Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Махновский
22 сентября 2016 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ЕН.01 МАТЕМАТИКА
для студентов специальности
44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям).
Строительство и эксплуатация зданий и сооружений
(углубленной подготовки)

Магнитогорск, 2016

ОДОБРЕНО:

Предметной комиссией
Математических и естествен-
онаучных дисциплин
Председатель Е.С. Корытникова
Протокол № 1 от 07.09.2016 г.

Методической комиссией МпК
Протокол №1 от 22.09.2016 г.

Составитель:

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» Многопрофильный колледж
Ирина Александровна Панфилова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям). Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (углубленной подготовки) и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности по математическим и естественно-научным, общепрофессиональным дисциплинам.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач;
– анализировать результаты измерения величин с допустимой погрешностью, представлять их графически;
– выполнять приближенные вычисления;
– проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 1.3. Проводить лабораторно-практические занятия в аудиториях, учебно-производственных мастерских и в организациях.

ПК 3.1. Разрабатывать учебно-методические материалы (рабочие программы, учебно-тематические планы) на основе примерных.

ПК 4.2. Участвовать в разработке и внедрении технологических процессов.

ПК 4.3. Разрабатывать и оформлять техническую и технологическую документацию.

А также формированию общих компетенций:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы решения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, взаимодействовать с руководством, коллегами и социальными партнерами.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Элементы теории множеств

Практическая работа № 1

Операции над множествами

Цель работы: Научиться выполнять операции над множествами.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- выполнять операции над множествами;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны множества:

$$A=\{m, n, k\},$$
$$B=\{m, n, k, l, p\},$$
$$C=\{m, n, k, l\}.$$

Выполнить следующие действия A∩B∪C.

2. Даны множества:

$A=\{b, c, d, e\}$,

$B=\{d, e, l\}$,

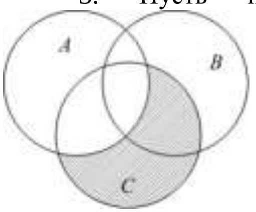
$C=\{b, d, e, l\}$,

$D=\{c, l\}$,

$E=\{b, c\}$.

Выполнить следующие действия C/A ∪ B

3. Пусть на рисунке изображены множества A, B и $C.$



Какому множеству соответствует заштрихованная область?

4. Найти прямое произведение множеств $A=\{a; b\}$, $B=\{1; 3; 5\}$.

Порядок выполнения работы:

1. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы.
2. Решить задания в тетради.

Ход работы:

1. Даны множества:

$A=\{m,n,k,p\}$,

$B=\{k,p,l\}$,

$C=\{m,n,k,p,l\}$,

$D=\{k,p\}$,

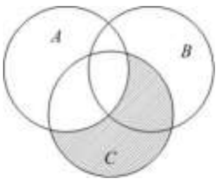
$E=\{m,n\}$.

Выполнить следующие действия $A \cap B \cup C$.

2. Даны множества $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{c, d, e, g, k\}$. Найти множество $B \backslash A$.

Разностью множеств B и A называется множество C, которое состоит из всех элементов множества B, не принадлежащих множеству A . Элементы a и b принадлежат множеству B, но не принадлежат множеству A. Тогда $B \backslash A =\{g, k\}$.

3. Пусть на рисунке изображены множества A, B и C.



Какому множеству соответствует заштрихованная область?

Каждая точка заштрихованной области принадлежит множеству C, но не принадлежит множеству A, значит, по определению разности двух множеств заштрихованная область есть множество, равное $C \setminus A$.

4. Дано множество A = {3, 12, 18, 10}. Из множества упорядоченных пар декартова произведения $A \times A$, выбрано подмножество ρ. Пара $(x, y) \in \rho$, если числа x и y при делении на 5 дают равные остатки. Чему равно количество пар, принадлежащих отношению ρ ?

Найдем остатки от деления элементов множества A на 5.

$3 = 0 \cdot 5 + 3$, остаток равен 3.

$12 = 2 \cdot 5 + 2$, остаток равен 2.

$18 = 3 \cdot 5 + 3$, остаток равен 3.

$10 = 2 \cdot 5 + 0$, остаток равен 0.

Одинаковые остатки при делении на 5 дают числа 3 и 18. Значит, заданному отношению принадлежат пары (3; 18) и (18; 3). Но пары (3; 3) и (18; 18) также принадлежат отношению ρ , так как числа 3 и

3; 18 и 18 при делении на 5 дают одинаковые остатки. Количество всех пар, принадлежащих данному отношению, равно 4.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 2.1. Теория пределов и непрерывность

Практическое занятие № 2

Вычисление пределов

Цель работы: Научиться раскрывать неопределенности при вычислении пределов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- раскрывать различные виды неопределенностей при вычислении пределов;
- вычислять пределы, применяя первый и второй замечательные пределы.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2-1}{4x^5+2x-9}$.
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{3x^3-75x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{\sin 30x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{6x}$.

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид неопределенности.

2. Преобразовать выражение, стоящее под знаком предела, с целью избавления от неопределенности.

3. Вычислить предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

Функция $f(x)=\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в предельной точке $x=3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию. Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 –корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2-11x+6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит $3x^2-11x+6=3(x-\frac{2}{3})(x-3)$.

А корни квадратного трехчлена $2x^2-5x-3$ равны $-\frac{1}{2}$ и 3, следовательно $2x^2-5x-3=2(x+\frac{1}{2})(x-3)$.

