Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Махновский
«23» марта 2017 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

**программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности СПО
23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям)**

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
Математических и
естественнонаучных дисциплин
Председатель: Е.С. Корытникова
Протокол №7 от 14 марта 2017 г.

Методической комиссией

Протокол №4 от 23 марта 2017 г.

Разработчик
Ю.Н. Садчикова, преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений (умений решать задачи по математике, физике, химии, информатике и др.), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «ЕН 01 Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;
- применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;
- решать прикладные технические задачи методом комплексных чисел;
- использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.

Содержание практических и лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 1.3. Выполнять требования нормативно-технической документации по организации эксплуатации машин при строительстве, содержании и ремонте дорог.

ПК 2.3. Определять техническое состояние систем и механизмов подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования.

ПК 2.4. Вести учетно-отчетную документацию по техническому обслуживанию и ремонту подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования.

ПК 3.3. Составлять и оформлять техническую и отчетную документацию о работе ремонтно-механического отделения структурного подразделения.

ПК 3.4. Участвовать в подготовке документации для лицензирования производственной деятельности структурного подразделения.

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических и/или лабораторных работ по учебной дисциплине «ЕН 01 Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Основы теории комплексных чисел

Практическая работа № 1-3

1. **Комплексные числа и их геометрическая интерпретация**
2. **Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Переход от одной формы к другой.**
3. **Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.**

Цель: Закрепить понятие комплексного числа, научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме. Осуществлять переход от одной формы комплексного числа к другой. Решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, изображать геометрически комплексные числа.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать сопряженные комплексные числа в алгебраической форме;
- решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом;
- изображать комплексные числа на плоскости

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1 Построить данные числа:

Вариант	Даны числа
1	$z_1 = 4+4i; z_2 = \sqrt{3}-i; z_3 = 2e^{\frac{11}{12}\pi i}; z_4 = \sqrt{3}(\cos\frac{7}{3}\pi + i\sin\frac{7}{3}\pi)$
2	$z_1 = 5-5i; z_2 = 4; z_3 = 4e^{\frac{\pi}{3}i}; z_4 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4});$
3	$z_1 = -5-5i; \quad z_2 = 4i; z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{4}{3}\pi i}; z_4 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6});$
4	$z_1 = -3+3i; z_2 = 1+\sqrt{3}i; z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}; z_4 = (\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

5	$z_1=\sqrt{3}+i; z_2=4; \quad z_3=e^{\frac{5\pi}{4}i}; z_4=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4});$
6	$z_1=-\sqrt{3}+i; z_2=2i; z_3=\sqrt{3}e^{\frac{3}{4}\pi i}; z_4=\frac{1}{2}(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi);$
7	$z_1=-\sqrt{3}-i; \quad z_2=-2; z_3=2e^{\frac{7}{4}\pi i}; z_4=\sqrt{2}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi);$
8	$z_1=\sqrt{3}-i; z_2=-2i; \quad z_3=2e^{\frac{3\pi}{6}i}; z_4=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{4});$
9	$z_1=4-4i; z_2=\sqrt{3}-i; z_3=3e^{\pi i}; z_4=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4});$
10	$z_1=-4-4i; z_2=-\sqrt{3}+i; z_3=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}; z_4=3(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$
11	$z_1=-4+4i; z_2=-\sqrt{3}-i; z_3=e^{\frac{7}{6}\pi i}; z_4=\sqrt{2}(\cos\pi+i\sin\pi);$
12	$z_1=4+4i; z_2=\sqrt{3}-i; z_3=2e^{\frac{11}{12}\pi i}; z_4=\sqrt{3}(\cos\frac{7}{3}\pi+i\sin\frac{7}{3}\pi)$
13	$z_1=4; \ z_2=2\sqrt{3}+2i; \ z_3=3e^{\frac{11}{12}\pi i}; z_4=\sqrt{2}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi);$
14	$z_1=4i; z_2=-2\sqrt{3}+2i; z_3=\sqrt{3}e^{2\pi i}; z_4=2(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi)$
15	$z_1=-\sqrt{3}+i; \quad z_2=2i; z_3=\sqrt{3}e^{\frac{3}{4}\pi i}; z_4=\frac{1}{2}(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi)$

1) Вычислить:

а) $2z_1 \pm 3z_2$; $z_3 - 2z_4$ – в алгебраической форме;

б) $z_1 \cdot z_2$; $z_1 \cdot z_3$; $z_2 \cdot z_4$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\frac{z_3}{z_4}$; $\frac{z_1}{z_3}$; $\frac{z_4}{z_2}$; – в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;

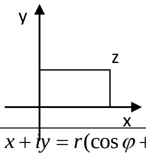
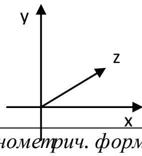
в) z_1^4; z_3^5; z_4^{10}; $\sqrt[3]{z_2}$; $\sqrt[3]{z_3}$; $\sqrt[5]{z_4}$; – в тригонометрической и показательной формах;

I. Решить уравнение

Вариант	Уравнение
1	$z^6 + 4z^3 + 5 = 0$
2	$z^6 + 2z^6 + 10 = 0$
3	$z^6 + 2z^3 + 17 = 0$
4	$z^6 - z^3 + 2 = 0$
5	$z^6 + 6z^3 + 18 = 0$
6	$z^6 + 2z^3 + 25 = 0$
7	$z^6 + 6z^3 + 13 = 0$
8	$z^6 - 6z^3 + 10 = 0$
9	$z^6 - 4z^3 + 20 = 0$
10	$z^6 + 4z^6 + 13 = 0$
11	$z^6 - 4z^3 + 8 = 0$
12	$z^6 - 2z^3 + 17 = 0$
13	$z^6 - 2z^3 + 10 = 0$
14	$z^6 2 - 2z^3 + 5 = 0$
15	$z^6 - 8z^3 + 1750 = 0$

Краткие теоретические сведения:

Учебная карта «Комплексные числа и действия над ними»

Определение и изображение	$z = x + iy,$ $где\ i = \sqrt{-1}\ (мнимая\ единица),$ $x, y\ -\ действительные\ числа$  или 
Форма записи	$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ -\ тригонометрич.\ форма$ $где\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ -\ модуль\ комплексного\ числа,\ \varphi\ -\ ар$ $z = re^{i\varphi}\ -\ показательная\ форма$ $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\ -\ формула\ Эйлера$

Действия над комплексн ыми числами	$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=$ $=(ac-bd)+(bc+ad)i,\qquad i^2=-1$ $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$ $=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ $z^n=(a+bi)^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ *или* $z^n=(re^{n\varphi})^n-r^n e^{n\varphi}$ $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$ $=\sqrt[n]{z}(\dfrac{\cos\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}),\qquad где\ k=0,1,2,\ldots,n-1$ *или* $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{re^{i(\frac{\varphi+2\pi k}{n})}},\qquad где\ k=0,1,2,\ldots,n-1$ $z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$ $=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ *или* $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$ *или* $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

III. Решение типовых задач

1. Представьте данное число во всех четырех формах

$$z_1 = -\sqrt{3} - i; z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}; \qquad z_4 = -2i; z_5 = 3;$$

$$z_6 = 2(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi);$$

$$z_1 = -\sqrt{3} - i; r_1 = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2;$$

$$tg\varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = -(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\frac{5}{6}\pi;$$

$$z_1 = -\sqrt{3} - i = 2(\cos(-\frac{5}{6}\pi) + i\sin(-\frac{5}{6}\pi)) = 2e^{-i\frac{5}{6}\pi}$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i$$

$$z_4 = -2i = 0 - 2i$$

$$z_4 = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

$$tg\varphi = \frac{-2}{0}$$

$$tg\varphi - \text{не существует}, \Rightarrow \varphi = \frac{-\pi}{2}$$

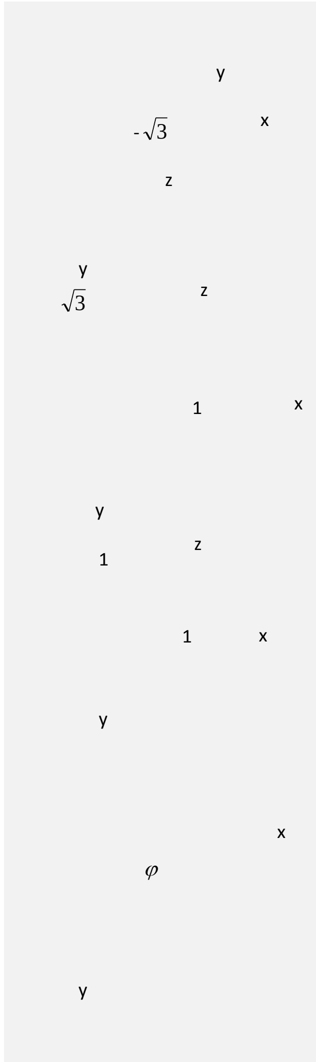
$$z_4 = -2i = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$z_5 = 3 = 3 + 0i$$

$$z_5 = \sqrt{3^2} = 3$$

$$tg\varphi = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$z_5 = 3 = 3(\cos 0 + i\sin 0) = 3e^{0\cdot i}$$



$$z_6 = 2(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi) = 2e^{\frac{7}{6}\pi}$$

$$\cos\frac{7}{6}\pi = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{7}{6}\pi = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$z_6 = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2})) = -\sqrt{3} - 1i = -\sqrt{3} - i$$

2. Даны комплексные числа

$z_1 = 2+3i; \qquad z_2 = 3-4i; \qquad z_3 = 1+i;$

$$\textit{Найти}: z = \frac{z_1 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2}{z_1 + z_3}$$

