Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/С.А. Махновский
«01» марта 2018г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.01 МАТЕМАТИКА
для студентов по специальности
21.02.05 Земельно-имущественные отношения
базовой подготовки

Магнитогорск, 2018

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией Математических и естественнонаучных дисциплин
Председатель: Е.С. Корытникова
Протокол №6 от 21.02.2018 г.

Методической комиссией
Протокол №4 от 01.03.2018 г.

Разработчики:
Э.Р.Жигарева,
преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Ю.Н.Садчикова,
преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «МАТЕМАТИКА». Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 21.02.05 Земельно-имущественные отношения и овладению профессиональными компетенциями.

Содержание

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующего федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике, физике, химии, информатике и др.), необходимых в последующей учебной деятельности по общим гуманитарным и социально-экономическим дисциплинам, математическим и естественно-научным, общепрофессиональным дисциплинам.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен уметь:

У1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 1.1. Обрабатывать первичные бухгалтерские документы.

ПК 1.2. Разрабатывать и согласовывать с руководством организации рабочий план счетов бухгалтерского учета организации.

ПК 1.3. Проводить учет денежных средств, оформлять денежные и кассовые документы.

ПК 1.4. Формировать бухгалтерские проводки по учету имущества организации на основе рабочего плана счетов бухгалтерского учета.

ПК 2.1. Формировать бухгалтерские проводки по учету источников имущества организации на основе рабочего плана счетов бухгалтерского учета.

ПК 2.2. Выполнять поручения руководства в составе комиссии по инвентаризации имущества в местах его хранения.

ПК 2.2. Проводить подготовку к инвентаризации и проверку действительного соответствия фактических данных инвентаризации данным учета.

ПК 2.3. Отражать в бухгалтерских проводках зачет и списание недостачи ценностей (регулировать инвентаризационные разницы) по результатам инвентаризации.

ПК 2.4. Проводить процедуры инвентаризации финансовых обязательств организации.

ПК 3.1. Формировать бухгалтерские проводки по начислению и перечислению налогов и сборов в бюджеты различных уровней.

ПК 3.2. Оформлять платежные документы для перечисления налогов и сборов в бюджет, контролировать их прохождение по расчетно-кассовым банковским операциям.

ПК 3.3. Формировать бухгалтерские проводки по начислению и перечислению страховых взносов во внебюджетные фонды.

ПК 3.4. Оформлять платежные документы на перечисление страховых взносов во внебюджетные фонды, контролировать их прохождение по расчетно-кассовым банковским операциям.

ПК 4.1. Отражать нарастающим итогом на счетах бухгалтерского учета имущественное и финансовое положение организации, определять результаты хозяйственной деятельности за отчетный период.

ПК 4.2. Составлять формы бухгалтерской отчетности в установленные законодательством сроки.

ПК 4.3. Составлять налоговые декларации по налогам и сборам в бюджет, налоговые декларации по Единому социальному налогу (ЕСН) и формы статистической отчетности в установленные законодательством сроки.

ПК 4.4. Проводить контроль и анализ информации об имуществе и финансовом положении организации, ее платежеспособности и доходности.

В процессе освоения дисциплины у обучающихся должны формироваться общие компетенции:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Анализировать социально-экономические и политические проблемы и процессы, использовать методы гуманитарно-социологических наук в различных видах профессиональной и социальной деятельности.

ОК 3. Организовывать свою собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 4. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 5. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 8. Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности.

ОК 9. Уважительно и бережно относится к историческому наследию и культурным традициям, толерантно воспринимать социальные и культурные традиции.

Выполнение обучающимися практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;
- приобретение навыков работы с различными приборами, аппаратурой, установками и другими техническими средствами для проведения опытов;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ темы	№ и название работы
Тема 1.1.	1. Вычисление пределов. 2. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей
Тема 1.2.	3. Правила дифференцирования. Техника дифференцирования. 4. Дифференциальное исчисление 5. Исследование функций и построение графиков.
Тема 1.3. **Тема 1.4.**	6. Нахождение неопределенных интегралов методом непосредственного интегрирования. 7. Вычисление определенных интегралов различными методами. 8. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.
Тема 2.1.	9. Решение задач на классическое определение вероятности и на геометрические вероятности.
Тема 2.2.	10. Составление интервального распределения выборки. Множества
Тема 3.1.	11. Действия над матрицами. Обратная матрица 12. Вычисление определителей второго и третьего порядков 13. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
Тема 3.2.	14. Действия над комплексными числами в алгебраической форме 15. Действия над комплексными числами числа в тригонометрической и показательной форме.

ИТОГ	16. Подготовка к экзамену.

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Предел функции. Непрерывность функции

Практическое занятие №1

Вычисление пределов

Цель работы: Проверка усвоения знаний по вычислению пределов функций с помощью раскрытия неопределённостей. Повторить и систематизировать знания по данной теме **.**

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;
- избавляться от неопределенности вида $\frac{0}{0}$;.
- вычислять пределы с помощью теоремы о первом замечательном пределе.

Материальное обеспечение:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2006.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы

Задание: Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x-4}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$;

5) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x^2-25}$;

6) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$.

Порядок выполнения работы:

1. Повторение правил и формул.
2. Объяснение преподавателя.
3. Выполнение задания.
4. Оценка выполненных заданий.
5. Подведение итогов.

Ход работы

Определение предела.

Функция *y=f(x) стремится к пределу b при x → a*, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех x ≠ a из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Определение непрерывной функции. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Вычисление пределов функций основано на применении следующих основных теорем:

ТЕОРЕМА 1. Предел суммы двух функций при x стремящемся к a равен сумме пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x \to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 2. Предел произведения двух функций при x стремящемся к a равен произведению пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x \to a}\left(f(x)g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Предел частного двух функций при x стремящемся к a равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad , \quad \text{если} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

и равен плюс (минус) бесконечности, если предел знаменателя 0, а предел числителя конечен и отличен от нуля.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3)=\lim_{x\to 7}x+\lim_{x\to 7}3=7+3=10.$$

Комментарий. Здесь была использована теорема о пределе суммы.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x)+\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}(-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3\cdot\lim\limits_{x\to 1}x+2}{\lim\limits_{x\to 1}2\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-7}=$$

$$=\frac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7}=5/(-5)=-1.$$

Комментарий. На первом шаге была применена теорема о пределе частного, так как предел знаменателя не равен нулю. На втором шаге использовалась теорема о пределе суммы для числителя и знаменателя дроби. После была применена теорема о пределе произведения.

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Знаменатель и числитель дроби при *x* стремящемся к 2 стремятся к нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь неприменима. В таких случаях нужно попытаться упростить дробь. Имеем

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

Это преобразование справедливо при всех значениях *x*, отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=$$
$$=2+2=4.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ПЕРВОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Форма предоставления результата - выполненные упражнения.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Предел функции. Непрерывность функции

Практическое занятие №2

Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей

Цель работы: Проверка усвоения знаний по вычислению пределов функций с помощью раскрытия неопределённостей. Повторить и систематизировать знания по данной теме **.**

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;

- избавляться от неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$;.