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})(x-3)}{2(x+\frac{1}{2})(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1}.$$

Подставим предельное значение аргумента в оставшееся выражение, получим: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1}=\frac{9-2}{6+1}=\frac{7}{7}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{150x-1000}{2x^2-3x+4}$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}(150x-1000)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-3x+4)=\infty$, то здесь имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2 (наивысшую степень x в данной дроби). Тогда, зная, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{150x-1000}{2x^2-3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{150x}{x^2}-\frac{1000}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{150}{x}-\frac{1000}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{2}=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$.

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и соотношением $\lim\limits_{x\to a}k\cdot f(x)=k\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

Для этого необходимо выполнить замену переменной: $\frac{x}{2}=t$, откуда $x=2t$. Учитывая, что $t\to 0$ при $x\to 0$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$.

Преобразуем функцию $f(x)$ так, чтобы можно было применить второй замечательный предел, формулу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Для этого числитель и знаменатель дроби разделим на число -3, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/(-3)}\right)^{5x}.$$

Далее выполним замену переменной, полагая $-\frac{x}{3}=t$. Тогда если $x\to\infty$, то $t\to\infty$, $x=-3t$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/(-3)}\right)^{5x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5\cdot(-3t)}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-15}=e^{-15}.$$

Форма представления результата: выполненная работа.
Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 2.2. Производная функции и её приложения

Практическое занятие № 3

Дифференцирование сложных функций

Цель работы: Научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;
- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:
Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.

3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)'$$
$$= \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$
$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\left(3x+5x^2\right)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$
$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}/$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' =$
$\frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f^{'}(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)^{'} = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$$u = 1 - e^{2x}$$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' = -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 2.2. Производная функции и её приложения

Практическое занятие № 4

Применение производной к исследованию функций

Цель работы: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- проводить исследование функций с помощью производной;
- строить графики функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D\ (y)$.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f\,'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f\,(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f\,'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f\,(x)$ и знак производной $f\,'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f\,(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f\,'(x)<0$, от промежутка, в котором $f\,'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.
7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную .
2. Находим точки, в которых $f''(x)=0$ или не существует.
3. Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x=x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x=x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x=x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y=y_0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ равно y_0 .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y=kx+b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-kx-b]=0$

Если для функции $y=f(x)$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-kx]=b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ при $x\to\infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y=\frac{x^2}{2(x-1)}.$$

1. Область определения функции $D(y):(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. При подстановке значения $x=0$ получим $y(0)=\frac{0}{2(0-1)}=0.$

Такую же точку получим если приравняем функцию к нулю. Точка $x=0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\frac{x^2}{2(x+1)};$$

$$y(-x)\neq y(x),\quad y(-x)\neq -y(x).$$

Итак функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции $y'=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$

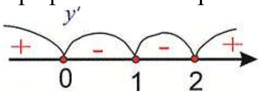
Приравнивая ее к нулю получим точки подозрительные на экстремум $x=0, x=2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty).$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения

$$y'(-1)=\frac{-1(-1-2)}{2(-1-1)^2}=\frac{1}{4}>0;\qquad y'(0.5)=\frac{0.5(0.5-2)}{2(0.5-1)^2}=-1.5<0;$$

$$y'(1.5)=\frac{1.5(1.5-2)}{2(1.5-1)^2}=-1.5<0;\quad y'(3)=\frac{3(3-2)}{2(3-1)^2}=\frac{3}{8}>0.$$

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty;0),(2;+\infty)$ и убывает $(0;1),(1;2)$.

Точка $x=0$ – точка локального максимума, $x=2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max}=0,\ y_{min}=\frac{2^2}{2(2-1)}=2.$

5. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

6. Точка $x=1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$.

Находим нужные границы

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2};$$

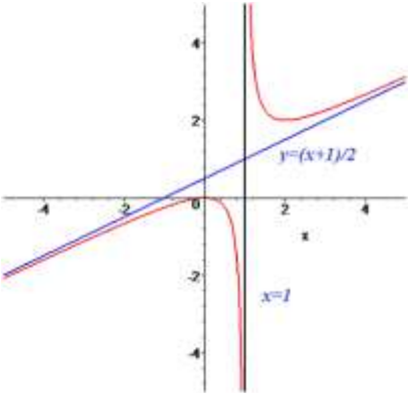
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}==\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

Конечный вид прямой следующий

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

7. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты,

затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 2.3. Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 5

Нахождение неопределенных интегралов различными методами интегрирования

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом подстановки;
- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1. Найти неопределенные интегралы, используя метод замены переменной: а) $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$; б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; г) $\int \sqrt[5]{3x+2}dx$.
2. Найти неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям: а) $\int xe^{5x}dx$; б) $\int \ln(1-x)dx$; в) $\int x\sin 3xdx$.

Краткие теоретические сведения:

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *y = f (x)* в промежутке *[a ; b]*, если в любой точке этого промежутка её производная равна *f (x)*.

Отыскание первообразной функции по заданной её производной *f (x)* или по дифференциалу *f (x) dx* есть действие, обратное дифференцированию - интегрирование.

При нахождении неопределенных интегралов используют свойства интегралов и таблицу.

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ где*C* – произвольное число;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;

5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;

9. $\int \cos xdx = \sin x + C$;
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;
11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

6. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$
$-a < x < a,\ a > 0$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0$;

14. $\int e^x dx = e^x + C$;

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула: $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dV. Затем, после нахождения dU и V,использовать формулу интегрирования по частям.

- - Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где $P(x)$- многочлен, k- число. Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за dV.
- Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$. Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U.
- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx, \int e^{ax}cosbxdx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной

заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным.

3. Если интеграл нельзя найти вышеуказанным способом, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$.

Ход работы:

Пример. Найти интегралы:

1) $\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\frac{dt}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{15dt}{-3t^4}$$

$$= -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

2. $\int (x^3 - 4x)lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx,\ dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x)lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right)dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 2.3. Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 6

Определённый интеграл и его свойства

Цель работы: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить определенные интегралы различными методами;
- находить приближенные значения определенных интегралов.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите интегралы

)$\int 3^{4x^2} x dx$; 2)$\int_2^4 \frac{3xdx}{(x^2-1)^3}$

3)$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x \cdot cosxdx$; 4) $\int (x^2+5x+7) lnx \cdot dx$.

Краткие теоретические сведения:

Для нахождения определенных интегралов применяется формула Ньютона - Лейбница. Формула Ньютона - Лейбница - основная формула интегрального исчисления.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$.

Свойства определённого интеграла

1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю*, т.е.

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0.$$

2. *Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования*, т.е.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

4. *Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b \left[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)dx\right] =$$

$$= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b \varphi(x)\ dx - \int_a^b \psi(x)\ dx.$$

5. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям*, т.е. если

$c \in [a,b]$,

то

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

6. *При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак*, т.е.

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$.

Ход работы:

1. Найти интегралы:

1) $\int_1^2 (3x^2 - 1)dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода непосредственного интегрирования и формулы Ньютона – Лейбница:

$$\int_1^2 (3x^2 - 1)dx = (x^3 - x)\Big|_1^2 = (2^3 - 2) - (1^3 - 1) = 6 - 0 = 6.$$

1) $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} == \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt|_0^1 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^3x} = \begin{bmatrix} cosx = t \\ dcosx = dt \\ -sinxdx = dt \\ sinxdx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = cos0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2}\Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2}\Big|_1^{0,5} =$

$\frac{1}{2\cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$

3) $\int_e^4 x\ln xdx$

Этот интеграл можно найти, применив формулу интегрирования по частям:

$$\int_e^4 x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x \\ dv = xdx \\ du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^4 - \frac{1}{2}\int_e^4 x^2\frac{dx}{x} = 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Big|_e^4 = 8$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 2.3. Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 7

Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и объемов тел

Цель работы: формирование умений применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов;

- находить объемы тел вращения с помощью определенных интегралов.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

a) $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 1, x = 4;$

b) $y = \ln x, y = 0,\ x = 1, x = e;$

c) $y^2 = x^3; x = 4.$

2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}; y = 0; x = 4$ (ось вращения ось Ox).

Краткие теоретические сведения:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

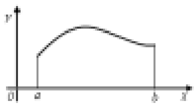


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

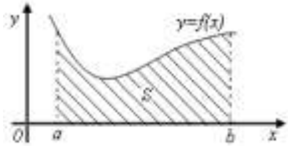


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

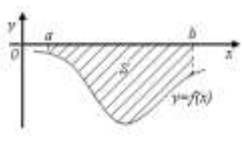


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь Sфигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

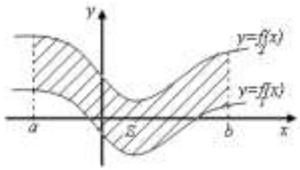


Рис. 4

Вычисление объемов тел вращения.

При помощи определенного интеграла можно вычислить объем того или иного тела, в частности, тела вращения.

Телом вращения называется тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг ее основания (рис. 1, 2)

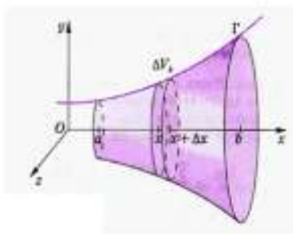


Рис.1

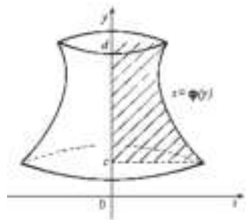


рис.2

Объем тела вращения вычисляется по одной из формул:

1. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$, если вращение криволинейной трапеции **вокруг оси OX.**

2. $V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 dy$, если вращение криволинейной трапеции **вокруг оси OY.**

Порядок выполнения работы:

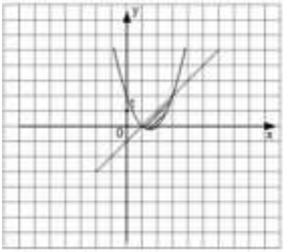
1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.

3. Записать ответ.

Ход работы:

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \geq f_2(x)$ на данном отрезке, находится по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.



Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования. Значит, площадь фигуры равна:

$$S = \int_1^3 ((x-1) - (x^2 - 3x + 2))dx = \int_1^3 (4x - x^2 - 3)dx =$$

$$= (2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x)\Big|_1^3 = 18 - 9 - 9 - (2 - \frac{1}{3} - 3) =$$

$$= -2 + \frac{1}{3} + 3 = 1\frac{1}{3}.$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Пример 2. Найти объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 64$, $y = -5$, $y = 5$, $x = 0$.