$\textit{Последовательно вычисляем}: z_1 + z_2 = (2+3i)+(1+i) = 3+4i$

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(3-4i) = (6+12)+i(9-8) = 18+i$

$z_2^2 = (3-4i)^2 = 9-24i-16 = -7-24i$

$z_1 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2 = 2+3i+18+i-7-24i-13-20i$

$$\textit{Тогда } z = \frac{13-20i}{3+4i} = \frac{(13-20i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{(39-80)+i(-60-52)}{25}$$

$$= \frac{41}{25} - i\frac{112}{25}$$

3. Вычислить $(1+i)^{12}$

Представим число $z = 1 + i$ *в тригонометрической или показательной форме*

$$z = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \qquad tg\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i};$$

$$z^{12} = (\sqrt{2})(\cos 12\frac{\pi}{4} + i\sin 12\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2^{12}}e^{3\pi i} = 64(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 64(\cos(2\pi+\pi) + i\sin(2\pi+\pi)) =$$

$$= 64(\cos\pi + i\sin\pi) = 64(-1 + i\cdot 0) = -64$$

4. Найти корни уравнения

$$z^6 + 1 = 0 \Rightarrow z^6 = -1 \textit{ или } z = \sqrt[6]{-1} \textit{ но } -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$z = \sqrt[6]{-1} = 1(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}) = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{6}}, \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$z_2 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{5}{6}\pi i}$$

$$z_3 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{7}{6}\pi i} = e^{\frac{3}{6}\pi i}$$

$$z_4 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

$$z_5 = \cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{\frac{11}{6}\pi i} = e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

5. Решить уравнение

$$z^6 - 2x^3 + 5 = 0$$

$$z^3 = y$$

$$y^2 - 2y + 5 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 5 = -16$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$z^3 = 1 \pm 2i$$

$$z_1^3 = 1 + 2i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1 + 2i}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$tg\varphi = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow \varphi = 73°$$

$$z_1 = \sqrt[3]{5}(\cos\frac{73° + 360°k}{3} + i\sin\frac{73° + 360°k}{3}), k = 0,1,2$$

Порядок выполнения работы:

1 Изучается теоретический материал по конспекту лекции.

2 Решаются задания практической работы по образцу.

3 Задания решаются только в установленном порядке.

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 2.1 Теория пределов и непрерывность

Практическая работа №4 Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей

Цель: Научиться раскрывать неопределенности при вычислении пределов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- раскрывать различные виды неопределенностей при вычислении пределов;
- вычислять пределы, применяя первый и второй замечательные пределы.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1 Вычислить пределы . При необходимости избавиться от неопределённостей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, (1^{∞}).

№ варианта	Задание
1.	$\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2-x}$; $\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$; $\lim_{x\to3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$; $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{x^3-1}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; $\lim_{x\to1}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$; $\lim_{x\to0}\frac{4\sin 2x}{\arcsin 6x}$; $\lim_{x\to0}\frac{-3\sin 2x}{arctg\ 4x}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{3n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{4n}\right)^{n^2}$
2.	$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}$; .$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2x^2-x-1}{-6x^2+5x+4}$; $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{x^3-1}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; $\lim_{x\to1}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$ $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x+2}{x^3+1}$; $\lim_{x\to0}\frac{-6\sin 2x}{\arcsin 3x}$; $\lim_{x\to0}\frac{-5\sin 2x}{arctg\ 3x}$; $\lim_{n\to\infty}\Big(1+$ $3n4n$; lim$n\to\infty 1-32nn3$
3.	$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$; .$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}$; .$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+1}$; $\lim_{x\to2}\frac{6x^2+5x-4}{x^2-2x}$;

.$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x}+1}{1-\sqrt{2x}}$

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; $\lim_{x\to 0}\frac{-10\sin 2x}{3\arcsin 8x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin 2x}{arctg\ 4x}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{3n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{8}{4n}\right)^{n^2}$

4. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}$; $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$; .$\lim_{x\to 5}\frac{6x^3-4x^2+5x}{x^2-5x}$; .$\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-x-3}{x^2+2x}$; .$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+7}{5x^3+x-2}$

.$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; $\lim_{x\to 0}\frac{-12\sin 4x}{\arcsin 8x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{-8\sin 2x}{4arctg\ 4x}$; $\lim_{n\to\infty}\Big(1+$
3n7n; lim*n→∞1−64n3*

5. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$; $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$;
.$\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{3}$;.$\lim_{x\to 2}\frac{6x-5}{x^2-7x+10}$; .$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$

.$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$; $\lim_{x\to 0}\frac{12\sin 4x}{\arcsin 8x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{8\sin 2x}{arctg\ 4x}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{6n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{6}{4n}\right)^{3n}$

6. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$; $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; .$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+4x-3}$; $\lim_{x\to 5}\frac{x^3+4x^2+1}{x^2-25}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 3x}{\arcsin 2x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{8\sin(2x)^2}{arctg\ 4x}$; $\lim_{n\to\infty}\Big(1+$
10n−2n; lim*n→∞1−64n−n4*

7. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{10x^2-5x}{x^2-0.25}$; $\lim_{x\to4} \frac{x^2-6x+8}{3x^2-12x} \lim_{x\to0} \frac{6x-4}{5x} \lim_{x\to4} \frac{2x^3-54x}{x^2+x+1} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^4}$

$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$; $\lim_{x\to0} \frac{5\sin 3x^3}{\arcsin 2x}$; $\lim_{x\to0} \frac{8\sin(2x)^2}{arctg\ 4x}$; $\lim_{n\to\infty} \Big(1+$
74n2n; lim*n→∞1−64nn4*

8. $\lim_{x\to5} \frac{x^2-5x}{3x^2-75}$; $\lim_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$; $\lim_{x\to2} \frac{x^2+2x+5}{3x-6}$; $\lim_{x\to0} \frac{2x}{x-1}$;
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^5}{x^2+x^3}$

$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$; $\lim_{x\to0} \frac{4\sin 2x}{\arcsin 6x}$; $\lim_{x\to0} \frac{-3\sin 2x}{arctg\ 4x}$; $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^{3n}$;
$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{5}{4n}\right)^{n^2}$

9. $\lim_{x\to0} \frac{x^2+10x}{4x}$; $\lim_{x\to1} \frac{3x^2+2x-5}{5x^2-7x+2}$; $\lim_{x\to-3} \frac{x^3+27}{x+1}$; .$\lim_{x\to0} \frac{2x^3+3}{2x}$;
.$\lim_{x\to\infty} \frac{12x^5-3x^3+2x}{x^3+3x^2-1}$

$\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3-x}}{2x}$; $\lim_{x\to0} \frac{-6\sin 2x}{\arcsin 3x}$; $\lim_{x\to0} \frac{-5\sin 2x}{arctg\ 3x}$; $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$;
$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{2n}\right)^{n^3}$

10. $\lim_{x\to4} \frac{2x^2-32}{3(x^2-16)}$; $\lim_{x\to2} \frac{4x^3-3x^2}{2x^2-8}$; $\lim_{x\to-1} \frac{4x^3-3x^2}{2x^2+5}$; $\lim_{x\to0} \frac{2}{2x^2+5}$;
$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{1+2x^2}$

$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{10x}$; $\lim_{x\to0} \frac{-12\sin 4x}{\arcsin 8x}$; $\lim_{x\to0} \frac{-8\sin 2x}{4arctg\ 4x}$; $\lim_{n\to\infty} \Big(1+$

$\left.\frac{3}{n}\right)^{7n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{6}{4n}\right)^{3}$

Краткие теоретические сведения:

Пределом функции $f(x)$ является некоторое число А, при условии что $x \to x_0$. Записывается это так: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

При вычислении пределов следует помнить:

1) Чтобы избавиться от неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ нужно:

а) вынести общий множитель за скобки и сократить дробь;

б) разложить многочлен на множители способом группировки или используя формулы сокращенного умножения, а затем сократить дробь

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

$x^3 - y^3 = \cdots$

в) если выражение содержит $\sqrt{f(x)}$, то умножаем и делим на сопряженное ему;

г) если х→0, то $\frac{1}{x}\to\infty$ и $\frac{a}{x^n}\to\infty$;

2) Чтобы избавиться от неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ нужно:

а) каждое слагаемое и числителя и знаменателя разделить на переменную в ее наибольшей степени;

б) запомни, если х→∞,то $\frac{1}{x}\to 0$ и $\frac{a}{x^n}\to 0$

Решение типовых задач

Найдите пределы предварительно избавившись от неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{x^2-9x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+9)}{x(x-9)} = \lim\limits_{x\to 9}\frac{x+9}{x} = \lim\limits_{x\to 9}\frac{18}{9} = \lim\limits_{x\to 3}2 = 2;$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}(x+5) = \lim\limits_{x\to 1}(1+5) = \lim\limits_{x\to 1}(6) = 6$

$x^2 + 4x - 5 = 0 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = -5 \end{cases} => \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+x-a+x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+0}+\sqrt{a-0}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{2\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$;

Вычислить пределы имеющие неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+0+0+0}{4+0+0+0}=\lim\limits_{x\to\infty}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+0+0}{0+0}=$
$\left(\frac{2}{0}\right).=+\infty$

(0 в знаменателе принимаем за бесконечно малую величину

Найдите пределы предварительно избавившись от неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{6}{3}=\lim\limits_{x\to 3}2=2$;

2. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+4x-5}{x+5}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to -5}\frac{(x+5)(x-1)}{(x+5)}=\lim\limits_{x\to -5}(x-1)=\lim\limits_{x\to -5}(-5-$
1=lim*x*→−*5*−*6*=−*6*

$x^2+4x-5=0$ $\quad\begin{cases}x_1+x_2=-4\\ x_1 + x_2=-5\end{cases}=>\begin{cases}x_1=-5\\ x_2=1\end{cases}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+x-a+x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+0}+\sqrt{a-0}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{2\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$;

Вычислить пределы имеющие неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+0+0+0}{4+0+0+0}=\lim\limits_{x\to\infty}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+0+0}{0+0}=$
$\left(\frac{2}{0}\right).=+\infty$

(0 в знаменателе принимаем за бесконечно малую величину.)