Материальное обеспечение:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2006.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы

Задание:

Вычислить пределы: 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+n^2-3n^3+2}{4n^3+n+5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-5n^2+4}{n^3+3}$;

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{16n^6+1}-\sqrt[3]{8n^2+5}+\sqrt{n+4}}{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt{25n^3+7}}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n^3+1}}}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^2+5}}$

Порядок выполнения работы:

6. Повторение правил и формул.
7. Объяснение преподавателя.
8. Выполнение задания.
9. Оценка выполненных заданий.
10. Подведение итогов.

Ход работы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{если } k=m\\ 0, & \text{если } k<m\\ \infty\cdot\operatorname{sgn}\frac{a_0}{b_0}, & \text{если } k>m\end{cases}$$

Пример.. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n+1}{n^2-2n^3+5}$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n+1}{n^2-2n^3+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{-2n^3}=-\infty\cdot$$

Следует отметить, что формулы (1.5) и (1.6) справедливы не только для многочленов целой степени, но и для многочленов дробной степени, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^a}=0$ для любого a>0.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^{n-1}-7\cdot 5^{n+1}}{8\cdot 5^n+3\cdot 4^{n+2}}$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^{n-1}-7\cdot 5^{n+1}}{8\cdot 5^n+3\cdot 4^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-7\cdot 5\right)}{5^n\left(8+3\cdot 4^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}=-\frac{35}{8},$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}=0 \quad и \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n}=0.$

Здесь также можно было использовать идею, что главный член это старший член. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^{n-1}-7\cdot 5^{n+1}}{8\cdot 5^n+3\cdot 4^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-7\cdot 5^{n+1}}{8\cdot 5^n}=-\frac{35}{8},$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Производная.

Практическое занятие №3

Правила дифференцирования. Техника дифференцирования

Цель: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;

-вычислять производные сложных функций.

Материальное обеспечение :

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2006.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Задание:

Найти значение производной данной функции в данной точке.

1) $y = 2x^2 – 3x + 5$, $x = 0$

2) $y = 7x^3 – 6 + 3x^2$, $x = 0$;

16) $y = (x – 3x^2 + 5)^3$, $x = 0$;

17) $y = (7x – 1 + 4x^3)^5$, $x = 0$;

3) $y = 12 - 3x^3 + 2x^2$, $x = 0$;
4) $y = x^3 - 4x^2 + x$, $x = 0$;
5) $y = 21x + 3x^5 + 7x^2 - 5$, $x = 0$;
6) $y = x^3 \cdot 3x^{0,5}$, $x = 1$;
7) $y = (x + 1) \cdot 2x^3$, $x = 1$;
8) $y = 4x \cdot (7x^2 + 5)$, $x = 1$;
9) $y = (2x^2 + 3x) \cdot (x - 1)$, $x = 1$;
10) $y = (6x - 3x^2) \cdot (x^2 + 2)$, $x = 1$;
11) $y = \dfrac{x+1}{x^2}$, $x = 1$;
12) $y = \dfrac{x}{x-1}$, $x = 0$;
13) $y = \dfrac{2x^2}{3x+5}$, $x = 0$;
14) $y = \dfrac{7-2x}{x^3}$, $x = 1$;
15) $y = \dfrac{7x}{3-2x^2}$, $x = 0$;
18) $y = (x^3 + 1)^2$, $x = 0$;
19) $y = (1 - 2x)^7$, $x = 0$;
20) $y = (4x + 5x^2 - 7)^2$, $x = 0$;
21) $y = \sqrt{x+1}$, $x = 0$;
22) $y = \sqrt{2x^2+3}$, $x = 0$;
23) $y = \sqrt{4-7x^2}$, $x = 0$;
24) $y = \sqrt{3x^3}$, $x = 1$;
25) $y = \sqrt{2x^5}$, $x = 1$;
26) $y = \dfrac{1}{x+1}$, $x = 0$;
27) $y = \dfrac{1}{3-2x}$, $x = 0$;
28) $y = \dfrac{1}{4x-3x^2}$, $x = 1$;
29) $y = \dfrac{1}{5x^3+3}$, $x = 0$;
30) $y = \dfrac{1}{6-7x^2}$, $x = 0$.

Найти производные сложных функций:

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin 4x + arccos^2 x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Теоретический материал и примеры нахождения производной сложной функции.

Определение: Производной функции f(x) ($f'(x_0)$) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования.

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

1) $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$

2) $(cf(x))' = c\cdot f'(x)$, где $c-const$

3) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.

2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x)$$
$$= -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)'$$
$$= \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\left(3x+5x^2\right)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}/$$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования$(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x,$ для второй функции $u = 5x.$

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(arcsinu)' = \frac{u\prime}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u\prime}{\sqrt{1-u^2}}$

$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' =$

$\frac{3}{5\ \sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

5.$f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u\prime}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f^{'}(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)^{'} = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$$u = 1 - e^{2x}$$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})'$$
$$= -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x)$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Производная.

Практическое занятие № 4

Дифференциальное исчисление

Цель работы: Научиться применять производную функции при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.;

- решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции .

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $a)[-1; 1]$;б) $[0; 3]$.
2. Имеется проволока длиной a метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

Краткие теоретические сведения:

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.

Ход работы:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на промежутке :$a)[-2; -0{,}5]$;б) $[1; 3]$.

Решение. Находим критические точки функции.

$$f^{/}(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 4)^{|} = -x^2 - 6x = -6x(x + 1);$$

$f^{/}(x) = 0$; $-6x(x + 1)$=0; $x = 0$ и $x = -1$. получили две критические точки: $x = 0$ и $x = -1$.

a) В промежутке $[-2; -0{,}5]$ лежит одна из критических точек:x= -1. Так как $f(-2) = 8, f(-1) = 3. f(-0{,}5) = 3{,}5,$ то наименьшее значение функция $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ достигает в точке $x = -1$ и равно 3, а наибольшее - в точке $x = -2$ и равно 8. Кратко это можно записать так: $\min_{[-2;-0{,}5]} f(x) = f(-1) = 3. \max_{[-2;-0{,}5]} f(x) = f(-2) = 8.$

б) Отрезку $[1; 3]$ не принадлежит ни одна из критических точек, поэтому найдём значения функции на концах отрезка: $f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = -1. [1; 3];f(3) = -2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = -77.$. Кратко это можно записать так:

$\min_{[\quad |1;3]} f(x) = f(3) = -7; . \max_{[1;3]} f(x) = f(1) = -1.$

2 Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найдите эти слагаемые.

Решение. Пусть заданное число представлено в виде суммы двух слагаемых x и y,т.е.86$= x + y$. Выразим второе слагаемое через *x:* *y=86-x.*Запишем произведение этих чисел в виде функции от x:$f(x) = x \cdot (86 - x)$ Найдём значение х, при котором функция $f(x) = x \cdot (86 - x)$ достигает максимума..Найдём производную$f^{/}(x)$ и приравняем её нулю. $f^{/}(x)$ =$(x \cdot (86 - x))^{/} = (86x - x^2)^{/}$=$86 - 2x = 2(43 - x)$,

$$2(43 - x) = 0, x = 43.$$

Определим второе слагаемое: $y = 86 - x = 86 - 43 = 43.$

Ответ: $x = 43$; $y = 43.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Производная

Практическое занятие № 5

Исследование функций и построение графиков

Цель работы: Научиться исследовать функции с помощью производной и строить графики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-определять промежутки монотонности функций с помощью производной;

- находить экстремумы функции;

-проводить исследование функции по общей схеме;

-строить графики функций, используя проведенное исследование.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задания:

Исследуйте функции по общей схеме и постройте ее график.