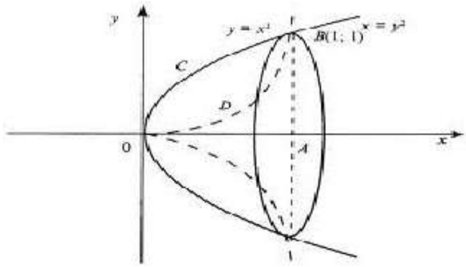
Решение.

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(64 - y^2\right)dy = \pi \left(64y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{5} = 556\frac{2}{3}\pi \approx 1163 см^3$$

Ответ : 1163 cm^3.

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением лепестка, вокруг оси абсцисс $y = x^2$, $y^2 = x$.

Решение .



Построим графики функции. $y = x^2$, $y^2 = x$. График $y^2 = x$ преобразуем к виду $y = \sqrt{x}$.

Имеем $V = V_1 - V_2$ Вычислим объем каждой функции

$$V_1 = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = 0{,}3\pi$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 3.2. Приближенные значения величин

Практическое занятие № 8

Приближенные числа и действия с ними. Абсолютная и относительная погрешности. Правила приближенных вычислений

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– выполнять приближенные вычисления

– применять правила приближенных вычислений

– анализировать результаты измерения величин с допустимой погрешностью, представлять их графически

Задание:

1) При измерении линейкой длины и ширины фанерного листа были получены размеры a=120 см. и b=60 см. Известно, что погрешность измерения линейкой равна 2 см. Была найдена площадь листа S=120·60=7200 кв. см. Найти относительную погрешность полученного результата.

2) Пусть $a=3,8$ и $b=6,2$. Необходимо найти значение $a+4b$.

3) Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления. Получили $3,8+4\cdot 6,2\approx 4-4\cdot 6=-20.$ Найти абсолютную погрешность полученного результата.

4) Известны относительные погрешности чисел 2 и 5: $\delta_x = 0{,}01;\ \delta_y = 0{,}04.$ Найти относительную погрешность полученного результата.

5) Форма записи рациональной дроби $\frac{3}{14}$ в виде бесконечной десятичной дроби имеет вид …

Краткие теоретические сведения:

Действительное число - любое положительное, отрицательное число или нуль. Посредством действительных чисел выражаются результаты измерения всех физических величин.

Результат измерений подсчетов и вычисления являются числами. Числа полученные в результате измерения лишь приблизительны с некоторой точностью характеризуют искомые величины.

Погрешностью называют разность точного и приближенного знач величины.

Абсолютная погрешность - это разность между измеренным и истинным значениями измеряемой величины. Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность — это отношение абсолютной погрешности измерения к истинному (действительному) значению измеряемой величины (она обычно выражается в процентах).

Правила вычислений

1. **При сложении и вычитании** приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных.
2. **При умножении** следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.
3. **При возведении в квадрат** или куб следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.
4. **При умножении** следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.
5. **При вычислении** сложных выражений следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий.

Кроме того, при обработке результатов используются ***правила нахождения погрешности*** суммы, разности, произведения и частного.

Правило 1. Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей отдельных слагаемых, но при значительном числе погрешностей слагаемых обычно происходит взаимная компенсация погрешностей, поэтому истинная погрешность суммы лишь в исключительных случаях совпадает с предельной погрешностью или близка к ней.

- ***Правило 2.*** Предельная абсолютная погрешность разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого или вычитаемого.
- ***Правило 3.*** Предельная относительная погрешность суммы (но не разности) лежит между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых.

Если все слагаемые имеют одну и ту же предельную относительную погрешность, то и сумма имеет ту же предельную относительную погрешность. Иными словами, в этом случае точность суммы (в процентном выражении) не уступает точности слагаемых.

В противоположность сумме разность приближенных чисел может быть менее точной, чем уменьшаемое и вычитаемое. Потеря точности особенно велика в том случае, когда уменьшаемое и вычитаемое мало отличаются друг от друга.

- ***Правило 4.*** Предельная относительная погрешность произведения приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей: $\delta=\delta_1+\delta_2$, или, точнее, $\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2$ где δ – относительная погрешность произведения, $\delta_1\delta_2$ - относительные погрешности сомножителей.
- ***Правило 5.*** Предельная относительная погрешность частного приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя. Точная величина предельной относительной погрешности всегда превышает приближенную. Процент превышения примерно равен предельно относительной погрешности делителя.

Порядок выполнения работы:
1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Найти сумму, разность, произведение и частное приближенных чисел и границы абсолютной и относительной погрешностей результата:
1) $a_1 = 25{,}74 \pm 0{,}2$; $a_2 = 96{,}42 \pm 0{,}3$.
2) $a_1 = 37{,}375 \pm 0{,}03$; $a_2 = 3{,}042 \pm 0{,}004$.
3) $a_1 = 879{,}03 \pm 0{,}1$; $a_a = 653{,}84 \pm 0{,}4$.
2. Выполнить действия, округляя промежуточные результаты до четырех цифр, и сравнить результаты: (0,3644 + 423)-0,125 и
0,364-0,125 4 0,423-0,125.
3. При вычислении значения выражения $z = 8x - 2y$ данные в условии задачи значения $x = 50{,}4$ и $y = 100{,}3$ округлили до целых и получили $z = 8 \cdot 50 - 2 \cdot 100 = 200$. Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