Вычислите пределы, применяя первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Эквивалентными называются бесконечно малые величины, предел от понятия которых равен единице.

В курсе математического анализа доказывается, что при отыскании предела отношений двух бесконечно малых величин можно заменить на предел эквивалентных им величинам.

$$\left(\sin x \sim x;\ \sin^2\frac{x}{3}\sim\left(\frac{x}{3}\right)^2;\ \operatorname{tg} x\sim x \ldots\right)$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$; так как $\sin x$ и x при $x\to 0$ эквивалентные бесконечно малые величины, поэтому в данном выражении можно $\sin\frac{x}{2}$ заменить его аргументом $\frac{x}{2}$. Тогда решение выглядит следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{4x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\begin{vmatrix}\sin ax \sim & ax\\ \sin bx \sim & bx\end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$;

Вычислите пределы, применяя второй замечательный предел.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ell;$$

или

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{1/n}=\ell;$$

В данном случае мы имеем неопределенность 1^∞. Для ее раскрытия сделаем замену $y=\frac{x}{k}$ Тогда y→∞ при $x\to\infty$ и решение данного предела выглядит следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}(1+0)^\infty=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k*\frac{k}{x}}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k=\ell^k;$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n=(1^\infty)=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}*n}}=\ell^{\frac{4}{n}*n}=\ell^4$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{n+2} = (1^{\infty}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{\frac{4n}{3}}\right]^{\frac{3}{4n}(n+2)} = \ell^{\frac{3(n+2)}{4n}} =$
$\ell^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n}} = \ell^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{4n}{n}}} = \ell^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+0}{4}} = \ell^{\frac{3}{4}};$

Порядок выполнения работы:

1 Изучается теоретический материал по конспекту лекции.

2 Решаются задания практической работы по образцу.

3 Задания решаются только в установленном порядке.

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 2.2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Практическая работа № 5
Дифференцирование сложных функций.

Цель: Научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

находить производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;

- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить производные сложных функций

1) $y=(mx^k+4)^p$

2) $y=m*\cos(px^k-m)$

3) $y=(e^{px^m}+kx)$

4) $y=ktg(mx^p)$

5) $y=12^{px^m-mx}$

6) $y=ctg(px^k-mx)$

7) $y=\ln(x^k+px^m)$

8) $y=\sqrt{mp^x+kx}$

9) $y=\log_7(mx+k)$

10) $y=(e^{px+k})*\sqrt{x^p+mx}$

Краткие теоретические сведения:

Дана функция y =f(x) которая определена в некоторой окрестности точки x.Пусть x_1 и x_2 – Значение аргумента, а $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ – соответствующие значение функции.

Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ – называется приращением аргумента, а разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2)-f(x_1)$ – приращение функции на $[x_1; x_2]$.

Дf: производной функции y =f(x) по аргументу x называют конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю

$$y' = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx};$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Геометрическая производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции

$y=f(x)$; т.е. $y'=f'(x)=k=tg\alpha.$

Физический смысл производной может быть определен через мгновенную скорость:

$$y' = f'(x) = U\text{мг} = \lim_{\Delta t \to 0} U\text{мг} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

1. $c' = 0, c - const$
2. $x' = 1$
3. $(CU)' = C \cdot U'$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
5. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v+uv'}{v^2}$
7. Пусть $y = f(u)$ - сложная функция, где $u = u(x)$. Тогда

$$y' = f'(u(x)) = y'_u \cdot u'_x$$

Формулы дифференцирования основных элементарных функций представлены в таблице 1.

Таблица 1

Формулы дифференцирования

№	Основные элементарные функции	Сложные функции
1	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
2	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u u'$
3	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a u'$
4	$(\ln x)' \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u' = \dfrac{u'}{u}$
5	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a}u' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
6	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u u'$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}u' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
9	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u' = -\dfrac{u'}{\ln^2 u}$
10	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Решение типовых задач

Найдите производную следующих функций:

1) $y = (2x^3 - 4x)^7;$

2) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;

3) $y = \sin(2x - x^2)$;

4) $y = 6\ln 5x$.

1) Для решения используем формулу № 1

$$y' = ((2x^3 - 4x)^7) = 7(2x^3 - 4x)^6 \cdot (2x^3 - 4x)' =$$
$$= 7(2x^3 - 4x)^6 \cdot (6x^2 - 4) = (42x^2 - 28)(2x^3 - 4x)^6.$$

2) Решение проведём по формуле №10

$$y' = (\sqrt{x^2 - 1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}.$$

3) Применим формулу № 6:

$$y'(\sin(2x - x^2))' = \cos(2x - x^2) \cdot (2x - x^2)' = (2x - x) \cdot \cos(2x - x^2).$$

4) Воспользуемся формулой №4:

$$y' = (6\ln 5x)' = 6(\ln 5x)' = 6 \cdot \frac{1}{5x} \cdot (5x)' = \frac{6 \cdot 5}{5x} = \frac{6}{x}.$$

Порядок выполнения работы:

1 Изучается теоретический материал по конспекту лекции.

2 Решаются задания практической работы по образцу.

3 Задания решаются только в установленном порядке.

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 2.2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Практическая работа № 6
Анализ функции и построение графика.

Цель: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:
находить производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;
- проводить исследование функций с помощью производной;
- строить графики функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

№ варианта	Задания: 1.Исследуйте функцию и простройте ее график. 2.Проведите полное исследование функции и постройте её график 3.Постройте графики дробно- рациональных функций
1.	1)$y = x^3 - 3x^2 + 4$; 2).$f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 1$; 3) y = $\frac{1}{1-x^2}$;
2.	1).$y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$; 2).$f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 3$; 3) y = $\frac{(x-3)^2}{x^2}$;
3.	1).$y = -x^3 - 4x^2 - 4x$; 2).$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$; 3) y = $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$;
4.	1).$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$; 2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$; 3) y = $\frac{x^2+1}{x}$;
5.	1).$y = x^3 - 3x^2 + 2$; 2) $f(x) = 4x^5 - 5x^4$; 3) y = $\frac{x^2-1}{x}$;
6.	1).$y = 2x^3 + 3x^2 - 2$; 2).$f(x) = 6x^4 - 4x^6$; 3) y = $\frac{x}{x^2+1}$;
7.	1).$y = 2 + 3x - x^3$; 2).$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$; 3) y = $\frac{x}{x^2-1}$;
8.	1).$y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 9$; 2).$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$; 3)

	y = $\frac{x^2-1}{x^2-2x+2}$
9.	1).$y = x^3 + 6x^2 + 9x$; 2).$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 16$; 3) y= $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$
10.	1).$y = 2 + 5x^3 - 3x^5$; 2).$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$; 3) y = $\frac{x^4+1}{x^2}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную .
2. Находим точки, в которых $f''(x)=0$ или не существует.
3. Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x=x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x=x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x=x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y=y_0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ равно y_0 .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y=kx+b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$

Если для функции $y=f(x)$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ при $x\to\infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$y=\frac{x^2}{2(x-1)}$.

1. Область определения функции $D(y):(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. При подстановке значения $x=0$ получим $y(0)=\frac{0}{2(0-1)}=0.$

Такую же точку получим если приравняем функцию к нулю. Точка $x=0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\frac{x^2}{2(x+1)},$$

$$y(-x)\neq y(x),\quad y(-x)\neq -y(x).$$

Итак функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции $y'=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$

Приравнивая ее к нулю получим точки подозрительные на экстремум $x=0, x=2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty).$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения

$$y'(-1)=\frac{-1(-1-2)}{2(-1-1)^2}=\frac{1}{4}>0;\quad y'(0,5)=\frac{0,5(0,5-2)}{2(0,5-1)^2}=-1,5<0;$$

$$y'(1,5)=\frac{1,5(1,5-2)}{2(1,5-1)^2}=-1,5<0;\quad y'(3)=\frac{3(3-2)}{2(3-1)^2}=\frac{3}{8}>0.$$

Графически интервалы монотонности будут иметь вид

Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty;0),(2;+\infty)$ и убывает $(0;1),(1;2)$.

Точка $x=0$ – точка локального максимума, $x=2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max}=0,\ y_{min}=\frac{2^2}{2(2-1)}=2.$

5. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

6. Точка $x=1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$.

Находим нужные границы

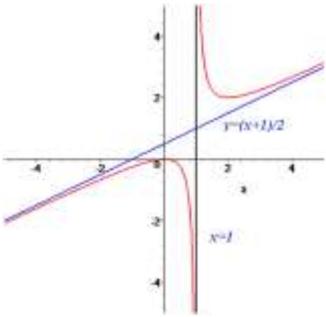
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

7. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Порядок выполнения работы:

1 Изучается теоретический материал по конспекту лекции.

2 Решаются задания практической работы по образцу.

3 Задания решаются только в установленном порядке.

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 2.2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Практическая работа № 7
Решение физических задач.

Цель: Научиться решать физические задачи.