1) $f(x) = 2x^3 – 3x^2 – 12x + 1$;
2) $f(x) = 2x^3 – 15x^2 + 24x +3$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 – 12x – 1$;
4) $f(x) = – x^3 – 3x^2 + 9x – 2$;
5) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2$.

Теоретический материал и примеры применения производной к исследованию функции

Общая схема исследования функции и построения её графика.

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки.
3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
4) Записать интервалы, на которых функция возрастает $f'(x) > 0$ и убывает $f'(x) < 0$.

5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1) Найти вторую производную.
2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
4) Если $f''(x) > 0$, то график выпуклый вниз. Если $f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх.
5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Если $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите функцию.
2. Используя общую схему, исследуйте функцию.
3. По результатам исследования постройте график функции

Ход работы:

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это не вызывает затруднения) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции .
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Построить график функции

Пример : Исследуем функцию $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ и построим её график.

1). Поскольку знаменатель положителен при всех x, область определения функции -- вся ось Ox.

2). Функция $f(x)$ -- нечётная, поскольку при смене знака x числитель меняет знак, а знаменатель остаётся без изменения, откуда $f(-x)=-f(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

Периодической функция не является.

3). Поскольку область определения этой элементарной функции -- вся вещественная ось, вертикальных асимптот график не имеет.

4). Найдём наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$ в виде $y=kx+b$. Имеем:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+0}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^3}{x^2+1}-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0.$$

Таким образом, асимптотой как при $x\to-\infty$, так и при $x\to+\infty$ служит прямая $y=1x+0=x$.

5). Найдём точки пересечения с осями координат. Имеем: $f(0)=0$, причём $x=0$ -- единственное решение уравнения $f(x)=0$. Значит, график $y=f(x)$ пересекает сразу и ось Ox, и ось Oy в начале координат.

Очевидно, что $f(x)>0$ при $x>0$ и $f(x)<0$ при $x<0$.

6). Найдём производную:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

Очевидно, что $f'(x)\geqslant 0$ при всех $x\in\mathbb{R}$; единственная точка, в которой $f'(x)=0$ -- это $x=0$. Значит, функция $f(x)$ возрастает на всей оси Ox, а в стационарной точке $x=0$ имеет горизонтальную касательную.

7). Найдём вторую производную:

$$f''(x)=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-(x^4+3x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Знаменатель этой дроби положителен при всех x. Числитель имеет корни $x=0$ и $x=\pm\sqrt{3}$, при этом $f''(x)>0$ на интервалах $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(0;\sqrt{3})$ -- на этих интервалах функция выпукла. На интервалах $(-\sqrt{3};0)$ и $(\sqrt{3};+\infty)$ выполняется обратное неравенство $f''(x)<0$, здесь функция вогнута. Все три точки, в которых $f''(x)=0$, то есть точки $-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$, являются точками перегиба.

8). Теперь мы можем построить график с учётом всех предыдущих пунктов исследования функции. График имеет такой вид:

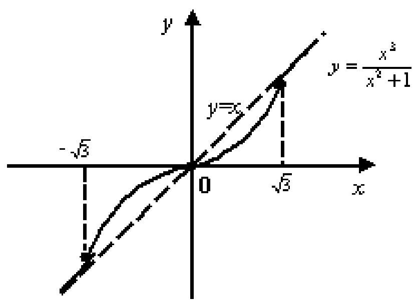


График функции $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

Форма предоставления результата - выполненные упражнения.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Неопределенный интеграл.

Практическое занятие № 6

Нахождение неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования

Цель работы: Проверить на практике знание понятия неопределённого интеграла, умение вычислять табличные интегралы

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить неопределённые интегралы непосредственно, используя формулы табличных интегралов;

- находить неопределённые интегралы путём введения новой переменной.

Материальное обеспечение:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2006.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы

Задания:

1. Вычислить определенный интеграл непосредственно:

1) $\int_0^2 3x^2dx$;

2) $\int_0^1 x^4dx$;

3) $\int_0^1 4t^3dt$;

4) $\int_0^1 x^5dx$;

5) $\int_0^1 2x^3dx$;

6) $\int_2^4 (x^3-3x)dx$.

7) $\int_0^1 \left(4x^4-2x\right)dx$;

8) $\int_0^1 \left(x^3-6x^5\right)dx$;

9) $\int_0^1 \left(2x^3+2x\right)dx$;

10) $\int_0^1 (5x-3)dx$;

11) $\int_0^1 \left(2x^2+5\right)dx$.

12) $\int_0^1 (2x+e^x)dx$

2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки:

1. $\int e^{5x-1}dx$; 2. $\int \cos\frac{x}{3}\,dx$; 3. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}}dx$; 4. $\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

Порядок выполнения работы:

Внимательно изучите подынтегральную функцию и ,используя конспекты лекций, определите способ интегрирования.

Ход работы:

1. Вычислить $\int (5\sqrt{x}-4x)\,dx$.

В данном случае – приводим к табличному виду

$$\left(\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\right):$$

$$\int (5\sqrt{x} - 4x)dx = 5\int x^{1/2} dx - 4\int x dx =$$

$$= 5\frac{x^{0,5+1}}{0,5+1} - 4\frac{x^2}{2} + C = \frac{10}{3} x^{1,5} - 2x^2 + C \cdot$$

2. Вычислить $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx \cdot$

Здесь для приведения к табличному виду

$$\left(\int \sin x dx = -\cos x + C; \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C\right)$$

преобразуем подынтегральное выражение к сумме двух слагаемых:

$$\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx = \int \left(\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = -\cos x - \operatorname{ctg} x + C$$

.

Во многих случаях для приведения к табличному виду можно использовать замену переменной (подстановку).

3. Вычислить интеграл $\int 4^{2x-1} dx \cdot$

Здесь для применения табличной формулы $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ необходимо преобразовать показатель степени $2x - 1$. Введем подстановку: $u = 2x - 1$, откуда $du = 2dx$ и $dx = \frac{1}{2} du \cdot$ Тогда:

$$\int 4^{2x-1} dx = \left\rangle \begin{matrix} u = 2x - 1 \\ du = 2dx \\ dx = 0,5du \end{matrix} \right\langle = \int 4^u \cdot 0,5du = 0,5\int 4^u du = 0,5\frac{4^u}{\ln 4} =$$

$$= 0,5\frac{4^{2x-1}}{\ln 4} + C \cdot$$

4. Вычислить интеграл $\int \sin 5x dx \cdot$

$$\int \sin 5x dx = \left\rangle \begin{array}{l} u = 5x \\ du = 5dx \\ dx = \dfrac{1}{5} du \end{array} \right\langle = \frac{1}{5}\int \sin u du = -\frac{1}{5}\cos u = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$$

5. Вычислить интеграл $\int \dfrac{xdx}{x^2-8}$.

$$\int \frac{xdx}{x^2-8} = \left\rangle \begin{array}{l} u = x^2 - 8 \\ du = 2xdx \\ xdx = \dfrac{1}{2} du \end{array} \right\langle = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(x^2-8) + C.$$

(Интеграл $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + C$ – табличный.)

