Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/С.А. Махновский
«01» марта 2018г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.01 МАТЕМАТИКА
программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности СПО
23.02.03 Техническое обслуживание ремонт автомобильного транспорта

Магнитогорск, 2018

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
Математических и
естественнонаучных дисциплин
Председатель: Е.С. Корытникова
Протокол №6 от 21 февраля 2018 г.

Методической комиссией

Протокол №4 от 23 марта 2017 г.

Разработчик
Ю.Н. Садчикова, преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

СОДЕРЖАНИЕ

1 **ВВЕДЕНИЕ**

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующего федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике, физике, химии, информатике и др.), необходимых в последующей учебной деятельности по общим гуманитарным и социально-экономическим дисциплинам, математическим и естественно-научным, общепрофессиональным дисциплинам.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «математика » предусмотрено проведение практических занятий.

В результате освоения дисциплины обучающийся ***должен уметь:***

$У_1$. решать обыкновенные дифференциальные уравнения

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 1.1 Организовывать и проводить работы по техническому обслуживанию и ремонту автотранспорта.

ПК 1.2 Осуществлять технический контроль при хранении, эксплуатации, техническом обслуживании и ремонте автотранспорта.

ПК 1.3 Разрабатывать технологические процессы ремонта узлов и деталей.

ПК 2.2 Контролировать и оценивать качество работы исполнителей работ.

А также формированию общих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «математика » направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Раздел 1. Комплексные числа

Практическое занятие №1

Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами

Цель: Проверить на практике знания о комплексных числах, научиться решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- записывать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической форме;
- решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, конспекты лекций
Задание:

1. Даны комплексные числа: z_1= (7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3). Записать эти числа в алгебраической форме.
2. Найти степени мнимой единицы i^2, i^5, i^{14}.
3. Решить квадратные уравнения:
   a) $\boldsymbol{x^2+4x+29=0}$;
   b) $\boldsymbol{x^2-6x+25=0}$;
   c) $\boldsymbol{x^2-6x+13=0}$.

Теоретические сведения:

Комплексные числа записываются в виде: $a+bi$. Здесь a и b – *действительные числа*, а i – *мнимая единица, т.е.* $i^2=-1$. Число a называется *абсциссой*, а b – *ординатой* комплексного числа $a+bi$. Два комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряжёнными* комплексными числами.

Основные договорённости:

1. Действительное число a может быть также записано в форме комплексного числа: $a+0i$ или $a-0i$. Например, записи $5+0i$ и $5-0i$ означают одно и то же число 5 .

d)

2. Комплексное число $0+bi$ называется *чисто мнимым числом*. Запись bi означает то же самое, что и $0+bi$.

3. Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ считаются равными, если $a=c$ и $b=d$. В противном случае комплексные числа не равны.

Ход работы:

1**.**Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$z_1=7+i$; $z_2=-1{,}5+1{,}5i$; $z_3=4-3i$

2.Решить квадратное уравнение $\boldsymbol{x^2+2x+5=0}$.

Решение:

Найдем дискриминант

$$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$$

$$\boldsymbol{D=2^2-4\cdot 1\cdot 5=4-20=-16}$$

Найдём квадратный корень из дискриминанта

$$\boldsymbol{\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}=4i}$$

Найдём корни квадратного уравнения

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-2\pm 4i}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i.}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие №2

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Цель: Проверить на практике знание понятия комплексного числа, Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической и тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической форме;

-выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

4. Даны комплексные числа : z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6). Записать эти числа в алгебраической форме.

5. Вычислить:
1) $z_1 + z_2$;
2) $z_2 - z_3$;
3) z_1 / z_3;
4) $z_2 * z_3$;
5) z_1^5.
6. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

Теоретические сведения:

Сложение. Суммой комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)i$. Таким образом, *при сложении комплексных чисел отдельно складываются их абсциссы и ординаты.*

Это определение соответствует правилам действий с обычными многочленами.

Вычитание. Разностью двух комплексных чисел $a+bi$ (уменьшаемое) и $c+di$ (вычитаемое) называется комплексное число $(a-c)+(b-d)i$.
Таким образом, *при вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их абсциссы и ординаты.*

Умножение. Произведением комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число:
$(ac-bd)+(ad+bc)i$. Это определение вытекает из двух требований:

1) числа $a+bi$ и $c+di$ должны перемножаться, как алгебраические двучлены,

1) число i обладает основным свойством: $i^2=-1$.

Деление. Разделить комплексное число $a+bi$ (делимое) на другое $c+di$ (делитель) - значит найти третье число $e+fi$ (чатное), которое будучи умноженным на делитель $c+di$, даёт в результате делимое $a+bi$.
Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z=a+bi$
2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$
$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$$
$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

Ход работы:

1.Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.
Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$$z_1=7+i;\quad z_2=-1{,}5+1{,}5i;\quad z_3=4-3i$$

2.Выполнить действия в алгебраической форме:
1) z_1+z_2;
2) z_2-z_3;

Решение:
1) $z_1+z_2=(7-1{,}5)+(1+1{,}5)i=5{,}5+2{,}5i$;)
2) $z_1-z_3=(7-4)+(1+3)i=3+4i$;

3. $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$. Следовательно, *произведение*

двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному
положительному числу.

4. Найти (8 + *i*) : (2 – 3*i*) .

Р е ш е н и е . Перепишем это отношение в виде дроби: $\dfrac{8+i}{2-3i}$.

Умножив её числитель и знаменатель на 2 + 3*i*

и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{13+26i}{13}=1+2i.$$

5.Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8$$

Решение:

$\dfrac{1+3i}{i-3}+\dfrac{4-5i}{1+3i}-i^8$ =-2,1-2,8i

1) $\dfrac{1+3i}{i-3}=\dfrac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\dfrac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2-i^2}=\dfrac{-10i}{10}=-i$;

2) $\dfrac{4-5i}{1+3i}=\dfrac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2}=\dfrac{-11-17i}{10}=-1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1$

4) $-i+(-1{,}1-1{,}7i)-1=-i-1{,}1-1{,}7i-1=-2{,}1-2{,}8i$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие №3
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в тригонометрической форме;
- выполнять действия в тригонометрической форме;
- переходить от одной формы комплексных чисел к другой форме.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6). Записать эти числа в тригонометрической форме.

2. Вычислите: $z_2 \cdot z_3; \frac{z_1}{z_3}; z_1^5; \sqrt{z_2}$.

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

a) $(3 \cdot (cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}))^2$ b) $\frac{24(cos75^0 + isin\,75^0)}{3(cos\,30^0 + isin\,30^0)}$

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$z = r(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$.

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:
Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.