Выполнив работу, Вы будете:
решать физические задачи с применением дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

№задания	Задача	№варианта	Данные величины
1	Точка движется по закону $x(t)=2t^3-3t$. Чему равна скорость в момент времени $t-$?	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	$t-2$сек $t-1$сек $t-5$сек $t-8$сек $t-12$сек $t-3$сек $t-9$сек $t-7$сек $t-4$сек $t-10$сек
2	Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $s(t)=-0,5t^3+t+2$ (м). Найти ускорение $a(t)$ точки в момент времени $t-$?	1 2 3 4 5 6 7 8 9	$t-12$сек $t-10$сек $t-3$сек $t-5$сек $t-7$сек $t-9$сек $t-1$ек $t-2$сек $t-4$сек

		10	$t-6$сек
3	Закон изменения температуры Т тела в зависимости от времени t задан уравнением $T=0,2t^2$. С какой скоростью нагревается тело в момент времени $t-$?.	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	$t-2$сек $t-1$сек $t-5$сек $t-8$сек $t-12$сек $t-3$сек $t-9$сек $t-7$сек $t-4$сек
4	Маховик, задерживаемый тормозом, за t с поворачивается на угол $\varphi=5t-0,4t^2$ (рад). Определить угловую скорость ω маховика в момент времени $t-$?. и найти момент остановки вращения.	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	$t-12$сек $t-10$сек $t-3$сек $t-5$сек $t-7$сек $t-9$сек $t-1$ек $t-2$сек $t-4$сек $t-6$сек

Краткие теоретические сведения:

Путь, пройденный телом

Пусть задан путь $s=f(t)$ движения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t: $v(t)=s'(t)$.

Вторая производная – скорость изменения первой производной, т.е. *ускорение* изменения исходной функции: $a=s''(t)=v'(t)$.

Если твердое тело вращается вокруг оси, то угол поворота φ есть функция от времени t. Угловая скорость вращения в данный момент t численно равна производной $\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Порядок выполнения работы:

1 Изучается теоретический материал по конспекту лекции.

2 Решаются задания практической работы по образцу.

3 Задания решаются только в установленном порядке.

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 2.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическая работа № 8

Нахождение неопределенных интегралов различными методами интегрирования.

Цель: Научиться решать физические задачи.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом подстановки;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание: Вычислите интегралы

Вычислить интегралы используя метод подстановки		Вычислять интегралы используя метод интегрирования по частям	
1)	$\int (3+5x)^4 dx;$	1)	$\int x \sin x dx;$
2)	$\int \frac{dx}{(3x+1)^2};$	2)	$\int \frac{\ln x dx}{x^2};$
3)	$\int \sqrt{x+2} dx;$	3)	$\int ln^2 x dx;$
4)	$\int \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+5}};$	4)	$\int (2x-1) \cdot e^{3x} dx;$
5)	$\int \frac{dx}{cos^{2(1-2x)}};$	5)	$\int x \cdot 2^x dx;$

6)	$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx;$	6)	$\int x\, arctg\, x dx;$
7)	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}};$	7)	$\int x^5 e^{x^2} dx;$
8)	$\int_0^3 \frac{2xdx}{\sqrt{16+x^2}};$	8)	$\int (x+1)e^x dx;$
9)	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x};$	9)	$\int (2x+3)\cos x dx;$
10)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x dx.$	10)	$\int e^{2x} \cos x dx.$

Краткие теоретические сведения:

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *y = f (x)* в промежутке *[a ; b]*, если в любой точке этого промежутка её производная равна *f (x).*

Отыскание первообразной функции по заданной её производной *f (x)* или по дифференциалу *f (x) dx* есть действие, обратное дифференцированию - интегрирование.

При нахождении неопределенных интегралов используют свойства интегралов и таблицу.

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ гдеC – произвольное число;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;

5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенныхинтегралов

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

6. $\int \dfrac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$;

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,$

$-a < x < a,\ a > 0;$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0$;

14. $\int e^x dx = e^x + C$;

15. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

16. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула: $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dV. Затем, после нахождения dU и V,использовать формулу интегрирования по частям.

- - Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где *P(x)*- многочлен, *k*- число. Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за *dV.*
- Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$. Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за *U.*
- Интегралы вида $\int e^{ax} sinbxdx, \int e^{ax} cosbxdx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным.

3. Если интеграл нельзя найти вышеуказанным способом, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU.$

Решение типовых заданий

Методом подстановки

Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int (3x-2)^4 dx;$ Для того чтобы привести этот интеграл к табличному, введем новую переменную: $3x-2=t.$ Продифференцируем обе части равенства $d(3x-2)=dt$

$(3x-2)' dx = dt$

$3dx = dt$

Выразим дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменной: $dx = \frac{dt}{3};$

Решение этого примера оформляется так:

$$\int (3x-2)^4 dx = \left| \begin{array}{c} 3x-2=t \\ d(3x-2)=dt \\ (3x-2)' dx = dt \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = = \int t^4 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5} + c = \frac{t^5}{15} +$$

$$c == \frac{(3x-2)^5}{15} + c.$$

2) $$\int \frac{5xdx}{x^2+7} = 5\int \frac{xdx}{x^2+7} = \left| \begin{array}{c} x^2+7=m \\ d(x^2+7)=dm \\ (x^2+7)' dx = dm \\ 2xdx = dm \\ xdx = \frac{dm}{2} \end{array} \right| = 5\int \frac{\frac{dm}{2}}{m} = 5\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dm}{m} =$$

$2{,}5 \ln m + c = 2{,}5 \ln x2 + 7 + c;$

3) $\int sin12xdx \left| \begin{matrix} 12x = t \\ d(12x) = dt \\ (12x)' dx = dt \\ 12dx = dt \\ dx = \frac{dt}{12} \end{matrix} \right| = \int \sin t \frac{dt}{12} = \frac{1}{12} \int \sin tdt =$

112−cos*t+c*=−*112*cos*12x+c;*

4) $\int e^{x^3} x^2 dx = \left| \begin{matrix} x^3 = u \\ d(x^3) = du \\ (x^3)' dx = du \\ 3x^2 dx - du \\ x^2 dx = \frac{du}{3} \end{matrix} \right| = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + \text{c} =$

$= \frac{1}{3} e^{x^3} + c;$

I. Интегрирование по частям (методом стрелок)

Найти интеграл *(методом стрелок)*, используя интегрирования по частям:

$\int x \cdot e^x dx = \int e^x \cdot xdx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1dx = e^x \cdot x - e^x + c;$

$\int$

$e^x \quad 1$

Найти интеграл, используя интегрирования по частям:

$$\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx,\ dV = (x^3 - 4x)dx.$

$$dU = \frac{1}{x} dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx = lnx \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \frac{1}{x} dx =$$

$$lnx \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x \right) dx = lnx \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 2.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическая работа № 9

Вычисление определенных интегралов различными способами, приближенные вычисления.

Цель: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования, вычислять приближенные значения определенных интегралов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить определенные интегралы различными методами;
- находить приближенные значения определенных интегралов.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите интегралы

1) $\int_2^4 \frac{3xdx}{(x^2-1)^3}$

2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^3x \cdot cosxdx$

2. Вычислить, разбив отрезок интегрирования [0; 2] на 4 части. $\int_0^2 x^2\,dx$

Краткие теоретические сведения:

Для нахождения определенных интегралов применяется формула Ньютона - Лейбница. Формула Ньютона - Лейбница - основная формула интегрального исчисления.

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Формулы приближенного вычисления определенного интеграла.

Формула прямоугольников:

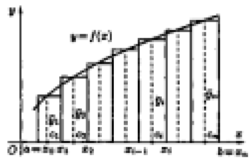


Рис. 200.

Пусть на отрезке [a; b], a < b, задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx,$ численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок [a; b], на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг разбиения) с помощью точек $x_0 = a$, x_1, x_2,..., $x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где i = 1,2,..., n.

В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\hat{y}_i = f(c_i)$ графика функции $y = f(x)$. Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \hat{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямо угольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \cdots + \hat{y}_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке [a; b],

$$|R_n| = \left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x) = kx + b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x) = 0$.

Формула трапеций.

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок [a; b] на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0$, $x_1, x_2, \ldots, b = x_n$ (рис. 201). Пусть $y_0, y_1 \ldots, y_n$ —

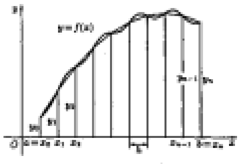


Рис. 201.

соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы $h = \frac{b-a}{n}$ для этих значений примут вид $x_i = a+h*i$, $y_i=f(x_i)$, i= 0,1,2,..., n;

Заменим кривую $y=f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} (i = 0,1,2,.. .,n). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1+y_2}{2}\cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (42.2)$$

Формула (42.2) называется формулой трапеций.

Абсолютная погрешность R_n приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы $|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}$ • M_2, где $M_2 = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$.

Решение типовых задач

1. Найти интегралы:

1) $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} == \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt|_0^1 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^3x} = \begin{bmatrix} cosx = t \\ dcosx = dt \\ -sinxdx = dt \\ sinxdx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = cos0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2}|_1^{0,5}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

2. Вычислить, разбив отрезок интегрирования [0; 2] на 4 части. $\int_0^2 x^3\,dx$

Имеем: $f(x) = x^3$,

$$a = x_0 = 0; \quad b = x_4 = 2, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{8}; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 1;$$

$$x_3 = \frac{3}{2}, \quad y_3 = \frac{27}{8}; \quad x_4 = 2, \quad y_4 = 8;$$

(см.рис. 204)

а) по формуле прямоугольников:

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad \bar{y}_1 = \frac{1}{64}; \quad c_2 = \frac{3}{4}, \quad \bar{y}_2 = \frac{27}{64};$$

$$c_3 = \frac{5}{4}, \quad \bar{y}_3 = \frac{125}{64}; \quad c_4 = \frac{7}{4}, \quad \bar{y}_4 = \frac{343}{6},$$

$$\int_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) = 3{,}875, \text{ т. е. } \int_0^2 x^3\,dx \approx 3,$$

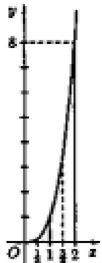


Рис. 204.

