Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Махновский
«23» марта 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.01 МАТЕМАТИКА
программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности СПО
23.02.03 Техническое обслуживание ремонт автомобильного транспорта

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
Математических и
естественнонаучных дисциплин
Председатель: Е.С. Корытникова
Протокол №7 от 14 марта 2017 г.

Методической комиссией

Протокол №4 от 23 марта 2017 г.

Разработчик
Ю.Н. Садчикова, преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующего федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений - учебных решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности по математическим и естественнонаучным, общепрофессиональным дисциплинам.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 1.1. Организовывать и проводить работы по техническому обслуживанию и ремонту автотранспорта.

ПК 1.2. Осуществлять технический контроль при хранении, эксплуатации, техническом обслуживании и ремонте автотранспортных средств.

ПК 1.3. Разрабатывать технологические процессы ремонта узлов и деталей.

ПК 2.2. Контролировать и оценивать качество работы исполнителей работ.

А также формированию **общих компетенций:**

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Основы теории комплексных чисел

Практическая работа № 1

Комплексные числа и их геометрическая интерпретация.

Цель: Закрепить понятие комплексного числа, научиться решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, изображать геометрически комплексные числа.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать сопряженные комплексные числа в алгебраической форме;
- решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом;
- изображать комплексные числа на плоскости.

Материальное обеспечение:

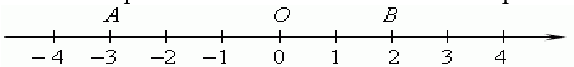
Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить квадратное уравнение $5x^2 + 500 = 0$.
2. Найти число, сопряженное данному комплексному числу $(i^{13} - i^{14}) \cdot (1 + i^{15}) + i^{11}$.
3. Построить на комплексной плоскости изображение следующих чисел: $z = 2 + 3i,\ z = 4i$.
4. Найти действительные числа x и y из уравнения $(1+i)x + (2+i)y = 5 + 3i$.

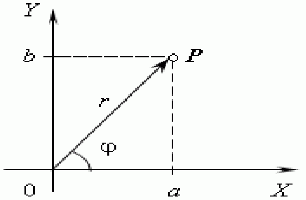
Краткие теоретические сведения:

Геометрическое представление комплексных чисел. Действительные числа изображаются точками на числовой прямой:



Здесь точка A означает число –3, точка B – число 2, и O – ноль. В отличие от этого комплексные числа изображаются точками на координатной плоскости. Выберем для этого прямоугольные (декартовы) координаты с одинаковыми масштабами на обеих осях. Тогда комплексное число $a + bi$

будет представлено точкой P *с абсциссой a и ординатой b* (см. рис.). Эта система координат называется ***комплексной плоскостью***.



Модулем комплексного числа называется длина вектора OP, изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости. Модуль комплексного числа $a+bi$ обозначается $|a+bi|$ или буквой r и равен:

$$r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль.

Порядок выполнения работы:

1. Учитывая равенство $i^2 = -1$, найти комплексные корни данного уравнения.

2. Преобразуем исходное выражение, используя формулу $i^2 = -1$. Затем, используя определение сопряженных комплексных чисел, записать искомое число.

3. Отметить на комплексной плоскости заданные числа в виде точек.

Ход работы:

1. Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 13x + 48 = 0$.

Решение. Найдем дискриминант по формуле

$D = b^2 - 4ac$; $D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48 = 169 - 192 = -23$,

$D < 0$; но учитывая равенство $i^2 = -1$, мы можем найти корни уравнения, принадлежащие множеству комплексных чисел;

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{13-\sqrt{-23}}{2} = \frac{13-i\sqrt{23}}{2},$$

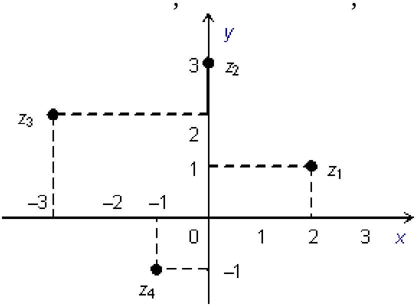
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{13+\sqrt{-23}}{2} = \frac{13+i\sqrt{23}}{2}.$$

Корнями уравнения являются комплексные числа $x_{1,2} = \frac{13 \pm i\sqrt{23}}{2}$.

2. Найти число, сопряженное с комплексным числом $(4-6i) \cdot 0{,}5i$.

Сначала выполним умножение комплексных чисел, не забывая при этом, что $i^2 = -1$; имеем: $(4-6i)\cdot 0{,}5i = 2i - 3i^2 = 2i + 3$.
А затем, используя определение сопряженных комплексных чисел, можем записать число, сопряженное с данным: $3-2i$.

3. Изобразить на комплексной плоскости числа $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3 + 2i$, $z_4 = -1 - i$, $z_5 = -3$:



4. Найти действительные числа x и y из уравнения $(1+i)x + (2+i)y = 5 + 3i$.

Раскрывая скобки в левой части уравнения, получим: $x + xi + 2y + yi = 5 + 3i.$ Сгруппируем слагаемые левой части следующим образом: отдельно слагаемые с множителем i и отдельно без него: $(x+2y) + i(y+x) = 5 + 3i.$ Заметим, что в левой и правой частях уравнения два комплексных числа, которые будут равны друг другу в том случае, когда их действительные и мнимые части равны.

Следовательно, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x + y = 3. \end{cases}$$ Решая систему, находим $x = 1$, $y = 2.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Практическая работа № 2

Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Переход от одной формы к другой.

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- записывать комплексные числа в алгебраической форме;
-выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$. Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:
   1) z_1+z_2;
   2) z_2-z_3;
   3) z_1/z_3;
   4) z_2*z_3;
   5) z_1^5.

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8$$

4. Найти модуль комплексного числа $z=(6+8i)-(3+9i)$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z=a+bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$
$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$$
$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

Ход работы:

1**.**Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$z_1=7+i$; $z_2=-1,5+1,5i$; $z_3=4-3i$

2**.**Выполнить действия в алгебраической форме:

1) z_1+z_2;
2) z_2-z_3;

3) z_1/z_3;
4) $z_2\cdot z_3$;
5) z_1^5.

Решение:

1) $z_1+z_2=(7-1,5)+(1+1,5)i=5,5+2,5i$;)
2) $z_1-z_3=(7-4)+(1+3)i=3+4i$;
3)

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{7+i}{4-3i}=\frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{28+21i+4i+3i^2}{16-(3i)^2}=\frac{28+25i-3}{16+9}=\frac{25+25i}{25}=1+i$$

4) $z_2\cdot z_3=$ $(-1,5+1,5i)(4-3i)=-6+4,5i+6i-4,5i^2=-6+10,5i+4,5=-2,5+10,5i$;

5) $z_1^5=$

$$(7+i)^5=((7+i)^2)^2(7+i)=(49+14i+i^2)^2(7+i)=(48+14i)^2(7+i)=$$

$$(2304+1344i+196i^2)(7+i)=$$

$$=(2108+1344i)(7+i)=14756+2108i+9408i+1344i^2=13412+11516i$$

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8$$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8$$ =-2,1-2,8i

1) $\frac{1+3i}{i-3}=\frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2-i^2}=\frac{-10i}{10}=-i$;

2) $\frac{4-5i}{1+3i}=\frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2}=\frac{-11-17i}{10}=-1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1$

4) $-i+(-1{,}1-1{,}7i)-1=-i-1{,}1-1{,}7i-1=-2{,}1-2{,}8i$

4. Найти модуль комплексного числа $z=(6+8i)-(3+9i)$.

Сначала выполним действие вычитания двух комплексных чисел: $z=(6+8i)-(3+9i)=(6-3)+i(8-9)=3-i.$

Используя формулу $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, где x – действительная, а y – мнимая часть комплексного числа, находим модуль данного числа: $r=|z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 1.1. Основы теории комплексных чисел

Практическая работа № 3

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять действия над комплексными числами , записанными в тригонометрической форме.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа в тригонометрической форме:
$z_1 = 5\left(cos\frac{\pi}{9} + isin\frac{\pi}{9}\right)$ *и* $z_2 = 8\left(cos\frac{3\pi}{5} + i\ sin\frac{3\pi}{5}\right)$. Вычислите: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$; z_1^3; $\sqrt[3]{z_2}$

2. Записать комплексное число в тригонометрической форме:
Z=$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

4. Выполните действия:
а) $(3 \cdot (cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}))^2$b) $\frac{24(cos75^0 + isin\ 75^0)}{3(\cos 30^0 + isin\ 30^0)}$

Краткие теоретические сведения:

Модулем комплексного числа называется длина вектора *OP*, изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости. Модуль комплексного числа $a+bi$ обозначается $|a+bi|$ или буквой r и равен:

$$r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль.

Аргумент *комплексного числа* - это угол φ между осью *OX* и вектором *OP*, изображающим это комплексное число. Отсюда, $\tan\varphi = b\,/\,a$.