6. Вычислить интеграл $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}} = \left\rangle \begin{array}{l} u = 5 - x^2 \\ du = -2xdx \\ xdx = -\dfrac{1}{2} du \end{array} \right\langle = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{3}\int u^{-1/2} du =$$

$$= -u^{1/2} = \sqrt{5-x^2} + C.$$

7. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{(8-3x)^2}$.

$$\int \frac{dx}{(8-3x)^2} = \left\rangle \begin{array}{l} u = 8 - 3x \\ du = -3dx \\ dx = -\dfrac{1}{3} du \end{array} \right\langle = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3}\int u^{-2} du =$$

$$= \frac{1}{3u} = \frac{1}{3(8-3x)} + C.$$

8. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left\rangle \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \right\langle = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

9. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{8x^2+3}$.

Приведем интеграл к табличной формуле

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{8x^2+3} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2+\frac{3}{8}} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{8}}} + C = 1{,}63 \operatorname{arctg} 1{,}63x + C.$$

Форма предоставления результата - выполненные упражнения.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.4 Определённый интеграл

Практическое занятие №7

Вычисление определенных интегралов различными методами

Цель: Повторить определение определённого интеграла, его свойства , методы нахождения определённого интеграла.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить определённый интеграл непосредственно;

- находить определённый интеграл методом подстановки;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2006.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Задание:

Вычислите определенный интеграл.

1) $\int (5+7x)^3 dx$; 6) $\int \sqrt{5+7x}\,dx$; 11) $\int \sin(2x-3)dx$;

2) $\int (2x-3)^4 dx$; 7) $\int \sqrt{2x-3}\,dx$; 12) $\int \cos(1+3x)dx$;

3) $\int (1+3x)^2 dx$; 8) $\int \sqrt{1+3x}\,dx$; 13) $\int \frac{dx}{5+7x}$;

4) $\int(5x+3)^5 dx$;   9) $\int\sqrt{5x+3}dx$;   14) $\int\frac{dx}{\sin^2(5x+3)}$;

5) $\int(4x-1)^6 dx$;   10) $\int\sqrt{4x-1}dx$;   15) $\int\frac{dx}{\cos^2(4x-1)}$.

Краткие теоретические сведения :гарантируются конспектом лекций.

Порядок выполнения работы:

1. Найти первообразную подынтегральной функции.\
2. Воспользоваться формулой Ньютона- Лейбница.
3. В случае непосредственного интегрирования найти приращение первообразной.
4. В случае введения новой переменной величины найти значения верхнего и нижнего пределов интегрирования и после этого найти интеграл.

Ход работы:

1. Вычислить интеграл $\int_2^4 (x^2+3x)dx$.

Первообразная: $\int(x^2+3x)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2$.

Отметим, что произвольную константу *C* можно здесь не записывать, так как она в следующей операции уничтожается.

По формуле Ньютона–Лейбница:

$$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 = \left(\frac{4^3}{3}+\frac{3}{2}4^2\right)-\left(\frac{2^3}{3}+\frac{3}{2}2^2\right)=\frac{110}{3}\approx 36{,}67.$$

Вычисление значения интеграла обычно принято записывать цепочкой,
без выделения первообразной и формулы Ньютона–Лейбница.

2 Вычислить интеграл $\int_0^1 (x+e^x)dx$.

$$\int_0^1 (x+e^x)dx = \left(\frac{x^2}{2}+e^x\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2}+e^1\right)-(0+e^0) =$$

$$= 0{,}5+e-1 = 0{,}5+e \approx -0{,}5+2{,}718 = 2{,}218.$$

3. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \; dt.$$

Для этого сделаем замену $x=\varphi(t)=\sin t$, откуда $dx=\varphi'(t)dt=\cos t\; dt$. Кроме того, при $t=0$ имеем $x=\sin 0=0$, а при $t=\frac{\pi}{2}$ имеем $x=\sin\frac{\pi}{2}=1$. Получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \; dt = \left| \begin{array}{l} \sin t = x \\ \cos t\; dt = dx \\ t=0 \Rightarrow x=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=1 \end{array} \right| = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла.

Теорема . *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют на отрезке* $[a;b]$ *непрерывные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$. *Тогда имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Замечание. Заметим, что эту формулу можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx,$$

где выражение

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

называется *внеинтегральным членом*. Введя обозначения $u = f(x)$ и $v = g(x)$, мы можем переписать формулу интегрирования по частям в более коротком виде:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

1. Вычислим интеграл $\int_0^1 x\,e^{2x}dx.$

Выгодно взять $u = x$ и $dv = e^{2x}dx$, так что получаем:

$$\int_0^1 x\,e^{2x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{2x}dx \\ du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

При этом возникший по дороге внеинтегральный член

$x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1$

мы вычислили так:

$$x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} - 0 \cdot \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} = \frac{e^2}{2}.$$

Особенно ясно проявляется указанное в замечании преимущество в том случае, если формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз

2. Вычислим интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx,$$

применив формулу интегрирования по частям два раза подряд. Имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \sin x \, dx \\ du = 2x \, dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = \underbrace{-x^2 \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx =$$

$$= \underbrace{x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Если бы мы сразу же не вычисляли значения подстановок во внеинтегральных членах, то нам пришлось бы несколько раз при нахождении первообразных выписывать значения этих внеинтегральных членов $-x^2 \cos x$ и $x \sin x$, а здесь мы сразу же заменили первую подстановку на 0, а вторую на $\frac{\pi}{2}$, что сэкономило некоторое место в записи и наши усилия.

3. Вычислить интеграл $\int x \cos x dx$.

Интегралы такого типа вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu \cdot$

$$\int x\cos xdx = \left\rangle \begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = \cos xdx & \to & v = \sin x \end{matrix} \right\langle = x\sin x - \int \sin xdx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

4. Вычислить интеграл $\int x^2 \ln xdx \cdot$

$$\int x^2 \ln xdx = \left\rangle \begin{matrix} u = \ln x & \to & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx & \to & v = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right\langle = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C \cdot$$

Форма предоставления результата - выполненные упражнения.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.4 Определённый интеграл

Практическое занятие № 8
Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные и определенные интегралы методом подстановки;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите интегралы

1) $\int 3^{4x^2} x dx$

2) $\int_2^4 \frac{3xdx}{(x^2-1)^3}$

3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x \cdot cosxdx$

4) $\int (x^2 + 5x + 7) lnx \cdot dx$

5) $\int (x^2 + 4x + 3) e^{2x} dx$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернуться к старой переменной.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей Uи dV. Затем, после нахождения dUи V,использовать формулу интегрирования по частям.

   Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где $P(x)$- многочлен, k- число. Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за dV.

   Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$. Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U.

   Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx, \int e^{ax}cosbxdx$, где aи bчисла. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1)$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\dfrac{dt}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{15dt}{-3t^4}$$

$$= -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C$$

$$= \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

2) $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} == \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0{,}4 \quad t_B = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt|_0^1 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^3x} = \begin{bmatrix} cosx = t \\ dcosx = dt \\ -sinxdx = dt \\ sinxdx = -dt \\ x_H = 0 \;\; t_H = cos0 = 1 \\ x_B = \dfrac{\pi}{3} t_B = cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2}|_1^{0,5}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 0{,}25} - \frac{1}{2} = 2 - 0{,}5 = 1{,}5$$

4) $\int (x^3-4x)lnx\cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U=lnx,\ dV=(x^3-4x)dx.$

$$dU=\frac{1}{x}dx,\qquad V=\int (x^3-4x)dx=\frac{x^4}{4}-2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3-4x)lnx\cdot dx=lnx\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)-\int\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\frac{1}{x}dx=$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)-\int\left(\frac{x^3}{4}-2x\right)dx=lnx\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)-\frac{x^4}{16}+x^2+C$$

5) $\int (x^2-2x)\cos 4x\,dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U=x^2-2x,\ dV=cos4xdx.$

$$dU=(2x-2)dx,\qquad V=\int cos4xdx=\frac{1}{4}sin4x$$

$$\int (x^2-2x)\cos 4x\,dx=(x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x-\int\frac{1}{4}sin4x(2x-2)dx=$$

$$(x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x-\frac{1}{4}\int sin4x(2x-2)dx=\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x$$

$$-\frac{1}{2}\int sin4x(x-1)dx=$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U=x-1,\ dV=sin4xdx.$

$$dU=dx,\qquad V=\int sin4xdx=-\frac{1}{4}cos4x$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x-\frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right)-\int -\frac{1}{4}cos4xdx=$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x-\frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right)+\frac{1}{4}\int cos4xdx=$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x+\frac{1}{8}((x-1)(cos4x)-\frac{1}{8}\int cos4xdx=$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x+\frac{1}{8}((x-1)(cos4x)-\frac{1}{32}sin4x+C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Вероятность событий.

Практическое занятие №9

Решение задач на классическое определение вероятности и на геометрические вероятности

Цель: Проверить на практике знание понятия классического определения вероятности.

Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-вычислять число исходов, благоприятствующих наступлению рассматриваемого события , используя формулы комбинаторики;

- вычислять вероятность события по классическому определению вероятности **.**

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Задача 1. В ящике в случайном порядке разложено двадцать деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали.

Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из этих деталей окажется стандартной.

Задача 2. Станция метрополитена оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для первого эскалатора равна 0,9, для второго – 0,95, для третьего – 0,85.

Найти вероятность того, что в течение дня произойдет поломка не более одного эскалатора.

Задача 3. На складе имеются 8 изделий, 3 из них изготовлены заводом N.

Найти вероятность того, что среди 4 наудачу взятых изделий окажется не более половины, изготовленных заводом N.

Задача 4. У распространителя имеется 20 билетов книжной лотереи, среди которых 7 выигрышных. Куплено 3 билета.

Найти вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный.

Задача 5. Устройство секретного замка включает в себя 4 ячейки. В первой ячейке осуществляется набор одной из четырех букв ***A, B, C, D,*** в трех осталь-ных – одной из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться).

Чему равна вероятность того, что замок будет открыт с первой попытки?

Задача 6. Имеются две урны. В первой находятся: один белый шар, 3 черных и 4 красных; во второй – 3 белых, 2 черных и 3 красных. Из каждой урны наугад извлекают по одному шару, после чего сравнивают их цвета.

Найти вероятность того, что цвета извлеченных шаров совпадают.

Задача 7. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных.

Найти вероятность того, что два наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Задача 8. Два охотника по одному разу стреляют в волка. Для первого охотника вероятность попадания в волка 0,7, для второго – 0,8.

Определить вероятность того, что в волка попадет хотя бы один охотник.

Задача 9. Ведется стрельба по самолету, уязвимым агрегатами которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того чтобы вывести из строя са-молет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. При дан-ных условиях стрельбы вероятность поражения первого двигателя равна P_1, второго двигателя - P_2, кабины пилота - P_3. Агрегаты самолета поражаются не-зависимо друг от друга.

Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

Задача 10. По мишени производятся три выстрела. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно $P_1 = 0{,}4$;

$P_2 = 0{,}5$; $P_3 = 0{,}7$.

Какова вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени окажется точно одна пробоина.

Задача 11. Студент знает 20 из 25 вопросов программы.

Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменато-ром три вопроса.

Задача 12. Определить вероятность того, что партия из ста изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается наличие бракован-ных изделий не более одного из пятидесяти.

Задача 13. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены его внимания потребует первый станок, равна 0,7, второй – 0,75, третий – 0,8.

Найти вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потре-буют не менее двух станков.

Задача 14. В связке имеются пять различных ключей, из которых только одним можно отпереть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим, больше не используется.

Найти вероятность того, что для отпирания двери будет использовано не более двух ключей.

Задача 15. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4.

Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.

Задача 16. Студенты выполняют экзаменационную работу в классе кон-тролирующих машин. Работа состоит из трех задач. Для получения положи-тельной оценки достаточно решить две. Для каждой задачи зашифровано пять ответов, из которых только один правильный. Студент N плохо знает материал и поэтому выбирает ответы для каждой задачи наудачу.

Какова вероятность того, что он получит положительную оценку?

Задача 17. В электрическую цепь включены параллельно два прибора. Вероятность отказа первого прибора равна 0,1, второго 0,2.

Найти вероятность того, что откажет хотя бы один прибор этой цепи.

Задача 18. Предприятием послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй – 0,95, на третьей – 0,8, на четвертой – 0,6.

Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

Задача 19. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый и второй вопросы одинакова, и равна 0,9, на третий – 0,8.

Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необ-ходимо ответить, по крайней мере, на два вопроса билета.

Задача 20. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для каждой игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей, мячи бывшие в употреблении, от ни разу не использованных не отличаются.

Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется мячей, не побывавших в игре?

Задача 21. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Известно, что каждое из них имеет вероятность отказа за некоторое время, равную 0,2.

Требуется определить вероятность:

а) того, что откажет только одно устройство;

б) не откажет ни одно из устройств.

Задача 22. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу.

Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в четыре места.

Задача 23. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу 4 карты.

Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

Задача 24. Вероятность поражения стрелком мишени при каждом выстреле равна 0,9.

Найти вероятность того, что в серии из четырех выстрелов будет меньше четырех промахов.

Задача 25. Двое играют в шахматы. Игра проводится до выигрыша одним из игроков двух партий подряд. Вероятность выигрыша партии каждым игроком равна 0,5 и не зависит от исхода предыдущих партий.

Найти вероятность того, что игра окончится до четвертой партии.

Задача 26. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,95.

Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включать зажигание не более трех раз.

Задача 27. Продукция может быть получена из доброкачественных деталей, изготовленных из заготовок с применением двух технологий; в первом случае заготовка проходит три технологические операции, вероятности получения брака при каждой из которых равны соответственно 0,1, 0,2, 0,3. Во втором случае имеются две операции, вероятности получения брака при которых одинаковы и равны 0,3.

Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции из заготовки, если в первом случае для доброкачественной детали вероятность получения из нее первосортной продукции равна 0,9, а во втором 0,8.

Задача 28. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за время ***T*** первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8.

Найти вероятности того, что в промежутке времени ***T*** будут безотказно работать:

а) только один элемент;

б) ровно два элемента.

Краткие теоретические сведения:

В данном типовом расчете предлагается 28 задач по каждой из 6 тем, пере-численных ниже. Перед задачами даны методические указания и там, где необходимо – примеры. Темы заданий

1. Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схемы.
2. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается Р(А) и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

При решении задач иногда удобно найти вероятность противоположного события $\overline{A}$*, а затем найти вероятность события А по формуле* $P(A) = 1 - P(\overline{A})$*. Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из* *них, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

События А и В называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. *Для независимых событий появление одного не меняет вероятности появления другого:* $P(A/B) = P(A)$ *и* $P(B/A) = P(B)$ (*см. с. 10-17 учебного пособия*).

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы: **1)** Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие А-«номер набран верно».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!}$=$\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}$=720.
   Итак, n=720
3. Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2) Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие А-«оба шара окажутся чёрными».

2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!}$=$\frac{20!}{2!\cdot 18!}$=$\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!}$=190.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}$=$\frac{8!}{2!\cdot 6!}$=$\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!}$=28
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

3)На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК ?

Решение.

1. Событие А-«получится слово ЗАМОК».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов(букв): n=P_5 $= 5!$=5·4· $3 \cdot 2 \cdot 1$=120.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$$

Форма предоставления результата - выполненные упражнения.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Элементы математической статистики. Теория множеств

Практическое занятие №10

Составление интервального распределения выборки. Множества

Цель работы: Рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Составлять распределение относительных частот.
- Строить полигоны частот и относительных частот.
- Строить гистограмму по заданному статистическому распределению:
- Находить статистические оценки генеральной совокупности, заданной вариационным рядом:
- Находить статистические характеристики выборки.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

3. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

.

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

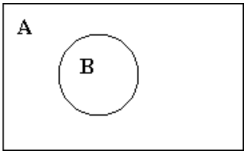
4.Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

.

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени;p_2= числу букв в Вашей фамилии;p_3= числу букв в имени Вашего отца.

1)Пусть A и B – множества, изображенные на рисунке:



укажите объединение, пересечение и разность этих множеств.
2)Заданы множества A = {3, 7, 8, 9, 2}, B = {1, 5, 6, 7, 8, 9} и C = {1, 7, 18, 19, 12}. Какое из множеств имеет наибольшую мощность.
3)Заданы множества A = {-3, 2, 5, 9, 12} и B = {1, 5, 6, 7, 8, 9}. Задайте объединение, пересечение и разность множеств A и B.
4)На факультете филологии и журналистики учатся студенты, получающие стипендию, и студенты, не получающие стипендию. Пусть A – множество всех студентов факультета; B – множество студентов факультета, получающих стипендию. Укажите, что собой представляет объединение, пересечение и разность множеств A и B.
5)Пусть A – множество всех студентов-филологов университета; B – множество студентов первокурсников. Укажите, какие студенты содержатся во множестве A\B.

Краткие теоретические сведения

Множество - это совокупность, набор элементов, объединенных общими свойствами.
Множества обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C…, а элементы множества строчными латинскими буквами a, b, c… .
Мощностью конечного множества называется количество его элементов. Мощность множества A обозначается m (A).

Объединением множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих по крайней мере одному из данных множеств (т. е. либо A, либо B, либо одновременно и A и B). Обозначают $A \bigcup B$ и читают "объединение A и B".
Пересечением множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих одновременно и A и B. Обозначают $A \bigcap B$ и читают "пересечение A и B".
Разностью множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B. Обозначают A\B и читают "разность A и B".

Порядок выполнения работы:

1Прочитав условие предложенной задачи,по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик.выборки.

Ход работы:

1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

.

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12;$$

$$w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40;\ w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28;\ w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20.$$

Следовательно,

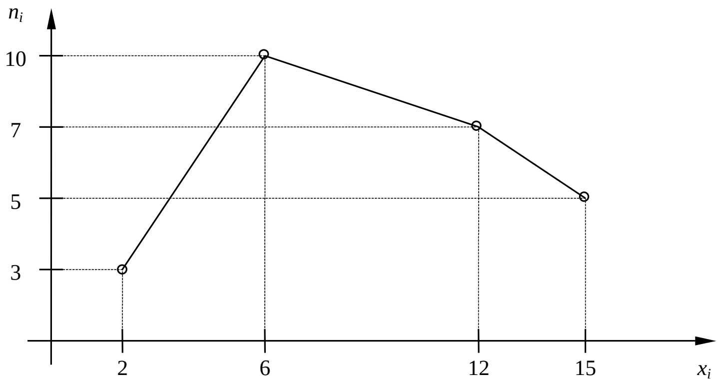
x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

.

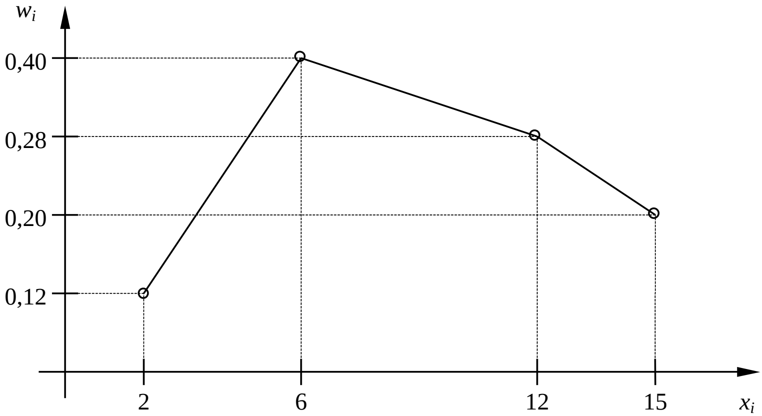
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1.$

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i

1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

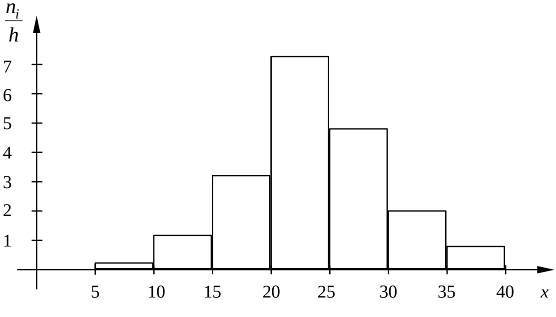
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_{\Gamma} = \overline{X_{\Gamma}^2} - \left(\overline{X}_{\Gamma}\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_{\Gamma}^2} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_{\Gamma} = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4{,}5.$$

Размах вариации R: в примере $x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$, поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1{,}82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11{,}45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Элементы математической статистики. Теория множеств

Практическое занятие № 11

Действия над матрицами. Обратная матрица

Цель работы: Формирование умений выполнять операции над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции над матрицами;
- находить обратную матрицу.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задания:

1. Даны квадратные матрицы второго порядка $K = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислить значения выражений: а) $K+M$; б) $3M-K$; в) $K \cdot M$; г) K^2; д) M^2.
2. Найти значение выражения $f(A) = A^2 - 3 \cdot A + 7$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Найти значение матрицы A^3, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Краткие теоретические сведения:

1. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы А на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы, которых $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $5A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$.