б) по формуле трапеции:

$$\int_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) = 4{,}25, \text{ т. е. } \int_0^2 x^3\,dx \approx 4{,}25;$$

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 2.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическая работа № 10

Вычисление площади плоской фигуры и объёма тела

Цель: формирование умений применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов;

- находить объемы тел вращения с помощью определенных интегралов.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

№варианта	Задания
1.	1) $y = sinx; y = 0; y = \frac{\pi}{2}$; 2) $y = 2x^3$; $y = 0{,}5x^2$; .
2.	1) $y = 2x^2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 3$; 2) $y = 2x$; $y = 0{,}5x^2$; .
3.	1) $y = 2^x$; $y = 0$; $y = -2x + 3$; 2) $y = 2x + 1$; $y = 0{,}5x^2$; .
4.	1) $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$; 2) $y = 2x + 2$; $y = x^2$; .
5.	1) $y = x^3$; $y = x^2$; $x = 1$; $x = 2$; 2) $y = x^3$; $y = 2x^2$; .
6.	1) $y = sinx; y = 0; y = \frac{3\pi}{2}$; 2) $y = 2x^3$; $y = 2x^2$; .
7.	1) $y = sinx; y = 0; y = -\frac{\pi}{2}$; 2) $y = 0{,}5x^3$; $y = 0{,}5x^2$; .
8.	1) $y = cosx; y = -\frac{\pi}{2}; y = \frac{\pi}{2}$; 2) $y = 3x^3$; $y = 3x + 2$; .
9.	1) $y = cosx; y = 0; y = \pi$; 2) $y = 2x^3$; $y = 3x + 1$; .
10.	1) $y = cos; y = -\pi; y = \frac{\pi}{2}$; 2) $y = 2x^3$; $y = 4x$; .

2. Найдите объём фигуры, ограниченной линиям при вращении вокруг осей (ОХ) и (ОУ)

№варианта	Задания
1.	$x^2 + y^2 = 1$; $-1 \le x \le 1$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)
2.	$x^2 + y^2 = 4$; $-2 \le x \le 2$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)
3.	$x^2 + y^2 = 9$; $-3 \le x \le 3$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)
4.	$x^2 + y^2 = 16$; $-4 \le x \le 4$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)
5.	$x^2 + y^2 = 25$; $-5 \le x \le 5$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)
6.	$x^2 + y^2 = 36$; $-6 \le x \le 6$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)
7.	$x^2 + y^2 = 49$; $-7 \le x \le 7$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)
8.	$x^2 + y^2 = 64$; $-8 \le x \le 8$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)
9.	$x^2 + y^2 = 81$; $-9 \le x \le 9$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)
10.	$x^2 + y^2 = 100$; $-10 \le x \le 10$; (либо $x = 0$; либо $y = 0$)

Краткие теоретические сведения:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

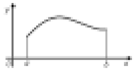


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S=\int\limits_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

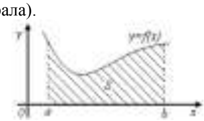


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$.

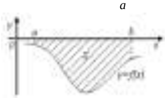


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x)\geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь Sфигуры, заключенной между кривыми $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S=\int\limits_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$.

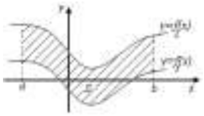


Рис. 4

Вычисление объмов тел вращения.

При помощи определенного интеграла можно вычислить объем того или иного тела, в частности, тела вращения.

Телом вращения называется тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг ее основания (рис. 1, 2)

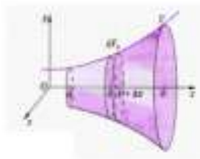


Рис.1 рис.2

Объем тела вращения вычисляется по одной из формул:

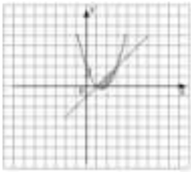
1. $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$, если вращение криволинейной трапеции **вокруг оси ОХ.**

2. $V=\pi\int_a^b [\phi(y)]^2\,dy$, если вращение криволинейной трапеции **вокруг оси ОУ.**

Решение типовых задач

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2-3x+2$ и $y=x-1$.

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x)\ge f_2(x)$ на данном отрезке,находится по формуле $S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$.



Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2-3x+2=x-1$. Корнями этого уравнения являются числа $x=1$ и $x=3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования. Значит, площадь фигуры равна:

$$S=\int_1^3((x-1)-(x^2-3x+2))dx=\int_1^3(4x-x^2-3)dx=$$

$$=(2x^2-\frac{x^3}{3}-3x)\Big|_1^3=18-9-9-(2-\frac{1}{3}-3)=$$

$$=-2+\frac{1}{3}+3=1\frac{1}{3}.$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Пример 2. Найти объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x^2+y^2=64$, $y=-5$, $y=5$, $x=0$.

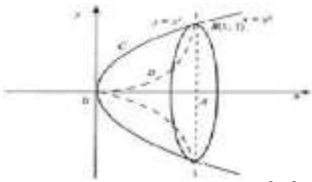
Решение.

$$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(64-y^2\right)dy=\pi\left(64y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{5}=556\frac{2}{3}\pi\approx 1163см^3$$

Ответ : 1163 cm^3.

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением лепестка, вокруг оси абсцисс $y=x^2$, $y^2=x$.

Решение .



Построим графики функции. $y = x^2$, $y^2 = x$. График $y^2 = x$ преобразуем к виду $y = \sqrt{x}$.

Имеем $V = V_1 - V_2$ Вычислим объем каждой функции

$$V_1 = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = 0{,}3\pi$$

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 2.3 Интегральное исчисление функции одной переменной.

Практическое занятие № 11

Решение физических и технических задач.

Цель работы: Научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать физические и технические задачи с применением интегрального исчисления

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

Задание:

№варианта	Задания
1.	1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$. 2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$. 3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м? 4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м. 5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 10 м, а высота 1 м (считая шлюз доверху заполненным водой).
2.	1.Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 8t - 16t^2$. 2.Найдите путь, пройденный точкой за вторую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$. 3.Сила упругости пружины, растянутой на 0,02 м, равна 2Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,02м? 4.Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,02м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м. 5.Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 2 м (считая шлюз доверху заполненным водой).
3.	1.Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного

	движения $v = 25t - 4t^2$. 2.Найдите путь, пройденный точкой за третью секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$. 3.Сила упругости пружины, растянутой на 0,03 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,03м? 4.Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,3м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,03м. 5.Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 30 м, а высота 3 м (считая шлюз доверху заполненным водой).
4.	1.Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 9t - 6t^2$. 2.Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$. 3.Сила упругости пружины, растянутой на 0,04 м, равна 8Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,04м? 4.Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,04м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,02м. 5.Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 40 м, а высота 10 м (считая шлюз доверху заполненным водой).
5.	1.Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 6t - 18t^2$. 2.Найдите путь, пройденный точкой за пяттую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$. 3.Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 5Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м? 4.Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.

	5.Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 50 м, а высота 25 м (считая шлюз доверху заполненным водой).
6.	1.Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 20t - 2t^2$. 2.Найдите путь, пройденный точкой за шестую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$. 3.Сила упругости пружины, растянутой на 0,06 м, равна 6Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м? 4.Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м. 5.Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 60 м, а высота 10 м (считая шлюз доверху заполненным водой).
7.	1.Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 22t + t^2$. 2.Найдите путь, пройденный точкой за седьмую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$. 3.Сила упругости пружины, растянутой на 0,07 м, равна 21Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м? 4.Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,07м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м. 5.Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 70 м, а высота 35 м (считая шлюз доверху заполненным водой).
8.	1.Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 72t - 16t^2$. 2.Найдите путь, пройденный точкой за восьмую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.

	3.Сила упругости пружины, растянутой на 0,08 м, равна 8Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,08м? 4.Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,08м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м. 5.Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 80 м, а высота 20 м (считая шлюз доверху заполненным водой).
9.	1.Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 13t - 6t^2$. 2.Найдите путь, пройденный точкой за девятую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$. 3.Сила упругости пружины, растянутой на 0,09 м, равна 9Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,09м? 4.Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,09м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м. 5.Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 90 м, а высота 30 м (считая шлюз доверху заполненным водой).
10.	1.Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 14t - 6t^2$. 2.Найдите путь, пройденный точкой за десятую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$. 3.Сила упругости пружины, растянутой на 0,1 м, равна 10Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,1м? 4.Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,1м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м. 5.Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 100 м, а высота 25 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Краткие теоретические сведения:

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е . $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что dS = v(t)dt. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$.

Вычисление работы с помощью определённого интеграла.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка М движется по прямой в направлении оси OX. Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки М из положения $x = x_1$ в положение $x = x_2$.

1) Если сила постоянна $f(x) = C$, то работа выражается следующим образом $A = C(x_2 - x_1)$.

2) Если сила переменная величина, то $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила P давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле:

$P = 9{,}81\gamma hS$ (4), где γ – плотность жидкости.

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx\ (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то a=0 и формула (5) примет вид

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx\ (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx = 9{,}81\gamma y \int_a^b x\,dx = 9{,}81\gamma y \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = 9{,}81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Решение типовых задач

Пример 1. Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела v(t) = 10t + 2 (м/с).

Решение: Если v(t)=10t+2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2)\,dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (м).$$

Ответ. S = 88 (м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно,F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12,5 \ (Дж).$$

Пример 3. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/$м^3$. Следовательно,

$$P = 9810\int_a^b xy\,dx = 9810\int_a^b x\,dx = 9810\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5} = 9810\,\frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430\ (H).$$

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 3.1 Основы теории вероятности.

Практическое занятие № 12
Решение задач на классическую вероятность случайного события.
Решение комбинаторных задач..

Примечание [e1]:

Цель работы: Осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-Находить отличия одной выборки от другой;

-Применять формулы для подсчёта выборок без повторений.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?
4. В урне 30 шаров, имеющих номера: 1, 2, …, 30. Из урны наугад вынимают один шар. Вероятность события *A* – «вынутый шар содержит цифру 7» -равна.

Краткие теоретические сведения:

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1.Правило сложения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами, а другой элемент $B-n$ способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (А или В) можно осуществить $m+n$ способами.

2.Правило умножения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача1. При формировании экипажа космического корабля имеется:10 претендентов на пост командира,20 претендентов на пост бортинженера,25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами

можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?
Решение. По правилу суммы существует 10+20+25=55способов выбора одной из кандидатур.

Задача2.В столовой предлагают два различных первых : a_1 и a_2 ;три различных вторых блюда: b_1, b_2, b_3 и два различных десерта: c_1 и c_2. Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?
Решение. Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует $2\times 3\times 2$ =12 способов выбрать обед из трех блюд.

3. Подмножества п- множеств(соединения).

Для нахождения $k-$подмножеств некоторого $n-$множества нужно выбрать k из n его элементов (поэтому часто говорят о *выборк*е k элементов из $n-$элементов). Про выбранные k из n различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из n элементов по k . Соединение - собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений: перестановки, размещения, сочетания.

Перестановки.

Перестановками из $n-$элементов называются такие соединения из $n-$ элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n\,!$

Размещения.

Размещениями из $n-$элементов называются такие соединения , каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных $n-$элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем , и другим.

Обозначение $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из $n-$элементов по $n-$элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

Сочетания.

Сочетаниями из n- элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение **:** $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Решение типовых задач

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

   Решение.

   1.Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

   2.Формула размещений имеет вид:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4\ , m = 10$.

   3. Производим расчёт :$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!}$=$\frac{10!}{6!}$=$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$=$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

   Решение.

   1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.
   2. Формула сочетаний имеет вид:$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.
   3. Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!}$=$\frac{10!}{3!7!}$=$\frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!}$ =120.

3.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

1.По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2.Формула перестановок из n –элементов имеет вид: $P_n = n!$ В нашем случае n =4.

3.Произведём расчёт: P_4 =4!=4· $3 \cdot 2 \cdot 1$=24.

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 3.2 Основы математической статистики.

Практическое занятие № 13
Решение задач на основные понятия математической статистики.

Примечание [e2]:

Цель работы: Осмыслить основные понятия математической статистики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- строить геометрическую интерпретацию статистических распределений.
- вычислять основные понятия математической статистики

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

Задание:

1.Дано статистическое распределение частот выборки.

Статистическое распределение

x_i	3	6	8
n_i	4	5	6

Найдите статистическое распределение относительных частот.

2. Постройте полигон частот по данному распределению выборки.

Статистическое распределение

x_i	1	2	3	4
n_i	5	10	15	20

3. Найдите выборочное среднее для выборки с данным статистическим распределением:

Статистическое распределение

x_i	3	6	9	11
n_i	5	3	2	6

4. Постройте гистограмму частот по данному распределению выборки:

Статистическое распределение

Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала
[1; 5]	5
(5; 10]	8
(10;15]	25
(15;20]	40
(20;25]	20

5. Постройте полигон относительных частот.

Статистическое распределение

x_i	1	2	3	4	5
W_i	0,1	0,25	0,12	0,1	0,5

6. Дано статистическое распределение частот выборки

Статистическое распределение

x_i	2	4	8
N_i	1	8	2

Найдите относительные частоты, накопленные частоты, накопленные относительные частоты.

7. Вычислите выборочное среднее для выборки.

Статистическое распределение

xi	3	4	7	9
ni	5	2	4	10

Краткие теоретические сведения

Основные понятия математической статистики

Множество числовых значений некоторого признака всех объектов рассматриваемой совокупности. называется *генеральной совокупностью*

Множество числовых значений некоторого признака всех объектов, отобранных случайным образом из всей совокупности рассматриваемых объектов, называется *выборкой* или *выборочной совокупностью.*

Группировка статистических данных

1. Отдельное значение признака отдельной единицы или группы совокупности называется. *вариантой;*

2. Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным* или *выборочным рядом*;

3. Числа $n_1; n_{2;} n_{3;} \dots n_k$; называются частотами, а их.

4. Число случаев, включённых в выборочную совокупность, есть *объём выборки.*

5. Отношения частот к объёму выборки есть:

a) $Wi = \frac{n_i}{n}$ – *относительная частота* соответствующих вариант;

b) $n_i^{нак} = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{i-1}$ – *накопленная* (кумулятивная) частота;

c) $W_i^{нак} = \frac{n_i^{нак}}{n}$ – *относительная накопленна частота* (отношение накопленной частоты к общему объему выборки).

1. Перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот называется *статистическим распределением выборки.*

Числовые характеристики выборки

а)Отношение среднего арифметического значений признака выборки к объему выборки n называется *выборочным средним* $\bar{x}_в$, т.е.

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_к \cdot n_к}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{к} x_i \cdot n_i \text{ ;}$$

б) *генеральное среднее*:

$$\overline{x_г} = \frac{x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 + \ldots + x_k \cdot N_k}{N}.$$

Геометрическая интерпретация статистических распределений выборки

Статистическое распределение выборки можно изобразить либо в виде полигона частот либо в виде гистограммы частот.

1. Для того чтобы построить полигон статистического распределения выборки нужно:

- На оси (0X) расположить варианты x_i;
- На оси (0У) – соответствующие им частоты n_i;
- В плоскости (X0У) получим точки с координатами (x_i, n_i).
- Соединим полученные точки отрезками.

Полученная ломаная линия называется полигоном частот. Аналогично строится полигон относительных частот.

2 Для того чтобы построить гистограмму статистического распределения выборки нужно:

- На оси (0X) расположить варианты x_i;
- На оси (0У) – соответствующие им частоты n_i;
- В плоскости (X0У) получим точки с координатами (x_i, n_i).
- Построить ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, построенных на частичных интервалах с длиной d и высотой, равной отношению $\frac{n_i}{d}$. Это изображение и есть гистограммой частот.

Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Решение типовых задач

Задача 1. Дано статистическое распределение выборки

Статистическое распределение выборки

x_i	3	5	7
n_i	1	6	9

Найдите относительные частоты, накопленные частоты, накопленные относительные частоты.

Решение:

Вычислим объем выборки:

$n = 1 + 6 + 9 = 16$

$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$;

$w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{6}{16} = 0{,}375$;

$w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$;

$n_1^{нак} = 0$; $n_2^{нак} = 1$; $n_3^{нак} = 7$; $n_4^{нак} = 16 = n$;

$w_1^{нак} = \frac{0}{16} = 0$

$w_2^{нак} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$;

$w_3^{нак} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$;

$w_4^{нак} = 1$.

Задача 2. Вычислите:
а) выборочное среднее для выборки:

Статистическое распределение выборки

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	2	3	5	7	9	11

Решение:

$$\bar{x}_в = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11}{2 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11} = \frac{162}{37} = 4{,}38$$

б) генеральное среднее для генеральной совокупности, заданной таблицей:

Статистическое распределение выборки

x_i	1	2	3	4	5	6
N_i	2	6	1	10	4	6

Решение:

$$\bar{x}_г = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6}{2 + 6 + 1 + 10 + 4 + 6} = \frac{113}{29} = 3{,}895.$$

Задача 3. Постройте полигон частот для статистического распределения выборки для условия задачи 2 б.

Решение:

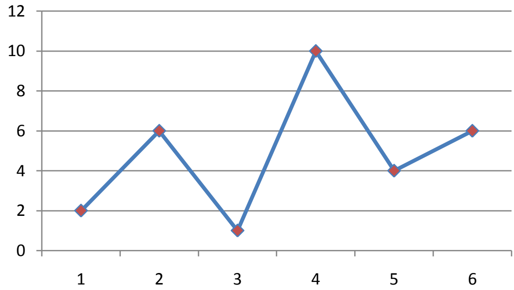


Рис. 1. Полигон частот

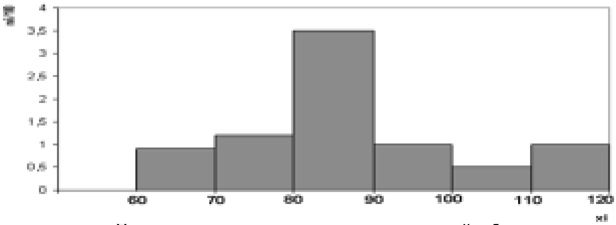
Задача 4. Дано интервальное статистическое распределение в виде таблицы для выборки объема 81.Полученное при изучении выработки на одного рабочего в отчетном году, в процентах по отношению к предыдущему году.