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде: $z = r \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $cos\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}}$, $sin\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}}$при z =$a + bi$.

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + isin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + isin(\varphi_1-\varphi_2))$$

$$z^n = r^n(cosn\varphi + isin\,n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме z=r·(cos φ+isinφ) используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot (cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Порядок выполнения работы:

1. Вычислить заданные выражения, используя формулы из конспектов.

2.Оформить решения в тетради.

Ход работы:

1. Выполнить умножение:

$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \quad z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}), \quad z_1 \cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) =$

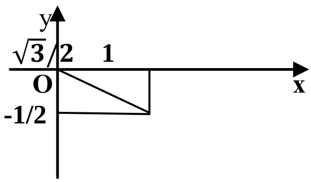
$= 6(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}).$

2.Найти частное: $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),$ $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3})) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}).$$

3. Записать комплексное число в тригонометрической форме:

$Z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$



Построим данное число на комплексной плоскости. Очевидно, что $-\frac{\pi}{6}$ является аргументом заданного комплексного числа. Модулем заданного комплексного числа будет $r = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1.$

Следовательно, заданное число запишется в виде

$z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin(-\frac{\pi}{6}).$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 2.1 Матрицы и определители.

Практическая работа № 4

Действия над матрицами.

Цель: научить выполнять действия над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
выполнять действия над матрицами.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ найти $2A-B=$.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $A\times B-B\times A$.
3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если
$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Порядок выполнения работы:
1) Повторение правил и формул
2) Определить порядок действий в задании.
3) Для каждого действия применить соответствующую формулу.
4) Оформить решение.

Ход работы:

1. Дано уравнение $A+X=B$. Здесь $A=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Найти X.
Если $A + X=B$, то $X=B-A$. Каждый элемент разности двух матриц B и A равен разности соответствующих элементов данных матриц B и A.

Тогда $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B \times A - A \times B$.

Пусть $C = A \times B$. Тогда элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B

$$(c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}).$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично имеем:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица

$$B \times A - A \times B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 - 2 & -1 - 1 \\ -1 - (-1) & 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Выполним задание по действиям:

1) $2xC = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

2) 2CB=

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 2(-1) & 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-6) \cdot 0 \\ 6 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу, транспонированную к А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $3A^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2) $2CB + 3A^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 6 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 2.1 Матрицы и определители.

Практическая работа № 5

Вычисление определителей.

Цель: научить вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
вычислять определители.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Известно, что определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 4 & -3x \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$ равен шести. Найти значение x.

2. Найти значение определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}$.

Краткие теоретические сведения:

С каждой квадратной матрицей связывают **число**. Это число называется **определителем** матрицы. Определитель вычисляется по особым правилам и обозначается |A|, *det A*, ΔA.

Число строк (столбцов) определителя называется его **порядком**.

Определитель первого порядка матрицы $A = (a_{11})_{1\times1}$ равен элементу a_{11}: $|A| = a_{11}$

Определитель второго порядка обозначается символом

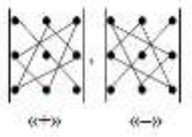
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

И равен $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Для вычисления **определителей третьего порядка** существует такие правила.

Правило треугольника

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Порядок выполнения работы:

1. Определить порядок определителя.

2. Для вычисления определителя применить соответствующую формулу.

Ход работы:

1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Определитель равен

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 7 - 5\cdot(-4) = -14 + 20 = 6.$$

4. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

Тогда

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot 8 + 8\cdot(-1)\cdot(-5) + 4\cdot(-2)\cdot 2 -$$
$$- 2\cdot 7\cdot(-5) - (-1)\cdot(-2)\cdot 3 - 8\cdot 4\cdot 8 = 168 + 40 - 16 + 70 - 6 - 256 = 0.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 2.2 Системы линейных уравнений.

Практическая работа № 6

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель: Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Систему $\begin{cases} 9x+2y=8, \\ 4x+y=3 \end{cases}$ решают по правилу Крамера.

2. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1+2x_2=7 \\ 2x_1+x_2=9 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Краткие теоретические сведения:

Теорема Крамера. Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы системы, Δ_i - определитель матрицы системы, где вместо i -го столбца стоит столбец правых частей.

Ход работы:

1. Решить систему $\begin{cases} 2x-3y=7, \\ 5x+6y=9 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Основной определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12-(-15) = 27.$

Если $\Delta = 0$, то правило Крамера для решения системы не применяют.

Δx - это определитель, который получается из главного определителя системы путем замены

столбца, состоящего из коэффициентов при x

на столбец, состоящий из соответствующих свободных членов,

Имеем $\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$.

Аналогично, Δy - это определитель, который получается из главного определителя системы путем замены столбца, состоящего из коэффициентов при y на столбец, состоящий из соответствующих свободных членов,

Тогда $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$.

Верным ответом будет:

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}}{27}$ и $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}}{27}$.

2. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Решение. Вычисляем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители. Определитель Δ_1 получим из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом свободных коэффициентов. Будем иметь:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 18 = -11$$

Аналогично, определитель Δ_2 получается из определителя матрицы системы Δ заменой второго столбца столбцом свободных коэффициентов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 14 = 31$$

Тогда получаем, что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{1} = 31.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 2.2 Системы линейных уравнений.

Практическая работа № 7

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: научить приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений методом Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1.Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ методом Гаусса.

2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Краткие теоретические сведения:

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении переменных и преобразовании системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

к треугольному виду

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n,\ c_{kk} = 1, (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Переход от первой системы уравнений до последней, называется прямым ходом метода Гаусса. Обратный ход метода Гаусса начинается с последней системы уравнений. Ее решают с конца до начала. Из последнего уравнения находят x_n. Подставив это значение в предпоследнее - находят x_{n-1} и т.д. Из первого уравнения находят x_1.

Ход работы:

1) Решить систему : $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$

методом Гаусса.

Для заданной системы уравнений запишем расширенную матрицу и, выполняя элементарные преобразования, приведем ее к диагональному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ 3 & 14 & 12 & 11 \\ 5 & 25 & 16 & 3 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ую строку на (-2)и прибавим полученную строку ко 2-ой и 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ -1 & 0 & -14 & -43 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \end{array}\right)$$

Поменяем местами 1-ую строку со 2-ой, 2-ую с 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -14 & -48 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \\ 2 & 7 & 13 & 27 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ую строку на (1) и прибавим полученную ко 2-ой, затем 1-ую умножим на (2) и

прибавим полученную к 3-ей, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 7 & -15 & -59 \end{array}\right)$

Умножим 2-ую строку на (-7),а 3-ью на (11) и прибавим полученную 2-ую строку к 3-ьей, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$

Умножим 3-ью строку на(8) и полученную прибавим ко 2-ой, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Разделим 3-ью строку на 3, затем умножим полученную на (-14) и прибавим к 1-ой,

получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$E , которая соответствует системе уравнений $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Ответ: X $=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему четырех линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу для данной системы

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Сведем ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований.

1.Поменяем местами первый и второй строки.

2. Добавим к элементам второго, третьего и четвертого строк элементы первой строки, умноженные соответственно на $-5;-3;-4$.

3. Поменяем местами второй и третий строки. Добавим к элементам третьего и четвертого строк элементы второй строки, умноженные соответственно на $4;1$.

4. От четвертого уравнения, умноженного на 11 вычитаем третье уравнение, умноженное на -3.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -13 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right]\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right]\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 30 \end{array}\right].$$

Такой расширенной матрицы соответствует следующая система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ -11x_3 - 9x_4 = 1; \\ 5x_4 = 30. \end{cases}$$

С четвертого уравнения находим $x_4 = 30/5 = 6$ и подставляем в третье уравнение

$-11x_3 = 1 + 9x_4 = 1 + 9 \cdot 6 = 55 \to x_3 = -55/11 = -5.$

Найденные значения подставляем во второе уравнение

$2x_2 = 2x_3 - x_4 = 2 \cdot (-5) - 6 = -16 \to x_2 = -16/2 = 8.$

Из первого уравнения находим первую неизвестную

$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = 8 + 5 - 6 = 7.$

Система полностью решена и $x_1 = 7; x_2 = -8; x_3 = -5; x_4 = 6$ – ее решение.

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 2.2 Системы линейных уравнений.

Практическая работ № 8

Решение систем линейных уравнений матричным способом.

Цель: научить приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений матричным способом.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ матричным методом.

2. Решить систему : $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$ матричным методом.

Краткие теоретические сведения:

С помощью данного метода можно находить решение только для квадратных СЛАУ.

Запишем заданную систему в матричном виде: $AX = B$

Если матрица A невырождена, то тогда с помощью операций над матрицами выразим неизвестную матрицу X . Операция деления на множестве матриц заменена умножением на обратную матрицу, поэтому домножим последнее равенство на матрицу A^{-1} слева:

$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \; EX = A^{-1}B \Rightarrow$

$X = A^{-1}B$

Поэтому, чтобы найти неизвестную матрицу X надо найти обратную матрицу к матрице системы и умножить ее справа на вектор-столбец свободных коэффициентов.

Алгоритм решения системы линейных уравнений матричным методом:

1. Составить матрицу A из коэффициентов при неизвестных, матрицу B из свободных членов и матрицу X из неизвестных.
2. Найти обратную матрицу A^{-1}.
3. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B.

Ход работы:

Решить с помощью обратной матрицы систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Решение. Запишем данную систему в матричной форме:

$AX = B,$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ - столбец правых частей.

Тогда

$X = A^{-1}B$

Найдем обратную матрицу A^{-1} к матрице A с помощью союзной матрицы:

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \widetilde{A}^T$

Здесь $\Delta = |A|$ - определитель матрицы A; матрица $\widetilde{A}$ - союзная матрица, она получена из исходной матрицы A заменой ее элементов их алгебраическими дополнениями. Найдем $\widetilde{A}$, для этого вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Таким образом,

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Определитель матрицы A

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 3 -$

$-3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \neq 0$

А тогда

$\widetilde{A} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Отсюда искомая матрица

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x_1=-1\\ x_2=1\\ x_3=3\end{cases}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.1 Теория пределов и непрерывность.

Практическая работа № 9

Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей.

Цель: Научиться раскрывать неопределенности при вычислении пределов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- раскрывать различные виды неопределенностей при вычислении пределов;
- вычислять пределы, применяя первый и второй замечательные пределы.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2-1}{4x^5+2x-9}$.
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{3x^3-75x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{\sin 30x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{6x}$.

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид неопределенности.

2. Преобразовать выражение, стоящее под знаком предела, с целью избавления от неопределенности.

3. Вычислить предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

Функция $f(x)=\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в предельной точке $x=3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию. Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1 и x_2 –корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2-11x+6$ являются числа $\dfrac{2}{3}$ и 3;

значит $3x^2-11x+6=3(x-\dfrac{2}{3})(x-3)$.

А корни квадратного трехчлена $2x^2-5x-3$ равны $-\dfrac{1}{2}$ и 3, следовательно $2x^2-5x-3=2(x+\dfrac{1}{2})(x-3)$.

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})(x-3)}{2(x+\frac{1}{2})(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1}.$$

Подставим предельное значение аргумента в оставшееся выражение, получим: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-2}{2x+1}=\dfrac{9-2}{6+1}=\dfrac{7}{7}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{150x-1000}{2x^2-3x+4}$

Так как $\lim_{x\to\infty}(150x-1000)=\infty$ и $\lim_{x\to\infty}(2x^2-3x+4)=\infty$,

то здесь имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2 (наивысшую степень x в данной дроби). Тогда, зная, что $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,

получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{150x-1000}{2x^2-3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{150x}{x^2}-\frac{1000}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{150}{x}-\frac{1000}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{2}=0.$$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$.

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться первым замечательным пределом $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

и соотношением $\lim_{x\to a}k\cdot f(x)=k\cdot\lim_{x\to a}f(x)$.

Для этого необходимо выполнить замену переменной: $\frac{x}{2}=t$, откуда $x=2t$.

Учитывая, что $t\to 0$ при $x\to 0$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

4. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$.

Преобразуем функцию $f(x)$ так, чтобы можно было применить второй замечательный предел, формулу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Для этого числитель и знаменатель дроби разделим на число -3, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/(-3)}\right)^{5x}.$$

Далее выполним замену переменной, полагая $-\frac{x}{3}=t$. Тогда если $x\to\infty$, то $t\to\infty$, $x=-3t$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/(-3)}\right)^{5x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5\cdot(-3t)}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-15}=e^{-15}.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Практическая работа № 10

Производная функции в точке. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Цель: формирование умений вычислять значение производной в точке, находить экстремумы функций, нахождения наибольших и наименьших значений функции на отрезке.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- вычислять значение производной в точке;
- находить экстремумы функций;
- находить наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке.

Материальное обеспечение: Таблицы производных, конспекты лекций, карточки с индивидуальными заданиями.

Задание:

1. Найти значение производной функции в заданной точке.

1) $y(x) = 5x - x^2$, $y'(x)=?$ при $x=-5$
2) $y(x) = 1/x$, $y'(x)=?$ при $x=-1/3$
3) $y(x) = \sqrt{x}$, $y'(x)=?$ при $x=1$
4) $y(x) = (x - 1/2)^2$, $y'(x)=?$ при $x=0$
5) $y(x) = (x + 1/2)^2$, $y'(x)=?$ при $x=2$
6) $y(x) = (x - 3)^2$, $y'(x)=?$ при $x=2$
7) $y(x) = (x - 7)^2$, $y'(x)=?$ при $x=5$

2. Найти экстремумы функций

1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 3$.
2) $y = x/4 + 4/x$.
3) $y = 2\sqrt{x} - x$.
4) $y = 8x - x^4/4$.

3.Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = x^4 – 2x^3 – 3$ на $[0; 2]$;
б) $y = 2x^2 – 4x + 3$ на $[0; 4]$;
в) $y = 3x^2 – x^3$ на $[-1; 3]$

Краткие теоретические сведения:

Правила дифференцирования

Пусть *c* – постоянная, *u=u(x), v=v(x)* – дифференцируемые функции.

Тогда

1. $c' = 0$;
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$;
4. $(cu)' = cu'$;
5. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$;
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$;
7. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = \dfrac{cv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$.

Пусть *y=f(u)* и *u=u(x)* – дифференцируемые функции и определена сложная функция *y=f(u(x))*. Тогда сложная функция дифференцируема и равна произведению производной функции *y=f(u)* в точке *u=u(x)* и производной функции *u=u(x)* в точке *x*, т.е. $y' = f'(u) \cdot u'$.

Если *y=f(x)* – дифференцируемая и строго монотонная функция на промежутке *X*, то функция, обратная к данной *x=φ(y),* также дифференцируема и ее производная определяется соотношением: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, $y'_x \neq 0$.

Дифференцирование функций, т.е. вычисление их производных, выполняется с использованием сформулированных правил дифференцирования и *таблицы производных основных элементарных функций:*

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x>0)$;
3. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;
4. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$;
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(x>0)$;
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $(x>0,\ a>0)$
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$;
10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - ctg^2 x$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x|<1)$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x|<1)$;
13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
15.

Наибольшим значением функции *y=f(x)* на промежутке *X* называют такое значение $\max\limits_{x\in X} y = f(x_0)$, что для любого $x \in X,\quad x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Наименьшим значением функции *y=f(x)* на промежутке *X* называют такое значение $\min\limits_{x\in X} y = f(x_0)$, что для любого $x \in X,\quad x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Также часто наибольшее и наименьшее значение функция может принимать в точках, в которых не существует первая производная этой функции, а сама функция определена.

Алгоритм, позволяющий находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1.Находим область определения функции и проверяем, содержится ли в ней весь отрезок *[a;b]*.

2.Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в отрезке *[a;b]* (обычно такие точки встечаются у функций с аргументом под знаком модуля и у степенных функций с дробно-рациональным показателем). Если таких точек нет, то переходим к следующему пункту.

3.Определяем все стационарные точки, попадающие в отрезок $[a;b]$. Для этого, находим производную функции, приравниваем ее к нулю, решаем полученное уравнение и выбираем подходящие корни. Если стационарных точек нет или ни одна из них не попадает в отрезок, то переходим к следующему пункту.

4.Вычисляем значения функции в отобранных стационарных точках (если такие имеются), в точках, в которых не существует первая производная (если такие имеются), а также при $x=a$ и $x=b$.

5.Из полученных значений функции, выбираем наибольшее и наименьшее - они и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции соответственно.

Порядок выполнения работы:

Задание 1.

1. Проанализировать задание и определиться с правилом дифференцирования, которое необходимо применить для решения данного примера.

2. Найти производную данной функции.

3. В найденную производную подставить заданное значение переменной х.

Задание 2.

1.Найти производную $f'(x)$;

2.Найти критические точки, то есть такие значения x, в которых $f'(x) = 0$или $f'(x)$не существует;

3.Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки;

4.Найти значение функции в экстремальных точках.

Ход работы:

Пример 1.Дана функция $f(x)=30\sqrt{x}-3x^2-x+11$. Найти $f'(9)$.

Для нахождения $f'(x)$ постоянные множители вынесем за знак производной и

воспользуемся формулами $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ и $(x^n)'=nx^{n-1}$.