1) Модуль r =|z| однозначно определяется по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить, в какой четверти находится вектор (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z = a + bi$
- Решив уравнение $tg\varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

1.Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2.Выполните необходимые действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$|z_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,

Число находится в первой четверти, значит

$\varphi = arctg\frac{1}{7} = arctg\,0{,}1429.$

$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + i\sin 8°8').$

2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$

$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}1$

Число находится во второй четверти, значит

$\varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg\,(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4};$

$$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = 2{,}1(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\,\frac{3\pi}{4}).$$

3) $z_3 = 4 - 3i$

$|z_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

Число находится в четвертой четверти, значит

$\varphi = arctg\frac{-3}{4} = arctg\,(-0{,}75) = -36°°52'.$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52' + i\sin(-36°52').$$

2. Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;

2) $\frac{z_1}{z_3}$;

3) z_1^5;

4) $\sqrt{z_2}$;

Решение:

$z_2 \cdot z_3 = 2{,}1 \cdot 5\left(\cos(135° - 36°52') + i\sin\left(135° - 36°52'\right)\right) = 10{,}5(\cos 98°8' + i\sin 98°8')$

;

$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}\left(\cos\left(8°8' - (-36°52')\right) + i\sin\left(8°8' + 36°52'\right)\right) = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°$

);

$z_1^5 = (5\sqrt{2})^5(\cos 5 \cdot 8°8' + i\sin 5 \cdot 8°8') = 12500\sqrt{2}(\cos 40°40' + i\sin 40°40')$

;

Воспользуемся формулой:

$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$

В нашем примере n=2.

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\,\frac{135°+360°k}{2} + isin\,\frac{135°+360°k}{2}\right);$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\,\frac{135°+360°\cdot 0}{2} + isin\,\frac{135°+360°\cdot 0}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 67°30' + isin\, 67°30')$$

;

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\,\frac{135°+360°\cdot 1}{2} + isin\,\frac{135°+360°\cdot 1}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 247°30' + isin\, 247°30')$$

2. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$(2\cdot(cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24}))^6 = 2^6\left(cos\frac{5\pi}{24}\cdot 6 + isin\frac{5\pi}{24}\cdot 6\right) = 64\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right) = 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$$

$$\frac{24(cos75^0 + isin\,75^0)}{3(\cos 15^0 + isin\,15^0)} = \frac{24}{3}(\cos(75° - 15°) + isin(75° - 15°)) = 8(cos60° + isin60°) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Раздел 2. Элементы линейной алгебры

Практическое занятие №4
Действия над матрицами

Цель работы: Научиться выполнять действия над матрицами.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- выполнять операции над матрицами;
- находить обратную матрицу.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Действия над матрицами:

1.Сложение.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \cdots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в i-той строке в k-том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов i-той строки первой матрицы на соответствующие элементы k-того столбца второй.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы:

1.Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а**)** Найдем A^2, умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б**)** Найдем матрицу $3A$, умножив все элементы матрицы A на 3.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в**)** Найдем произведение 3AB

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу C, складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2.Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимообратными.

3.Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

$$A+B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\ 3 & -4 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -8\\ 4 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\ 3 & -4 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 11\\ 16 & -16 & -4\\ 14 & -14 & -8\end{pmatrix};$$

$c_{11}=-3\cdot 1+2\cdot 3+(-3)\cdot 0=3;$
$c_{12}=-3\cdot 0+2\cdot(-4)+(-3)\cdot(-2)=-2;$
$c_{13}=-3\cdot(-5)+2\cdot 1+(-3)\cdot 2=11;$
$c_{21}=1\cdot 1+5\cdot 3+(-2)\cdot 0=16;$
$c_{22}=1\cdot 0+5\cdot(-4)+(-2)\cdot(-2)=-16;$
$c_{23}=1\cdot(-5)+5\cdot 1+(-2)\cdot 2=-4;$
$c_{31}=2\cdot 1+4\cdot 3+(-1)\cdot 0=14;$
$c_{32}=2\cdot 0+4\cdot(-4)+(-1)\cdot(-2)=-14;$
$c_{33}=2\cdot(-5)+4\cdot 1+(-1)\cdot 2=-8.$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\ 3 & -4 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & -18 & 2\\ -11 & -10 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №5

Вычисление определителей второго и третьего порядков

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- вычислять определители второго порядка;
- вычислять определители третьего порядка;
-вычислять определители четвертого порядка.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:
Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

Краткие теоретические сведения:
Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Порядок выполнения работы:

1 Запишите определитель, определите какого он порядка.

2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Ход работы:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$

$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3A_{11} + (-1)A_{21} + 0A_{31} + 1A_{41} = 3 \cdot$

$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot$

$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 122$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №6
Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;
- решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

2) $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+3y-5z=-2 \\ x+y+2z=3 \\ 2x-y+7z=27 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2. Запишите и вычислите определитель системы.
3. Вычислите определители каждой неизвестной.
4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №7
Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса;
- решать системы четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Гаусса;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:
Решить системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10 \\ x + 5y - 2z = -15 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:
Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:
- перестановка строк местами;
-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;
-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Порядок выполнения работы:
1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:
Рассмотрим пример:

1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

2) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_4 = -4 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 2 \end{cases};$$

Ответ : (8;6;4;2).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №8
Решение систем линейных уравнений матричным способом

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить обратную матрицу;

- решать систему линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$.

Краткие теоретические сведения:

Пусть задана система линейных уравнений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

Составим матричное уравнение: АХ = В, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots\ a_{2n} \\ a_{n1}\ a_{n2\dots}\ a_{nn} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix};\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Чтобы найти неизвестную матрицу Х, нужно $A^{-1} \cdot B$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы А ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы А и составить из них союзную матрицу A^*.

в) транспонировать матрицу A^* из алгебраических дополнений

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}\ A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix};$$

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}\ A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B, состоящую из свободных членов.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Решить систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}.$

Найдем

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19 \neq 0 \Rightarrow$обратная матрица есть.

$A^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

Решим уравнение:

$X = A^{-1}C = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -20-18 \\ -12+12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -38 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

.

Ответ: (2; 0).

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$

Найдем

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12;$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31;$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13;$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26;$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -120+64+56 \\ -310-8-98 \\ 130-104+182 \end{pmatrix} =$$

.

Ответ: (0;4;-2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0+12-2=10 \\ 0-8+4=-4 \\ 0-4-10=-14 \end{cases}$$. (верно)

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Раздел 3. Математический анализ

Практическое занятие №9
Вычисление пределов

Цель: Научиться вычислять пределы функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;

- раскрывать неопределенности;

- находить пределы функций, используя формулы замечательных пределов.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}$
5. $\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

1) $\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5) = 2\left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 - 10\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - 4\lim_{x\to 2} x + 5 = 2\cdot 8 - 10\cdot 4 - 4\cdot 2 + 5 = -27$$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке x = 3. Поэтому сначала преобразуем данную функцию.

Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 11x + 6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3(x-3)(x-\tfrac{2}{3})$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2$-5x-3 равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)(x+\tfrac{1}{2})$$

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)(x-\frac{2}{3})}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})}{2(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1} =$$

$$\frac{3\lim_{x\to 3} x-2}{2\lim_{x\to 3} x+1} = \frac{3\cdot 3-2}{2\cdot 3+1} = \frac{7}{7} = 1$$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞, то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x^3}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}-\frac{6x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4}-\frac{8x^2}{x^4}+\frac{2}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}+\frac{10}{x^4}}{6-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6}$$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$. Введем новую переменную: x = -3y; x → ∞; y → ∞.

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{5\cdot(-3y)} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y} =$
$e^{-15} = \frac{1}{e^{15}}$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №10
Нахождение производных по правилам дифференцирования

Цель работы: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение :

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Задание:

Найти значение производной данной функции в данной точке.

1) $y = 2x^2 - 3x + 5$, $x = 0$;

2) $y = 7x^3 - 6 + 3x^2$, $x = 0$;
3) $y = 12 - 3x^3 + 2x^2$, $x = 0$;
4) $y = x^3 - 4x^2 + x$, $x = 0$;
5) $y = 21x + 3x^5 + 7x^2 - 5$, $x = 0$;
6) $y = x^3 \cdot 3x^{0,5}$, $x = 1$;
7) $y = (x + 1) \cdot 2x^3$, $x = 1$;
8) $y = 4x \cdot (7x^2 + 5)$, $x = 1$;
9) $y = (2x^2 + 3x) \cdot (x - 1)$, $x = 1$;
10) $y = (6x - 3x^2) \cdot (x^2 + 2)$, $x = 1$;
11) $y = \dfrac{x+1}{x^2}$, $x = 1$.

Краткие теоретические сведения

Определение: Производной функции $f(x)$ ($f'(x_0)$) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha - 1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования

Если у функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют производные, то

$$1)\ (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$2)\ (cf(x))' = c \cdot f'(x), \text{ где } c - const$$
$$3)\ (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$4)\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)'$$
$$= \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$

$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\left(3x+5x^2\right)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$

$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}.$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования$(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' =$

$\frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

5.$f(x) = arccos\sqrt{1 - e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$$u = 1 - e^{2x}$$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})'$$
$$= -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x)$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие №11

Дифференцирование сложных функций

Цель: Научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять правила дифференцирования;
- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$

2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$

3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$

4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$

5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

5. Определите вид функции. Если функция является сложной, то введите промежуточный аргумент.
6. Определите, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Примените соответствующее правило.
7. Используя таблицу производных, найдите производные функций.
8. Раскройте скобки и приведите подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u'$, $(cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)' cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2}\frac{1}{(3+10x)\,ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x)\log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2}\frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

/

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = \arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(\arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}}\cdot\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'.$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(\arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}}\cdot\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot(1-e^{2x})' =$$

$$-\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №12

Анализ функции и построение графика

Цель работы: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- проводить исследование функций с помощью производной;
- строить графики функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.
8. Найти область значений.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f\,'(x)<0$, от промежутка, в котором $f\,'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ равно b.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции y = f(x),
если $\lim_{x\to\infty}|f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$.

$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$.

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

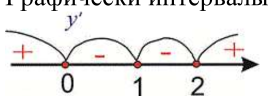
4.Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5.Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max} = 0$; $y_{min} = 2$.

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2-4x)\cdot 2(2x-2)\cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

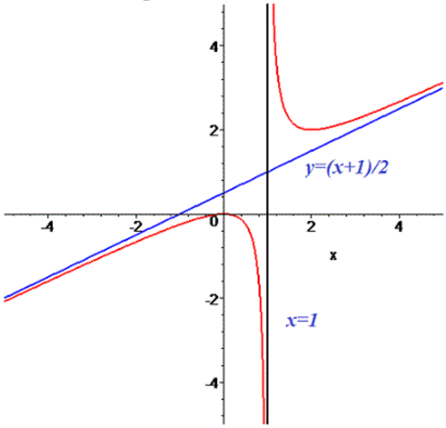
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

8.На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №13

Решение физических задач

Цель работы: Научиться решать задачи физики средствами дифференциального исчисления

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать физические задачи с помощью производной.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента t=0, задается формулой $q = 3t^2 + t + 2$. Найдите силу тока в момент времени t = 3.
2. Пусть Q (t) количество теплоты, которое необходимо для нагревания 1 кг воды от 0^0C до температуры t^0 (по Цельсию). Известно, что в диапазоне $0 \leq t \leq 95$, формула $Q(t) = 0{,}396t+2{,}081\times10^{-3}t^2-5{,}024\times10^{-7}t^3$ дает хорошее приближение к истинному значению. Найдите, как зависит теплоёмкость воды от температуры.
3. Уравнение колебаний тела на пружине имеет вид x =5cos 2t. В какой ближайший момент времени скорость тела будет максимальной?

Ход работы:

Высота снежка, брошенного вертикально вверх со скоростью v_0 с начальной высоты h_0, меняется по закону $h = h_0+v_0\cdot t-gt^2/2$, где g = 10м/с – ускорение силы тяжести. Покажите, что энергия снежка $E=mv^2/2 + mgh$, где m – масса снежка, не зависит от времени.

(Решение показывает учитель).

Решение:

$V(t) = h'(t) = v_0 – gt$

$E = m/2\ (v_0 - gt)^2 + mg(h_0 + v_0t – gt^2/2) = mv_0^2/2 + mgh_0$.

№6. Смещение груза на пружине описывается законом x(t) = 5 sin(2t + π4). Найдите скорость V и ускорение a тела в момент t = π2.

Решение:

1. Сначала найдем скорость тела V(t) = x'(t) = (5 sin(2t + π4))' = 10cos(2t + π4).

Определим скорость при t = π2:

V(π2) = 10cos(2·π2 + π4) = -10cosπ4 = -10·22 = -52.

2. Найдем ускорение груза a(t) = V'(t) = (10cos(2t + π4))' = -20sin(2t + π4).

Определим ускорение при t = π2:

a(π2) = -20sin(2·π2 + π4) = 2020sin(π4) = 20·22 = 102.

В условиях этой задачи тело совершает колебательные движения и все три основные характеристики x(t), V(t) и a(t) меняются по синусоидальным законам.

Ответ: -52, 102.

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие №14

Нахождение неопределённых интегралов различными методами интегрирования

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования, методом подстановки;
- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int(8x^4 - 6x^2 + 2x - 3)dx$

2) $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$

3) $\int \cos(10x - 5)\, dx$

4) $\int 3^{4x^2} x dx$

5) $\int \frac{5dx}{25+16x^2}$

6) $\int \frac{x^2dx}{(1-2x^3)^2}$

7) $\int \frac{2x^4-4x^2-3x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

8) $\int(x^2 + 5x + 7) \cdot lnxdx;$

9) $\int e^{2x} cos3xdx;$

10) $\int(x^2 + 4x + 3)e^{2x}\, dx.$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, приведите интеграл к табличным формулам. Проинтегрируйте.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то введите новую переменную, найдите ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Найдите полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернитесь к старой переменной.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то примените формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dV. Затем, после

нахождения dU и V, используйте формулу интегрирования по частям.

-Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где $P(x)$- многочлен, k- число.

Удобно положить $U = P(x)$,а все остальные множители принять за dV.

-Интегралы вида

$\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$.

Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U.

- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx$, $\int e^{ax}cosbxdx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1) $\int \frac{6x^4-5x^2+3x+4}{x^2}dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2}dx$$
$$= \int \left(\frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right)dx$$
$$= \int \left(6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2}\right)dx$$
$$= 6\int x^2dx - 5\int dx$$
$$+ 3\int \frac{dx}{x} + 4\int x^{-2}dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3\ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 -$$

2) $\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\dfrac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3}$$

3) $\int (x^3 - 4x)\ln x \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = \ln x,\ dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x)\ln x \cdot dx = \ln x\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$\ln x\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right)dx = \ln x\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

4) $\int (x^2 - 2x)\cos 4x dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x,\ dV = \cos 4x dx$.

$$dU = (2x - 2)dx, \qquad V = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x$$

$$\int (x^2 - 2x)\cos 4x\, dx = (x^2 - 2x)\frac{1}{4}\sin 4x - \int \frac{1}{4}\sin 4x(2x - 2)dx =$$

$$(x^2 - 2x)\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\int \sin 4x(2x - 2)dx = \frac{1}{4}(x^2 - 2x)\sin 4x - \frac{1}{2}\int \sin 4x(x - 1$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x - 1,\ dV = \sin 4x dx$.

$$dU = dx, \qquad V = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x)\sin 4x - \frac{1}{2}((x - 1)\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) - \int -\frac{1}{4}\cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x)\sin 4x - \frac{1}{2}((x - 1)\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) + \frac{1}{4}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{8}\int cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{32}sin4x + C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №15
Вычисления определённых интегралов различными способами, приближенные вычисления

Цель работы: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенные интегралы различными методами;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_{-2}^{3}(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)dx$

1. $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

2. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$

3. $\int_{-2}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} e^{sinx} cosxdx$

5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{sin^2\frac{2x}{3}}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то необходимо вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

Ход работы:

1) $\int_{-1}^{3}(4\,x^3 - 3x^2 + 2x + 5)dx$

$$\int_{-1}^{3}(4x^3 - 3x^2 + 2x + 5)dx = 4\int_{-1}^{3}x^3dx - 3\int_{-1}^{3}x^2dx + 2\int_{-1}^{3}xdx + 5\int_{-1}^{3}dx =$$

$$3^4 - 3^3 + 3^2 + 5\cdot 3 - (1 + 1 + 1 - 5) = 81 - 27 + 9 + 15 + 2 = 80$$

2) $\int_{0}^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_{0}^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4}\int_{0}^{0,4}\frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} == \frac{5}{4}\int_{0}^{0,4}\frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0{,}4 \quad t_B = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_{0}^{1}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt|_0^1 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^4 x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^3x} = \begin{bmatrix} cosx = t \\ dcosx = dt \\ -sinxdx = dt \\ sinxdx = -dt \\ x_H = 0 \;\; t_H = cos0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \;\; t_B = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2}|_1^{0,5} = \frac{1}{2 \cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие № 16

Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел

Цель работы: научиться применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 + 1, \; y = 0, \; x = 1, x = 4$;

б) $y = \ln x, y = 0, \; x = 1, x = e$;

в) $y^2 = x^3; x = 4$.

Краткие теоретические сведения:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

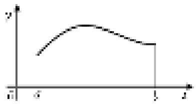


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

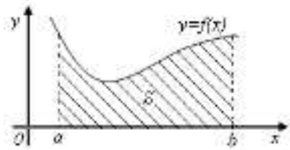


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительная на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

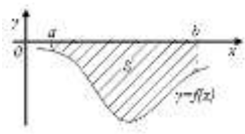


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

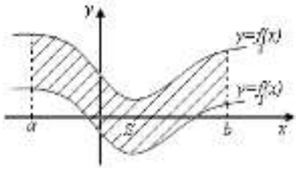


Рис. 4

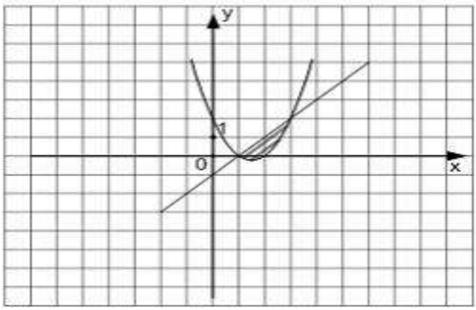
Порядок выполнения работы:

1. Изобразите фигуру на координатной плоскости;
2. Определите, является ли фигура криволинейной трапецией.
3. Вычислите площадь фигуры.

Ход работы:

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования.



Значит, площадь фигуры равна: $S = \int_1^3 (x-1)dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{x^2}{2} - x - (\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x) = 4{,}5 - 3 - 0{,}5 + 1 - \left(\frac{27}{3} - 3 \cdot 4{,}5 + 6 - \frac{1}{3} + 1{,}5 - 2\right) = 1\frac{1}{3}$ $(кв. ед.)$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие № 17
Решение физических и технических задач

Цель работы: Научиться применять интегралы к решению физических задач

Выполнив работу, Вы будете уметь:

Решать задачи физики с использованием определенного интеграла.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание 1. Скорость материальной точки задана уравнением $v = f(t)$. Найти путь *s*, пройденный материальной точкой за первые *n* секунд. $v = 1 + 4t, \qquad n = 3$

Задание 2. Скорость движущегося тела задана уравнением $v = f(t)$. Найти путь, пройденный телом за *n*-ую секунду. $f(t) = (8 - t)(2 + t), \qquad n = 3$

Задание 3. Скорость движущегося тела задана уравнением $v = f(t)$. Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки. $f(t) = (3 - t)e^{2t+5}$

Задание 4. Дан прямолинейный стержень длиной l. Он неоднороден, и его плотность в точке, удаленной от левого конца на x, $0 \le x \le l$, определяется по формуле $\rho = \rho(x)$. найдите массу стержня.

$\rho(x) = x^2 - x + 1, \qquad l = 6$

Порядок выполнения работы:

1) Записать формулу, используя определенный интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

2) Вычислить определенный интеграл

Ход работы:

1. Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

Решение: согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t, t_1 = 3, t_2 = 4$. Следовательно,

$$S = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = (3t^3 - 4t^2)|_3^4 = 83 \ (м)$$

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе — со скоростью $v = (4t + 5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = (2t^3 + t^2)|_0^5 = 275 \ (м)$

$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = (2t^2 + 5t)|_0^5 = 75 \ (м)$

$S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200 \ (м)$

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = (39{,}2 — 9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение:

Тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда $v = 0$, т.е. $39{,}2 — 9{,}8t = 0$, откуда $t = 4$ с.

Тогда

$$\square = \int_0^4 (39{,}2 — 9{,}8t)dt = (39{,}2t - 4{,}9t^2)|_0^4 = 78.4 \ (м)$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие №18
Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Цель: формирование умений решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Найти общие решения уравнений:

1. $(xy + x)\frac{dx}{dy} = 1.$
2. $(xy^2 + x)dx + (x^2 - y)dy = 0.$
3. $(y - x^2y)$dy+$(x + xy^2)$ dx= 0.
4. $(1 + x^2)$dy$-(xy + x)dx = 0.$
5. $y\,dx + (1 - y)x\,dy = 0.$
6. $x^{2\,dy} + (y - 1)$dx= 0.
7. $2(xy + e)$dx= xdy.
8. $(x^2 + 1)dy = y\,dx.$
9. $x^2y' - 2xy = 3y.$
10. $ds = (6t - 2)dt,$
11. $dx = (8t^2 - 5)dt$

12. $\frac{8\,dy}{y} - \frac{dx}{3x} = 0,$
13. $\frac{dy}{6y} - dx = 0,$
14. $5y' = 3y,$
15. $(1 + y)dx - (2 - x)dy = 0$

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальным уравнением называют уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции. Если независимая переменная одна, то уравнение называют *обыкновенным;* если же независимых переменных две или больше, то уравнение называют *дифференциальным уравнением в частных производных.*

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называют *порядком* дифференциального уравнения. Например:

1) $x^2y' — 5xy = y^2$ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка;

2) $\mathbf{\frac{d^2y}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} = x^2}$ обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка;

3) $y'^2 + y'y''' = x$ обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка;

4) $F(x, y, y', y'') = \mathbf{0}$ общий вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка;

5)$x^2\frac{dz}{dx} + y^2\frac{dz}{dy} = 0$ уравнение в частных производных первого порядка.

Будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, т.е. уравнения вида $F(x, y, y') = \mathbf{0}$ или (в разрешенном относительно y'виде) $y' = f(x, y)$**.**

Решением дифференциального уравнения называют такую дифференцируемую функцию$\mathbf{y = \varphi(x)}$, которую при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество. Процесс нахождения решения Дифференциального уравнения называют *интегрированием* дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка

$y' = f(x, y)$ в области D называют функцию $\mathbf{y = \varphi(x, C)}$, обладающую следующими свойствами:

1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C, принадлежащих некоторому множеству;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что$(\mathrm{x_0}; \mathrm{y_0})\epsilon\mathrm{D}$, существует единственное значение$\mathrm{C} = \mathrm{C_0}$, при котором решение $y = < p(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Всякое решение $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{C_0})$,, получающееся из общего решения

$\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{C})$, при конкретном значении $C = C_0$, называют *частным решением.*

Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называют *задачей Коши.*

Построенный на плоскости (XOY)график всякого решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* этого уравнения. Таким образом, общему решению $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{C})$ на плоскости (XOY) соответствует семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра — произвольной постоянной C, **а** частному решению, удовлетворяющему начальному условию $y(x_0) = y_0$, — кривая этого семейства, проходящая через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$.

Теорема Коши Если функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области D *то решение дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$ существует и единственно, т.е. через точку $(x_0;\ y_0)$ проходит единственная интегральная кривая данного уравнения.*

Особым решением называют такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т.е. в любой окрестности каждой точки $(x;y)$ особого решения существуют по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Особые решения не получаются из общего решения дифференциального уравнения ни при каких значениях произвольной постоянной C (в том числе и при $C = \pm\infty$).

Особым решением является *огибающая* семейства интегральных кривых (если она существует), т.е. линия, которая в каждой своей точке касается по меньшей мере одной интегральной кривой.

Например, общее решение уравнения $y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$ записывается в виде $y = sin(x + C)$.Это семейство интегральных кривых имеет две огибающие: $y = \mathbf{1}$ и $y = -1$, которые и являются особыми решениями.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx - f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$$

относится к типу уравнений с разделяющимися переменными. Если ни одна из функций $f_1(x)$, $\mathbf{f_2(x)}$, $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ не равна тождественно нулю, то в результате деления исходного уравнения на $f_2(x) \cdot \varphi_1(y)$ оно приводится к виду: $\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} - \frac{\varphi_{2(y)}dy}{\varphi_1(y)} = 0$. Разведём переменные в разные части равенства и проинтегрируем $\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} = \int \frac{\varphi_{2(y)}dy}{\varphi_1(y)}$. Решение дифференциального уравнения, выраженное в неявной форме, называют *интегралом* этого уравнения.

Порядок выполнения работы:

1. Решить уравнение $x(y^2 — 4)\,dx + ydy = 0$.

Разделив обе части уравнения на $y^2 - 4 \neq 0$, имеем

$\boldsymbol{xdx + \frac{ydy}{y^2-4} = 0}$

Интегрируя, находим

$$x^2 + \ln|y^2 - 4| = \ln C \qquad \text{или} \qquad y^2 - 4 = Ce^{-x2}.$$

Это общее решение данного дифференциального уравнения.

Пусть теперь $y^2 — 4 = 0$, т.е. $y = \pm 2$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y = \pm 2$ — решение исходного уравнения. Однако оно не является особым, так как его можно получить из общего решения при $C = 0$.

2. Найти частный интеграл уравнения $y' cosx = \frac{y}{ln\,y}$ удовлетворяющий начальному условию $y(0) = 1$.

Полагая$y' = \frac{dy}{dx}$— перепишем данное уравнение в виде

$$\cos x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}$$

Разделим переменные:

$$\frac{ln\,y}{y} dy = \frac{dx}{cos\,x}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$\int \frac{\ln y}{y} dy = \int \frac{dx}{cosx} + c$, или $\frac{1}{2} ln2\,y = ln\,tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + C$

Используя начальное условие $y = 1$ при $x = 0$, находим $C = 0$. Окончательно получим

$$\frac{1}{2} ln\,2y = ln\,tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$$

3. Найти общий интеграл уравнения $y' = tg\,x + tg\,y$

Полагая$y' = \frac{dy}{dx}$ — и разделяя переменные, приходим к уравнению

$ctg\, ydy = td\, xdx$. Интегрируя, имеем

$\int ctg\, y\, dy = \int tg\, x\, dx$, или $\ln|\sin y| = -\ln|cos\, x| + \ln C$.

Отсюда находим $\sin y = \frac{C}{\cos x}$, или $\sin y \cos x = C$ (общий интеграл).

1. Найти частное решение дифференциального уравнения $\mathbf{(1 + x^2)dy + y\, dx = 0}$ при начальном условии $\mathbf{y(1) = 1.}$

Преобразуем данное уравнение к виду $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. Интегрируя, имеем

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2}$, или $\ln|y| = -arctg\, x + C$

Это общий интеграл данного уравнения.

Теперь, используя начальное условие, найдем произвольную постоянную:$\ln 1 = -arctg\, 1 + C$, т.е.$C = \frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$\ln y = -arctg\, x + \frac{\pi}{4},$$

откуда получаем искомое частное решение $y = e^{\frac{\pi}{4} - arctgx}$.

2. Решить уравнение,$x\, dy = y\, dx$, если при $x = \mathbf{5}$; $y = \mathbf{10.}$

Для разделения переменных обе части уравнения поделим **на** произведение *xy,* получим:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, найдем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

или

$$\ln y = \ln x + \ln C.$$

В правой части прибавлено постоянное в виде $\ln C$ для облегчения потенцирования. Освобождаясь от символа логарифма; т. е. потенцируя, получим общее решение:

$$y = Cx$$

Для определения постоянного C подставим в полученное решение начальные условия $\boldsymbol{x} = 5$ и $y = 10$, что дает

$10 = 5C$,

Откуда

$C = 2$.

Следовательно, искомое частное решение будет:

$y = 2x$.

Таким образом, из всех прямых (семейства прямых), проходящих через начало координат, мы выделили одну, на которой лежит точка **с** координатами (5; 10).

6. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = 2(y-3)$, если при $\boldsymbol{x} = 0$; у $= 4$.

После разделения переменных получим:

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx,$$

отсюда

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$$

или

$$\ln(y-3) = 2x + C.$$

Находим значение C из условия $x = 0$ и $y = 4$; сделав подстановку, получим:

$$\ln(4-3) = 2 * 0 + C,$$

откуда

$$C = \ln 1 = 0$$

Итак,

$$\ln(y-3) = 2x.$$

Для потенцирования нужно **и** правую часть последнего равенства написать со знаком логарифма. Пользуясь определением логарифма, будем иметь:

$$2x = \ln e^{2x}$$

следовательно, решение можно переписать в виде

$$ln(y-3) = ln\, e^{2x}$$

отсюда, потенцируя, получаем $y —\ 3\ =\ e^{2x}$, или

$y = e^{2x} + 3$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие № 19

Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы:

формирование умений решать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными; решать линейные дифференциальные уравнений 1-го порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения первого порялка с разделяющимися переменными;
- решать линейные дифференциальные уравнения;
- находить частные решения дифференциального уравнения.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения.

1. $ds = (4t - 3)dt$, если при t=0 s=0.
2. $dx = (2t^2 - 5)dt$, если при t=1 x=-4.
3. $x\,dx = dy$, если при x=1 y=0.
4. $x\,dx = y\,dy$, если при x=2 y=1.
5. $x^2\,dx + y\,dy = 0$, если при x=0 y=1.
6. $(t - 1)dt + s\,ds = 0$, если при t=2 s=0.
7. $\frac{2\,dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$, если при x=1 y= $\sqrt{2}$.
8. $\frac{dy}{2x} + \frac{dx}{y} = 0$, если при x=0 y=2.

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением *с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде: $f(x)dx = g(y)dy$.

Решается такое уравнение почленным интегрированием данного равенства.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может быть представлено в виде: $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Замена переменной $z = \frac{y}{x}$, где $z = z(x)$, сводит однородные дифференциальные уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид: $y' + f(x)y = g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые непрерывные функции переменной x. Если функция $g(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Один из способов решения такого уравнения, предложенный Даламбером, – представить неизвестную функцию в виде $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и дифференциальное уравнение запишется в виде $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$ или $u'v + u[v' + f(x)v] = g(x)$.

Если функцию v выбрать так, что будет выполняться равенство $v' + f(x)v = 0$, то относительно другой функции u дифференциальное уравнение будет простым: $vu' = g(x)$. Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения (3) распадается на решение двух дифференциальных уравнений: сначала $v' + f(x)v = 0$, а затем $vu' = g(x)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением Бернулли*, если оно имеет вид: $y' + f(x)y = g(x)y^n$, где $n \neq 0,\ n \neq 1$.

Это уравнение приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-n}$ либо может быть непосредственно решено тем же методом, что и линейные уравнения.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

1. Найти частное решение дифференциального уравнения:

а) $2s\ dt = t\ ds$, если при t=1 s=2.

б) $x^2\ dy - y^2\ dx = 0$, если при x=0,2 y=1

2. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения.

а) $y' = tg\,x\,tg\,y$

$$y\,dx + (1 - y)x\,dy = 0.$$

б) $x^2y' - 2xy = 3y.$

4. Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие № 20
Решение дифференциальных уравнений второго порядка. Решение прикладных задач

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения II порядка и линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка;
- находить общее и частное решение простейших дифференциальных уравнений второго порядка;
- находить общее и частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения II порядка:

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$

c) $y'' = x, A(1;0); B(1;1)$

2. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения II порядка.

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ *прих* $= 0 ; y = 0; \frac{dy}{dx} = 0$

Порядок выполнения работы:

1) Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $p = \frac{dy}{dx}$

Приводим к уравнению с разделяющими переменными и решаем относительно р.

Подставляем р и решаем уравнение разделением переменных относительно у.

Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно C_1 иC_2.

Подставляя C_1 иC_2 в общее решение, находим частные решения.

2) Однородное дифференциальное уравнение II порядка.

Путем замены $y = e^{kx}$

$y' = ke^{kx}$

$y'' = k^2e^{kx}$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = o$ из которого находим k_1иk_2.

Общее решение при D>0 будет:

$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$

При D=0 будет:$y = e^{kx}(c_1 + c_2x)$

При D<0 будет: $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

При заданных начальных условиях составляем систему линейных уравнений и решаем её относительно C_1 иC_2.

Ход работы:

II. Решить дифференциальное уравнение порядка

$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$

-Заменим $p = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}; \frac{dp}{dx} = 1 - 2x$$

-Разделим переменные

$dp = (1 - 2x)\,dx$

-Проинтегрируем

$$\int dp = \int (1 - 2x)dx$$

$p = x - x^2 + c_1$

-Заменим *p*на$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + c_1$$

-Разделим переменные

$dy = (x - x^2 + c_1)dx$

-Проинтегрируем и получим общее решение

$$\int dy = \int (x - x^2 + c_1)dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$$

III. Решить однородное дифференциальное уравнение II порядка

a) $y'' - 5y' + 6 = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 5k + 6 = 0,$ решаем квадратное уравнение, получим $k_1 = 2, k_2 = 3$

-Общее решение будет:

$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$

b) $y'' + 4y' + 4y = o$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 + 4k + 4 = 0,\quad (k + 2)^2 = 0 \qquad k = -2$

-Запишем общее решение для *D*=0

$y = e^{-2x}(c_1 + c_2x)$

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 6k + 12 = 0;\qquad D = 36 - 4 \cdot 13 = -16$D<0 =>

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16\,i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2ia = 3; b = 2$$

-Запишем общее решение

$y = e^{3x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 4. Элементы дискретной математики

Практическое занятие № 21

Операции над множествами

Цель работы: Рассмотреть различные множества, определять мощность множеств. Научиться выполнять операции над множествами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- составлять множества;
- определять мощность множеств;
- рассматривать объединение, пересечение, разность множеств.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1)Пусть А и В – множества, изображенные на рисунке:

укажите объединение, пересечение и разность этих множеств.

2)Заданы множества A = {3, 7, 8, 9, 2}, B = {1, 5, 6, 7, 8, 9} и C = {1, 7, 18, 19, 12}. Какое из множеств имеет наибольшую мощность.
3)Заданы множества A = {-3, 2, 5, 9, 12} и B = {1, 5, 6, 7, 8, 9}. Задайте объединение, пересечение и разность множеств A и B.
4)На факультете филологии и журналистики учатся студенты, получающие стипендию, и студенты, не получающие стипендию. Пусть A – множество всех студентов факультета; B – множество студентов факультета, получающих стипендию. Укажите, что собой представляет объединение, пересечение и разность множеств A и B.
5)Пусть A – множество всех студентов-филологов университета; B – множество студентов первокурсников. Укажите, какие студенты содержатся во множестве A\B.

Краткие теоретические сведения:

Множество - это совокупность, набор элементов, объединенных общими свойствами.

Множества обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C…, а элементы множества строчными латинскими буквами a, b, c… .

Мощностью конечного множества называется количество его элементов. Мощность множества A обозначается m (A).

Объединением множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих по крайней мере одному из данных множеств (т. е. либо A, либо B, либо одновременно и A и B). Обозначают $A \bigcup B$ и читают "объединение A и B".

Пересечением множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих одновременно и A и B. Обозначают $A \bigcap B$ и читают "пересечение A и B".

Разностью множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B. Обозначают A\B и читают "разность A и B".

Порядок выполнения работы:

1.Прочитать лекцию
2.Разобрать примеры
3.Выполнить задания

Ход работы:

<u>Пример 1</u>. Определите мощность какого из множеств A = {1, 3, 5, 7, 9} или B = {2, 4, 6, 8} больше.

Решение. Понятие мощности конечных множеств позволяет сравнивать их по количеству элементов. Так, если A = {1, 3, 5, 7, 9}, а B = {2, 4, 6, 8}, то m (A) = 5, а m (B) = 4 и потому m (A) > m (B).

Пример 2. Пусть А есть отрезок [1, 3], В - отрезок [2, 4]; тогда объединением $A \bigcup B$ будет отрезок [1, 4], пересечением $A \bigcap B$ - отрезок [2, 3], разностью A\B - полуинтервал [1, 2), B\A - полуинтервал (3, 4].

Пример 3. Пусть А есть множество прямоугольников, В - множество всех ромбов на плоскости. Тогда $A \bigcap B$ есть множество всех квадратов, A\B - множество прямоугольников с неравными сторонами, B\A - множество всех ромбов с неравными углами.

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие №22

Решение задач на основные понятия комбинаторики

Цель работы: научиться решать задачи комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять количество перестановок, размещений, сочетаний.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Задача 1. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Задача 2. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Задача 3. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Задача 4. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

Задача 5. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

Порядок выполнения работы:
1.Прочитать лекцию
2.Разобрать примеры
3.Выполнить задания
Ход работы:
Задача № 1. Сколькими способами могут быть расставлены 5 участниц финального
забега на 5-ти беговых дорожках?
Решение: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ способов.

Задача №2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая
цифра входит в изображение числа только один раз?
Решение: Число всех перестановок из трех элементов равно $P_3=3!$, где $3!=1 * 2 * 3=6$
Значит, существует шесть трехзначных чисел, составленных из цифр 1,2,3.

Задача № 3. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5,
6, 7, 8, 9 при условии, что в записи числа каждая цифра используется только
один раз?
Решение: В условии задачи предложено подсчитать число всевозможных комбинаций из

трех цифр, взятых из предположенных девяти цифр, причём порядок расположения цифр в комбинации имеет значение (например, числа 132) и 231 различные). Иначе говоря, нужно найти число размещений из девяти
элементов по три.
По формуле числа размещений находим:
Ответ: 504 трехзначных чисел.

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие №23

Решение задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения вероятностей

Цель работы: Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-вычислять число исходов, благоприятствующих наступлению рассматриваемого события, используя формулы комбинаторики;

- вычислять вероятность события по классическому определению вероятности**.**

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?

3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

4. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.

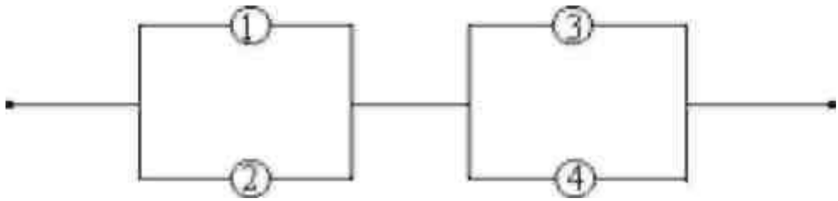


рис. 1

Выход из строя за время Т различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $q_1=0,1;\ q_2=0,2;\ q_3=0,3;\ q_4=0,4.$ Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы/

Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается Р(А) и вычисляется по формуле: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \le P(A) \le 1$

При решении задач на вычисление вероятности применяются формулы для подсчета числа комбинаций из данных элементов:

- число перестановок вычисляется по формуле: $P_n = n!$
- число размещений из n элементов по m элементов в каждом вычисляется по формуле: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
- число сочетаний из n элементов по m элементов в каждом вычисляется по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$

Надежность каждого элемента системы электроснабжения можно характеризовать вероятностью рабочего состояния p и вероятностью отказа q. Если не учитывать плановые простои (ремонты), то можно считать, что элементы в любой момент времени находятся в одном из этих состояний. Тогда сумма вероятностей этих состояний равна 1: $p + q = 1$.

Для группы из двух элементов возможны следующие сочетания:

1. оба элемента в рабочем состоянии;
2. первый элемент в вынужденном простое, второй в рабочем состоянии;
3. первый элемент в рабочем состоянии, второй в вынужденном простое;
4. оба элемента в вынужденном простое.

Вероятности этих состояний можно найти, воспользовавшись теоремой умножения вероятностей.
Так при **последовательном соединении двух элементов** с надежностью каждого p_1 и p_2 надежность всей схемы определяется как $P = p_1 \cdot p_2$
Другими словами ***схема работает, если работают оба элемента. При отказе одного (любого) из них схема работать не будет (ток через цепь не пойдет).***
Вероятность отказа **для последовательного соединения**
$P = 1 - q_1 q_2$ (для двух элементов).
$P = 1 - q_1 q_2 \cdot \ldots q_n$ (для n –элементов).

При **параллельном соединении двух элементов** с надежностью каждого *p_1* и *p_2* надежность всей схемы определяется как $P = p_1 . p_2 + p_1 \cdot q_2 + p_2 q_1$
Пользуясь формулой для вероятности появления хотя бы одного события, надежность схемы параллельного соединения записывают в виде $P = 1 - q_1 q_2$.

Другими словами ***схема работает, если работают оба элемента, но также она работает, если выйдет из строя и какой либо один из элементов.***

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число (n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов (m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение:

Событие А- «номер набран верно».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр (элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле:

$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 720$. Итак, n=720

Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным. Значит,

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение:

Событие А- «оба шара окажутся чёрными».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов

(12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!} = 190$.

Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!}$= $\frac{8!}{2!\cdot 6!}$=$\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!}$=28

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$$

3.На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О, М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК?

Решение: Событие А - «получится слово ЗАМОК».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов (букв): n=$P_5 = 5!$=5·4·$3 \cdot 2 \cdot 1$ =120.

Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$$

4. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.

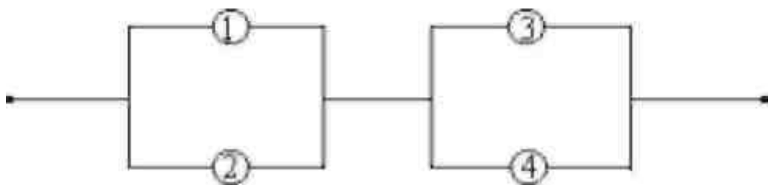


рис. 1

Выход из строя за время Т различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $q_1=0,1;\ q_2=0,2;\ q_3=0,3;\ q_4=0,4$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы.

Решение:

Событие А – система надежна.

Событие A_i – i-й блок работает безотказно.

Элементы 1 и 2 соединены параллельно, и элементы 3 и 4 соединены параллельно, а между собой они соединены последовательно, тогда используя формулы, получим
$$P(A)=(1-q_1 q_2)\cdot(1-q_3 q_4)=(1-0{,}1\cdot 0{,}2)\cdot(1-0{,}3\cdot 0{,}4)=(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}12)=$$
.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №24

Нахождение числовых характеристик выборки

Цель работы: Формирование умения составлять статистическое распределение выборки.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

- составлять статистическое распределение выборки;
- выполнять построение полигона и гистограммы.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

.

1. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

.

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4.Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

.

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени;p_2= числу букв в Вашей фамилии;p_3= числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

1Прочитав условие предложенной задачи,по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик выборки.

Ход работы:

1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

.

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12\,;\ w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40\,;\ w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28\,;\ w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20\,.$$

Следовательно,

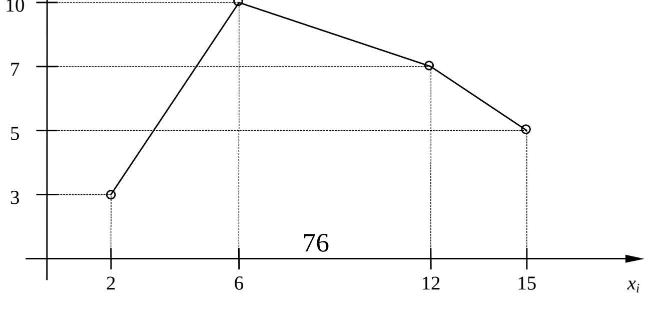
x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

.

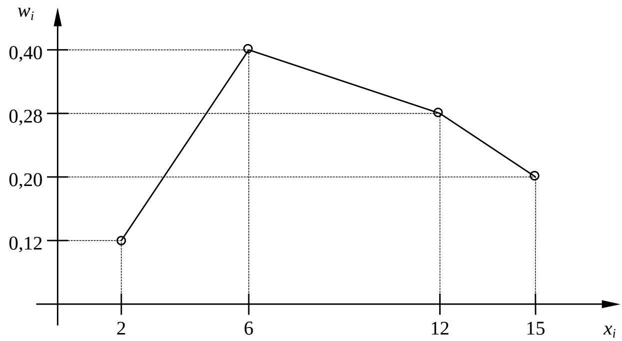
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

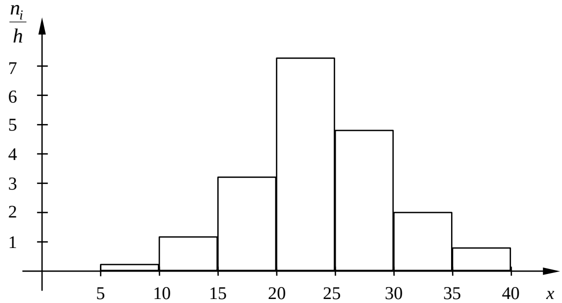
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\dfrac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\dfrac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\bar{X}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_{\Gamma} = \overline{X_{\Gamma}^2} - \left(\bar{X}_{\Gamma}\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_{\Gamma}^2} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_{\Gamma} = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$

.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке $Me = 4{,}5$.

Размах вариации R: в примере $x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$, поэтому $R = 6 - 2 = 4$.

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

.

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1{,}82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11{,}45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85.$$

6. . Определите мощность какого из множеств A = {1, 3, 5, 7, 9} или B = {2, 4, 6, 8} больше.

Решение. Понятие мощности конечных множеств позволяет сравнивать их по количеству элементов. Так, если A = {1, 3, 5, 7, 9}, а B = {2, 4, 6, 8}, то m (A) = 5, а m (B) = 4 и потому m (A) > m (B).

7. Пусть A есть отрезок [1, 3], B - отрезок [2, 4]; тогда объединением $A \bigcup B$ будет отрезок [1, 4], пересечением $A \bigcap B$ - отрезок [2, 3], разностью A\B - полуинтервал [1, 2), B\A - полуинтервал (3, 4].

8. Пусть A есть множество прямоугольников, B - множество всех ромбов на плоскости. Тогда $A \bigcap B$ есть множество всех квадратов, A\B - множество прямоугольников с неравными сторонами, B\A - множество всех ромбов с неравными углами.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.