Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ЕН.01 Математика
для студентов специальности
19.02.10 Технология продукции общественного питания
(базовой подготовки)

Магнитогорск, 2018

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
Математических и
естественнонаучных дисциплин

Председатель
Е.С. Корытникова
Протокол №6 от 21.02.2018 г.

.

Методической комиссией МпК

Протокол №4 от «01» марта 2018г

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК Т.В. Моренко

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 19.02.10 Технология продукции общественного питания и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

У1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

У2 применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Содержание практических занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 1.1. Организовывать подготовку мяса и приготовление полуфабрикатов для сложной кулинарной продукции.

ПК 1.2. Организовывать подготовку рыбы и приготовление полуфабрикатов для сложной кулинарной продукции.

ПК 1.3. Организовывать подготовку домашней птицы для приготовления сложной кулинарной продукции.

ПК 2.1. Организовывать и проводить приготовление канапе, легких и сложных холодных закусок.

ПК 2.2. Организовывать и проводить приготовление сложных холодных блюд из рыбы, мяса и сельскохозяйственной (домашней) птицы.

ПК 2.3. Организовывать и проводить приготовление сложных холодных соусов.

ПК 3.1. Организовывать и проводить приготовление сложных супов.

ПК 3.2. Организовывать и проводить приготовление сложных горячих соусов.

ПК 3.3. Организовывать и проводить приготовление сложных блюд из овощей, грибов и сыра.

ПК 3.4. Организовывать и проводить приготовление сложных блюд из рыбы, мяса и сельскохозяйственной (домашней) птицы.

ПК 4.1. Организовывать и проводить приготовление сдобных хлебобулочных изделий и праздничного хлеба.

ПК 4.2. Организовывать и проводить приготовление сложных мучных кондитерских изделий и праздничных тортов.

ПК 4.3. Организовывать и проводить приготовление мелкоштучных кондитерских изделий.

ПК 4.4. Организовывать и проводить приготовление сложных отделочных полуфабрикатов, использовать их в оформлении.

ПК 5.1. Организовывать и проводить приготовление сложных холодных десертов.

ПК 5.2. Организовывать и проводить приготовление сложных горячих десертов.

ПК 6.1. Участвовать в планировании основных показателей производства.

ПК 6.2. Планировать выполнение работ исполнителями.

ПК 6.3. Организовывать работу трудового коллектива.

ПК 6.4. Контролировать ход и оценивать результаты выполнения работ исполнителями.

ПК 6.5. Вести утвержденную учетно-отчетную документацию.

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических и/или лабораторных работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.2. Матрицы и определители

Практическая работа № 1

Выполнение действий над матрицами

Цель: формирование умений выполнять операции над матрицами; вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Даны квадратные матрицы второго порядка $K = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислить значения выражений: а) *К+М;* б) *3М-К;* в) *К·М;* г) *К²;* д) *М²*.
2. Найти значение выражения f (A) = $A^2 - 3 \cdot A + 7$, если А=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Найти значение матрицы A^3, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Краткие теоретические сведения:

1. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы А на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы, которых $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для *i* = 1, 2, …, *m*; *j* = 1, 2, …, *n*.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $5A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$.

Следствия.

1) Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, то есть $0 \cdot A = O$.

2. Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+в_{ij}$ *для* $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

В частном случае $A+O=A$.

3. Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A-B=A+(-1)B$.

4. Умножение матриц. Умножение матрицы A на матрицу B определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Тогда *произведением матриц* $\underset{m\times\kappa}{A} \cdot \underset{\kappa\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj},$$

$$i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, n.$$

Пример. Вычислить произведения матриц A и B,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Выясним, возможно ли умножение данных матриц: $\underset{2\times3}{A} \cdot \underset{3\times3}{B} = \underset{2\times3}{C}$.

Вычислим элементы матрицы –произведения C: $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Пример. Вычислить произведение матриц: а) A и B; б) B и A,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Выясним, возможно ли умножение данных матриц: $\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times2}{B}=\underset{2\times2}{C}$. Вычислим элементы матрицы –произведения *C:* $C=\begin{pmatrix}0 & 12\\ 1 & 17\end{pmatrix}$.

б) Выясним, возможно ли умножение данных матриц: $\underset{3\times2}{B}\cdot\underset{2\times3}{A}=\underset{3\times3}{D}$.

Вычислим элементы матрицы – произведения *D*: $D=\begin{pmatrix}0 & 9 & 6\\ 2 & 16 & 11\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Вывод: $AB\neq BA$.

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами:

1) $A+B=B+A.$
2) $(A+B)+C=A+(B+C).$
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$
4) $A(B+C)=AB+AC.$
5) $(A+B)C=AC+BC.$
6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B).$
7) $A(BC)=(AB)C.$
8) $A\cdot E=E\cdot A=A.$
9) $A\cdot B\neq B\cdot A.$

5. Возведение в степень. Целой положительной степенью $A^m(m>1)$ квадратной матрицы *A* называется произведение m матриц, равных *A*, т.е. $A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots A}_{m}$.

Операция возведение в степень определяется только для квадратных матриц.

Следствия. 1) $A^\circ=E;$ 2) $A^1=A;$ 3) $A^m\cdot A^k=A^{m+k;}$; 4) $(A^{m)^k}=A^{mk}$.

Пример. Найти A^2, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Матрицы и определители

Практическая работа № 2

Вычисление определителей. Нахождение обратной матрицы

Цель: формирование умений выполнять операции над матрицами; вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Даны квадратные матрицы $A=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-12 & 9\\ -5 & 0{,}5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 4 & 0\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ -4 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Вычислить их определители.

2. Вычислить определитель матрицы четвертого порядка $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, разложив по элементам первого столбца.

3. Записать матрицы, транспонированные к данным: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ -9 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Краткие теоретические сведения:

1. Транспонирование матрицы. Матрица, полученная из матрицы *A* путем замены строк на соответствующие столбцы, называется *транспонированной* относительно матрицы *A* и обозначается A', то есть:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \underset{n\times m}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

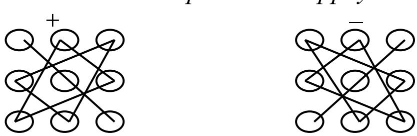
Например, $\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $\underset{3\times 2}{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

2. Определителем матрицы третьего порядка A=(a_{ij}), или *определителем третьего порядка*, называется число, которое вычисляется под формуле:

$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу, легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется *правилом треугольников* или *правилом Сарриуса*.



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\Delta_3 = |A| = (2+2-1) - (1+1-4) = 3-(-2) = 5$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Практическая работа № 3

Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

Решить системы линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Метод Крамера

Теорема Крамера. Пусть Δ – определитель матрицы системы A, а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1,2\ldots n.).$$

Формула получила название формулы Крамера.

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Крамера.

1). Вычислить определитель матрицы A, составленной из коэффициентов системы линейных уравнений.

2). Составить матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, путем замены соответствующих столбцов столбцом свободных членов, и вычислить их определители.

3). Вычислить значения переменных по формулам Крамера: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$.

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов системы уравнений и вычислим ее определитель: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = 5 \neq 0$. Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц A_1, A_2, A_3, полученных из матрицы A, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь по формулам Крамера найдем значения переменных:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{20}{5} = 4,\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{10}{5} = 2,\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ: (4; 2; 1).