Получим

$$f'(x)=\left(30\sqrt{x}-3x^2-x+11\right)'=\frac{30}{2\sqrt{x}}-6x-1=\frac{15}{\sqrt{x}}-6x-1.$$

Подставим $x_0=9$ в получившееся выражение производной функции, тогда $f'(9)=\frac{15}{\sqrt{9}}-6\cdot 9-1=\frac{15}{3}-54-1=-50.$

Пример 2. Исследовать на экстремум функции: $y=x^2\sqrt[3]{(1-x)^2}$

Область определения функции – вся ось x. Исследуем производную:

$$y'=2x\sqrt[3]{(1-x)^2}-\frac{2}{3}x^2\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=\frac{2x}{3\sqrt[3]{1-x}}[3(1-x)-x]=\frac{2x(3-4x)}{3\sqrt[3]{1-x}};$$

1) $y'=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{3}{4}$, 2) $y'=\infty \Rightarrow \sqrt[3]{1-x}=0$, $x_3=1$.

Нанесём найденные критические точки на ось x и проверим знак первой производной на полученных интервалах:

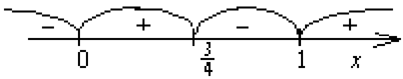


Рис. 22

$(0, \frac{3}{4})$, $(1, \infty)$ – интервалы возрастания функции,

$(-\infty, 0)$, $(\frac{3}{4}, 1)$ – интервалы убывания функции.

Значит, $x = 0$ и $x = 1$ – точки минимума, $x=\frac{3}{4}$ – точка максимума,

$y(0) = 0$, $y(1) = 0$ – минимальные значения функции,

$$y\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{9}{64}\sqrt[3]{4}$$ – *максимальное значение функции.*

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^4 – 2x^3 – 3$ на отрезке [0; 2];

1) Найдите производную функции.	1) $y = 4x^3 – 4x = 4x(x^2 – 1) =$ $= 4x (x – 1) (x + 1)$.
2) Найдите точки, в которых производная равна нулю или не существует.	2) $4x (x – 1) (x + 1) = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.
3) Определите критические точки внутри данного отрезка.	3) Внутри [0; 2] критическая точка $x = 1$.
4) Найдите значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка.	4) $y(1) = 1 – 2 – 3 = -4$. $y(0) = -3$, $y(2) = 16 – 8 – 3 = 5$.
5) Выберите наименьшее и наибольшее значения.	5) $\min\limits_{[0;\,2]} y (x) = –4$, $\max\limits_{[0;\,2]} y (x) = 5$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Практическая работа № 11

Дифференцирование сложных функций.

Цель: Научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;
- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:
Найти производные функций
1. $y = (5x^3 - 2x)^6$

2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$

3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$

4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$

5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)'$$
$$= \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$
$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$
$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$/

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования$(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

$5.f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент
$u = 1 - e^{2x}$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' = -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Практическая работа № 12

Анализ функции и построение графика.

Цель: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- проводить исследование функций с помощью производной;
- строить графики функций.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:
Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:
1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D\ (y)$.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную .
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = y_0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ равно y_0.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

1. Область определения функции $D(y): (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = \frac{0}{2(0-1)} = 0.$

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x-1)} = -\frac{x^2}{2(x+1)};$$

$$y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Итак функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции $y' = \frac{2x\cdot(x-1) - x^2}{2(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}$.

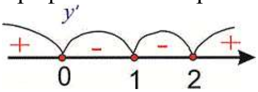
Приравнивая ее к нулю, получим точки подозрительные на экстремум $x = 0, x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty;0) \cup (0;1) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$.

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения

$$y'(-1)=\frac{-1(-1-2)}{2(-1-1)^2}=\frac{1}{4}>0;\ y'(0,5)=\frac{0,5(0,5-2)}{2(0,5-1)^2}=-1,5<0;$$

$$y'(1,5)=\frac{1,5(1,5-2)}{2(1,5-1)^2}=-1,5<0;\ y'(3)=\frac{3(3-2)}{2(3-1)^2}=\frac{3}{8}>0.$$

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty;0),(2;+\infty)$ и убывает $(0;1),(1;2)$.

Точка $x=0$ – точка локального максимума, $x=2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max}=0,\ y_{min}=\frac{2^2}{2(2-1)}=2.$

5. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

6. Точка $x=1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$.

Находим нужные границы

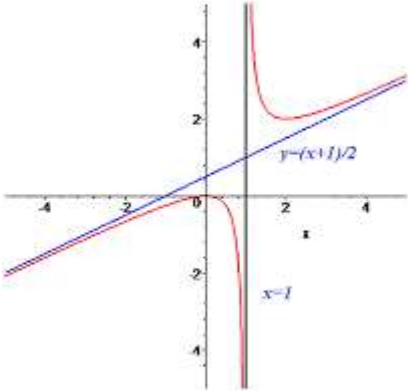
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}==\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

Конечный вид прямой следующий

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

7. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Практическая работа № 13

Решение физических задач.

Цель: Научиться решать физические задачи с применением дифференциального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать физические задачи с применением дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы производных.

Задание:

1. Точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равна скорость в момент времени $t = 1$?

2. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $s(t)=-0,5t^3+t+2$ (м). Найти ускорение $a(t)$ точки в момент времени $t=2$ с.

3. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T=0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается тело в момент времени 10 с?

4. Маховик, задерживаемый тормозом, за tc поворачивается на угол $\varphi=5t-0{,}4t^2$ (рад). Определить угловую скорость ω маховика в момент времени t = 2 с и найти момент остановки вращения.

Краткие теоретические сведения:

Путь, пройденный телом

Пусть задан путь $s=f(t)$ движения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t: $v(t)=s'(t)$.

Вторая производная – скорость изменения первой производной, т.е. *ускорение* изменения исходной функции: $a=s''(t)=v'(t)$.

Если твердое тело вращается вокруг оси, то угол поворота φ есть функция от времени t. Угловая скорость вращения в данный момент t численно равна производной $\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу дифференциального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

1. Задание. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)=\frac{2}{3}t^3-2t^2+4t$ (м). Определить скорость его движения в момент $t=10$ с.

Решение. Искомая скорость - это производная от пути, то есть

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{2}{3}t^3-2t^2+4t\right)'=\left(\frac{2}{3}t^3\right)'-(2t^2)'+(4t)'=$$
$$=\frac{2}{3}(t^3)'-2(t^2)'+4(t)'=\frac{2}{3}\cdot 3t^2-2\cdot 2t+4\cdot 1=2t^2-4t+4$$

В заданный момент времени

$$v(10)=2\cdot 10^2-4\cdot 10+4=200-40+4=164$$

(м/с).

Ответ. $v(10)=164$ (м/с).

2. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T = 0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается тело в момент времени 10 с?

Скорость нагревания тела есть производная температуры T по времени t: $\frac{dT}{dt} = (0{,}2t^2)' = 0{,}4t$.

Скорость нагревания тела при t =10 с:

$(\frac{dT}{dt})_{t=10} = 0{,}4 \cdot 10 = 4$ (град/с).

3. Маховик за время поворачивается на угол $\varphi = 8t - 0{,}5t^2$. Определить угловую скорость ω в конце 3-й секунды. Найти момент, когда прекратится вращение.

Имеем $\varphi' = 8 - t$. Так как $\omega = (8 - t)$ рад/с, то при t = 3 получим $\omega = 5$ (рад/с). Вращение прекратится в момент, когда $\omega = 8 - t = 0$, т.е. при t = 8 с.

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.3 Интегральное исчисление функции одной переменной.

Практическая работа № 14

Нахождение неопределенных интегралов различными методами интегрирования.

Цель: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом подстановки;
- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1. Найти неопределенные интегралы, используя метод замены переменной: а) $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$; б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; г) $\int \sqrt[5]{3x+2}dx$.

2. Найти неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям: а) $\int xe^{5x}dx$; б) $\int \ln(1-x)dx$; в) $\int x\sin 3x dx$.

Краткие теоретические сведения:

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *y = f (x)* в промежутке *[a ;b]*, если в любой точке этого промежутка её производная равна *f (x)*.

Отыскание первообразной функции по заданной её производной *f (x)* или по дифференциалу *f (x) dx* есть действие, обратное дифференцированию - интегрирование.

При нахождении неопределенных интегралов используют свойства интегралов и таблицу.

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ где *C*– произвольное число;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;

5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;
11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$

$-a<x<a,\ a>0;$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

6. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a>0,\ a \neq 1$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0$;

14. $\int e^x dx = e^x + C$;

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула: $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *U*и *dV*. Затем, после нахождения *dU*и *V*,использовать формулу интегрирования по частям.

- - Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где *P(x)*- многочлен, *k*- число. Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за *dV*.
- Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$. Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за *U*.
- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx, \int e^{ax}cosbxdx$, где *a*и *b*числа. За *U* можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой пере-

менной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным.

3. Если интеграл нельзя найти вышеуказанным способом, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU.$

Ход работы:

Пример. Найти интегралы:

1)$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1-x^3=t \\ d(1-x^3)=dt \\ -3x^2dx=dt \\ x^2dx=-\frac{dt}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \int \frac{15dt}{-3t^4}$$
$$= -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

2. $\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx,\ dV = (x^3 - 4x)dx.$

$$dU = \frac{1}{x}dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x)lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right)dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.3 Интегральное исчисление функции одной переменной.

