(1 + 5x^2)dx$
4. $\int (\frac{3}{x^4} + \frac{8}{x^5})dx$
5. $\int \left(5\sqrt{x^6} - 7\sqrt[4]{x^3}\right)dx$
6. $\int 5x\sqrt{x}dx$

Порядок выполнение работы:
Совокупность всех первообразных для функции называется неопределенным интегралом.
Основные свойства неопределённого интеграла
1) $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Могут представиться следующие случаи:
1) Данный интеграл находиться непосредственно по соответствующему табличному интегралу.
2) Данный интеграл после применения свойств 1и2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;
3) Данный интеграл после элементарных тождественных преобразований, над подынтегральной функцией и применяя свойства 1и2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Ход работы:
Найти следующие интегралы:
1. $\int 6x^2dx$ –используем свойство 2 и формулу 2.
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ Получим:

$\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 6\frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c$

2. $\int 4(x^2 - x + 3)dx$ Используя свойства 1 и 2 и, формулы 1 и 2 получим:

$4\int x^2dx - 4\int xdx + 12\int dx = 4\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 12x + c = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + c$

- постоянная интегрирования С равна алгебраической сумме трех постоянных интегрирования .

3. $\int 2(3x-1)^2dx = 2\int (3x-1)^2dx = 2\int (9x^2 - 6x - 1)dx = 2\cdot 9\frac{x^3}{3} - 2\cdot 6\frac{x^2}{2} + 2x + c = 6x^3 - 6x^2 + 2x + c$

4. $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx$ –разделим почленно на х, получим:

$\int (x^2 + 3x + 4)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ –используем формулу 2

$\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

.**Форма представления результата:** выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2. Интегралы

Практическая работа № 24

« Вычисление определенных интегралов»

Цель работы: Научиться вычислять определенные интегралы

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– находить интеграл

– вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислить определенные интегралы:

$$\int_1^2 (4x^3 + 3x^2 - 4x + 7)dx;$$

$$\int_2^5 3x^5 dx;$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx;$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x+3}.$$

Порядок выполнения работы:

1) Используя таблицу интегралов найти интеграл

2) Используя формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

найти определенный интеграл

Ход работы:

Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2 dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2. Интегралы

Практическая работа № 25

«Вычисление площадей фигур»

Цель работы: Научиться вычислять площади фигур и объемы тел, используя определенные интегралы

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить интеграл
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$a)\quad y=-x^2+4,\ y=0$$

$$b)\quad y=x^2,\ \ y=x^3$$

$$c)\quad y=e^x,\ \ y=e^{-x},\ \ y=4$$

2.Вычислить объем тела

$$y=x^2,\ \ y=1,\ \textit{вокруг оси}\ OY$$

Порядок выполнения работы:

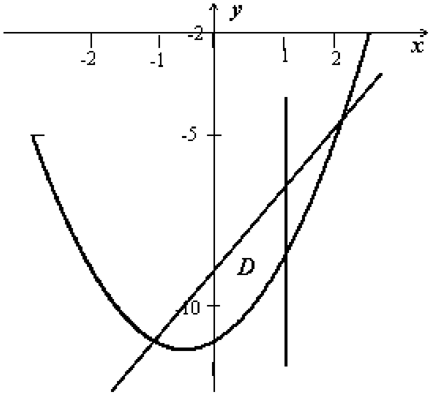
1) построить графики функций
2) найти область, ограниченную этими графиками
3) составит определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

Ход работы:

Пример1: Найти площадь области **D**, ограниченной кривыми **y** = **x**^{2} + **x** + 11, **y** = 2 **x** - 9, при условии,
x<=1

$$D:\begin{cases} y=x^2+x-11,\\ y=2x-9,\\ x\le 1.\end{cases}$$

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение **x**^{2} + **x** + 11 = 2 **x** - 9 имеет два корня: **x** = -1 и **x** = 2. Подходящий корень - **x** = -1. Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой **x** = 1, крайняя левая точка - **x** = -1, поэтому



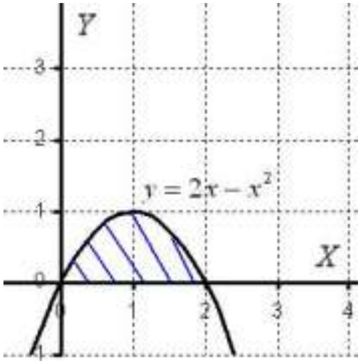
$$S(D) = \int_{-1}^{1}\left[(2x-9)-(x^2+x-11)\right]dx = \int_{-1}^{1}(2-x^2+x)dx = \left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}.$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части .

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX .

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX. В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}\, ед^3. \approx 3{,}35\, ед^3.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Векторы, прямые в пространстве

Практическая работа № 26

«Векторы. Действия с векторами.»

Цель работы: Научиться применять теоретические знания при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите задачи:

1. Даны две точки: А(6;-4;0) и В(1;-4; 12).Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$.Найдите координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{-1;2;3\}$ и $\vec{b} = \{0;-1;4\}$.

4. При каком значении «n» векторы $\vec{a} = \{4;-6;n\}$ и $\vec{b} = \{-8;12;3\}$ будут коллинеарными?

Порядок выполнения работы

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задачи.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

Ход решения:

Задача №1. 1. Даны точки А(-3;1;-1) и В (2;-4;1).

Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

Решение.

1) $\overrightarrow{AB} = \{2-(-3);-4-1;1-(-1)\} = \{5;-5;2\}$ - координаты вектора.