Следствия.

1) Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, то есть $0 \cdot A = O$.

2. Сложение матриц. Суммой двух матриц А и В одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ *для* $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

В частном случае $A+O=A$.

3. Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A\text{-}B=A+(-1)B$.

4. Умножение матриц. Умножение матрицы А на матрицу В определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Тогда *произведением матриц* $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj},$$

$i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$.

<u>Пример</u>. Вычислить произведения матриц A и B,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Выясним, возможно ли умножение данных матриц: $\underset{2\times3}{A} \cdot \underset{3\times3}{B} = \underset{2\times3}{C}$. Вычислим элементы матрицы –произведения *C:*

$C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

<u>Пример</u>. Вычислить произведение матриц: а) *A* и *B*; б) *B* и *A,*

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Выясним, возможно ли умножение данных матриц: $\underset{2\times3}{A} \cdot \underset{3\times2}{B} = \underset{2\times2}{C}$. Вычислим элементы матрицы –произведения *C:*

$C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$.

б) Выясним, возможно ли умножение данных матриц: $\underset{3\times2}{B} \cdot \underset{2\times3}{A} = \underset{3\times3}{D}$.

Вычислим элементы матрицы – произведения *D*: $D = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вывод: $AB \neq BA$.

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами:

1) $A + B = B + A$.
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
4) $A(B + C) = AB + AC$.
5) $(A + B)C = AC + BC$.
6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
7) $A(BC) = (AB)C$.
8) $A \cdot E = E \cdot A = A$.
9) $A \cdot B \neq B \cdot A$.

5. Возведение в степень. Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы *A* называется произведение *m* матриц, равных *A*, т.е. $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{m}$.

Операция возведение в степень определяется только для квадратных матриц.

Следствия. 1) $A^{\circ} = E;$ 2) $A^1 = A;$ 3) $A^m \cdot A^k = A^{m+k;}$; 4) $(A^{m)^k} = A^{mk}.$

Пример. Найти A^2, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1 Матрицы

Практическое занятие №12
Вычисление определителей второго и третьего порядков

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:
- вычислять определители второго порядка;
- вычислять определители третьего порядка.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

Краткие теоретические сведения:

Определителем квадратной матрицы второго порядка(определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка(определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Порядок выполнения работы:

1 Запишите определитель, определите какого он порядка.

2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Ход работы:

Вычислить определители:

2) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

3) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot$
$1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

4) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot$
$(-3) \cdot 5 -$
$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7)$
$= 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1 Матрицы

Практическое занятие № 13
Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.
Выполнив работу, Вы будете:

уметь:
- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;
решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.
Задание:
Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:
Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$
Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$
Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.
$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$
Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца

коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2. Запишите и вычислите определитель системы.
3. Вычислите определители каждой неизвестной.
4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{vmatrix}=-5-30+0+45-0-20=-10$$
$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 5\end{vmatrix}=-5+0+30-0-20-5=0$$
$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{10}=2;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-10}{10}=-1;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{0}{10}=0$$
Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема3.2 Комплексные числа

Практическое занятие № 14

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Цель: Проверить на практике знание понятия комплексного числа, Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в алгебраической форме;

-выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

1. Даны комплексные числа : z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6). Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:
   1) $z_1 + z_2$;
   2) $z_2 - z_3$;
   3) z_1 / z_3;
   4) $z_2 * z_3$;
   5) z_1^5.
3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

Теоретические сведения:

Комплексные числа записываются в виде: $a+bi$. Здесь a и b – *действительные числа*, а i – *мнимая единица, т.е.* $i^2 = -1$. Число a называется *абсциссой,* а b – *ординатой* комплексного числа $a+bi$. Два комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряжёнными* комплексными числами.

Основные договорённости:

1. Действительное число a может быть также записано в форме комплексного числа: $a+0\,i$ или $a-0\,i$. Например, записи $5+0\,i$ и $5-0\,i$ означают одно и то же число 5 .

2. Комплексное число $0+bi$ называется *чисто мнимым числом*. Запись bi означает то же самое, что и $0+bi$.

3. Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ считаются равными, если $a=c$ и $b=d$. В противном случае комплексные числа не равны.

Сложение. Суммой комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)i$. Таким образом, *при сложении комплексных чисел отдельно складываются их абсциссы и ординаты.* Это определение соответствует правилам действий с обычными многочленами.

Вычитание. Разностью двух комплексных чисел $a+bi$ (уменьшаемое) и $c+di$ (вычитаемое) называется комплексное число $(a-c)+(b-d)i$.
Таким образом, *при вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их абсциссы и ординаты.*

Умножение. Произведением комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число:
$(ac-bd)+(ad+bc)i$. Это определение вытекает из двух требований:

1) числа $a+bi$ и $c+di$ должны перемножаться, как алгебраические двучлены,
2) число i обладает основным свойством: $i^2=-1$.

Деление. Разделить комплексное число $a+bi$ (делимое) на другое $c+di$ (делитель) - значит найти третье число $e+fi$ (чатное), которое будучи умноженным на делитель $c+di$, даёт в результате делимое $a+bi$.
Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z=a+bi$
2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$$

$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

Ход работы:

1.Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.
Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$$z_1 = 7 + i\,; \quad z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i\,; \quad z_3 = 4 - 3i$$

2.Выполнить действия в алгебраической форме:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_2 - z_3$;

Решение:

1) $z_1 + z_2 = (7-1{,}5) + (1+1{,}5)i = 5{,}5 + 2{,}5i$;)

2) $z_1 - z_3 = (7-4) + (1+3)i = 3 + 4i$;

3. ($a + bi$)($a - bi$)= $a^2 + b^2$. Следовательно, *произведение двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному положительному числу.*

4. Найти (8 + i) : (2 – 3i) .

Р е ш е н и е . Перепишем это отношение в виде дроби: $\dfrac{8+i}{2-3i}$.

Умножив её числитель и знаменатель на 2 + 3i

и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1 + 2i.$$

5.Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2{,}1 - 2{,}8i$$

1) $\dfrac{1+3i}{i-3} = \dfrac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \dfrac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2 - i^2} = \dfrac{-10i}{10} = -i$;

2) $\dfrac{4-5i}{1+3i} = \dfrac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2} = \dfrac{-11-17i}{10} = -1{,}1 - 1{,}7i$

3) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$

$4) - i + (-1{,}1 - 1{,}7i) - 1 = -i - 1{,}1 - 1{,}7i - 1 = -2{,}1 - 2{,}8i$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Комплексные числа

Практическое занятие №15

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме

Цель работы: Научиться переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую и обратно. .
Научиться переводить комплексные числа из алгебраической формы в показательную и обратно.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить модуль и аргумент комплексного числа;
- переводить комплексные числа из одной формы в другую.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций, четырехзначные математические таблицы Брадиса, калькуляторы.

Задание:
Даны комплексные числа : z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6).

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.
2. Вычислить:
   a. $\frac{z_1}{z_3}$;
   b. $z_2 * z_3$;
   c. z_1^5.
3. Извлечь квадратный корень из числа z_2.

4. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

a) $(3\cdot(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}))^2$ b) $\frac{24(\cos 75^0+i\sin 75^0)}{3(\cos 30^0+i\sin 30^0)}$

5.Представить в показательной форме числа:

$z_1=2i$; $z_2=-1+i$.

6.Выполнить действия в показательной форме для чисел:

$z_1=1+i$; $z_2=1-\sqrt{3}i$.

1) $z_1\cdot z_2$; 2) $z_1:z_2$; 3) $z_1{}^6$; 4) $\sqrt[4]{z_1}$.

Краткие теоретические сведения:

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z=a+bi$.

1) Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

Определить , в какой четверти находится точка (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z=a+bi$

Решив уравнение $tg\varphi=\frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z=\varphi=arctg\frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a}$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме
$z = r(cos\varphi + i\,sin\varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$
.

Алгоритм перехода от алгебраической формы к показательной:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.
Вычисляем модуль
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ и аргумент по формуле $\cos\varphi = \frac{a}{r}$; $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ или $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}$.

Определяем четверть, в какой находится комплексное число
$\arg z = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a} = \varphi$.

Показательная форма комплексного числа имеет вид:

$$z = re^{\varphi i}.$$

Порядок выполнения работы:

I.Тригонометрическая форма комплексного числа:

1. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм.
2. Выполните действия в тригонометрической форме, используя правила:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$$
$$z^n = r^n(cosn\varphi + isin\,n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа z=r·(cos φ+i sinφ) используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

II.*Показательная форма комплексного числа:*
Выполняем действия над комплексным числом, используя правила:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}; \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1-\varphi_2)i};$$

$$z_1{}^n = n \cdot r e^{n\varphi i}; \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i}.$$

Ход работы:
Даны комплексные числа: z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).
1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.
Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Число находится в первой четверти, значит $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$

$= arctg\,\frac{1}{7} = arctg\,0{,}1429$.

Находим значение арктангенса по таблице Брадиса $\varphi = 8°8'$.

$$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + i \sin 8°8')$$

2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$

$$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}1$$

Число находится во второй четверти, значит φ = argz= $arctg\,\frac{y}{x} + \pi$ $\varphi = arctg(\frac{1{,}5}{-1{,}5}) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4});$$

3) $z_3 = 4 - 3i$

$$|z_3| = \sqrt{16+9} = 5$$

Число находится в четвертой четверти, значит φ= argz= $arctg\,\frac{y}{x}$

$$\varphi = arctg(\frac{-3}{4}) = -arctg\,0{,}75 = -36°52'$$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52') + i\sin(-36°52'))$$

2.Извлечь квадратный корень из числа z_2.

Решение:

$$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

В нашем примере n=2.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{2}) \approx \sqrt{2{,}1}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{2}) \approx \sqrt{2{,}1}(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}).$$

3.Представим комплексные числа $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ в показательной форме.

$$a_1 = 1;\ b_1 = 1 \Rightarrow r_1 = \sqrt{2};\ \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i};$$

$$a_2 = 1;\ b_2 = -\sqrt{3} \Rightarrow r_2 = 2;\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

2.По формулам находим:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i};$$

$$z_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6 = 8e^{\frac{3\pi}{2}i};$$

$$\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}{4}i},\ \text{где}\ k = 0, 1, 2 \ldots$$

если $k = 0$, то $z_0 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi}{16}i}$;

если $k = 1$, то $z_1 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)}{4}i} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi}{16}i}$;

если $k = 2$, то $z_2 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)}{4}i} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi}{16}i}$;

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие №16

Подготовка к экзамену

Цель работы: Провести контроль знаний учащихся.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-дифференцировать функцию;
-интегрировать функцию;
-вычислять пределы;
-выполнять действия над комплексными числами;
-выполнять действия над матрицами;
-находить вероятность события.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания
Задание:

1.Вычислить : $\int (5x^3 - 4x^2 + 2)dx$.

2.Найти производную функции: $y = (e^x + x)(e^{3x} - x)$.
3.Вычислить: $i^{15} + 5i^8 - 8i^{28} + 10$

4. Дан закон распределения. Найти : p_4 и $M(x)$.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,23	0,17	0,35	p_4

5.

5.Найти значение производной функции $f(x) = sint - cos^2 t$ при t = 0.

6. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Вычислить 2C+AB, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Решить уравнение: $0,5x^2 + 3x + 17 = 0$.

9. Вычислить $\int_0^{\frac{\Pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 3}{\cos^2 x} dx$

10.Сколькими способами могут быть распределены8 участниц финального забега на 8 беговых дорожках?

11. Вычислить предел дроби $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

12. Вычислить предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

Порядок выполнения работы:

11. Повторение правил и формул
12. Объяснение преподавателя
13. Оценка выполненных заданий
14. Подведение итогов.

Ход работы:

1 Вычислить интеграл**:**

$\int \frac{x^4 - 5x^3 + 1}{x} dx = \int x^3 dx - 5\int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + \ln|x| + C$

Метод подстановки (метод замены переменной)

2. Вычислить предел дроби $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$

Решение: Это неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень х (на x^3): $\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}$

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8$$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8=-2{,}1-2{,}8i$$

1) $\frac{1+3i}{i-3}=\frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2-i^2}=\frac{-10i}{10}=-i$;

2) $\frac{4-5i}{1+3i}=\frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2}=\frac{-11-17i}{10}=-1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1$

4) $-i+(-1{,}1-1{,}7i)-1=-i-1{,}1-1{,}7i-1=-2{,}1-2{,}8i$.

4. Найти производную функции: $f(x)=\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x$.

Решение:

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U\cdot V)'=U'V+UV'$

$$f'(x)=(\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x)'=(sin\frac{1}{2}x)'cos2x+sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u=\frac{1}{2}x$, для второй функции $u=2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'.$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x)$$
$$\cdot (2x)' = \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

5. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

1)В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2) Формула сочетаний имеет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

3) Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!} = 120$

6. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

.

Математическое ожидание:

$$M(X) = -5\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

7.Найти матрицу $C = A' - 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение:

1) Найдем матрицу A', транспортированную к A, т.е. поменяем строки и столбцы местами:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу $3B$, умножив все элементы матрицы B на 3.

3) Произведем вычитание матриц A' и $3B$ (поэлементно):

$$C = A' - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -13 & -17 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$$

.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.