Практическая работа № 15

Вычисление определенных интегралов различными способами, приближенные вычисления.

Цель: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования, вычислять приближенные значения определенных интегралов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить определенные интегралы различными методами;
- находить приближенные значения определенных интегралов.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1. Найдите интегралы

1)$\int_{2}^{4}\frac{3xdx}{(x^2-1)^3}$

2)$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^3x \cdot cosxdx$

2. Вычислить, разбив отрезок интегрирования [0; 2] на 4 части. $\int_0^2 x^3\,dx$.

Краткие теоретические сведения:

Для нахождения определенных интегралов применяется формула Ньютона -Лейбница. Формула Ньютона - Лейбница - основная формула интегрального исчисления.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$.

Формулы приближенного вычисления определенного интеграла.

Формула прямоугольников:

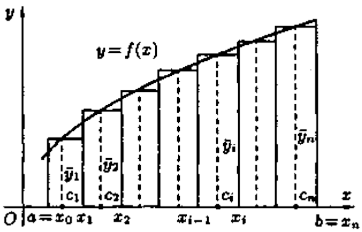


Рис. 200.

Пусть на отрезке [a; b], a < b, задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется вычислить интегралчисленно равный площади соответствующей криволинейной $\int_a^b f(x)\,dx,$ трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок [a; b], на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг разбиения) с помощью точек $x_0 = a$, x_1, x_2,..., $x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где i = 1,2,..., n.

В середине $c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\hat{y}_i = f(c_i)$ графика функции $y = f(x)$. Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \hat{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямоугольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке [a; b],

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x)=kx+b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x)=0$.

Формула трапеций.

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок [a; b] на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0$, $x_1, x_2, \ldots, b = x_n$ (рис. 201). Пусть $y_0, y_1 \ldots, y_n$ —

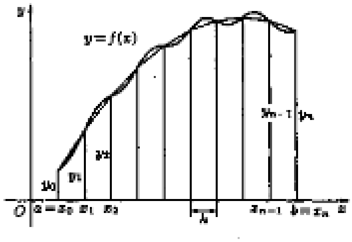


Рис. 201.

соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы $h = \frac{b-a}{n}$. для этих значений примут вид $x_i = a+h*i$, $y_i=f(x_i)$, $i= 0,1,2,..., n$;

Заменим кривую $y=f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} ($i = 0,1,2,.. .,n$). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1}и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1+y_2}{2}\cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (42.2)$$

Формула (42.2) называется формулой трапеций.

Абсолютная погрешность R_n приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы $|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2$, где $M_2 = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$.

Ход работы:

1. Найти интегралы:

1) $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} == \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt|_0^1 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^3x} = \begin{bmatrix} cosx = t \\ dcosx = dt \\ -sinxdx = dt \\ sinxdx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = cos0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} t_B = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2}|_1^{0,5}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

2. Вычислить, разбив отрезок интегрирования [0; 2] на 4 части. $\int_0^2 x^3\,dx$.

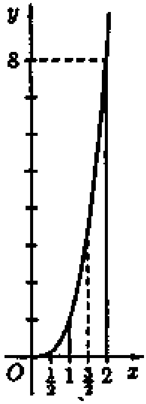
Имеем: $f(x) = x^{3,}$

$$a = x_0 = 0; \quad b = x_4 = 2, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{8}; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 1;$$

$$x_3 = \frac{3}{2}, \quad y_3 = \frac{27}{8}; \quad x_4 = 2, \quad y_4 = 8;$$

(см.рис.)



а) по формуле пря- **Рис. 204.** моугольников:

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad \bar{y}_1 = \frac{\;}{6}$$

$$c_3 = \frac{5}{4}, \quad \bar{y}_3 = \frac{12}{6}$$

$$\int_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) = 3{,}875, \text{ т. е. } \int_0^2 x^3\,dx \approx 3{,}875;$$

б) по формуле трапеции:

$$\int_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) = 4{,}25, \text{ т. е. } \int_0^2 x^3\,dx \approx 4{,}25;$$

Форма представления результата:выполненная работа.

Тема 3.3 Интегральное исчисление функции одной переменной.

Практическая работа № 16

Вычисление площади плоской фигуры и объёма тела вращения.

Цель: формирование умений применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов;
- находить объемы тел вращения с помощью определенных интегралов.

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов, конспекты лекций.

Задание:
1. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:
   a) $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 1, x = 4;$
   b) $y = \ln x, y = 0,\ x = 1, x = e;$
   c) $y^2 = x^3; x = 4.$

2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}; y = 0; x = 4$ (ось вращения ось Ох).

Краткие теоретические сведения:
Геометрический смысл определенного интеграла
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

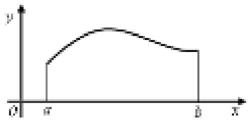


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$на данном отрезке: $S=\int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

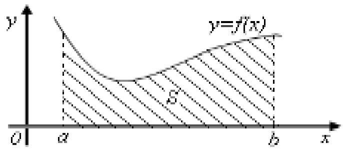


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S=-\int_a^b f(x)dx$.

Рис. 3

3. Если функция $f_2(x)\geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь Sфигуры, заключенной между кривыми $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$.

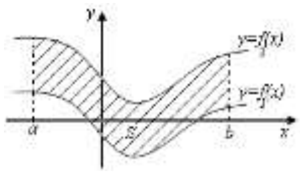
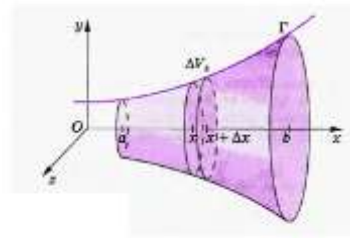


Рис. 4

Вычисление объмов тел вращения.

При помощи определенного интеграла можно вычислить объем того или иного тела, в частности, тела вращения.

Телом вращения называется тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг ее основания (рис. 1, 2)



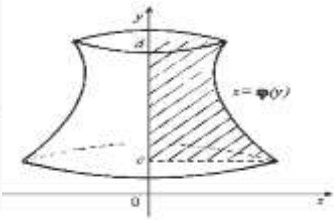


Рис.1 рис.2

Объем тела вращения вычисляется по одной из формул:

1. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$, если вращение криволинейной трапеции **вокруг оси ОХ.**

2. $V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 \, dy$, если вращение криволинейной трапеции **вокруг оси ОУ.**

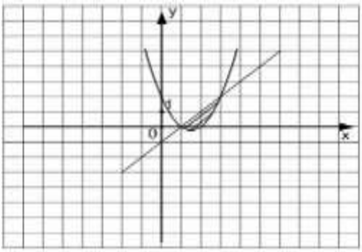
Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \ge f_2(x)$ на данном отрезке, находится по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.



Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования. Значит, площадь фигуры равна:

$$S = \int_1^3 ((x-1) - (x^2 - 3x + 2))dx = \int_1^3 (4x - x^2 - 3)dx =$$

$$= (2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x)\Big|_1^3 = 18 - 9 - 9 - (2 - \frac{1}{3} - 3) =$$

$$= -2 + \frac{1}{3} + 3 = 1\frac{1}{3}.$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Пример 2. Найти объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 64$, $y = -5$, $y = 5$, $x = 0$.

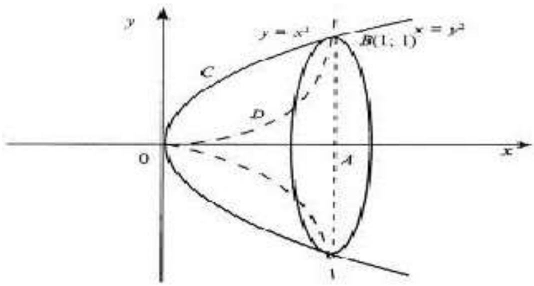
Решение.

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(64 - y^2\right)dy = \pi\left(64y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{5} = 556\frac{2}{3}\pi \approx 1163 см^3$$

Ответ : 1163 cm^3.

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением лепестка, вокруг оси абсцисс $y = x^2$, $y^2 = x$.

Решение .



Построим графики функции. $y = x^2$, $y^2 = x$. График $y^2 = x$ преобразуем к виду $y = \sqrt{x}$.

Имеем $V = V_1 – V_2$ Вычислим объем каждой функции

$$V_1 = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = 0{,}3\pi$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.3 Интегральное исчисление функции одной переменной.

Практическая работа № 17

Решение физических и технических задач.

Цель: Научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать физические и технические задачи с применением интегрального исчисления

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

Задание:

1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.

2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.

3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?

4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.

5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Краткие теоретические сведения:

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е . $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что dS = v(t)dt. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$

Вычисление работы с помощью определённого интеграла.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка М движется по прямой в направлении оси OX. Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки М из положения $x = x_1$ в положение $x = x_2$.