Решение: модуль разности между точным числом и его приближенным значением называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа. Значит, абсолютная погрешность числа 50 равна $|50{,}4 - 50| = 0{,}4$ и абсолютная погрешность числа 100 равна $|100{,}3 - 100| = 0{,}3.$ Абсолютная погрешность суммы и разности приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей.
Тогда абсолютная погрешность полученного числа 200 будет равна $8 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}8.$

4. Известно, что ребра прямоугольного параллелепипеда равны 56 см, 19 см и 122 см. Для упрощения вычислений эти числа округлили до 50 см, 20 см и 120 см соответственно. Нашли объем $V = 60 \cdot 20 \cdot 120 = 144000$ (куб. см.). Полученный результат имеет относительную погрешность, равную …

Решение: относительная погрешность приближенного положительного числа равна отношению абсолютной погрешности числа к точному значению этого числа.
Так как точное значение числа, как правило, неизвестно, то под относительной погрешностью понимают отношение абсолютной погрешности числа к его приближенному значению.
Тогда относительные погрешности чисел 50, 20 и 120 равны

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{50} = \frac{|56-50|}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15},$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{20} = \frac{|19-20|}{20} = \frac{1}{20}.$$

$\delta_3 = \frac{\Delta_3}{120} = \frac{|122-120|}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$, соответственно.
Относительная погрешность произведения приближенных чисел равна сумме относительных погрешностей сомножителей.
Значит, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$.

5. Пусть *a=3,8* и *b=6,2*. Необходимо найти значение *a+4b*. Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления. Получили $3,8 + 4 \cdot 6,2 \approx 4 - 4 \cdot 6 = -20$.
Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

Решение: модуль разности между точным числом a и его приближенным значением x называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа x и обозначается Δx.
Имеем $x = 4,\ y = 6$.

$\Delta x = |3,8 - 4| = 0,2$.

$\Delta y = |6,2 - 6| = 0,2$.

Абсолютная погрешность полученного результата можно найти по формуле $\Delta(x - 4y) = \Delta x + 4 \cdot \Delta y$.
Получим: $\Delta(x - 4y) = 0,2 + 4 \cdot 0,2 = 1$.

Форма представления результата: выполненная работа.
Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 3.2. Приближенные значения величин

Практическое занятие № 9

Приближенное вычисление определенных интегралов

Цель работы: Научиться вычислять приближенные значения определенных интегралов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:
- находить приближенные значения определенных интегралов.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций.

Задание:
Вычислите приближенно определенные интегралы:

1) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле прямоугольников (n = 10);

2) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций (n = 10).

Краткие теоретические сведения:

Для нахождения определенных интегралов применяется формула Ньютона - Лейбница. Формула Ньютона - Лейбница - основная формула интегрального исчисления.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$.

Формулы приближенного вычисления определенного интеграла.

Формула прямоугольников:

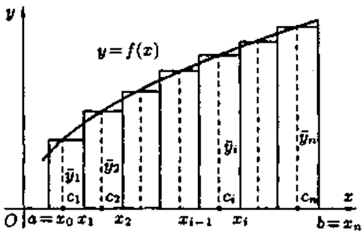


Рис. 200.

Пусть на отрезке [a; b], a < b, задана непрерывная функция f(x). Требуется вычислить интеграл численно равный площади соответствующей криволинейной $\int_a^b f(x)\,dx,$ трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок [a; b], на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг разбиения) с помощью точек x_0= a, x_1, x_2,..., x_n = b. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где i = 1,2,..., n.

В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\hat{y}_i = f(c_i)$ графика функции y = f(x). Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью h • $\hat{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямо угольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \qquad (42.1)$$

Формула (42.1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке [a; b],

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x)=kx+b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x)=0$.

Формула трапеций.

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок [a; b] на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, b = x_n$ (рис. 201). Пусть $y_0, y_1 \ldots, y_n$ —

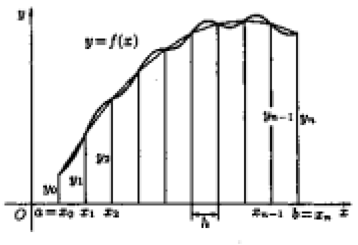


Рис. 201.

соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы $h = \frac{b-a}{n}$. для этих значений примут вид $x_i = a+h*i$, $y_i=f(x_i)$, $i= 0,1,2,\ldots, n$;

Заменим кривую $y=f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} ($i = 0,1,2,\ldots,n$). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1+y_2}{2} \cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} \right). \qquad (42.2)$$

Формула (42.2) называется формулой трапеций.

Абсолютная погрешность R_n приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы $|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2$, где $M_2 = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$.

Порядок выполнения работы:

3. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
4. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$.

Ход работы:

Вычислить, разбив отрезок интегрирования [0; 2] на 4 части. $\int\limits_0^2 x^3\,dx$.