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Практическая работа № 4

Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Метод Гаусса является наиболее общим точным методом решения и исследования систем линейных уравнений. Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к ступенчатому виду, из которого все решения системы могут быть найдены непосредственно.

Элементарными преобразованиями системы являются:

- перестановка любых двух уравнений системы;
- умножение любого уравнения системы на число $\lambda\neq 0$;
- вычеркивание уравнения, у которого все коэффициенты и свободный член равны нулю;
- сложение двух уравнений системы.

Любое элементарное преобразование системы не меняет множество ее решений.

Чаще всего преобразования выполняются не с самой системой, а с ее расширенной матрицей, при этом элементарные преобразования системы легко превращаются в элементарные преобразования матрицы.

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6,\\ 2x_1+3x_2-x_3=4,\\ 3x_1+x_2-4x_3=0.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6,\\ 2x_1+3x_2-x_3=4,\\ 3x_1+x_2-4x_3=0;\end{cases} \quad (-2),\ (-3) \qquad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6,\\ -x_2-7x_3=-8,\\ -5x_2-13x_3=-18;\end{cases} \quad (-5)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6,\\ -x_2-7x_3=-8,\\ 22x_3=22;\end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=6-2x_2-3x_3,\\ x_2=\dfrac{-8+7x_3}{-1},\\ x_3=1;\end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=1,\\ x_2=1,\\ x_3=1.\end{cases}$$

Ответ: (1; 1; 1).

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5,\\ x_1-2x_2+2x_3=-5,\\ 7x_1-x_2-x_3=0.\end{cases}$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5\\ 1 & -2 & 2 & -5\\ 7 & -1 & -1 & 0\end{array}\right) \quad (-2),\ (7),\ (-2) \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 5 & -5 & 15\\ 0 & 9 & -5 & 35\end{array}\right) \quad (9),\ (-5)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 5 & -5 & 15\\ 0 & 0 & -20 & -40\end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ \quad 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ \quad -20x_3 = -40, \end{cases}$ которая

имеет единственное решение $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 2. \end{cases}$

Ответ: (1; 5; 2).

Если система несовместна (т.е. составляющие её уравнения противоречивы и система не имеет решения), то в результате приведения к ступенчатому виду получается абсурдное равенство типа *1=0*. Обратно: если мы получили равенство *1=0* (вместо единицы в левой части может стоять любое число, не равное нулю), то система несовместна.

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2) \quad (-1) \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ \quad -4x_3 + 5x_4 = -4, \\ \quad\quad 0x_4 = -6. \end{cases}$ Третье уравнение системы не имеет решений, следовательно, система решений не имеет.

Ответ: система несовместна.

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

Решение. Запишем расширенную матрицу и выполним первый шаг гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Разделим третью строку на 3 и выполним второй ход гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ \quad -x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$ и, подставив в первое уравнение, получим: $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$.

Итак, $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, x_3, x_4 – любые числа.

Ответ: система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Применение линейной алгебры в экономических расчетах

Практическая работа № 5

Построение модели межотраслевого баланса для двухотраслевой экономической системы

Цель: формирование умений применять элементы линейной алгебры к экономическим расчетам.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь: применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

Задача №1. Рассматривается двухотраслевая модель экономики. Даны матрица прямых затрат А и вектор конечной продукции Y. Выполнить:

– Проверить продуктивность матрицы А;
– Вектор валового выпуска;
– Межотраслевые поставки;
– Записать схему межотраслевого баланса.

Задача №2. В отчетном году натуральный баланс продукции выглядел приведенным образом (в тыс. тонн). На основе данного баланса:

– Составьте матрицу прямых затрат.
– Составьте матрицу полных затрат.
– Рассчитайте коэффициенты косвенных затрат первого и второго порядка.
– Запишите баланс в матричной форме.
– Рассчитайте объем валовой продукции, если конечное потребление составит: Y(140,120,280).

Пример выполнения задания:

В отчетном периоде имел место следующий баланс продукции (тыс. тонн). Рассчитайте коэффициенты прямых затрат, полных затрат и косвенных затрат первого порядка. Сделайте запись баланса в матричной форме.

Решение:

Предположим, что рассматривается *n* отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутри производственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Так как валовой объем продукции любой *i-й* отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой *n* отраслями и конечного продукта, то:

$x_i = (x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in}) + y_i$, (i = 1,2,...,n).

Эти уравнения (их *n* штук) называются соотношениями баланса. Будем рассматривать стоимостный межотраслевой баланс, когда все величины, входящие в эти уравнения, имеют стоимостное выражение.

Введем коэффициенты прямых затрат:

$a_{ij} = x_{ij}/x_j$, (i,j = 1,2,...,n),

показывающие затраты продукции *i-й* отрасли на производство единицы стоимости *j-й* отрасли.

Отрасль	Потребление 1	Потребление 2	Конечный продукт	Валовой выпуск
Производство1	110	190	475	775
Производство2	230	60	170	460

По формуле $a_{ij} = x_{ij} / x_j$ находим коэффициенты прямых затрат:

0.14	0.41
0.3	0.13

Коэффициент прямых затрат (a_{ij}) показывает, какое количество продукции *i-й* отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции *j-й* отрасли.

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых затрат $A = (a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции $X = (X_i)$ и вектор-столбец конечной продукции $Y = (Y_i)$, то математическая модель межотраслевого баланса примет вид:

$X = AX + Y$

Идея сбалансированности лежит в основе всякого рационального функционирования хозяйства. Суть ее в том, что все затраты должны компенсироваться доходами хозяйства. В основе создания балансовых моделей лежит балансовый метод – взаимное сопоставление имеющихся ресурсов и потребностей в них.

Межотраслевой баланс отражает производство и распределение валового национального продукта в отраслевом разрезе, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода.

Пусть экономика страны имеет *n* отраслей материального производства. Каждая отрасль выпускает некоторый продукт, часть которого потребляется другими отраслями (промежуточный продукт), а другая часть – идет на конечное потребление и накопление (конечный продукт).

Обозначим через X_i (i=1..n) валовый продукт *i*-й отрасли; x_{ij} – стоимость продукта, произведенного в *i*-й отрасли и потребленного в *j*-й отрасли для изготовления продукции стоимостью X_j; Y_i – конечный продукт *i*-й отрасли.

Критерии продуктивности матрицы А

Существует несколько критериев продуктивности матрицы А.

1. Матрица А продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы.

2. Для того чтобы обеспечить положительный конечный выпуск по всем отраслям необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

3. Определитель матрицы (Е - А) не равен нулю, т.е. матрица (Е-А) имеет обратную матрицу $(E - A)^{-1}$.

4. Наибольшее по модулю собственное значение матрицы А, т.е. решение уравнения $|\lambda E - A| = 0$ строго меньше единицы.

5. Все главные миноры матрицы (Е - А) порядка от 1 до n, положительны.

Матрица А имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет **критерию продуктивности** (при любом *j* сумма элементов столбца $\sum a_{ij} \leq 1$.

I. Определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат приближенно, учитывая косвенные затраты до 2-го порядка включительно.

а) Матрица коэффициентов косвенных затрат 1-го порядка равна:

$$A^{(1)} = A^2 = \begin{vmatrix} 0{,}14 & 0{,}41 \\ 0{,}3 & 0{,}13 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0{,}14 & 0{,}41 \\ 0{,}3 & 0{,}13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}14 & 0{,}11 \\ 0{,}081 & 0{,}14 \end{vmatrix}$$

б) Матрица коэффициентов косвенных затрат 2-го порядка равна:

$$A^{(2)} = A^3 = \begin{vmatrix} 0{,}14 & 0{,}41 \\ 0{,}3 & 0{,}13 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0{,}14 & 0{,}11 \\ 0{,}081 & 0{,}14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}054 & 0{,}074 \\ 0{,}053 & 0{,}052 \end{vmatrix}$$

Матрица коэффициентов полных затрат приближенно равна:

$$B = E + A + A^2 + A^3 = \begin{vmatrix} 1{,}34 & 0{,}6 \\ 0{,}43 & 1{,}32 \end{vmatrix}$$

II. Определим матрицу коэффициентов полных затрат точно с помощью формул обращения невырожденных матриц.

Коэффициент полных затрат (b_{ij}) показывает, какое количество продукции *i-й* отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции *j-й* отрасли.

Полные затраты отражают использование ресурса на всех этапах изготовления и равны сумме прямых и косвенных затрат на всех предыдущих стадиях производства продукции.

а) Находим матрицу (E-A):

$$(E\text{-}A) = \begin{vmatrix} 0{,}86 & -0{,}41 \\ -0{,}3 & 0{,}87 \end{vmatrix}$$

б) Вычисляем обратную матрицу $(E\text{-}A)^{-1}$:

Запишем матрицу в виде:

$$\begin{vmatrix} 0{,}86 & -0{,}41 \\ -0{,}3 & 0{,}87 \end{vmatrix}$$

Главный определить

$\Delta = (0.86 \bullet 0.87-(-0.3 \bullet (-0.41))) = 0.62356242186396$

Транспонированная матрица

$$B^T = \begin{vmatrix} 0{,}86 & -0{,}3 \\ -0{,}41 & 0{,}87 \end{vmatrix}$$

Обратная матрица

$$B^{-1} = \frac{1}{0.62356242186396} \begin{vmatrix} 0{,}87 & 0{,}41 \\ 0{,}3 & 0{,}86 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} 1{,}39 & 0{,}66 \\ 0{,}48 & 1{,}38 \end{vmatrix}$$

Найдем величины валовой продукции двух отраслей

$$X = (B^{-1} \bullet Y) = \begin{vmatrix} 1{,}39 & 0{,}66 \\ 0{,}48 & 1{,}38 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 475 \\ 170 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 775 \\ 460 \end{vmatrix}$$

Для определения элементов первого квадранта материального межотраслевого баланса воспользуемся формулой $x_{ij} = a_{ij} \bullet X_j$.

Составляющие третьего квадранта (условно-чистая продукция) находятся как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов найденного первого квадранта.

Межотраслевой баланс состоит из четырех квадрантов (табл.). Первый квадрант отражает межотраслевые потоки продукции. Второй характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода.

Третий представляет национальный доход как стоимость условно-чистой продукции (Z_j), равной сумме амортизации (c_j), оплаты труда (v_j) и чистого дохода *j*-й отрасли (m_j). Четвертый квадрант показывает конечное распределение и использование национального дохода.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовый продукт
	1	2		
1	110	190	475	775
2	230	60	170	460
Чистый доход	435	210	645	
Валовый продукт	775	460		1235

Применение межотраслевого баланса для анализа экономического показателя труда.

Различные модификации рассмотренной выше модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве позволяют расширить круг показателей, охватываемых моделью.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2. Действия над комплексными числами

Практическая работа № 6

Действия над комплексными числами. Решение квадратных уравнений

Цель: формирование умений выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Даны комплексные числа $z_1 = 8+3i$ и $z_2 = 8+6i$. Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Решить квадратные уравнения: а) $3x^2 + 8 = 0$; б) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Краткие теоретические сведения:

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения квадратных уравнений. Так, оставаясь в множестве действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля.

Комплексное число – это число вида $z = x + iy$, где i – мнимая единица, обладающая свойством $i^2 = -1$, а x и y – действительные числа.

Число x называется действительной частью числа , а число y – мнимой чистью числа z.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x + iy$ называются *сопряженными*.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части.

Все арифметические операции над комплексными числами проводятся по правилам действий над многочленами $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, считая $i^2 = -1$. Частное двух комплексных чисел вычисляется с использованием сопряженных чисел: числитель и знаменатель умножаются на число сопряженное знаменателю.

<u>Пример.</u> Даны комплексные числа $z_1 = 12 + 5i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. а) $z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 12 + 5i + 3 - 4i = 15 + i$.

б) $z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 12 + 5i - 3 + 4i = 9 + 9i$.

в) $z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 - 48i + 15i - 20i^2 = 36 - 33i + 20 = 56 - 33i$.

г) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(12 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{36 + 48i + 15i + 20i^2}{9 - 16i^2} = \frac{36 + 63i - 20}{9 + 16} =$$

$$= \frac{16 + 63i}{25} = \frac{16}{25} + \frac{63i}{25} = 0{,}64 + 2{,}52i.$$

Квадратные уравнения в комплексных числах решаются с помощью тех же формул, что и в случае действительных чисел.

<u>Пример.</u> Решить квадратные уравнения: а) $x^2 + 9 = 0$; б) $x^2 + 6x + 18 = 0$.

Решение. а) $x^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9i^2} = \pm 3i$.

б) $x^2 + 6x + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 6^2 - 4 \cdot 18 = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-36}}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{-6 \pm 6i}{2} = -3 \pm 3i.$$

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2. Действия над комплексными числами

Практическая работа № 7

Действия над комплексными числами. Решение квадратных уравнений

Цель: формирование умений выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

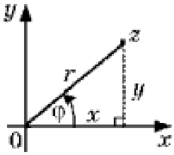
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

Даны комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = \sqrt{3} - i$. Представить их в тригонометрической форме и найти: а) $z_1 z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_1^{10}; г) $\sqrt[3]{z_2}$.

Краткие теоретические сведения:

Для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой. Для изображения комплексных чисел используются точки координатной плоскости Oxy. Плоскость называется комплексной, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка плоскости $z(x, y)$, причем это соответствие взаимно однозначное (рис. 1).



Оси Ox и Oy, на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно

Рис. 1.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

С каждой точкой $z(x, y)$ комплексной плоскости связан радиус-вектор этой точки $\overline{Oz}$, длина которого r называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$ (см. рис. 1): $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол φ , образованный радиус-вектором $\overline{Oz}$ с осью Ox, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $Arg\, z$. Из значений $\varphi = Arg\, z$ выделяется главное значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z < \pi$.

Из рис. 1 видно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно представить как $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Данная формула называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

1) Умножение: $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

2) Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

3) Возведение в степень (формула Муавра): $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

4) Извлечение корня: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Показательная форма комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$, $\varphi = Arg\, z$.

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

<u>Пример.</u> Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$. Представить их в тригонометрической форме и найти: а) $z_1 z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_1^{28}; г) $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение. Найдем модуль комплексного числа z_1: $r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Из соотношений $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ получим аргумент числа z_1: $\cos\varphi_1 = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi_1 = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\varphi_1 = \arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$. Следовательно, число z_1 в тригонометрической форме выглядит так $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Аналогично найдем модуль комплексного числа z_2: $r_2 = |z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$. Из соотношений $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ получим аргумент числа z_2: $\cos\varphi_2 = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi_2 = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$, $\varphi_2 = \arg z_2 = \frac{5\pi}{6}$. Следовательно, число z_2 в тригонометрической форме выглядит так $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

а) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

б)
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right).$$

в) $z_1^{28} = \left(\sqrt{2}\right)^{28}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 28\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 28\right)\right) = 2^{14}\left(\cos(-7\pi) + i\sin(-7\pi)\right)$.