Статистическое распределение

Интервал значений варианты	Частота интервала
[60; 70)	9
(70; 80]	12
(80; 90]	35
(90;100]	10
(100;110]	5
(110;120]	10

Постройте гистограмму статистического распределения данной выборки.

Решение:



Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 4.1 Элементы теории множеств.

Практическое занятие № 14
Решение задач на множества.

Цель работы: Осмыслить основные понятия теории множеств.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- - составлять подмножества;
- выполнять операции над множествами

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.
Задание:

1. Назовите элементы, принадлежащие множеству:
а) студентов вашей группы,
б) предметов, изучаемых в I семестре вашей специальности,

в) всех частей света,
г) субъектов федерации, входящих в Российскую Федерацию.

2. Пусть E – множество европейских государств, A – множество азиатских государств. Какие из следующих высказываний истина, а какие – ложь?

а) Франция $\in E$, б) Испания $\notin E$, в) Монголия $\notin A$,
г) Индия $\in A$, д) Ирак $\notin E$, е) Турция $\in A$,
ж) Байкал $\in A$, з) Волга $\in E$, и) Нигерия $\notin A$,
к) Гималаи $\in A$, л) Япония $\in A$, м) Альпы $\notin E$,
н) Швеция $\notin A$.

3. Найдите объединение, пересечение, разность множеств A и B, если
а) $A =]-\infty; 7]$, $B = [1; +\infty[$;
б) $A = [3; 7]$, в= $B = [0; 9]$;
в) $A =]-\infty; 0]$, $B = [3; +\infty[$.

4.Приведите примеры множеств, составленных из объектов следующих видов:
а) неодушевленных предметов,
б) животных,
в) растений,
г) геометрических фигур,
д) населенных пунктов,
е) водоемов,
ж) политических деятелей.

5.Прочитайте запись и укажите, какие из указанных высказываний истина, а какие ложь:
а) $270 \in \mathbf{N}$, б) $0 \in \mathbf{N}$, $-3 \in \mathbf{N}$
г) $1\frac{2}{3} \in \mathbf{Q}$, д) $-7 \in \mathbf{N}$, $22\frac{1}{7} \notin \mathbf{N}$
ж) $-3 \in \mathbf{Z}$, з) $\pi \notin \mathbf{Q}$, $\pi^2 \in \mathbf{R}$
к) $\sin 2{,}3 \in \mathbf{R}$, л) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \in \mathbf{R}$.

6.Дано множество $A = \{72, 56, 513, 117, 324\}$. Составьте подмножества множества A, состоящее из чисел, которые:

а) делятся на 4; б) делятся на 9;
в) делятся на 5; г) делятся на 10.

5. Найдите объединение, пересечение, разность множеств A и B, если $A = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21\}$ и $B = \{0,1,2,3,5,8,13,21,34\}$.

Краткие теоретические сведения

В основе теории множеств лежат первичные понятия: множество и отношение принадлежности множества (обозначается как $x \in A$ — «x есть элемент множества A», (x принадлежит множеству A). Пустое множество, обычно обозначается символом $\varnothing$ — множество, не содержащее ни одного элемента. Подмножество и надмножество— соотношения включения одного множества в другое (обозначаются соответственно $A \subseteq B$ и $A \supseteq B$ для нестрогого включения и $A \subset B$ и $A \supset B$ — для строгого).

Над множествами определены следующие операции:

- объединение, обозначается как $A \cup B$ — множество, содержащее все элементы из A и B,
- разность, обозначается как $A \setminus B$, реже $A - B$ — множество элементов A, не входящих в B,
- дополнение, обозначается как $\setminus A$ или $-A$ — множество всех элементов, не входящих в A (в системах, использующих универсальное множество),
- пересечение, обозначается как $A \cap B$ — множество из элементов, содержащихся как в A, так и в B,
- симметрическая разность, обозначается как $A \Delta B$, реже $A \dot{-} B$ — множество элементов, входящих только в одно из множеств— A или B.

Для визуализации операций над множествами используются диаграммы Венна.

Рис. 3. Диаграмма Венна, показывающая все пересечения графем заглавных букв греческого, русского и латинского алфавитов

Декартово произведение множеств A и B - множество всех упорядоченных пар элементов из A и B:

$A \times B = \{(xy) | x \in A, y \in B\}$.

Булеан— множество всех подмножеств данного множества, обозначается P(A) или 2^A(так как соответствует множеству отображений из A в $2 = \{0; 1\}$).

Мощность множества (кардинальное число) — характеристика количества элементов множества, формально определяется как класс эквивалентности над множествами, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие, обозначается $|A|$. Мощность пустого множества равна нулю, для конечных множеств — целое число, равное количеству элементов. Над кардинальными числами, в том числе характеризующими бесконечные множества, можно установить отношение порядка, мощность счётного множества обозначается $\aleph_0$ (алеф— первая буква еврейского алфавита), является наименьшей из мощностей бесконечных множеств, мощность континуума обозначается ς или $2^{\aleph_0}$, континуум-гипотеза— предположение о том, что между счётной мощностью и мощностью континуума нет промежуточных мощностей.

Решение типовых задач

Пример1. Даны множества $A = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$ и $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A\ U\ B = \{-6, -3, 0, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

Пример2. Даны множества $A = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$ и $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Тогда

$A \cap B = \{0, 6\}$.

Пример3. Предположим, что множество U состоит из всех букв русского алфавита, A – из всех согласных, а множество B – из букв, встречающихся в слове *«энциклопедия»*. Тогда

- *объединение* множеств A и B состоит из всех букв алфавита, кроме $\{а, ё, у, ъ, ь, ы, ю; \}$
- *пересечение* множеств A и B – из букв $\{д, к, л, н, п, ц\}$;
- *дополнение множества* A *до универсального множества* U *– из всех гласных.*

Пример 4. Задать с помощью характеристического свойства элементов множество всех положительных чисел.

$M = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x > 0\}.$

Пример 5. Задать перечислением элементов множества, заданные указанием характеристического свойства элементов: $M = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x < 5\}$.

Ответ: $M = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.

Тема 4.2 Элементы Алгебры (логики) высказываний

Практическая работа №15 Высказывания и операции над ними. Формулы алгебры высказываний. Решение задач.

Практическая работа №16 Решение задач на логику предикатов.

Цель работы: Осмыслить основные понятия алгебры высказываний и научиться решать задачи на логику предикатов .

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- - научиться решать задачи на логику предикатов
- **Материальное обеспечение:**

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

Задание:

1. Установите, какие из следующих предложений являются логическими высказываниями, а какие — нет (объясните почему):

- **а)** “*Солнце есть спутник Земли*”;
- **б)** “*2+3′4*”;
- **в)** “*сегодня отличная погода*”;
- **г)** “*в романе Л.Н. Толстого “Война и мир” 3 432 536 слов*”;
- **д)** “*Санкт-Петербург расположен на Неве*”;
- **е)** “*музыка Баха слишком сложна*”;
- **ж)** “*первая космическая скорость равна 7.8 км/сек*”;
- **з)** “*железо — металл*”;
- **и)** “*если один угол в треугольнике прямой, то треугольник будет тупоугольным*”;
- **к)** “*если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей, то он прямоугольный*”.

2. Укажите, какие из высказываний предыдущего упражнения истинны, какие — ложны, а какие относятся к числу тех, истинность которых трудно или невозможно установить.

3. Приведите примеры истинных и ложных высказываний:

- **а)** из арифметики; **б)** из физики;
- **в)** из биологии; **г)** из информатики;
- **д)** из геометрии; **е)** из жизни.

4. Сформулируйте отрицания следующих высказываний или высказывательных форм:

- **а)**“*Эльбрус — высочайшая горная вершина Европы*”;
- **б)** “*2>=5*”;
- **в)**“*10<7*”;
- **г)**“*все натуральные числа целые*”;
- **д)**“*через любые три точки на плоскости можно провести окружность*”;
- **е** “*теннисист Кафельников не проиграл финальную игру*”;
- **ж)**“*мишень поражена первым выстрелом*”;
- **з)**“*это утро ясное и теплое*”;
- **и)**“*число n делится на 2 или на 3*”;
- **к)**“*этот треугольник равнобедренный и прямоугольный*”;
- **л)**"*на контрольной работе каждый ученик писал своей ручкой*".

5.Определите, какие из высказываний (высказывательных форм) в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие нет:

- **а)**“*5<10*”, “*5>10*”;
- **б)** “*10>9*”, “*10<=9*”;
- **в)**“*мишень поражена первым выстрелом*”, “*мишень поражена вторым выстрелом*”;
- **г)**“*машина останавливалась у каждого из двух светофоров*”, “*машина не останавливалась у каждого из двух светофоров*”,

- **д)**“*человечеству известны все планеты Солнечной системы*”, “*в Солнечной системе есть планеты, неизвестные человечеству*”;
- **е)**“*существуют белые слоны*”, “*все слоны серые*”;
- **ж)**“*кит — млекопитающее*”, “*кит — рыба*”;
- **з)**“*неверно, что точка А не лежит на прямой а*”, “*точка А лежит на прямой а*”;
- **и)**“*прямая а параллельна прямой b*”, “*прямая а перпендикулярна прямой b*”;
- **к)**“*этот треугольник равнобедренный и прямоугольный*”, “*этот треугольник не равнобедренный или он не прямоугольный*”.

6. Определите значения истинности высказываний:

- **а)**“*наличия аттестата о среднем образовании достаточно для поступления в институт*”;
- **б)**“*наличие аттестата о среднем образовании необходимо для поступления в институт*”;
- **в)**“*если целое число делится на 6, то оно делится на 3*”;
- **г)**“*подобие треугольников является необходимым условием их равенства*”;
- **д)**“*подобие треугольников является необходимым и достаточным условием их равенства*”;
- **е)**“*треугольники подобны только в случае их равенства*”;
- **ж)**“*треугольники равны только в случае их подобия*”;
- **з)**“*равенство треугольников является достаточным условием их подобия*”;
- **и)**“*для того, чтобы треугольники были неравны, достаточно, чтобы они были неподобны*”;
- **к)**“*для того, чтобы четырёхугольник был квадратом, достаточно, чтобы его диагонали были равны и перпендикулярны*”.

7. Подставьте в приведённые ниже высказывательные формы вместо логических переменных a, b, c, d такие высказывания, чтобы полученные таким образом составные высказывания имели смысл в повседневной жизни:

- **а)** *если* (a *или* (b *и* c)), *то* d;
- **б)** *если* (*не* a *и не* b), *то* (c *или* d);
- **в)** (a *или* b) *тогда и только тогда, когда* (c *и не* d).

8. Формализуйте следующий вывод: "Если *a* и *b* истинны, то *c* — истинно. Но *c* — ложно: значит, *a* или *b* ложны".

9.Формализуйте предостережение, которое одна жительница древних Афин сделала своему сыну, собиравшемуся заняться политической деятельностью: “*Если ты будешь говорить правду, то тебя возненавидят люди. Если ты будешь лгать, то тебя возненавидят боги. Но ты должен* *говорить правду или лгать. Значит, тебя возненавидят люди или возненавидят боги*".

Формализуйте также ответ сына: "*Если я буду говорить правду, то боги будут любить меня. Если я буду лгать, то люди будут любить меня. Но я должен говорить правду или лгать. Значит, меня будут любить боги или меня будут любить люди*".

10.Пусть a = "*это утро ясное*", a b = "*это утро теплое*". Выразите следующие формулы на обычном языке:

Краткие теоретические сведения

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Так, например, предложение "*6 — четное число*" следует считать высказыванием, так как оно истинное. Предложение "*Рим — столица Франции*" тоже высказывание, так как оно ложное.

Разумеется, **не всякое предложение является логическим высказыванием**. Высказываниями не являются, например, предложения "*ученик десятого класса*" и "*информатика — интересный предмет*". Первое предложение ничего не утверждает об ученике, а второе использует слишком неопределённое понятие "*интересный предмет*". Вопросительные и восклицательные предложения также не являются высказываниями, поскольку говорить об их истинности или ложности не имеет смысла.

Предложения типа "*в городе **А** более миллиона жителей*", "*у него голубые глаза*" не являются высказываниями, так как для выяснения их истинности или ложности нужны дополнительные сведения: о каком конкретно городе или человеке идет речь. Такие предложения называются*высказывательными формами*.

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения — является ли оно истинным или ложным.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания **"не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда"** и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками.**

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются составными. Высказывания, не являющиеся составными, называются элементарными.

Так, например, из элементарных высказываний "*Петров — врач*", "*Петров — шахматист*" при помощи связки "*и*" можно получить составное высказывание "*Петров — врач и шахматист*", понимаемое как "*Петров — врач, хорошо играющий в шахматы*".

При помощи связки "*или*" из этих же высказываний можно получить составное высказывание "*Петров — врач или шахматист*", понимаемое в

алгебре логики как "*Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно*".
Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена. Пусть через **А**обозначено высказывание *"Тимур поедет летом на море",* а через **В** — высказывание *"Тимур летом отправится в горы".* Тогда составное высказывание *"Тимур летом побывает и на море, и в горах"* можно кратко записать как **А и В**. Здесь **"и"** — логическая связка, **А, В** — логические переменные, которые могут принимать только два значения — "истина" или "ложь", обозначаемые, соответственно, "1" и "0".
Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение:
НЕ Операция, выражаемая словом *"не",* называется **отрицанием** и

обозначается чертой над высказыванием Высказывание истинно, когда А ложно, и ложно, когда А истинно. Пример. "*Луна — спутник Земли*"

(А); "*Луна — не спутник Земли*" ( ).
И Операция, выражаемая связкой *"и",* называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой " **·** " (может также обозначаться знаком **&**).
Высказывание **А · В** истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания **А** и **В** истинны. Например, высказывание *"10 делится на 2 и 5 больше 3"* истинно, а высказывания *"10 делится на 2 и 5 не больше 3", "10 не делится на 2 и 5 больше 3", "10 не делится на 2 и 5 не больше 3"* — ложны.
ИЛИ Операция, выражаемая связкой *"или"* (в неисключающем смысле этого слова), называется**дизъюнкцией** (лат. disjunctio — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком **v**(или плюсом).
Высказывание **A v B** ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В ложны. Например, высказывание *"10 не делится на 2 или 5 не больше 3"* ложно, а высказывания*"10 делится на 2 или 5 больше 3", "10 делится на 2 или 5 не больше 3", "10 не делится на 2 или 5 больше 3"* — истинны.
ЕСЛИ-ТО Операция, выражаемая связками *"если ..., то", "из ... следует", "... влечет ...",* называется **импликацией** (лат. *implico* — тесно

связаны) и обозначается знаком . Высказывание**A** **B** ложно тогда и только тогда, когда **A** истинно, а **B** ложно.

Каким же образом импликация связывает два элементарных высказывания? Покажем это на примере высказываний: *"данный четырёхугольник — квадрат"* (**А**) и *"около данного четырёхугольника можно*

описать окружность" (**В**). Рассмотрим составное высказывание **А** **В** , понимаемое как *"если данный четырёхугольник квадрат, то около него можно описать окружность"*. Есть **три варианта,** когда

высказывание **А** **В** истинно:

Решение типовых задач

1) . Упростить логическое выражение.

F = $(A \vee B) \to \overline{(B \vee C)}$

Решение (используются законы де Моргана, закон двойного отрицания, распределительный закон):

F = $(A \vee B) \to \overline{(B \vee C)}$ = A v B & $\overline{(B \vee C)}$ = (A v B) & (B v C) = B v (A & C)

2) **.**. Проверить правильность упрощения построением таблиц истинности. (

Для проверки правильности упрощения строим таблицы истинности для исходного и упрощенного логического выражения. Если данные в последних столбцах таблиц истинности совпадают, значит мы правильно упростили логическое выражение.

Решение:

Таблица истинности для исходного логического выражения

A	B	C	A V B	B V C	$\overline{(B \vee C)}$	$(A \vee B) \to \overline{(B \vee C)}$	F
0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1

Таблица истинности для упрощенного логического выражения

A	**B**	**C**	**A & C**	**B V A & C**
0	0	0	0	0

0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Из таблиц истинности видно, что упрощение верное.

3) Записать следующее высказывание в виде логического выражения: **«**Если я хорошо подготовлюсь по русскому языку, математике и физике, то я получу пятерки или четверки».

Решение: выделим в составном высказывании простые и обозначим их логическими переменными:
А – хорошо подготовлюсь по русскому языку;
В – хорошо подготовлюсь по математике;
С – хорошо подготовлюсь по физике;
D – получу пятерки;
Е – получу четверки.
Тогда составное высказывание будет записано следующим образом:
F = (A & B & C) --> (D V E)

4) Решить логическую задачу с помощью рассуждений**.**

Принцу необходимо спасти принцессу от злого колдуна. Принцесса находится в одной из комнат с надписями на дверях:

1. В этой комнате сидит тигр.
2. Принцесса находится в комнате 1.
3. Тигр сидит в комнате 2.

Колдун сообщил принцу, что одно из этих утверждений является истинным. И если принц с первого раза отгадает, где находится принцесса, то колдун освободит ее.

5) По телевизору **с**иноптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее:

Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.
Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.
Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.
Так какая же погода будет завтра? (Ответы учеников)
Решим эту задачу средствами алгебры логики.

Решение:

а**)** Выделим простые высказывания и запишем их через переменные**:**
А – «Ветра нет»
В – «Пасмурно»

C – «Дождь»
б) Запишем логические функции (сложные высказывания) через введенные переменные:
1. Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя:
A --> B & C
2. Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра:
C --> B & A
3. Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра
B --> C & A
в) Запишем произведение указанных функций:
F=(A --> B & C) & (C -->B & A) & (B --> C & A)
г) Упростим формулу (используются законы де Моргана, переместительный закон, закон противоречия):
F=(A --> B & C) & (C -->B & A) & (B --> C & A)
= (A v B & C) & (C v B&A) & (B v C&A) =
= (A v B & C) & (B v C&A) & (C v B&A) =
= (A & B v B&C&B v A&C&A v B&C&C&A) & (C v B&A)=
= A & B &(C v B&A) =A&B&C v A&B&B&A =
= A&B&C
д) Приравняем результат единице, т.е. наше выражение должно быть истинным:
F = A & B & C = 1
е) Проанализируем результат:
Логическое произведение равно 1, если каждый множитель равен 1.
Поэтому:
A = 1; B = 1; C = 1;
Значит: A = 0; B = 0; C = 0;
Ответ: погода будет ясная, без дождя, но ветреная.
Ход работы:

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов

Форма представления результата:

Практическая работа оформляется в тетради для практических работ и сдаётся на проверку преподавателю

Критерии оценки:

Рейтинг всей работы составляет 10 баллов. Оценка «отлично» ставиться студенту если он правильно выполнил от 91% до100% всей работы. Оценка «хорошо» ставиться студенту если он правильно выполнил от 80% до90% всей работы. Оценка «удовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил от 70% до79% всей работы. Оценка «неудовлетворительно» ставиться студенту если он правильно выполнил менее 70% всей работы.