Имеем: $f(x) = x^3$,

$$a = x_0 = 0;\quad b = x_4 = 2,\quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_0 = 0,\quad y_0 = 0;\quad x_1 = \frac{1}{2},\quad y_1 = \frac{1}{8};\quad x_2 = 1,\quad y_2 = 1;$$

$$x_3 = \frac{3}{2},\quad y_3 = \frac{27}{8};\quad x_4 = 2,\quad y_4 = 8;$$

а) по формуле прямоугольников:

$$c_1 = \frac{1}{4},\quad \bar{y}_1 = \frac{1}{64};\quad c_2 = \frac{3}{4},\quad \bar{y}_2 = \frac{27}{64};$$

$$c_3 = \frac{5}{4},\quad \bar{y}_3 = \frac{125}{64};\quad c_4 = \frac{7}{4},\quad \bar{y}_4 = \frac{343}{6},$$

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) = 3{,}875, \text{ т. е. } \int\limits_0^2 x^3\,dx \approx 3{,}875;$$

б) по формуле трапеции:

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) = 4{,}25, \text{ т. е. } \int\limits_0^2 x^3\,dx \approx 4{,}25;$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 4.1. Элементы теории вероятностей

Практическое занятие № 10

Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель работы: Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

- вычислять число исходов, благоприятствующих наступлению рассматриваемого события, используя формулы комбинаторики;
- вычислять вероятность события по классическому определению вероятности**.**

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?

3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается Р(А) и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах
от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы: 1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня. что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие А-«номер набран верно».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!}$=$\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}$=720. Итак, n=720
3. Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие А-«оба шара окажутся чёрными».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!}$=$\frac{20!}{2!\cdot 18!}$=$\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!}$=190.

3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!} = 28$

4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

1. На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А, З, К, О, М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК ?

Решение.

1. Событие А-«получится слово ЗАМОК».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов(букв): n=$P_5 = 5!$=5' $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$=120.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 4.2. Элементы математической статистики

Практическое занятие № 11

Нахождение числовых характеристик выборки

Цель работы: Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Статистика - это наука, которая занимается получением, обработкой и анализом количественных данных о разнообразных явлениях, происходящих в природе и обществе. Одна из основных задач статистики состоит в надлежащей обработке информации. У статистики есть много других задач: получение и хранение информации, выработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Ни одна из этих целей не достижима без обработки данных.

Математическая статистика — раздел математики, посвященный методам и правилам обработки и анализа статистических данных.

Средним арифметическим ряда, чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество. Среднее арифметическое является важной характеристикой ряда чисел, но иногда полезно рассматривать и другие средние.

Модой называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто. Мода – показатель, который широко используется в статистике. Одним из наиболее частых использований моды является изучение спроса. Заметим, что в рядах, рассматриваемых в реальных статистических исследованиях, иногда выделяют больше одной моды. Когда в ряду много данных, то интересными бывают все те значения, которые встречаются гораздо чаще других. Их статистики тоже называют модой.

Одним из статистических показателей различия или разброса данных является размах. *Размах* — это разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных.

Еще одной важной статистической характеристикой ряда данных является его *медиана*. Обычно медиану ищут в случае, когда числа в ряду являются какими-либо показателями и надо найти, например, человека, показавшего средний результат, фирму со средней годовой прибылью, авиакомпанию, предлагающую средние цены на билеты, и т. д. Медианой ряда, состоящего из нечетного количества чисел, называется число данного ряда, которое окажется посередине, если этот ряд упорядочить. Медианой ряда, состоящего из четного количества чисел, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине чисел этого ряда.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$\boldsymbol{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}.$$

Пример 1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:

X	5	4	3
p	0,2	0,5	0,3

Решение: По формуле находим математическое ожидание:
*M (X) = 5*0,2 + 4*0,5 + 3*0,3 = 3,3.*

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boldsymbol{D(X) = M[X - M(X)]^2}.$$

Пример 2. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Решение: По формуле находим математическое ожидание:
*M (X) = 1*0,3 + 2*0,5 + 5*0,2 = 2,3.*

Записываем все возможные значения квадрата отклонения:

$[X_1 - M(X)]^2 = (1 - 2{,}3)^2 = 1{,}69;$

$[X_2 - M(X)]^2 = (2 - 2{,}3)^2 = 0{,}09;$

$[X_3 - M(X)]^2 = (5 - 2{,}3)^2 = 7{,}29.$

Тогда закон распределения квадрата отклонения имеет следующий вид:

$[X - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2

По формуле находим дисперсию:
*D (X) = 1,69*0,3 + 0,09*0,5 + 7,29*0,2 = 2,01.*

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Задан закон распределения случайной величины ***X*** (в первой строке таблицы указаны возможные значения величины ***X***, а во второй строке указаны вероятности ***p*** этих возможных значений). Найти:
2. Математическое ожидание,

3. Дисперсию,
4. Построить многоугольник распределения.

1.1

x	23	25	28	29
p	0,3	0,2	0,4	0,1

1.2

x	17	21	25	27
p	0,2	0,4	0,3	0,1

1.3

x	24	26	28	30
p	0,2	0,2	0,5	0,1

1.4

x	12	16	19	21
p	0,1	0,5	0,3	0,1

1.5

x	25	27	30	32
p	0,2	0,4	0,3	0,1

1.6

x	30	32	35	40
p	01	0,5	0,2	0,2

1.7

x	12	14	16	20
p	0,1	0,2	0,5	0,2

1.8

x	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

1.9

x	18	22	23	26
p	0,2	0,3	0,4	0,1

1.10

x	25	28	30	33
p	0,1	0,2	0,4	0,3

2. По данным таблицы (возраст студентов в группе из 20 человек) провести статистическое исследование.

№ п\п	Возраст (лет)	№ п\п	Возраст (лет)	№ п\п	Возраст (лет)	№ п\п	Возраст (лет)
1	18	6	20	11	22	16	21
2	18	7	19	12	19	17	19
3	19	8	19	13	19	18	19
4	20	9	19	14	20	19	19
5	19	10	20	15	20	20	19

Форма представления результата: выполненная работа.
Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 5.1. Матрицы и определители

Практическое занятие № 12

Действия над матрицами

Цель работы: научить выполнять действия над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
выполнять действия над матрицами.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание.