г) $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3}\right)$, $k = 0,1,2$, откуда получаем три значения корня:

при $k=0$ $\left(\sqrt[3]{z_2}\right)_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{18}+i\sin\frac{5\pi}{18}\right)$,

при $k=1$ $\left(\sqrt[3]{z_2}\right)_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{18}+i\sin\frac{17\pi}{18}\right)$,

при $k=2$ $\left(\sqrt[3]{z_2}\right)_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{18}+i\sin\frac{29\pi}{18}\right)$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Комбинаторика

Практическая работа № 8

Решение комбинаторных задач

Цель: научится решать задачи с использованием перестановок, размещений и сочетаний.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Решите следующие задачи:

1. Имеется множество цифр {3,5,7}. Сколькими способами можно расставить цифры, чтобы получить различные числа? Запиши полученные числа.

2.В газете Аргументы и факты 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты разместить четыре фотографии. Сколькими способами это можно сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

3.Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке в магазине, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

4.Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся книг. Сколькими способами можно это сделать?

5.Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

6.10 человек решили поменяться фотографиями. Сколько нужно фотографий?

7.На прямой 5 точек: А,В,С,Д,Е. Сколько получится отрезков?

8.Из вершины прямого угла проведены внутри 5 лучей. Сколько острых углов при этом образовались?

9.Задано число 12345. Сколько чисел начинается с 12?

10.Монета бросается 2 раза. Какова вероятность:

А) выпадет герб хотя бы один раз?

Б) двукратное выпадение герба.

11.Набирая телефонный номер, абонент забыл одну цифру, и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

12.В партии из 10 дискет 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу дискет 4 стандартные.

13.Даны 4 карточки с буквами а, б, й, т. Найти вероятность того, что после перестановки карточек получится слово байт.

14.Сколько можно составить пятизначных чисел из цифр: 1,4,5,6,9.

15.В корзине из 12 яблок 5 порченных. Найти вероятность того, что среди 3 взятых наудачу яблок все будут неиспорченные.

16.В ящике с инструментами 4 отвертки и 7 ключей. Найти вероятность того, что среди 2 взятых наудачу инструментов окажется 1 ключ.

Краткие теоретические сведения

Пример №1: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз.

Решение.
Подсчитаем вручную: (123) (132) (213) (231) (312) (321)
Или с помощью формулы (1): $P = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6;$

Если в последовательности $a_1, a_2, ..., a_n$ не только менять местами элементы, но и заменять последовательно элементы на другие $b_1, b_2, ..., b_n$, то полученные новые комбинации можно подсчитать с помощью формулы размещения.

Определение: Размещения называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

Пример №2: Сколькими способами можно выбрать из группы, насчитывающего 40 студентов, старосту, зам. старосты, физорга.

Решение.
Любой такой выбор является размещением без повторений из 40 элементов по 3. Значит, число способов выбора равно

$$A_{40}^3 = 40 \cdot (40-1) \cdot (40-2) = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280.$$

Пример №3: Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение.
Используя формулу (2), получим: $A_6^2 = 6 \cdot (6-1) = 6 \cdot 5 = 30$ сигналов.

Если при замене элемента a_i на b_i порядок расположения b_i не важен, то количество полученных комбинаций подсчитывается по формуле сочетания.

Определение: Сочетания называют комбинации, составленные из n-различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(nn-m)!}; \qquad (3)$$

Необходимо отметить, что: $C_n^0 = C_n^{n-n} = 1 = C_n^n; \quad C_n^m = C_n^{n-m}.$

Пример №4: В аудитории имеется 10 лампочек. Сколько существует разных способов ее освещения, при которых горит ровно 2 лампочки?

Решение.

Способов освещения столько, сколько существует сочетаний из 10 лампочек по 2, то есть $C_{10}^2 = \frac{10!}{(2!\cdot 8!)} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2!\cdot 8!} = \frac{90}{2\cdot 1} = 45;$

Пример №5: Из множества $\{a, b, c, d, e\}$ можно составить 10 сочетаний по 3 элемента в каждом:

$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},$

$\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{c,d,e\}$

Из каждого такого сочетания путем различного упорядочивания элементов получается 6 размещений из 5 элементов по 3. Например, из сочетания $\{a,b,c\}$ получаем следующие размещения $(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$. Отсюда видно, что число размещений без повторений из 5 элементов по 3 равно 6*10=60, что согласуется с формулой $A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

Различные сочетания порождают различные размещения и каждое размещение может быть получено указанным способом. Иными словами

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2. Основные понятия теории вероятностей

Практическая работа № 9

Решение задач теории вероятности

Цель: формирование умений решения задач теории вероятностей.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания

1. Из 10 изделий, среди которых 3 бракованные, извлекают 2. Найти вероятность того, что среди них одно бракованное.
2. В ящике находятся 2 белых, 3 красных и 8 синих одинаковых по размеру шаров. Какова вероятность того, что шар случайным образом извлеченный из урны будет не белым?
3. В круге с радиусом 10 см лежит квадрат со стороной 2 см. Определить вероятность того, что точка А попадет в квадрат.
4. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течении $\frac{1}{12}$ часа, после уходит. Найти вероятность того, что: а) встреча состоится; б) встреча не состоится.
5. Адвокат ведет в суде дела десяти клиентов. Вероятность выигрыша дела для каждого клиента одна и та же и равна 12/100. Какова вероятность того, что из десяти дел будут выиграны не более трех?

Порядок выполнения работы

Пример 1. В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие А).

Решение. События "машина работает" и "машина не работает" (в данный момент) — противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$p + q = 1.$

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна

$q = l — p = l — 0{,}9 = 0{,}1$.

Искомая вероятность

$P (A) = 1 — q4 = 1 — 0{,}14 = 0{,}9999$.

Так как полученная вероятность весьма близка к единице, то на основании следствия из принципа практической невозможности маловероятных событий мы вправе заключить, что в данный момент работает хотя бы одна из машин.

Форма предоставления результата

Выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2. Основные понятия теории вероятностей

Практическая работа № 10

Решение задач теории вероятности. Нахождение вероятности выявления бракованной продукции

Цель: формирование умений решения задач теории вероятностей.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания

1. В магазин для продажи поступает продукция трех фабрик, относительные доли которых есть: 1-50% , 2 – 30% , 3 – 20%. для продукции брак соответственно составляет: 1-5% , 2 – 5/10% , 3 – 5/100%. Какова вероятность того, что изделие этой продукции, случайно приобретенное в магазине, окажется доброкачественным?

2. Туристическое предприятие может приобрести акции трех компаний: К1, К2 и К3. Надежность в течение года для первой компании Р1=90%, второй Р2=85% и третьей Р3=9*100%. Чему равна вероятность того, что а) только первая компания в течение года станет банкротом; б) любые две компании обанкротятся; в) наступит хотя бы одно банкротство.

3. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала А или в одну из пяти касс вокзала В. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала А имеются в продаже билеты, равна 0,12, в кассах вокзала В – 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет. б) Пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен?

Пример1. Пусть вероятность того, что студент опоздает на лекцию, равна 0,08. Найти вероятность того, что среди 96 студентов на лекцию опоздает не более трех человек.

Решение. Решение задачи основывается на вычислении вероятностей $P_n(k)$.

Событие А – «на лекцию опоздает не более 3-х человек» означает, что опоздает или 0, или 1, или 2, или 3 студента, т. е. k = 0, или k = 1, или k = 2, или k = 3.

Искомая вероятность определяется:

$$P(A) = P_{96}(0) + P_{96}(1) + P_{96}(2) + P_{96}(3).$$

Вычислим вероятности $P_n(k)$ разными способами.

1) по биномиальной формуле (формуле Бернулли)

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, $p = 0{,}08$; $q = 1 - p = 0{,}92$; $n = 96$.

$P_{96}(0) = 0{,}92^{96} = 0{,}00033;$

$P_{96}(1) = 96 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{95} = 0{,}00279;$

$P_{96}(2) = \dfrac{96!}{2! \cdot 94!} \cdot 0{,}08^{2} \cdot 0{,}92^{94} = 0{,}01151;$

$P_{96}(3) = \dfrac{96!}{3! \cdot 93!} \cdot 0{,}08^{3} \cdot 0{,}92^{93} = 0{,}03137.$

$P(A) \approx 0{,}00033 + 0{,}00279 + 0{,}01151 + 0{,}03137 = 0{,}04600.$

Форма предоставления результата

Выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.3. Основные понятия математической статистики

Практическая работа № 11

Решение статистических задач

Цель: формирование умений составлять закон распределения дискретной случайной величины; вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание

1) СВ X задана законом распределения (вместо X вставить сумму букв в Вашей фамилии):

x_i	1	2	3
p_i	1/X	?	6/X

Найти:

1) числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$;

2) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

3) вероятность $P\{x_2 \le X \le x_3\}$;

4) закон распределения величины СВ $Y = 9 - 2X$. Вычислить $M[Y]$, $D[Y]$ дважды, используя свойства (по результатам предыдущих пунктов) и непосредственно по составленному закону распределения.

Порядок выполнения работы

Пример. СВ X задана законом распределения:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{15}$	?	$\frac{6}{15}$

Найти:

1) числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$;

2) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

3) вероятность $P\{x_2 \le X \le x_3\}$;

4) закон распределения величины СВ $Y = 9 - 2X$. Вычислить $M[Y]$, $D[Y]$ дважды, используя свойства (по результатам предыдущих пунктов) и непосредственно по составленному закону распределения.

Решение.

В задаче рассматривается дискретная СВ X, заданная рядом распределения. По свойству ряда $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1.$ Отсюда получаем

$$p_2 = 1 - \frac{1}{15} - \frac{6}{15} = \frac{8}{15}.$$

Математическое ожидание:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot p_i=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{8}{15}+3\cdot\frac{6}{15}=\frac{1+16+18}{15}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}.$$

Дисперсия:

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot p_i-\left(\frac{7}{3}\right)^2=$$

$$=1\cdot\frac{1}{15}+4\cdot\frac{8}{15}+9\cdot\frac{6}{15}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{87}{15}-\frac{49}{9}=\frac{48}{45}=\frac{16}{15}.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma[X]=\sqrt{\frac{16}{15}}\approx 1{,}03.$$

2) Функция распределения имеет вид (рис. 1):

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{15}, & 1<x\le 2,\\ \frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{9}{15}, & 2<x\le 3,\\ \frac{1}{15}+\frac{8}{15}+\frac{6}{15}=1, & x>3.\end{cases}$$

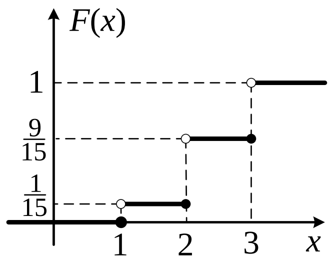


Рис. 1

3) $P\{x_2\le X\le x_3\}=P\{X=x_2\}+P\{X=x_3\}=\frac{8}{15}+\frac{6}{15}=\frac{14}{15}.$

4) $Y=9-2X$ – дискретная СВ. Составим для неё ряд распределения:

$y_i=9-2x_i$	7	5	3
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

Вычислим числовые характеристики СВ Y, используя составленный для нее ряд:

$$M[Y]=\sum_{i=1}^{3}y_i\cdot p_i=7\cdot\frac{1}{15}+5\cdot\frac{8}{15}+3\cdot\frac{6}{15}=\frac{65}{15}=\frac{13}{3}.$$

$$D[Y]=M[Y^2]-M^2[Y]=\sum_{i=1}^{3}y_i^2\cdot p_i-\left(\frac{13}{3}\right)^2=$$

$$=49\cdot\frac{1}{15}+25\cdot\frac{8}{15}+9\cdot\frac{6}{15}-\left(\frac{13}{3}\right)^2=\frac{303}{15}-\frac{169}{9}=\frac{64}{45}.$$

Вычислим числовые характеристики СВ У, используя их свойства:

$$M[Y]=M[9-2X]=M\left[9\right]+M\left[-2X\right]=9-2M\left[X\right]=9-2\cdot\frac{7}{3}=\frac{13}{3}.$$

$$D[Y]=D[9-2X]=D\left[9\right]+D\left[-2X\right]=0+\left(-2\right)^2 D\left[X\right]=4\cdot D\left[X\right]=4\cdot\frac{16}{15}=\frac{64}{45}$$

.

Ответ: $M[X]=\frac{7}{3}$, $D[X]=\frac{16}{15}$, $P\left\{x_2 \le X \le x_3\right\}=\frac{14}{15}$, $M[Y]=\frac{13}{3}$, $D[Y]=\frac{64}{45}$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата: представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.3. Основные понятия математической статистики

Практическая работа № 12

Решение статистических задач. Вычисление средней заработной платы рабочих.

Цель: формирование умений составлять закон распределения дискретной случайной величины; вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание

2) СВ X задана законом распределения (вместо Х вставить сумму букв в Вашей фамилии):

x_i	1	2	3
p_i	1/X	?	6/X

Найти:

1) числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$;

2) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

3) вероятность $P\{x_2 \le X \le x_3\}$;

4) закон распределения величины СВ $Y = 9 - 2X$. Вычислить $M[Y]$, $D[Y]$ дважды, используя свойства (по результатам предыдущих пунктов) и непосредственно по составленному закону распределения.

Порядок выполнения работы

Пример. СВ X задана законом распределения:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{15}$	?	$\frac{6}{15}$

Найти:

1) числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$;

2) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

3) вероятность $P\{x_2 \le X \le x_3\}$;

4) закон распределения величины СВ $Y = 9 - 2X$. Вычислить $M[Y]$, $D[Y]$ дважды, используя свойства (по результатам предыдущих пунктов) и непосредственно по составленному закону распределения.

Решение.

В задаче рассматривается дискретная СВ Х, заданная рядом распределения. По свойству ряда $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1.$ Отсюда получаем

$$p_2 = 1 - \frac{1}{15} - \frac{6}{15} = \frac{8}{15}.$$

Математическое ожидание:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{8}{15} + 3 \cdot \frac{6}{15} = \frac{1+16+18}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}.$$

Дисперсия:

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p_i - \left(\frac{7}{3}\right)^2 =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{15} + 4 \cdot \frac{8}{15} + 9 \cdot \frac{6}{15} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{87}{15} - \frac{49}{9} = \frac{48}{45} = \frac{16}{15}.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma[X] = \sqrt{\frac{16}{15}} \approx 1{,}03.$$

2) Функция распределения имеет вид (рис. 1):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{1}{15}, & 1 < x \le 2, \\ \frac{1}{15} + \frac{8}{15} = \frac{9}{15}, & 2 < x \le 3, \\ \frac{1}{15} + \frac{8}{15} + \frac{6}{15} = 1, & x > 3. \end{cases}$$

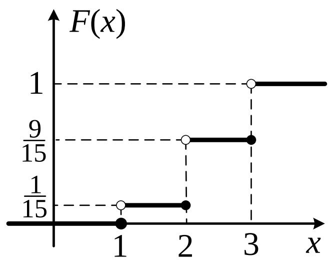


Рис. 1

3) $$P\{x_2 \le X \le x_3\} = P\{X = x_2\} + P\{X = x_3\} = \frac{8}{15} + \frac{6}{15} = \frac{14}{15}.$$

4) $Y = 9 - 2X$ – дискретная СВ. Составим для неё ряд распределения:

$y_i = 9-2x_i$	7	5	3
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

Вычислим числовые характеристики СВ Y, используя составленный для нее ряд:

$$M[Y]=\sum_{i=1}^{3} y_i \cdot p_i = 7\cdot\frac{1}{15}+5\cdot\frac{8}{15}+3\cdot\frac{6}{15}=\frac{65}{15}=\frac{13}{3}.$$

$$D[Y]=M[Y^2]-M^2[Y]=\sum_{i=1}^{3} y_i^2\cdot p_i-\left(\frac{13}{3}\right)^2=$$

$$=49\cdot\frac{1}{15}+25\cdot\frac{8}{15}+9\cdot\frac{6}{15}-\left(\frac{13}{3}\right)^2=\frac{303}{15}-\frac{169}{9}=\frac{64}{45}.$$

Вычислим числовые характеристики СВ У, используя их свойства:

$$M[Y]=M[9-2X]=M[9]+M[-2X]=9-2M[X]=9-2\cdot\frac{7}{3}=\frac{13}{3}.$$

$$D[Y]=D[9-2X]=D[9]+D[-2X]=0+(-2)^2D[X]=4\cdot D[X]=4\cdot\frac{16}{15}=\frac{64}{45}$$

.

Ответ: $M[X]=\frac{7}{3}$, $D[X]=\frac{16}{15}$, $P\{x_2\le X\le x_3\}=\frac{14}{15}$, $M[Y]=\frac{13}{3}$, $D[Y]=\frac{64}{45}$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата: представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1 Предел функции

Практическая работа № 13

Нахождение пределов. Исследование функций на непрерывность

Цель: формирование умений вычислять пределы с помощью замечательных пределов, раскрывать неопределенности, исследовать функцию на непрерывность

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+x-5)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-x^2}{5x^3-4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2+x+1}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+3x}$; з) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{2x-7}{x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{5x-2x^2-2}{2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел (число *e*): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ или $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

Нахождение пределов. Раскрытие неопределенностей различных типов

Для того чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения этой функции, нужно в выражение функции вместо аргумента подставить его предельное значение.

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $\left(\infty^{0}\right)$, $\left(0^{0}\right)$. Рассмотрим несколько типов примеров, классифицируя их по виду неопределенности и предельному значению *x*.

1-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ в общем случае – сложные степенные или показательные функции. В случае степенных функций необходимо выносить за скобку в числителе и в знаменателе дроби *x* с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; в случае показательных функций за скобку выносится наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

Полезно запомнить правило:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0},\ \textit{если}\ n=m,\\ \infty,\ \textit{если}\ n>m.\end{cases}$$

2-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

3-й тип. Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $(\infty - \infty)$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится ко 2-му типу после приведения дробей к общему знаменателю. Если упомянутая функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность устраняется или приводится к 1-му типу путем домножения и деления функции на одно и то же (сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

К пределам ***4-го типа*** отнесем примеры с неопределенностью вида $\left(1^{\infty}\right)$. В этом случае выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой степенно-показательную функцию, в основании которой необходимо выделить целую часть дроби (которая должна быть равна 1). Неопределенность устраняется при помощи выделения второго замечательного предела.

5-й тип. К этому типу отнесем функции, сводящиеся к первому замечательному пределу.

Задания:

1. Исследовать на непрерывность и построить график функции:

а) $y = \dfrac{x^3+1}{x+1}$; б) $y = 3^{\frac{1}{x+1}} + 1$; в) $y(x) = \begin{cases} x, \ x \le 0, \\ 1-x, \ 0 < x \le 1, \\ \dfrac{1}{1-x}, \ x > 1. \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Непрерывность функции определяется в точках, принадлежащих области определения функции. Пусть функция *f(x)* определена в окрестности точки x_0. Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0, если:

1) существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ функции *f(x)* в точке x_0;

2) этот предел равен значению функции в точке x_0.

Иначе говоря, f непрерывна в точке $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (1)

Непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает, что в этой точке существуют односторонние пределы, равные значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0), \qquad (2)$$

где $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ – правосторонний предел функции f в точке x_0; $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ – левосторонний предел функции f в точке x_0; $f(x_0)$ – значение функции f в точке x_0.

Если условия (1) или (2) в точке x_0 не выполняются, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0–0)$, причем не все три числа $f(x_0+0)$, $f(x_0–0)$, $f(x_0)$ равны между собой, то x_0 называют *точкой разрыва первого рода*.

Если в точке разрыва x_0 хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0–0)$ не существует или бесконечен, то x_0 называют *точкой разрыва второго рода*.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Основы дифференциального исчисления

Практическая работа № 14

Применения дифференциала функции к приближенным вычислениям

Цель: формирование умений вычислять производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти производные функций: а) $y = x^2 - 5x + 4$; б) $y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3}$; в) $y = x^5\left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2\right)$; г) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$; д) $y = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x}$; е) $y = (1+5x)^3$; ж) $y = \sin 5x$; з) $y = \cos^2 x$; и) $y = \sin x^2$; к) $y = \sqrt[3]{2 + x^4}$; л) $y = \ln\cos 3x$; м) $y = arctg\frac{1}{x}$.
2. Найти производные x'_y обратных функций: а) $y = x - \cos x$; б) $y = 2x + x^3$; в) $y = 2^x \ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$.
3. Найти производные функций: а) $y = e^{\sin 2x}$; б) $y = \left(\frac{1+x^2}{x^2+x}\right)^3$; в) $y = 5\log_{10}(4x-2)$.

Краткие теоретические сведения:

Правила дифференцирования

Пусть c – постоянная, $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

1. $c'=0$;
2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
3. $(uv)'=u'v+uv'$;
4. $(cu)'=cu'$;
5. $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$;
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $v(x)\neq 0$;
7. $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=\dfrac{cv'}{v^2}$, $v(x)\neq 0$.

Пусть $y=f(u)$ и $u=u(x)$ – дифференцируемые функции и определена сложная функция $y=f(u(x))$. Тогда сложная функция дифференцируема и равна произведению производной функции $y=f(u)$ в точке $u=u(x)$ и производной функции $u=u(x)$ в точке x, т.е. $y'=f'(u)\cdot u'$.

Если $y=f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на промежутке X, то функция, обратная к данной $x=\varphi(y)$, также дифференцируема и ее производная определяется соотношением: $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$, $y'_x\neq 0$.

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е. $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Дифференцирование функций, т.е. вычисление их производных, выполняется с использованием сформулированных правил дифференцирования и *таблицы производных основных элементарных функций:*

1. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$;
2. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x>0)$;
3. $\left(e^x\right)'=e^x$;
4. $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$;
5. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $(x>0)$;
6. $(\cos x)'=-\sin x$;
7. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$;
8. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-1-ctg^2x$;
9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x|<1)$;
10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x|<1)$

;

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $(x > 0,\ a > 0)$ 13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

;

7. $(\sin x)' = \cos x$; 14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Краткие теоретические сведения:

Производной второго порядка, или второй производной, функции *f(x)* называется производная от ее первой производной. Обозначается вторая производная одним из символов y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная n-го порядка $y^{(n)}$ функции *y=f(x)* определяется по индукции: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$. Обозначается: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Пример. Найти производную 4-го порядка от функции $y = \sin 2x$.

Решение. Последовательно дифференцируя функцию, получим: $y' = 2\cos 2x$; $y'' = -4\sin 2x$; $y''' = -8\cos 2x$; $y^{(4)} = 16\sin 2x$.

Правило Лопиталя состоит в следующем. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле: $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Таким образом, правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Понятие дифференциала функции

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$, откуда $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых: 1) линейного относительно Δx; 2) нелинейного (представляющего бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx).

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной: $dy = f'(x)\cdot\Delta x$.

Пример. Найти приращение и дифференциал функции $y = 2x^2 - 3x$ при *x=10* и Δx *=0,1*.

Решение. Приращение функции

$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f(x) = \left[2\cdot\left(x+\Delta x\right)^2 - 3\cdot\left(x+\Delta x\right)\right] = \Delta x\cdot\left(4x+2\Delta x-3\right).$$

Дифференциал функции $dy = f'(x)\cdot\Delta x = (4x-3)\cdot\Delta x.$

При *x=10* и Δx *=0,1* имеем $\Delta y = 3{,}72$ и *dy*=3,70.

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде $dy = f'(x)\cdot dx$.

Свойства дифференциала в основном аналогичны свойствам производной.

1. *dc=0, где c=const.*

2. *d(cu)=c du.*

3. $d(u\pm v)=du \pm dv$.

4. *d(uv)=v du+u dv.*

5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Из изложенного выше следует, что приращение функции Δy отличается от её дифференциала dy на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем $dy = f'(x)\cdot\Delta x.$ Поэтому при достаточно малых значениях Δx $\Delta y \approx dy$ или $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot\Delta x,$ откуда $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x.$

Чем меньше значение Δx , тем точнее формула.

Данную формулу можно использовать для вычисления приближенных значений некоторых выражений, например: а) вычисление корня *n-й* степени; б) возведение числа в *n-ю* степень; в) вычисление значения тригонометрической функции, и т.д.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{16{,}64}$.

Решение. Рассматривая выше записанную формулу $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$, в качестве x возьмём число, наиболее близкое к 16,64, но чтобы был известен $\sqrt[4]{x}$, при этом Δx должно быть достаточно малым. Очевидно, следует взять *x=16,* Δx =0,64.

Итак, $\sqrt[4]{16{,}64} \approx \sqrt[4]{16} + \dfrac{\sqrt[4]{16}}{4 \cdot 16} \cdot 0{,}64 = 2{,}02$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Основы дифференциального исчисления

Практическая работа № 15

Исследование функции одной переменной и построение графика. Асимптоты графика функции

Цель: формирование умений вычислять производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти интервалы возрастания и убывания, а также точки экстремума следующих функций: а) $y=(x-1)^2(x-4)$; б) $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+2x+2}$.
2. Исследовать функции и построить их график: а) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$; б) $y=x\ln x$.

Краткие теоретические сведения:

Схема исследования функции $y=f(x)$ *на экстремум:*

1) найти производную $y'=f'(x)$;
2) найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует;
3) исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции;
4) найти экстремальные значения функции.

Схема исследования функции $y=f(x)$ *на выпуклость и точки перегиба:*

1) найти вторую производную функции $f''(x)$;
2) найти точки, в которых вторая производная $f''(x)=0$ или не существует;
3) исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба;
4) найти значения функции в точках перегиба.

Общая схема исследования функций и построения графиков:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность – нечетность;
3) найти вертикальные асимптоты;
4) исследовать поведение функции в бесконечности; найти горизонтальные и наклонные асимптоты;
5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;
6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;
7) найти точки пересечения графика функции с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

1. Исследуйте функцию на монотонность и экстремум

а) $\boldsymbol{y = x^5 - 5x}$

б) $\boldsymbol{f(x) = lnx}$

в) $\boldsymbol{y = x^3 - x - 6}$

г) $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2}$

д) $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x}$

2.Найти интервалы возрастания и убывания, а также точки экстремума следующих функций:

а) $y = (x-1)^2(x-4)$;

б) $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x^2+2x+2}$.

3. Исследовать функции и построить их график:

а) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

б) $y = x\ln x$.

3. Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3. Неопределенный и определенный интеграл

Практическое занятие № 16

Нахождение неопределенных интегралов

Цель: **н**аучиться вычислять неопределенные интегралы непосредственным интегрированием и методом замены переменной.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти интеграл методом непосредственного интегрирования, методом замены переменной.

Краткие теоретические сведения:

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ где C – произвольное число;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;

5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$;

2. $\int dx = x + C$;

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$;

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

6. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1$;

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0$;

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \ a \neq 0$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$
$-a < x < a, \ a > 0;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C, \ a \neq 0$;

14. $\int e^x dx = e^x + C$;

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

1. Найдите неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования:

а) $\int (x^2 - 8x + 2)dx$

б) $\int 7^x dx$

в) $\int (3^x - cosx)dx$

г) $\int \frac{x^2-1}{x+1} dx$

д) $\int (x + 6)^2 dx$

2. Найдите неопределенный интеграл методом замены переменной:

а) $\int (x^2 - 8x + 2)dx$
б) $\int 7^x dx$
в) $\int (3^x - cosx)dx$
г) $\int \frac{x^2-1}{x+1} dx$
д) $\int (x + 6)^2 dx$

5. Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:
Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3. Неопределенный и определенный интеграл

Практическое занятие № 17
Вычисление определенных интегралов

Цель: научиться вычислять определенные интегралы

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:
Программный продукт «1С-Парус:Общепит, ред.8»

Задание:
1. Вычислить определенные интегралы.

Порядок выполнения работы:
1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:
1. Вычислите определенный интеграл методом непосредственного интегрирования методом подстановки

а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2sinxdx}{(1-cosx)^2}$
б) $\int_{-1}^{1}(2x+1)dx$
в) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+2}$
г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$
д) $\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2. Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:
Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3. Неопределенный и определенный интеграл

Практическое занятие № 18

Приложения определенных интегралов

Цель: формирование умений находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти площади плоских фигур.

Краткие теоретические сведения:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

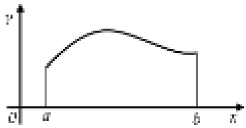


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

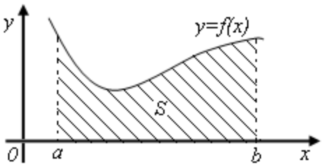


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

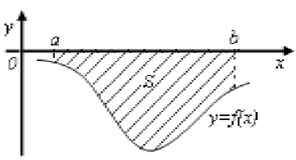


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

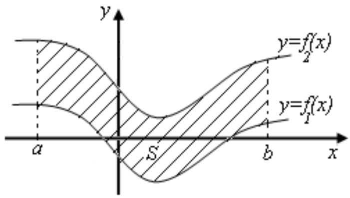


Рис. 4

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

1. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 3$, $y = 0$;

б) $y = 2x - x^2$, $x = 3$, $y = 0$.

2. Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Практическое занятие № 19

Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель: формирование умений решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Дидактический раздаточный материал, таблица интегралов, производных

Задание:

Решить дифференциальные уравнения

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

Порядок выполнения работы:

1. Опытным путем установлено, что скорость размножения бактерий в любой момент времени положительна и пропорциональна их массе. Найти зависимость массы бактерий от времени.
2. Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:

a. $x^2 \cdot y' - 2xy = 3, \qquad y = 3x^2 - \dfrac{1}{x};$

b. $dy + y \cdot tgx \cdot dx = 0, \qquad y = 2\cos x;$

c. $y' - y \cdot ctgx = ctgx, \qquad y = C\sin x - 1;$

d. $x \cdot y' + 2y = e^{-x^2}, \qquad y = 3 - e^{-x^2};$

e. $x^2 y'' - 5xy' + 5y = \dfrac{1}{x}, \qquad y = \dfrac{1}{12x} + C_1 x^5 + C_2 x.$

3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

1.Решить задачу.

2. Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Практическое занятие № 20

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Цель: формирование умений решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Дидактический раздаточный материал, таблица интегралов, производных

Задание:

Решить дифференциальные уравнения

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

Уравнения вида

$$g(y)dy - f(x)dx = 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными.*

Алгоритм решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными переменными.

$$g(y)dy - f(x)dx = 0$$

$$g(y)dy = f(x)dx$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Уравнения вида

$$f(x)F(y)dx + g(x)G(y)dy = 0,$$

где $f(x), F(y), g(x), G(y)$ - заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Порядок выполнения работы:

1. Повторить лекционный материал.
2. Получить задание.
3. Выполнить задание.
4. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

1.Решить дифференциальные уравнения

а) $x^2dx+y^2dy=0$;

б) $y^3dy-(x^2+1)dx=0$;

в) $\frac{dx}{x-2}+dy=0\cdot$

2.Найдите частное решение уравнения $ydy+x^2dx=0$, если y=1, x=0.

3. Решите уравнения:

а) $1+y'+y+xy'=0$;

б) $(1+x)\cdot y'=2y$;

в) $\frac{dy}{x^3-1}-\frac{dx}{y^2}=0$;

г) $x^2dy+(y-1)dx=0$;

д) $\cos x\sin ydy=\cos y\sin xdx$.

4. Найти частное решение уравнения

$2y\cdot y'=1-3x^2$, если y=3, x=1.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Практическое занятие № 21

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Цель: формирование умений решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Дидактический раздаточный материал, таблица интегралов, производных

Задание:

Решить дифференциальные уравнения

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x), ,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - данные функции, называются *линейным уравнением первого порядка.*

Алгоритм решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделенными переменными с помощью подстановки $y = u\cdot v$.

Находим $y' = \dfrac{dy}{dx} = u\cdot\dfrac{dv}{dx} + v\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Подставив значения y и y' в уравнение, получаем

$$u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\left(\frac{du}{dx} + P(x)\cdot u\right) = Q(x)$$

Так как искомая функция y подстановкой представлена в виде произведения двух функций, то одну из них можно выбрать и приравнять к нулю. Выберем функцию u так, чтобы

$$\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u = 0$$

Найдем выражение для функции u, затем выражение для функции v. Подставив значения u, v в $y = u \cdot v$, получим искомое решение линейного уравнения.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить лекционный материал.
2. Получить задание.
3. Выполнить задание.
4. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

1. Решить дифференциальные уравнения

а) $(1 + x^2)y' - xy = 2x$;

б) $xy' - y = -x$;

в) $xy' + y = \sin x$.

2. Найдите частное решение уравнения $xy' + y = 3$, если y=0, x=1.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Практическое занятие № 22

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Цель: формирование умений решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Дидактический раздаточный материал, таблица интегралов, производных

Задание:

Решить дифференциальные уравнения

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения.

Его можно представить в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - однородные функции одинакового измерения.

Алгоритм решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка сводится к решению дифференциального уравнения с разделяющимися переменными подстановкой $y = z \cdot x$.

Находим $y' = \dfrac{dy}{dx} = z + x \cdot \dfrac{dz}{dx}$.

Подставив значения y и y' в уравнение, получаем искомое решение однородного уравнения.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить лекционный материал.
2. Получить задание.
3. Выполнить задание.
4. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

1. Решить дифференциальные уравнения

а) $\left(x^2 - 2y^2\right)dx + 2xydy = 0$;

б) $(x - y)ydx - x^2dy = 0$;

в) $x^2y' = y^2 - xy + x^2$.

2. Найдите частное решение уравнения $2xyy' = x^2 + y^2$, если y=2, x=1.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Практическое занятие № 23

Дифференциальные уравнения второго порядка

Цель: формирование умений решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Дидактический раздаточный материал, таблица интегралов, производных

Задание:

Решить дифференциальные уравнения

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

Простейшее уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' = f(x)$$

Уравнения этого вида решаются двукратным интегрированием.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить лекционный материал.
2. Получить задание.

3. Выполнить задание.
4. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:
1.Решить дифференциальные уравнения
а) $y'' = \cos 2x$;
б) $y'' = 3 - 2x$;
в) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 2e^{2x}$.
2.Найдите частное решение уравнения $y'' = \sin 3x$, если $y = \dfrac{4}{9}$ *и* $y' = 0$ *при* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Форма представления результата:
Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 Дифференциальные уравнения первого порядка
Практическое занятие № 24

Решение прикладных задач с применением дифференциальных уравнений первого порядка

Цель: формирование умений решения прикладные задачи с применением дифференциальных уравнений первого порядка

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Дидактический раздаточный материал, таблица интегралов, производных

Задание:

Решить дифференциальные уравнения

Краткие теоретические сведения:

Алгоритм решения задач на составление дифференциальных уравнений.

1. Из переменных величин выделяют функцию и аргумент, устанавливают физический смысл функции и производной. Затем, используют известные сведения из физики, механики, биологии и других дисциплин, выражают зависимость между функцией, ее производной и аргументом, т.е. составляют дифференциальное уравнение.
2. Определяют тип составленного дифференциального уравнения и находят общее решение.
3. Если в задаче даны начальные условия, то получают общее решение.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

1. Скорость тела, выходящего из состояния покоя равна $2t^2$ м/с по истечении *t* секунд. Определить путь который пройдет тело за 5с.

2. Найти уравнение линии, проходящей через точку *(1;3)* и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен *2x-3*.

3. Материальная точка движется так, что скорость её движения пропорциональна пройденному пути. В начальный момент времени точка находилась от начала отсчета на расстоянии *1м*, а через *2с* – на расстоянии *e* м. Найти закон движения материальной точки.

4. В начальный момент $t=0$ имелось 100 бактерий, а в течении 3ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течении 9ч.

5.Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела Т и температурой воздуха T_0. Определить закон изменения температуры тела в зависимости от времени, если опыт проводится при $T_0 = 20^0 C$, причем тело за 20 мин охладилось от 100 до $60^0 C$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.