1) Если сила постоянна $f(x) = C$, то работа выражается следующим образом $A = C(x_2 - x_1)$.

2) Если сила переменная величина, то $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила P давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле:

$P = 9{,}81\gamma hS$ (4), где γ – плотность жидкости.

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx \ (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то a=0 и формула (5) примет вид

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx \ (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx = 9{,}81\gamma y \int_a^b x\,dx = 9{,}81\gamma y \frac{x^2}{2} \int_a^b = 9{,}81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.

2.Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.

3.Записать ответ.

Ход работы:

Пример 1.Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела v(t) = 10t + 2 (м/с).

Решение: Если v(t)=10t+2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2)\,dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (\text{м}).$$

Ответ. S= 88 (м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно,F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12,5 \text{ (Дж)}.$$

Пример 3. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/$м^3$. Следовательно,

$$P = 9810\int_a^b xy\,dx = 9810\int_a^b x\,dx = 9810\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5} = 9810\,\frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430\ (H).$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.4 Дифференциальные уравнения

Практическаяработа№18

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Цель: научиться решать дифференциальные уравнения I порядка с разделяющими переменными.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $\frac{dy}{5x^4} - (1 + y^2)dx = 0$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения x + yy′ = 0 и частное решение, удовлетворяющее начальному условию y(0)=2.

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если функцию $f(x,y)$ можно представить в виде произведения двух функций, зависящих только от x и y: $f(x,y) = p(x)h(y)$, где $p(x)$ и $h(y)$ − непрерывные функции. Разделив переменные, получим следующее уравнение $q(y)dy = p(x)dx$. Теперь переменные разделены, и мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение: $\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx + C,$ где C − постоянная интегрирования. Вычисляя интегралы, получаем выражение $Q(y) = P(x) + C,$ описывающее общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находится при определённых начальных значениях аргумента и функции.

Порядок выполнения работы:

1. Привести данное уравнение к уравнению с разделяющими переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:
   а) Производные функции заменить её дифференциалами;
   б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;
   в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих” дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$

Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

2. Определить вид дифференциального уравнения и применить соответствующую замену для его решения.

Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0 : y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постоянной C ,а затем C подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{x^2}=\frac{dx}{y^2+1}$.Получим: $(y^2+1)dy=x^2dx.$
Тогда:

$$\int(y^2+1)dy=\int x^2dx \Rightarrow \frac{y^3}{3}+y=\frac{x^3}{3}+c_1 \Rightarrow y^3+3y=x^3+3c_1.$$

Обозначим $3c_1$ через c.Получим: $y^3+3y=x^3+c,$ где c – любое число.

$y^3+3y=x^3+c$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6xdx+3xy^2dx)-(6ydy+2x^2ydy)=0$$

Сгруппируем члены с dx и dy

$$3x(2+y^2)dx-2y(3+x^2)dy=0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3+x^2}=\frac{2ydy}{2+y^2}$$

-Интегрируем

$$3\int\frac{xdx}{3+x^2}=2\int\frac{ydy}{2+y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2}\ln(3+x^2)=\ln(2+y^2)+\ln c$$

$$\ln(3+x^2)^{\frac{3}{2}}=\ln(2+y^2)\cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3+x^2)^3}=(2+y^2)\cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}{2+y^2}=c$$

3. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения $y'\operatorname{ctg} x+y=2$, удовлетворяющее условию $y(0)=-1$.
Это уравнение с разделяющимися переменными. Решение. Для разделения переменных поделим уравнение почленнона $\operatorname{ctg} x$ и получим $y'+\frac{y}{\operatorname{ctg} x}=\frac{2}{\operatorname{ctg} x}$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{2-y}{\operatorname{ctg} x}$.

Разделяем *dy* и *dx* и получаем уравнение:

$$\frac{dy}{2-y}=\frac{dx}{\operatorname{ctg}\ x}$$

$$\frac{dy}{2-y}=\operatorname{tg}\ x\ dx,$$

которое почленно интегрируя:

$$\ln|2-y|=-\ln|\cos x|+\ln|C|$$

$$\ln|2-y|=-\ln|\cos x\bullet C|$$

$$2-y=-\cos x\bullet C,$$

находим общее решение уравнения: $y=\cos x\bullet C+2$.

Чтобы найти частное решение уравнения, подставляем в общее решение значения *y их* из начального условия:

$$-1=\cos(0)\bullet C+2$$

$$-1=1\bullet C+2$$

$$C=-1-2=-3.$$

Таким образом, частное решение данного дифференциального уравнения:

$$y=2-3\cos x$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.4 Дифференциальные уравнения

Практическая работа № 19

Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель: Научиться определять вид дифференциальных уравнений, находить общее и частное решение однородных и линейных дифференциальных уравнений I порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь**:**

- определять вид дифференциального уравнения первого порядка;
- находить общее и частное решение однородного дифференциального уравнения первого порядка;
- находить общее и частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

   a) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

   b) $xy' - y = -x$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

   a) $y^2 + x^2y' = xy \cdot y'$ *при* $y(1) = 1$

   b) $y' \sin x - y \cos x = 1$ *при* $x = \frac{\Pi}{2}$, *y=1*

Краткие теоретические сведения:

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ называется однородным, если правая часть удовлетворяет соотношению $f(tx, ty) = f(x, y)$ для всех значений *t*.

Однородное дифференциальное уравнение можно решить с помощью подстановки *y* = *ux*, которая преобразует однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Дифференциальное уравнение вида y′ + P(x)y = Q(x) называется линейным.

Линейное дифференциальное уравнение I порядка решается путем подстановки

$y = \mathrm{u} \cdot \vartheta$; $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{u}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{dx}} + \vartheta\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$

Дифференциальное уравнение сводится к решению двух дифференциальных уравнений, с разделяющими переменными, сначала относительно u , потом-ϑ, где u и ϑ неизвестные функции от *x*.

Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

Приводим к уравнению с разделяющими переменными и решаем относительно p.

Подставляем p и решаем уравнение разделением переменных относительно y.

Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно

C_1 и C_2. Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, находим частные решения.

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид дифференциального уравнения
2. Применить соответствующую замену для его решения.
3. Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0 : y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая.
4. Находим значение постоянной С ,а затем С подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

1. Найти частное решение однородного дифференциального уравнение I порядка

$y' = \frac{2x+y}{2x}$, если *y=0 при x=1*

-Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{2x}$

-Произведем подстановку $y = zx$; $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$

$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{2x+zx}{2x}$; $\quad x\frac{dz}{dx} + z = \frac{x(2+z)}{2x}$

$x\frac{dz}{dx} = \frac{2+z}{2} - z$; $\quad x\frac{dz}{dx} = \frac{2-z}{2}$

-Разделим переменные $\frac{2}{2-z}dz = \frac{dx}{x}$

-Проинтегрируем выражение: $2\int\frac{dz}{2-z} = \int\frac{dx}{x}$

-Решаем данное уравнение $-2\ln|2-z| = \ln|x| + \ln c$

$$\ln\frac{1}{(2-z)^2} = \ln(xc)$$

-Пропотенцируем выражение $\frac{1}{(2-z)^2} = xc$

-Выразим z: $(2-z)^2 = \frac{1}{xc}$

$2 - z = \frac{1}{\sqrt{xc}}$; $\quad z = 2 - \frac{1}{\sqrt{xc}}$

-Заменим $z = \frac{y}{x}$ и выразим $yy = \frac{2x\sqrt{xc}-x}{\sqrt{xc}}$– общее решение

-Подставим начальные условия *y=0 , x=1*

$0 = \frac{2\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}}$; $2\sqrt{c} - 1 = 0,\ 2\sqrt{c} = 1,\ \sqrt{c} = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$

-Подставим c в общее решение $y = 2(x - \sqrt{x})$ частное решение.

2. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения I порядка

$xy' + y = 3$, если *y=0, при x=1*

-Приведем уравнение к виду по определению $y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$

-Сделаем замену $y = u\vartheta$; $\quad \frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$

-Сгруппируем члены сϑ, получим

$\vartheta\left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right) = 0$, т.к. $\vartheta \neq 0$ =>$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$

-Разделим переменные $\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$.

-Проинтегрируем $\int\frac{du}{u} = -\int\frac{dx}{x}$

$$\ln|u| = -\ln|x|$$

-Пропотенцируем

$$u = \frac{1}{x}$$

-Подставим u в оставшееся уравнение $\frac{1}{x}\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{3}{x}$

$$d\vartheta = 3dx$$

-Проинтегрируем

$$\vartheta = 3x + c$$

-Подставим $y = u\vartheta y = \frac{1}{x}(3x + c)$- общее решение

-Подставим начальные условия $0 = 3 + \text{c}$ =>c=-3

$y = \frac{3}{x}(x - 1)$- частное решение

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 3.4 Дифференциальные уравнения

Практическая работа № 20

Решение дифференциальных уравнений второго порядка. Решение прикладных задач.

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения II порядка и линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами. Решать прикладные задачи.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка;
- находить общее и частное решение простейших дифференциальных уравнений второго порядка;

- находить общее и частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами;

- решать прикладные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания , таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения II порядка:
   a) $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = 5}$
   b) $\boldsymbol{y'' = x\ , A(1;0); B(1;1)}$
2. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения II порядка.
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ при } x = 0\ ; y = 0;\ \frac{dy}{dx} = 0$$

3. В теории резания возникает следующая задача: найти кривую, касательная к которой в каждой точке образует постоянный угол с радиусом вектором этой точки.

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

Приводим к уравнению с разделяющими переменными и решаем относительно p.

Подставляем p и решаем уравнение разделением переменных относительно y.

Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно C_1 и C_2. Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, находим частные решения.

Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p, q − постоянные коэффициенты.

Для каждого такого дифференциального уравнения можно записать так называемое *характеристическое уравнение*: $k^2 + pk + q = 0$.
Обшее решение однородного дифференциального уравнения зависит от корней характеристического уравнения, которое в данном случае будет являться квадратным уравнением. Возможны следующие случаи:

1. Дискриминант характеристического квадратного уравнения положителен: $D > 0$. Тогда корни характеристического уравнения k_1 и k_2 действительны и различны. В этом случае общее решение описывается функцией $y(x) = C_1 \exp(k_1 x) + C_2 \exp(k_2 x)$,

   где C_1 и C_2 − произвольные действительные числа.

2. Дискриминант характеристического квадратного уравнения равен нулю: $D = 0$. Тогда корни действительны и равны. В этом случае говорят, что существует один корень k_1 второго порядка. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y(x) = (C_1 x + C_2)\exp(k_1 x)$.
3. Дискриминант характеристического квадратного уравнения отрицателен: $D < 0$. Такое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_1 = \alpha - \beta i$. Общее решение записывается в виде $y(x) = \exp(\alpha x)\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right]$.

   При заданных начальных условиях составляем систему линейных уравнений и решаем её относительно C_1 и C_2.

Порядок выполнения работы:
1. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы.
2. Решить задания в тетради.

Ход работы:
1. Решить дифференциальное уравнение порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$$

-Заменим $p = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}; \frac{dp}{dx} = 1 - 2x$$

-Разделим переменные

$$dp = (1 - 2x)dx$$

-Проинтегрируем

$$\int dp = \int (1 - 2x)dx$$

$$p = x - x^2 + c_1$$

-Заменим pна$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + c_1$$

-Разделим переменные

$$dy = (x - x^2 + c_1)dx$$

-Проинтегрируем и получим общее решение

$$\int dy = \int (x - x^2 + c_1)dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$$

2. Решить однородное дифференциальное уравнение II порядка

a) $y'' - 5y' + 6 = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 5k + 6 = 0$, решаем квадратное уравнение, получим $k_1 = 2, k_2 = 3$

-Общее решение будет:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

b) $y'' + 4y' + 4y = o$

-Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k + 2)^2 = 0 \qquad k = -2$$

-Запишем общее решение для *D*=0

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2x)$$

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 6k + 12 = 0; \quad D = 36 - 4 \cdot 13 = -16$D<0 =>$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2ia = 3; b = 2$

-Запишем общее решение

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

3. Найти кривую, проходящую через точку (2;3) и обладающую тем свойством, что отрезок любой её касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Пусть M(x;y)- произвольная точка искомой кривой, тогда по условию AM = MB, следовательно, OC=CB, OB=2OC=2x и аналогично OA=2OD=2y. Далее, так как φ=π-α,

то $tg\varphi = tg(\pi-\alpha) = -tg\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{y}{x}$, откуда

$tg\alpha = -\frac{y}{x}$ или $y' = -\frac{y}{x}$.

Интегрируя дифференциальное уравнение, получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \int\frac{dy}{y} + \int\frac{dx}{x} = \ln C,$$
$$\ln|y| + \ln|x| = \ln C, \ln|xy| = \ln C,$$
$$xy = C \text{ или } y = \frac{C}{x} \ (C \neq 0).$$

Теперь найдем гиперболу, проходящую через заданную точку(2;3). Подставив в уравнение координаты этой точки, получим 2·3= C, откуда C=6. Следовательно, искомая кривая *xy*=6.

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 4.1 Элементы теории множеств

Практическая работа № 21

Операции над множествами. Отношения.

Цель: Научиться выполнять операции над множествами.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- выполнять операции над множествами;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны множества:

$A = \{m, n, k\}$,

$B = \{m, n, k, l, p\}$,

$C = \{m, n, k, l\}$.

Выполнить следующие действия A∩B∪C.

2. Даны множества:

$A = \{b, c, d, e\}$,

$B = \{d, e, l\}$,

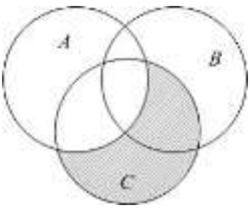
$C = \{b, d, e, l\}$,

$D = \{c, l\}$,

$E = \{b, c\}$.

Выполнить следующие действияC/A ∪ B

3. Пусть на рисунке изображены множества A, B и C.



Какому множеству соответствует заштрихованная область?

4. Найти прямое произведение множеств $A = \{a; b\}$, $B = \{1; 3; 5\}$.

Порядок выполнения работы:

1. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы.

2. Решить задания в тетради.

Ход работы:

1. Даны множества:

$$A = \{m, n, k, p\},$$
$$B = \{k, p, l\},$$
$$C = \{m, n, k, p, l\},$$
$$D = \{k, p\},$$
$$E = \{m, n\}.$$

Выполнить следующие действия A∩B∪C.

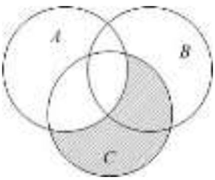
2. Даны множества $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{c, d, e, g, k\}$.

Найти множество $B \setminus A$.

Разностью множеств B и A называется множество C, которое состоит из всех элементов множества B, не принадлежащих множеству A . Элементы a и bпринадлежат множеству B, но не принадлежат множеству A.

Тогда $B \setminus A = \{g, k\}$.

3. Пусть на рисунке изображены множества A, B и C.



Какому множеству соответствует заштрихованная область?

Каждая точка заштрихованной области принадлежит множеству C , но не принадлежит множеству A, значит, по определению разности двух множеств заштрихованная область есть множество, равное $C \setminus A$.

3. Дано множество $A = \{3, 12, 18, 10\}$. Из множества упорядоченных пар декартова произведения $A \times A$, выбрано подмножество ρ .

Пара $(x, y) \in \rho$, если числа x и y при делении на 5 дают равные остатки.

Чему равно количество пар, принадлежащих отношению ρ ?

Найдем остатки от деления элементов множества Aна 5.

$3 = 0 \cdot 5 + 3$, остаток равен 3.

$12 = 2 \cdot 5 + 2$, остаток равен 2.

$18 = 3 \cdot 5 + 3$, остаток равен 3.

$10 = 2 \cdot 5 + 0$, остаток равен 0.

Одинаковые остатки при делении на 5 дают числа 3 и 18.

Значит, заданному отношению принадлежат пары (3; 18) и (18; 3).

Но пары (3; 3) и (18; 18) также принадлежат отношению ρ, так как числа 3 и 3; 18 и 18 при делении на 5 дают одинаковые остатки. Количество всех пар, принадлежащих данному отношению, равно 4.

Форма представления результата: выполненная работа

Тема 4.2 Элементы комбинаторики

Практическая работа № 22

Решение задач на основные понятия комбинаторики

Цель: Осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-Находить отличия одной выборки от другой;

-Применять формулы для подсчёта выборок без повторений.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Краткие теоретические сведения:

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1.Правило сложения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами, а другой элемент $B-n$ способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (А или В) можно осуществить $m+n$ способами.

2.Правило умножения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача1. При формировании экипажа космического корабля имеется:10 претендентов на пост командира,20 претендентов на пост бортинженера,25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Решение. По правилу суммы существует 10+20+25=55способов выбора одной из кандидатур.

Задача2.В столовой предлагают два различных первых : a_1 и a_2 ;три различных вторых блюда: b_1, b_2, b_3 и два различных десерта: c_1 и c_2. Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

Решение. Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует $2 \times 3 \times 2$ =12 способов выбрать обед из трех блюд.

3. Подмножества n- множеств(соединения).

Для нахождения $k-$подмножеств некоторого $n-$множества нужно выбрать k из n его элементов (поэтому часто говорят о *выборк*е k элементов из $n-$элементов). Про выбранные k из n различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из n элементов по k.
Соединение - собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений:перестановки, размещения, сочетания.

Перестановки.

Перестановками из $n-$элементов называются такие соединения из $n-$элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n!$

Размещения.

Размещениями из $n-$элементов называются такие соединения , каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных $n-$элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем , и другим.

Обозначение $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из $n-$элементов по $n-$элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

Сочетания.

Сочетаниями из n- элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение**:** $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

   Решение.

   1.Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 $\neq$2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7$\neq$4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

   2.Формула размещений имеет вид:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4 , m = 10$.

   3. Производим расчёт :$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!}$=$\frac{10!}{6!}$=$\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$=$10\cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

   Решение.

   1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.
   2. Формула сочетаний имеет вид:$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.
   3. Производим расчёт:$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!}$=$\frac{10!}{3!7!}$=$\frac{7!\cdot8\cdot9\cdot10}{3\cdot2\cdot1\cdot7!}$ =120.

3.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

1.По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2.Формула перестановок из п –элементов имеет вид:$P_n = n!$ В нашем случае n =4.

3.Произведём расчёт: P_4 =4!=4$\cdot$ 3 $\cdot$ 2 $\cdot$ 1=24.

Форма представления результата: выполненная работа

Тема 5.1 Элементы теории вероятностей

Практическая работа № 23

Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения вероятностей.

Цель: Научиться находить вероятность событий, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять вероятность события по классическому определению вероятности **;**
- вычислять вероятность события, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Из урны, в которой находятся 6 черных и 10 белых шаров, вынимают одновременно 2 шара. Чему равна вероятность того, что оба шара будут белыми.
2. Два предприятия производят разнотипную продукцию. Вероятности их банкротства в течение года равны 0,1 и 0,2 соответственно. Чему равна вероятность того, что в течение года обанкротится хотя бы одно предприятие.
3. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.

Краткие теоретические сведения:

Вероятность – это количественная оценка возможности наступления случайного события. По классическому определению, вероятностью случайного события P(A) называется отношение числа m благоприятствующих исходов к общему числу n равновозможных исходов эксперимента

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Свойства вероятности

- *Вероятность достоверного события равно* 1.
- В этом случае m=n, поэтому $P(A) = n/n = 1$
- *Вероятность невозможного события равно* 0.
- Если событие A невозможно, то $m = 0$, отсюда
- $P(A) = 0/n = 0$
- *Вероятность случайного события – положительное число, заключенное между* 0 *и* 1.
- Действительно, 0 <m <n, значит0< m/n <1, следовательно, 0< $P(A)$<1

Теорема сложения.Для произвольных событий А и В справедливо соотношение P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)

Для несовместных событий вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. $P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+ \ldots +P(A_n)$

Теорема умножения. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

P(A·B) = P(A) · P(B).

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

Задание 1. В урне 30 шаров, имеющих номера: 1, 2, …, 30. Из урны наугад вынимают один шар. Вероятность событияA – «вынутый шар содержит цифру 7» -равна …

Решение. Вероятностью $P(A)$ событияA называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к общему числу n равновозможных элементарных событий: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Имеем: число m = 3 (благоприятствующие события – это числа 7, 17, 27);

n=30 (общее число равновозможных событий).

Тогда $P(A)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$.

Задание 2. Имеется два ящика с лампочками. Вероятность вынуть бракованную лампочку из первого ящика равна *0,2*. Вероятность вынуть бракованную лампочку из второго ящика равна *0,25*. Наугад вынимают по одной лампочке из каждого ящика. Какова вероятность того, что обе лампочки окажутся качественными?

Решение. Пусть событие *A* означает, что лампочка, вынутая из первого ящика бракованная. Тогда по условию $P(A)=0,2$. Событие $\overline{A}$, означающее, что лампочка, вынутая из первого ящика, качественная, является противоположным событию *A*. Известно, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е. $P(A)+P(\overline{A})=1$, значит, $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,2=0,8$.

Пусть событие *B* означает, что лампочка, вынутая из второго ящика бракованная.

Тогда $P(B)=0,25$.

Аналогично находим, что $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,25=0,75$.

События $\overline{A}$ и $\overline{B}$ являются независимыми.

Тогда вероятность совместного появления двух независимых событийравна произведению вероятностей этих событий:

$$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0,8\cdot 0,75=0,6.$$

Форма представления результата:выполненная работа.

Тема 5.2 Элементы математической статистики

Практическаяработа № 24

Применение основных положений математической статистики в решении задач.

Цель: Научиться применять основные положения математической статистики для решения задач.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать задачи на нахождение мер центральной тенденции и мер изменчивости.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:
1. Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

Значения случайной величины Xi					
Вероятности P(Xi)	1	,25	,10	,30	,15

Найти:
• значение вероятности p1;
•математическое ожидание случайной величины M[X];
• дисперсию случайной величины D[X];
• среднее квадратичное отклонение случайной величины Xi;
•медиану случайной величины Me[X];
•моду (моды) случайной величины Mo[X].
2. Дана выборка: 7, 3, 3, 6, 4, 5, 1, 2, 1, 3. Требуется:
а) Определить объем выборки n ;
б) Построить вариационный ря ;
в) Построить статистический ряд;
г) Определить размах выборки r ;
д) Найти выборочное среднее $\overline{x}$.

Краткие теоретические сведения:
Дискретные случайные величины
Случайная величина называется дискретной, если в результате испытания она может принять значение из конечного либо счетного множества возможных числовых значений.

Случайные величины в дальнейшем будем обозначать большими буквами: X, Y, Z

Вероятностное пространство дискретной случайной величины задается в виде:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{Bmatrix}$$, n - конечное или бесконечное.

Объемом выборки (объемом генеральной совокупности) является число объектов этой совокупности.

Предположим, что из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n. Пусть значение x_1 наблюдается n_1 раз, x_2 – n_2 раз,…, x_m – n_m раз. Значения x_1, x_2, …,x_m называются вариантами.

Одно из самых простых преобразований статистических данных является их упорядочение по значениям (вариантам). Если варианты записаны в возрастающем порядке, то их называют *вариационным рядом*.

Числа $n_1, n_2, \ldots, n_m$ называются частотами, сумма частот равна объему выборки, т.е. $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Выборки характеризуются **центральными тенденциями**: средним значением, модой и медианой. Вариационный ряд может быть дискретным или непрерывным.

Медианой вариационного ряда называется то значение случайной величины, которое приходится на средину вариационного ряда (Me).

Модой вариационного ряда называют вариант (значение случайной величины), которому соответствует наибольшая частота (Mo), т.е. которая встречается чаще других.

Средним выборочным вариационного ряда называется результат деления суммы значений статистической переменной на число этих значений, то есть на число слагаемых.

Правило нахождения среднего выборочного значения выборки:

1.каждую варианту умножить на её частоту (кратность);
2.сложить все полученные произведения;
3.поделить найденную сумму на сумму всех частот.

Размахом ряда называется разность между $R = x_{max} - x_{min}$, т.е. наибольшим и наименьшим значениями этих вариантов.

Относительной частотой значений выборки называют отношение её частоты к числу всех значений выборки.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать таблично, в виде формулы (аналитически) и графически.

Числа, которые описывают случайную величину суммарно, называют **числовыми характеристиками случайной величины**.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – возможные значения случайной величины X, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ –

соответствующие вероятности.

Замечание. Вышеприведенная формула справедлива для дискретной случайной величины, число возможных значений которой конечно. Если же случайная величина имеет счетное число возможных значений, то для нахождения математического ожидания используют формулу: $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$,причем это математическое ожидание существует при выполнении соответствующего условия сходимости числового ряда в правой части равенства.

Порядок выполнения работы:

1 Прочитав условие предложенной задачи , по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2.Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик.выборки.

Ход работы:

1. Дана выборка: 1,3; 1,8; 1,2; 3,0; 2,1; 5; 2,4; 1,2; 3,2;1,2; 4; 2,4.

Найти:

а) Определить объем выборки n ;

б) Построить вариационный ря ;

в) Построить статистический ряд;

г) Определить размах выборки r ;

д) Найти выборочное среднее $\overline{x}$;

е) Найти медиану ряда;

ж) Найти моду ряда

Решение.

а) Объем выборки n = 12;

б) Это ряд вариантов. Расположив эти варианты в возрастающем порядке, мы получим вариационный ряд: 1,2; 1,2; 1,2; 1,3; 1,8; 2,1; 2,4; 2,4; 3,0; 3,2; 4; 5.

в) статистический ряд:

i	,2	,3	,8	,1	,4	,0	,2		
i									

г) Найдём размах ряда: R=5-1,2=3,8; Размах ряда равен 3,8.

д) Среднее выборочное значение находим так:

(1,2*3+1,3+1,8+2,1+2,4*2+3,0+3,2 +4+5)\12=2,4

е) Сосчитали число членов, их 12 - чётное число членов, значит надо найти среднее арифметическое двух чисел записанных посередине, то есть 6 и 7-ой варианты. (2,1+2,4)\2=2.25 – медиана.

ж) Модой является 1.2, т.к. только это число встречается 3 раза, а остальные встречаются меньше, чем 3 раза.

Форма представления результата: выполненная работа.