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & -7\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ найти $2A-B=$.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$
Найти матрицу $A\times B-B\times A$.

3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

Порядок выполнения работы:

1) Повторение правил и формул
2) Определить порядок действий в задании.
3) Для каждого действия применить соответствующую формулу.
4) Оформить решение.

Ход работы:

1. Дано уравнение $A+X=B$. Здесь $A=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -5\end{pmatrix}$ Найти X.
Если $A + X=B$, то $X=B - A$. Каждый элемент разности двух матриц B и A равен разности соответствующих элементов данных матриц B и A.

Тогда $X=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 7\\ -2 & -6\end{pmatrix}$

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ Найти матрицу $B\times A-A\times B$.

Пусть $C=A\times B$. Тогда элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B $(c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj})$.

$$B\times A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot(-3)+2\cdot 1\\ 0\cdot 2+1\cdot(-1) & 0\cdot(-3)+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Аналогично имеем:

$$A\times B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+(-3)\cdot0 & 2\cdot2+(-3)\cdot1\\ -1\cdot1+1\cdot0 & -1\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица

$$B\times A-A\times B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0-2 & -1-1\\ -1-(-1) & 1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad \text{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\quad \text{C}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

Решение:

Выполним задание по действиям:

1) $2\text{xC} = 2\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -6\\ 6 & 4\end{pmatrix}$

2) 2CB=

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -6\\ 6 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}4\cdot2+2(-1) & 4\cdot(-1)+2\cdot2 & 4\cdot2+2\cdot0\\ 0\cdot2+(-6)\cdot(-1) & 0\cdot(-1)+(-6)\cdot2 & 0\cdot2+(-6)\cdot0\\ 6\cdot2+4\cdot(-1) & 6\cdot(-1)+4\cdot2 & 6\cdot2+4\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}6 & 0 & 8\\ 6 & -12 & 0\\ 8 & 2 & 12\end{pmatrix}$$

Найдем матрицу, транспонированную к А:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

1) $3\,A^T = 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 3\\ 0 & 3 & 3\\ -6 & -3 & 0\end{pmatrix}$

2) $2CB + 3A^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 6 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$

Форма представления результата: выполненная работа.
Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 5.1. Матрицы и определители

Практическое занятие № 13

Вычисление определителей второго и третьего порядков

Цель работы: научить вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
вычислять определители.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание.

1. Известно, что определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 4 & -3x \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$ равен шести. Найти значение x.

2. Найти значение определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}$.

Краткие теоретические сведения:

С каждой квадратной матрицей связывают **число**. Это число называется **определителем** матрицы. Определитель вычисляется по особым правилам и обозначается |A|, *det A*, ΔA.

Число строк (столбцов) определителя называется его **порядком**.

Определитель первого порядка матрицы $A = \left(a_{11}\right)_{1\times 1}$ равен элементу a_{11}: $|A| = a_{11}$

Определитель второго порядка обозначается символом

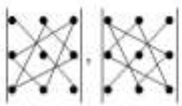
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и равен $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Для вычисления **определителей третьего порядка** существует такие правила.

Правило треугольника

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



«+» «–»

Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Порядок выполнения работы:

1. Определить порядок определителя.
2. Для вычисления определителя применить соответствующую формулу.

Ход работы:

1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Определитель равен $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 7 - 5\cdot(-4) = -14 + 20 = 6.$

2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

Тогда

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 8 + 8 \cdot (-1) \cdot (-5) + 4 \cdot (-2) \cdot 2 -$$

$$-2 \cdot 7 \cdot (-5) - (-1) \cdot (-2) \cdot 3 - 8 \cdot 4 \cdot 8 = 168 + 40 - 16 + 70 - 6 - 256 = 0.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 5.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие № 14

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Систему $\begin{cases} 9x+2y=8, \\ 4x+y=3 \end{cases}$ решают по правилу Крамера.

2. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} x+2y=10, \\ 3x+2y+z=23, \\ y+2z=13. \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Краткие теоретические сведения:

Теорема Крамера. Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы системы, Δ_i - определитель матрицы системы, где вместо i -го столбца стоит столбец правых частей.

Случай $n=2$

Рассматривается система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}.$$

Вычисляются определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

2. Если $\Delta = 0$, а хотя один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля, то система не имеет решений.

3. Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

Порядок выполнения работы:

1. Определить число переменных и число уравнений в системе.

2. Если их число совпадает, то применить метод Крамера для решения системы.

Ход работы:

1. Решить с помощью правила Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x+3y=12, \\ 2x-y=7 \end{cases}.$$

Вычислим определитель системы Δ: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -33; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11.$$

Найдем значения x и y по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1.$$

Решение системы есть (3; -1).

2. Решить с помощью правила Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+5y=4, \\ 9x+15y=12 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому система имеет бесконечно много решений.

Разделив коэффициенты 2-го уравнения на 3, получим:

$$\begin{cases} 3x+5y=4, \\ 3x+5y=4 \end{cases}.$$

Оставим только одно из этих уравнений: $3x+5y=4$. Выразим y через x:

$$y = \frac{4-3x}{5},$$ значение x – любое. Это и есть ответ.