2) Разложим $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса:

$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

3) Длину $|AB|$ найдем по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}.$$

Задача №2.

.Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{2i} + \vec{k}$.Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

Решение

$\vec{a} = \{1; -3; 1\}$.

$\vec{b} = \{-2; 0; 1\}$; $2\vec{b} = \{-4; 0; 2\}$.

$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = \{1; -3; 1\} - \{-4; 0; 2\} = \{1 - (-4); -3 - 0; 1 - 2\} = \{5; -3; -1\}$

.

Задача №3

. Вычислите скалярное произведение $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{1; 0; 3\}$ и $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$.

Решение

1) Найдём координаты $2\vec{a}$:

$2\vec{a} = \{2; 0; 6\}$

2). Найдём координаты $2\vec{a} + \vec{b}$:

$2\vec{a} + b = \{2; 0; 6\} + \{2; -1; 1\} = \{4; -1; 7\}$.

3). Найдём скалярное произведение:

$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 = 25$.

Ответ: 25

Задача №4.

4. При каком значении «m» векторы $\vec{a} = \{4; -6; m\}$ и $\vec{b} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 3\right\}$ будут коллинеарными?

Условие коллинеарности векторов:

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Получим:

$$\frac{4}{-\frac{1}{2}} = \frac{-6}{\frac{3}{4}} = \frac{m}{3}.$$

$$-8 = \frac{m}{3};\ m = -24.$$

Ответ: $m = -24$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Векторы, прямые в пространстве

Практическая работа № 27

«Декартова система координат на плоскости. Решение задач на составление уравнений прямой.»

Цель работы: Научиться применять теоретические знания при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Найти точку пересечения прямых: 3x-4y+11=0 и 4x-y-7=0.
2. Найдите острый угол между прямыми:
3x+4y-12=0 и 15x-8y-45=0.
3. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $2x + y - 3 = 0$ и проходящей через точку A(-1;2).
4. Из точки A(2;-1) на прямую $3x + 2y + 1 = 0$ опущен перпендикуляр. Составьте его уравнение.

Порядок выполнения работы
1. . Внимательно ознакомьтесь с условием задачи.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

Ход работы:

Задача №1.

Найти точку пересечения прямых :
$2x + 3y - 12 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0, \\ x - y - 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(1 + y) + 3y - 12 = 0, \\ x = 1 + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2y + 3y - 12 = 0, \\ x = 1 + y; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y = 10, \\ x = 1 + y; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: точка M (3;2).

<u>Задача№2</u>

Определить угол между прямыми, заданными уравнениями:
$2x - 3y + 6 = 0$ и $x + 5y - 2 = 0$.

<u>Решение.</u>

Найдем угловые коэффициенты этих прямых:

$$2x - 3y + 6 = 0; \qquad x + 5y - 2 = 0$$

$$-3y = -2x - 6, \qquad 5y = -x + 2,$$

$y=\frac{2}{3}x+6,$ $\qquad\qquad$ $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5},$

$k_1=\frac{2}{3}.$ $\qquad\qquad$ $k_2=-\frac{1}{5}.$

Подставим найденные значения k_1 и k_2 в формулу:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.\ tg\varphi=\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{1+(-\frac{1}{5})\cdot\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=-1.$$

$tg\varphi=-1;\quad \varphi=135^0.$

Полученный угол между прямыми тупой. Смежный с ним, будет острый, то есть $\varphi_1=180^0-135^0=45^0.$

Задача№3.

1. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $5x+3y-7=0$ и проходящей через точку А(-2;6).

Решение.

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку А(-2;6).

$y-6=k(x+2)$

Находим угловой коэффициент данной прямой:

$3y=-5x+7,$

$y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3};\quad k_1=-\frac{5}{3}.$

Так как прямые параллельны, то $k_2=-\frac{5}{3}$ - угловой коэффициент искомой прямой.

Подставим найденное значение $k_2=-\frac{5}{3}$ в уравнение пучка прямых:

$y-6=k(x+2)$;

после преобразования получим:

$5x+3y-8=0.$

Задача №4

. Из точки A(-3;5) на прямую $x-2y+3=0$ опущен перпендикуляр. Написать его уравнение.

Решение.

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку A(-3;5).

$$y-5=k(x+3).$$

Найдем угловой коэффициент k_1 прямой $x-2y+3=0$;

$$-2y=-x-3;\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2};$$

$$k_1=\frac{1}{2}.$$

Учитывая условие перпендикулярности прямых: $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$,

найдем уравнение искомой прямой:

$$k_2=-2.$$

$$y-5=-2(x+3);$$

$$y+2x+1=0.$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа № 28

« Решение задач на параллельность прямой и плоскости»

Цель работы: Научиться решать задачи на параллельность прямой и плоскости, используя признак параллельности прямой и плоскости .

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
– описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
– строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Задача№1
Точка К не лежит в плоскости квадрата ABCD. Точки М и Р-середины отрезков КВ и КС.
1). Как расположены прямые AD и МР?
2). Вычислите длину отрезка МР, если сторона квадрата равна 12 см.

Задача №2
В параллелограмме ABCD вершины А и D находятся на плоскости М, а вершины В и С – вне ее. Сторона AD=10 см, сторона АВ=15 см, проекции диагоналей АС и BD на плоскость М соответственно равны 13,5 см и 10,5 см. Определите диагонали.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение параллельных прямой и плоскости, признак параллельности прямой и плоскости, а также ваши знания из планиметрии.

Определение: Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема: Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Ход работы:

Задача №1

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. К и М – середины отрезков BD и CD.

1) Имеют ли общие точки прямая КМ и плоскость, в которой лежат точки А,В и С?

2) Вычислите периметр треугольника АКМ, если расстояние между каждой парой данных точек равно 8 см.

Дано: $\propto$, $A \in \propto$,

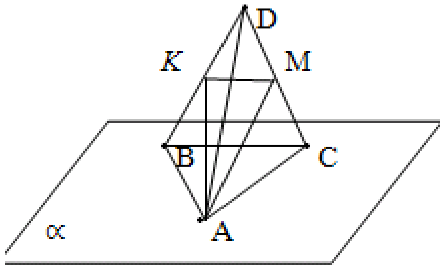
$B \in \propto$, $C \in \propto$,

BK=KD, CM=MD,

AB=AC=BC=AD=BD=CD=8 см

1) пересекаются ли КМ и $\propto$

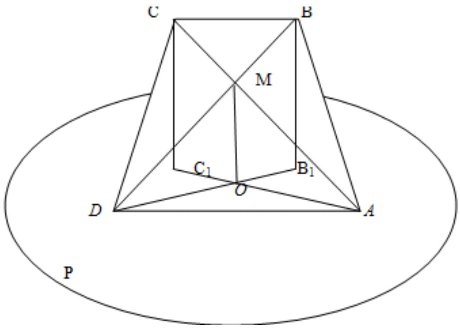
2) Найти P_{AKM}



Решение:
1) Точка К является серединой отрезка BD, точка М- середина отрезка CD.   Значит отрезок КМ - средняя линия треугольника BCD.
По свойству средней линии треугольника KM||BC, KM=$\frac{1}{2}$BC.
Следовательно, отрезок КМ параллелен прямой , лежащей в плоскости. По признаку параллельности прямой и плоскости, отрезок КМ и плоскость параллельны, т.е. не пересекаются.
2) $P_{AKM} = AK + AM + KM$
$KM = \frac{1}{2}BC \quad KM = 4$ см.
Рассмотрим треугольники ACD и ABD: AC=AD=AB=CD=BD, т.е. ACD и ABD- равные равносторонние треугольники, а отрезки АМ и АК- медианы и высоты этих треугольников. Найдем эти отрезки:
$AK = AM = \sqrt{AC^2 - MC^2}$ MC=4 см.

$AK = AM = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ см
$P_{AKM} = 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 8\sqrt{3}$ см
$4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 +$

Задача № 2
Основание AD трапеции ABCD находится на плоскости Р, а основание ВС отстоит от нее на 5 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до плоскости Р, если $\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3}$.



Дано: ABCD- трапеция

$\frac{DA}{CB}=\frac{7}{3}$. BB_1=5 см, $BB_1 \perp P$

Найти расстояние от М до плоскости Р.

Решение:

1) Из точки М проведем к плоскости Р перпендикуляр ОМ. Следовательно, ОМ- расстояние от М до плоскости Р.

2) Рассмотрим ΔADM и ΔCBM

$\angle BMC = \angle DMC$ (как вертикальные)

$\angle CBM = \angle ADM$ (как накрестлежащие при параллельных прямых BC и AD и

Значит, ΔADM и ΔCBM подобны и $\frac{DA}{CD}=\frac{DM}{BM}=\frac{AM}{CM}$.

$\frac{DA}{CB}=\frac{7}{3} \Longrightarrow \frac{DA}{CD}=\frac{DM}{BM}=\frac{AM}{CM}=\frac{7}{3}$

$\frac{DM}{BM}=\frac{7}{3} \Rightarrow DM=\frac{7}{10}BD, BM=\frac{3}{10}BD$

3) Рассмотрим ΔBB_1D и ΔMOD

$\angle D$ – общий, $\angle BB_1D = \angle MOD = 90^0 \Rightarrow \Delta BB_1D \sim \Delta MOD$

$\frac{BB_1}{MO}=\frac{BD}{MD}$

$\frac{BB_1}{MO}=\frac{BD}{0{,}7BD}=\frac{10}{7}$

$MO=\frac{7}{10}BD$

$MO=\frac{7}{10}\cdot 5=3{,}5$ см.

Ответ: 3,5 см.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа № 29

«Решение задач на параллельность плоскостей»

Цель работы: Научиться использовать признак параллельности плоскостей и свойства параллельных плоскостей при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
– описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
– строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Задача № 1

Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной 30 см. Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно 18 см.

Задача № 2

Плоскости M и P параллельны. Из точек A и B плоскости M проведены к плоскости P наклонные AC= 30см и BD=26 см. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна 18 см. Чему равна проекция наклонной BD?

Задача №3

Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P) , AC=37 дм, BD=20 дм , разность проекций AC и BD на одну из плоскостей равна 19 дм . Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.

Порядок выполнения работы

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение параллельных плоскостей, признак параллельности плоскостей, теоремы о параллельных плоскостях, а также ваши знания из планиметрии

Определение : Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

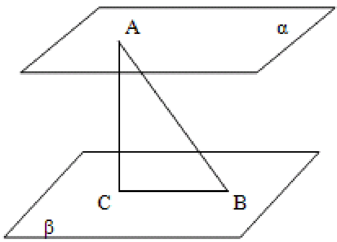
Теорема:

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Ход работы:

Задача № 1

Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной 10 м . Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно 8 м.



Дано: $\alpha || \beta$

AB=10 м

$AC \perp \beta$ AC=8 м

Найти проекции AC

Решение:

1) Так как плоскости параллельны, то расстояние между ними- это перпендикуляр AC. Построим прокцию отрезка AB на плоскость β. Это отрезок BC.

2) Рассмотрим треугольник ABC- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$

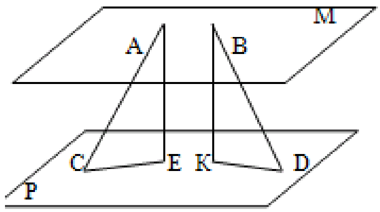
$AC^2 = AB^2 - BC^2$ $AC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

AC=6 см.

Так как плоскости параллельны, то проекции отрезка на эти плоскости будут равны.

Задача № 2

Плоскости M и P параллельны. Из точек A и B плоскости M проведены к плоскости P наклонные AC= 37см и BD=125 см. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна 12 см. Чему равна проекция наклонной BD?



Дано: : M||P A ∈ M, B ∈ M

AC=37 см, BD=125 см

AE ⊥ P, BK ⊥ P

CE=12 см

Найти: KD

Решение:

1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$AE^2 = AC^2 - CE^2 \quad AE^2 = 37^2 - 12^2 = 1369 - 144 = 1225$

AE=35 см.

2) Рассмотрим треугольник BKD- прямоугольный.

По теореме Пифагора $BD^2 = KD^2 + BK^2$

$KD^2 = BD^2 - BK^2$ AE=BK, как расстояния между параллельными плоскостями.

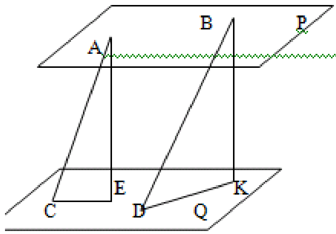
$KD^2 = 125^2 - 35^2 = 15625 - 1225 = 14400$

KD= 120 см.

Ответ: проекция BD равна 120 см.

Задача №3

Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P), AC=13 см, BD=15 см, сумма проекций AC и BD на одну из плоскостей равна 14 см . Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.



Дано: $Q \parallel P$ $A \in P, B \in P$

AC=13 см, BD=15 см

$AE \perp Q$, $BK \perp Q$

CE+DK=14 см

Найти: CE, AE, DK

Решение:

1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$AE^2 = AC^2 - CE^2$

Пусть CE=*x*, тогда DK=14-*x*.

$AE^2 = 169 - x^2$

2) Рассмотрим треугольник BDK- прямоугольный.

По теореме Пифагора $BD^2 = BK^2 + DK^2$

$BK^2 = BD^2 - DK^2$

$BK^2 = 225 - (14 - x)^2 = 225 - 196 + 28x - x^2 = 29 + 28x - x^2$

AE=BK, как расстояния между параллельными плоскостями

Значит,

$169 - x^2 = 29 + 28x - x^2$

$28x = 140$

$x=5$

CE=5 см, DK=14-5=9 см

$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ см

Ответ: расстояние между плоскостями 12 см, проекции наклонных 5 см и 9 см.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа № 30

«Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости»

Цель работы: Научиться использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трех перпендикулярах при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

– описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

– строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Задача№1

Дан ромб ABCD. Из точки пересечения его диагоналей проведен отрезок OF, так, что AF=CF, BF=DF. Докажите, что OF перпендикулярен плоскости ромба, отрезок AC перпендикулярен плоскости BDF.

Задача №2

Дан равнобедренный треугольник ABC. AC= BC=10 см, AB=12 см. Из вершины угла C проведен к плоскости перпендикуляр CD, равный 6 см. Найдите расстояние от точки D до стороны AB.

Порядок выполнения работы

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение перпендикулярных прямой и плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о трех перпендикулярах, а также ваши знания из планиметрии

Определение: Прямая и плоскость называются взаимно перпендикулярными, если прямая перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не являющаяся перпендикуляром к ней, называется наклонной к этой плоскости.

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости):

Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, проведенных на плоскости через точку пересечения прямой и плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.

Теоремы о трех перпендикулярах:

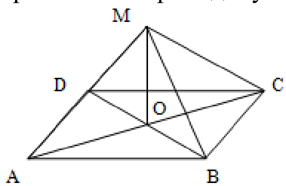
• *Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.*

• *Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна этой наклонной, то она* *перпендикулярна и проекции этой наклонной на данную плоскость.*

Ход работы:

Задача 1

Из точки пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведен отрезок OM так, что MA=MC, MB=MD. Докажите, что отрезок OM перпендикулярен плоскости параллелограмма.



Дано: ABCD- параллелограмм

$AC \cap BD = O$

MA=MC, MB=MD

Доказать: $OM \perp (ABCD)$

Доказательство:

1) Рассмотрим треугольники AOM и COM. OM- общая сторона, MA=MC по условию, AO=OC по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е. $\triangle AOM = \triangle COM$. Следовательно, $\angle AOM = \angle COM$.
Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по 90^0, т.е.
$OM \perp AC$.

2) Рассмотрим треугольники BOM и DOM. OM- общая сторона, MB=MD по условию, BO=OD по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е. $\triangle BOM = \triangle DOM$. Следовательно, $\angle BOM = \angle DOM$.
Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по 90^0, т.е.
$OM \perp BD$.

3)
$\left.\begin{matrix} OM \perp AC. \\ OM \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM \perp (ABCD)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа № 31

«Нахождение углов в пространстве»

Цель работы: Научиться решать задачи на применение понятий угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, угла между плоскостями.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

– описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

– строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1) Из точки А вне плоскости проведены к плоскости перпендикуляр АВ=2 см и наклонные АС и АМ, образующие с плоскостью углы 30^0. Угол между наклонными прямой. Найдите СМ.
2) Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 24 см. Определите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30^0 с плоскостью треугольника.
3) Точки А и В лежат на ребре прямого двугранного угла. AA_1 и BB_1- перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях, причем АВ=16 см, AA_1=21 см, BB_1=12 см. Найдите A_1B_1.

Порядок выполнения работы

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используются определения угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, линейного угла двугранного угла, а также ваши знания из планиметрии.

Определение: Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией на данную плоскость.

Определение: Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей, ограничивающей их прямой. Если на ребре двугранного угла взять произвольную точку и в каждой грани провести из этой точки лучи перпендикулярно к ребру, то получится угол, который называется линейным углом двугранного угла.

Определение: Две плоскости называются перпендикулярными, если они образуют прямые двугранные углы.

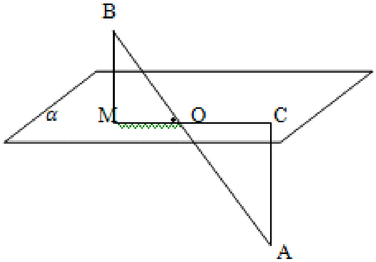
Теорема (признак перпендикулярности плоскостей):

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Ход работы:

Задача 1

Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость, концы его находятся на расстояниях 3см и 2 см от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.



Дано: $AB \cap \alpha$, AB=10 см
$AC \perp \alpha$, $BM \perp \alpha$

AC=3 см, BM=2 см

Найти: угол между AB и α

Решение:

1) Рассмотрим треугольники BOM и AOC. Они прямоугольные, т.к. $AC \perp \alpha$, $BM \perp \alpha$.

$\angle BOM = \angle AOC$ как вертикальные, $\Rightarrow \angle MBO = \angle CAO \Rightarrow \triangle BOM \sim \triangle AOC$

Так как треугольники подобны, то их стороны пропорциональны, т.е. $\frac{BO}{AO} = \frac{BM}{AC} = \frac{MO}{CO} \Rightarrow \frac{BO}{AO} = \frac{2}{3}$

Значит, $BO = \frac{2}{5}AB$, $AO = \frac{3}{5}AB$

BO=4 см, AO=6см.

2) Углом между AB и α является угол AOC. Рассмотрим треугольник AOC. Он прямоугольный по условию.

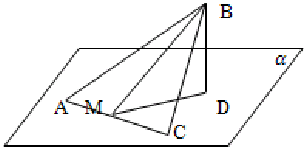
$$\sin\angle AOC = \frac{AC}{AO}$$

$$\sin\angle AOC = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOC = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: угол между отрезком и плоскостью равен $\frac{\pi}{6}$ или 30^0.

Задача 2

Дан треугольник ABC со сторонами AB=9 см, BC= 6 см и AC= 5 см. Через меньшую сторону проходит плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол 45^0. Найдите расстояние между плоскостью и вершиной B.



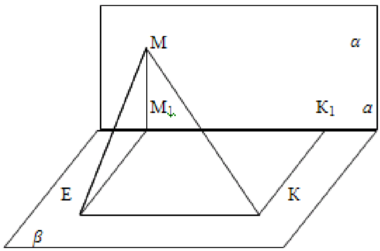
Дано: ΔABC, AB=9 см, BC= 6 см
AC= 5 см
$AC \subset \alpha.\ \varphi = 45^0$

Найти: расстояние от B до α

Решение:
1) Дополнительное построение: проведем
$BD \perp \alpha \Rightarrow BD$ – расстояние от B до плоскости α.
$BM \perp AC \Rightarrow DM \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах.
Значит, $\angle BMD$ – линейный угол двугранного угла,
$\angle BMD = 45^0$.
2) В треугольнике ABC найдем высоту BM.
Сначала вычислим площадь треугольника по формуле Герона:
$S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$
$p = \frac{9+6+5}{2} = 10$ см
$S_{ABC} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5} = 10\sqrt{2}$см^2
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM \Rightarrow BM = \frac{2S_{ABC}}{AC}$
$BM = \frac{2 \cdot 10\sqrt{2}}{5} = 4\sqrt{2}$см
3) Рассмотрим треугольник BMD- прямоугольный по построению.
$\frac{BD}{BM} = \sin\angle BMD$
$BD = BM\sin\angle BMD$
$BD = 4\sqrt{2} \cdot \sin 45^0 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ см.
Ответ: расстояние от B до плоскости 4 см.

Задача 3

Концы отрезка MK лежат на гранях прямого двугранного угла. MM_1 и KK_1- перпендикуляры к ребру, причем MK=13 см, MM_1=12 см, M_1K_1=3 см. Найдите KK_1.



Дано: $\angle \alpha a \beta = 90^0$

MK=13 см, MM_1=12 см, M_1K_1=3 см

$MM_1 \perp a$, $KK_1 \perp a$

Найти KK_1.

Решение:

1) Построим линейный угол двугранного угла. Для этого через точку M_1 проведем отрезок M_1E, параллельный и равный KK_1.

$KK_1 \perp a$, следовательно, $M_1E \perp a$.

$\angle MM_1E$ – линейный угол двугранного угла, значит $\angle MM_1E = 90^0$

.

2) Рассмотрим ΔMEK

ME- наклонная к плоскости β, EM_1 – ее проекция на эту плоскость, $EM_1 \perp EK$ (т.к. EM_1K_1K – прямоугольник по построению).

Следовательно, $ME \perp EK$ (по теореме о трех перпендикулярах) и ΔMEK – прямоугольный.

По теореме Пифагора $MK^2 = ME^2 + EK^2$

$ME^2 = MK^2 - EK^2$ EK=M_1K_1=3 см

$ME^2 = 13^2 - 3^2 = 169 - 9 = 160$

$ME = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ см

3) Рассмотрим ΔMM_1K – прямоугольный, т.к. $\angle MM_1E = 90^0$.

По теореме Пифагора $ME^2 = MM_1{}^2 + M_1E^2$

$M_1E^2 = ME^2 - MM_1{}^2$

$M_1E^2 = 160 - 144 = 16$

M_1E= 4 см.

Значит, KK_1=4 см.

Ответ: KK_1=4 см.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.3. Геометрические тела

Практическая работа № 32

«Решение задач на призму»

Цель работы: Научиться решать задачи с призмой

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
– описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
– изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
– строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
– решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Основание прямой призмы - треугольник, стороны которого равны 4 м, боковое ребро призмы равно 8 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2. Основание прямой призмы – параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и углом между ними 60^0. Высота призмы 12 см. Найти полную поверхность и объем.

Порядок выполнения работы:

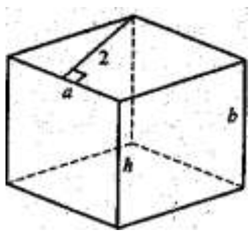
1) Выполнить чертеж
2) Записать кратко условие задачи

Ход работы:

Задача 1: Основание прямой призмы - ромб с высотой 2 дм. Площадь боковой поверхности призмы равна 96 $дм^2$, а площадь полной поверхности равна 128 $дм^2$. Найдите высоту призмы.

Решение

Обозначим сторону основания *a,* а боковое ребро b Разницу между площадью полной поверхности призмы
и площадью боковой поверхности призмы — это удвоенная площадь основания призмы.

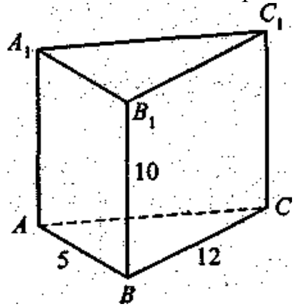


$$S_{осн} = 2a \Rightarrow 2a = 128 - 96 = 32 \Rightarrow a = 16$$

$$S_{бок} = 4ah = 96 \Rightarrow h = \frac{24}{a} = 1,5 \text{ (дм)}$$

Ответ: 1,5 дм.

Задача 2: Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 м и 12 м, боковое ребро призмы равно 10 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.



Решение

$$AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$S_{полн} = 2S_{\Delta ABC} + S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{AA_1C_1C}$$

S =2*0,5*5*12+5*10+12*10+13*10=60+300=360 м^2

Ответ: 360 м^2.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.3. Геометрические тела

Практическая работа № 33

«Решение задач на пирамиду»

Цель работы: Научиться решать задачи с пирамидой

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
– описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
– изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
– строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
– решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

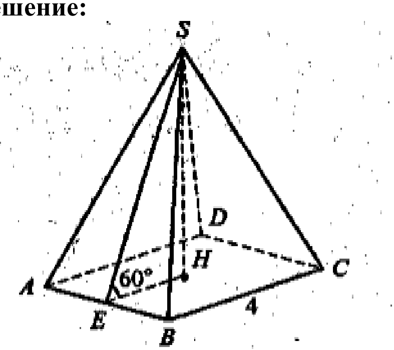
Задание:
1. Найдите объем правильной четырёхугольной пирамиды, высота которой 4 см, а диагональ основания 8 см.

2. Найти полную поверхность прямой пирамиды, в основании, которой лежит равнобедренный треугольник с основанием 5 см и боковыми сторонами 6 см. Боковые ребра пирамиды 12 см.

Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж
2)Записать кратко условие задачи

Ход работы:
Задача 1: Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а апофема образует с плоскостью основания угол в 60^0. Найдите площадь полной поверхности пирамиды
Решение:



$$EH = \frac{1}{2}BC = 2$$

$$\angle ESH = 90° - 60° = 30° \Rightarrow SE = 2EH = 4$$

$$S_{полн} = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}AB + AB^2 = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4^2 = 48\ (см^2)$$

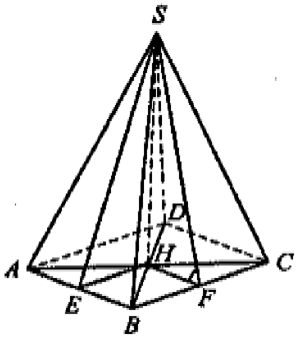
Ответ: 48 $см^2$.

Задача 2: Основание пирамиды —ромб, диагонали которого равны 30 см и 40 см. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, образуют с высотой пирамиды углы, равные 30^0. Найдите обьем пирамиды.

Решение:

$$AC = 40 \Rightarrow AH = HC = 20$$

$$BD = 30 \Rightarrow BH = HD = 15$$



$$AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

$$HE = \frac{1}{2}BC = 12{,}5$$

$$SE = 2HE = 25$$

$$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} =$$

$$= \sqrt{25^2 - \frac{25^2}{4}} = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3} \ (см^3)$$

Ответ: $2500\sqrt{3}$ см^3.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.3. Геометрические тела

Практическая работа № 34

«Решение задач на круглые тела»

Цель работы: Научиться решать задачи с цилиндром

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
– описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
– изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
– строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
– решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Объем цилиндра 120 см^2, его высота 3,6 см.

Найти радиус цилиндра.

2. Высота цилиндра 12см, радиус основания 10см. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.

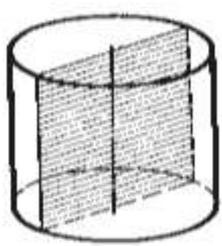
Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж
2)Записать кратко условие задачи

Ход работы:

Задача 1. Осевое сечение цилиндра − квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

Решение:

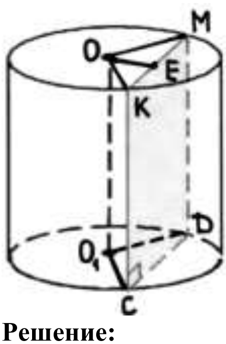


Сторона квадрата равна $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания.

Поэтому площадь основания равна $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

Ответ: $S_{осн.цил.} = \frac{\pi Q}{4}$

Задача 2. Высота цилиндра 6см, радиус основания 5см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4см от нее.



Решение:

$S_{сеч.}$= KM×KC,

OE = 4 см, KC = 6 см.

Треугольник ОКМ − равнобедренный (ОК = ОМ = R = 5 см),

треугольник ОЕК − прямоугольный.

Из треугольника ОЕК, по теореме Пифагора:

ЕК = $\sqrt{OK^2 - OE^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$,

KM = 2EK = 2×3 = 6,

$S_{сеч.}$= 6×6 = 36 см^2.

Ответ: $S_{сеч.}$= 36 см^2.

Задание:

1. Найти полную поверхность конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом 30^0 и равна 12 см. А радиус основания 8 см.

2. Найти площадь осевого сечения конуса, если образующая равна 15 см, а радиус основания 4 см.

Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж
2)Записать кратко условие задачи

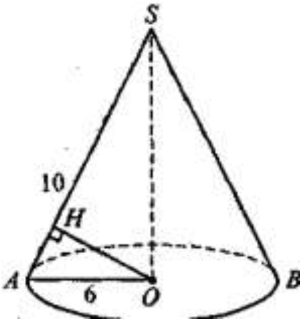
Ход работы:
Задача 1: Площадь боковой поверхности конуса равна 60 дм^2, а радиус основания равен 6 м. Найдите расстояние от центра основания до образующей конуса.
Решение:

$$S_{бок} = \pi r l = 60\pi \Rightarrow rl = 60$$

$$r = 6 \Rightarrow l = \frac{60}{r} = 10.$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

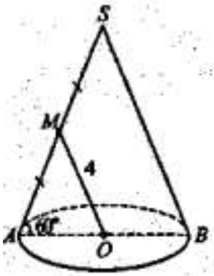
$$S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$



С другой стороны,

$$S_{\Delta ASO}=\frac{1}{2}OH\cdot AS=5OH=24\Rightarrow OH=\frac{24}{5}$$

Задача 2: Расстояние от центра основания конуса до середины образующей равно 4 см, а угол наклона образующей конуса к плоскости основания равен 60^0. Найдите площадь осевого сечения конуса.



$$SA=SB\Rightarrow\angle SBA=60^\circ$$

$$\angle ASB=180^\circ-2\cdot60^\circ=60^\circ,$$

то есть ΔSAB равносторонний.

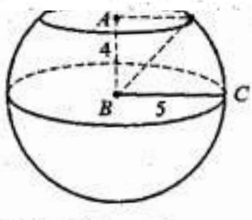
$$\Delta AMO\infty\Delta ASB\Rightarrow\frac{\quad}{SB}=\frac{\quad}{AS}=\frac{1}{2}$$

$$SB=2MO=8$$

$$S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}\cdot AS\cdot AB\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}\ (\text{см}^2)$$

Ответ: $16\sqrt{3}$ см^2.

Задача 1: Площадь сферы равна 100 м^2.



$$S_{сф}=4\pi R^2=100\pi\Rightarrow R^2=25\Rightarrow R=5$$

$$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3\ (\text{м})$$

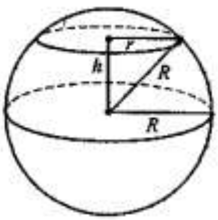
Ответ: 3 м.

Расстояние от центра сферы до секущей плоскости равно 4 м. Найдите радиус сечения.

Решение:

Задача 2: Площади сечения шара плоскостью равна 16П м^2 , а площадь параллельного ему сечения, проходящего через центр шара, равна 25П м^2 . Найти расстояние между плоскостями сечений.

Решение:



$$\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r^2 = 16,\ r = 4 \text{ м.}$$

$$\pi R^2 = 25\pi \Rightarrow R^2 = 25,\ R = 5 \text{ м.}$$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 16} = 3\ (\text{м})$$

Ответ: 3 м

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1. Элементы комбинаторики

Практическая работа № 35

«Решение комбинаторных задач.»

Цель работы: Научиться отличать сочетания от размещений, применять формулы для вычисления всех выборок без повторений.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Порядок выполнения работы

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1.Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.
Решение.
Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2.Формула размещений имеет вид:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4$, $m = 10$.

Производим расчёт

$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!}$=$\frac{10!}{6!}$=$\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$=10$\cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

3.Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?
Решение.
В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

Формула сочетаний имеет вид6$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!}$=$\frac{10!}{3!7!}$=$\frac{7!\cdot8\cdot9\cdot10}{3\cdot2\cdot1\cdot7!}$ =120.

4.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?
Решение.
По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

Формула перестановок из п –элементов имеет вид:$P_n = n!$ В нашем случае n =4.

Произведём расчёт: P_4 $=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1. Элементы комбинаторики

Практическая работа № 36

«Решение прикладных задач.»

Цель работы: Научиться отличать сочетания от размещений, применять формулы для вычисления всех выборок без повторений.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
2. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Порядок выполнения работы

4. Определите вид выборки без повторения.
5. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
6. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1.Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.
Решение.
Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2.Формула размещений имеет вид:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4 \;, m = 10$.

Производим расчёт
$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$

3.Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

Формула сочетаний имеет вид6$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10!}{3!7!}=\frac{7!\cdot8\cdot9\cdot10}{3\cdot2\cdot1\cdot7!}$ =120.

4.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

Формула перестановок из n –элементов имеет вид: $P_n = n!$ В нашем случае n =4.

Произведём расчёт: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Теория вероятностей и элементы математической статистики

Практическая работа № 37

«Решение задач на классическое определение вероятности.»

Цель работы: научиться находить вероятности событий, используя классическое определение вероятности

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее10. Какова вероятность того, что это число является простым?
2.В книге 300 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь номер, кратный 5?
3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее- получить в сумме 7или8?

Порядок выполнения работы

1. Определите событиеА, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

1.В урне 10 одинаковых по размеру и весу шаров, из которых 4 красных и 6голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлечённый шар окажется голубым?
Решение.
1. Событие А-«Извлечённый шар оказался голубым».
2. *число* n=10
3. число m=6
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0,6$

2.Все натуральные числа от1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?
Решение.
1. Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».
2. *число* n=30

3. число m=6(числа 5,10,15,20,25,30)
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{30} = 0{,}2$.

3. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) букв Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».

Решение.

1. Событие А-«Наугад выбранная буква будет гласной ».
2. *число* n=12(-число букв в слове)
3. число m=5(буквы :*и,е,е,и,а*)
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$
5. число m=7(буквы :*д,ф,ф,р,н,ц,л*)
6. Событие В-«Наугад выбранная буква будет согласной ».
7. *число* n=12(-число букв в слове)
8. $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$
9. Событие С-«Наугад выбранная буква будет буквой *ч*».
10. *число* n=12(-число букв в слове)
11. число m=0(такой буквы нет в данном слове)
12. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{12} = 0$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Теория вероятностей и элементы математической статистики

Практическая работа № 38

«Решение задач на на теорему о сумме вероятностей.»

Цель работы: научиться находить вероятности событий, используя классическое определение вероятности

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее10. Какова вероятность того, что это число является простым?
2.В книге 300 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь номер, кратный 5?
3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее- получить в сумме 7или8?

Порядок выполнения работы

5. Определите событиеA, вероятность которого нужно вычислить.
6. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
7. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
8. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

1.В урне 10 одинаковых по размеру и весу шаров, из которых 4 красных и 6голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлечённый шар окажется голубым?
Решение.
5. Событие А-«Извлечённый шар оказался голубым».
6. число n=10

7. число m=6
8. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0,6$

2.Все натуральные числа от1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение.

5. Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».
6. *число* n=30
7. число m=6(числа 5,10,15,20,25,30)
8. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{30} = 0,2$.

3. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) букв Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».

Решение.

13. Событие А-«Наугад выбранная буква будет гласной ».
14. *число* n=12(-число букв в слове)
15. число m=5(буквы :*и,е,е,и,а*)
16. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{12} \approx 0,417$
17. число m=7(буквы :*д,ф,ф,р,н,ц,л*)
18. Событие В-«Наугад выбранная буква будет согласной ».
19. *число* n=12(-число букв в слове)
20. $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{7}{12} \approx 0,583$
21. Событие С-«Наугад выбранная буква будет буквой *ч*».
22. *число* n=12(-число букв в слове)
23. число m=0(такой буквы нет в данном слове)
24. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{12} = 0.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Теория вероятностей и элементы математической статистики

Практическая работа № 39

«Решение задач на представление числовых данных.»

Цель работы: научиться находить вероятности событий, используя классическое определение вероятности

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее10. Какова вероятность того, что это число является простым?
2.В книге 300 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь номер, кратный 5?
3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее- получить в сумме 7или8?

Порядок выполнения работы

9. Определите событиеА, вероятность которого нужно вычислить.
10. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.

11. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
12. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

1.В урне 10 одинаковых по размеру и весу шаров, из которых 4 красных и 6голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлечённый шар окажется голубым?

Решение.

9. Событие А-«Извлечённый шар оказался голубым».
10. *число* n=10
11. число m=6
12. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

2.Все натуральные числа от1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение.

9. Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».
10. *число* n=30
11. число m=6(числа 5,10,15,20,25,30)
12. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{30} = 0{,}2$.

3. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) букв Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».

Решение.

25. Событие А-«Наугад выбранная буква будет гласной ».
26. *число* n=12(-число букв в слове)
27. число m=5(буквы :*и,е,е,и,а*)
28. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$
29. число m=7(буквы :*д,ф,ф,р,н,ц,л*)
30. Событие В-«Наугад выбранная буква будет согласной ».
31. *число* n=12(-число букв в слове)
32. $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$
33. Событие С-«Наугад выбранная буква будет буквой *ч*».
34. *число* n=12(-число букв в слове)
35. число m=0(такой буквы нет в данном слове)
36. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{12} = 0.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.