3. Решить с помощью правила Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=3, \\ 5x-2y-2z=3, \\ x+y-z=-2. \end{cases}$$

Вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 25, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -25,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 50.$$

Найдем значения x, y и z по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-25}{25} = -1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2.$$

Получаем ответ: (1; -1; 2).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 5.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие № 15

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы: научить приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений методом Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ методом Гаусса.
2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Краткие теоретические сведения:

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении переменных и преобразовании системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

к треугольному виду

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n,\ c_{kk} = 1,\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{cases}$$

Переход от первой системы уравнений до последней называется прямым ходом метода Гаусса. Обратный ход метода Гаусса начинается с последней системы уравнений. Ее решают с конца до начала. Из последнего уравнения находят x_n. Подставив это значение в предпоследнее - находят x_{n-1} и т.д. Из первого уравнения находят x_1.

Ход работы:

1) Решить систему : $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$

методом Гаусса.

Для заданной системы уравнений запишем расширенную матрицу и, выполняя элементарные преобразования, приведем ее к диагональному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ 3 & 14 & 12 & 11 \\ 5 & 25 & 16 & 3 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ую строку на (-2)и прибавим полученную строку ко 2-ой и 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ -1 & 0 & -14 & -43 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \end{array}\right)$$

Поменяем местами 1-ую строку со 2-ой, 2-ую с 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -14 & -48 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \\ 2 & 7 & 13 & 27 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ую строку на (1) и прибавим полученную ко 2-ой, затем 1-ую умножим на (2) и

прибавим полученную к 3-ей, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 7 & -15 & -59 \end{array}\right)$

Умножим 2-ую строку на (-7),а 3-ью на (11) и прибавим полученную 2-ую строку к 3-ьей, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$

Умножим 3-ью строку на(8) и полученную прибавим ко 2-ой, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Разделим 3-ью строку на 3, затем умножим полученную на (-14) и прибавим к 1-ой,

получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$Е , которая соответствует системе

уравнений $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Ответ: X $=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему четырех линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу для данной системы

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}5 & -3 & 2 & -8 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3\end{array}\right].$$

Сведем ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований.

1.Поменяем местами первый и второй строки.

2. Добавим к элементам второго, третьего и четвертого строк элементы первой строки, умноженные соответственно на $-5;-3;-4$.

3. Поменяем местами второй и третий строки. Добавим к элементам третьего и четвертого строк элементы второй строки, умноженные соответственно на $4;1$.

4. От четвертого уравнения умноженного на 11 вычитаем третье уравнение умноженное на -3.

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}5 & -3 & 2 & -8 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3\end{array}\right]\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 5 & -3 & 2 & -8 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3\end{array}\right]\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -8 & -3 & -13 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -3 & 3\end{array}\right]\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1\\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3\end{array}\right]\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\quad\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 30\end{array}\right].$$

Такой расширенной матрицы соответствует следующая система уравнений

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0;\\ 2x_2-2x_3+x_4=0;\\ -11x_3-9x_4=1;\\ 5x_4=30.\end{cases}$$

С четвертого уравнения находим $x_4=30/5=6$ и подставляем в третье уравнение

$$-11x_3=1+9x_4=1+9\cdot 6=55\rightarrow x_3=-55/11=-5.$$

Найденные значения подставляем во второе уравнение

$$2x_2=2x_3-x_4=2\cdot(-5)-6=-16\rightarrow x_2=-16/2=8.$$

Из первого уравнения находим первую неизвестную

$$x_1=-x_2-x_3-x_4=8+5-6=7.$$

Система полностью решена и $x_1=7;x_2=-8;x_3=-5;x_4=6$ – ее решение.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Процент	Качественная оценка индивидуальных

результативности (правильных ответов)	образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 5.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие № 16

Решение систем линейных уравнений матричным способом

Цель работы: научиться решать систему линейных уравнений матричным способом.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать системы линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ матричным методом.
2. Решить систему : $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$ матричным методом.

Краткие теоретические сведения:

С помощью данного метода можно находить решение только для квадратных СЛАУ.

Запишем заданную систему в матричном виде: $AX = B$

Если матрица A невырождена, то тогда с помощью операций над матрицами выразим неизвестную матрицу X . Операция деления на множестве матриц заменена умножением на обратную матрицу, поэтому домножим последнее равенство на матрицу A^{-1} слева:

$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow$

$X = A^{-1}B$

Поэтому, чтобы найти неизвестную матрицу X надо найти обратную матрицу к матрице системы и умножить ее справа на вектор-столбец свободных коэффициентов.

Алгоритм решения системы линейных уравнений матричным методом:

1. Составить матрицу А из коэффициентов при неизвестных, матрицу В из свободных членов и матрицу Х из неизвестных.
2. Найти обратную матрицу A^{-1}.
3. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов В.

Ход работы:

Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 10, \\ 3x + 2y + z = 23, \\ y + 2z = 13. \end{cases}$$

Составим матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix},$$

и решим его указанным способом.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0;$$

найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = 3; A_{12} = -6; A_{13} = 3; A_{21} = -4; A_{22} = 2; A_{23} = -1; A_{31} = 2; A_{32} = -1, A_{33} = -4.$$

Составим матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

и транспонируем ее $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Запишем обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы уравнений есть $x = 4, y = 3, z = 5$.

Форма представления результата: выполненная работа.
Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно