Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Махновский
«01» марта 2018г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для студентов специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование

Квалификация: Разработчик веб и мультимедийных приложений

Магнитогорск, 2018

ОДОБРЕНО:
Предметно-цикловой комиссией
«Информатика и вычислительная техника»

Председатель И.Г. Зорина

Протокол № 6 от 21.02.2018 г.

Методической комиссией МпК

Протокол №4 от «01» марта 2018г

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» МпК Елена Александровна Васильева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины Теория вероятностей и математическая статистика.

Содержание практических работ ориентировано на формирование универсальных учебных действий, подготовку обучающихся к освоению программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и овладению общими компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;
- использовать расчетные формулы, таблицы, графики при решении статистических задач;
- применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

Содержание практических занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности. А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Темы	Темы практических занятий	Количество часов	Требования ФГОС СПО (уметь)
Тема 1. Элементы комбинаторики	Практическая работа 1. Подсчёт числа комбинаций	**2**	У 1 У 01.2, У 01.3, У 01.5, У 01.9, У 01.11, У 02.2, У 02.4, У 02.5, У 05.3, У 10.1, У 10.2
Тема 2. Основы теории вероятностей	Практическая работа 2. Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики	**2**	
	Практическая работа 3. Вычисление вероятностей сложных событий	**2**	
Тема 3. Дискретные случайные величины (ДСВ)	Практическая работа 4. Построение закона распределения и функция распределения ДСВ. Вычисление основных числовых характеристик ДСВ	**2**	У 1, У 2 У 01.2, У 01.3, У 01.5, У 01.9, У 01.11, У 02.2, У 02.4, У 02.5, У 05.3, У 10.1, У 10.2
	Практическая работа 5. Решение задач с применением законов распределения вероятностей ДСВ	**2**	
Тема 4. Непрерывные случайные величины (НСВ)	Практическая работа 6. Вычисление числовых характеристик НСВ. Построение функции плотности и интегральной функции распределения.	**2**	
Тема 5. Математическая статистика	Практическая работа 7. Построение эмпирической функции распределения. Вычисление числовых характеристик выборки	**2**	У 1, У 2, У 3 У 01.2, У 01.3, У 01.5, У 01.9, У 01.11, У 02.2, У 02.4, У 02.5, У 04.2, У 05.3, У 09.1, У 09.2
	Практическая работа 8. Вычисление точечных и интервальных оценок	**2**	
ИТОГО		**16**	

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1. Элементы комбинаторики

Практическое занятие № 1
Подсчёт числа комбинаций

Цель: сформировать умение решать задачи с использованием формул комбинаторики: перестановок, размещений и сочетаний.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять стандартные методы и модели к решению комбинаторных задач;
- решать задачи с использованием формул комбинаторики;
- анализировать задачу и выделять её составные части;
- составлять план действия;
- реализовать составленный план;
- оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника);
- определять необходимые источники информации;
- структурировать получаемую информацию;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке;
- понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые);
- участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Внимательно прочитайте теоретические сведения.

Разберите решение задач, приведенных ниже, и запишите их в тетрадь.

Решите задачи из раздела для самостоятельного решения.

Краткие теоретические сведения

Комбинаторика — один из разделов дискретной математики, изучающий способы подсчета числа элементов в конечных множествах, который приобрел большое значение в связи с использованием его в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, вычислительной технике, кибернетике.

Множества без повторений

Множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются ***перестановками*** этих элементов: $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, $0! = 1$.

Размещениями называют множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Сочетаниями из n различных элементов по m называют множества, содержащие m элементов из числа n заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, где $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$.

$$P_n = n!$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Множества с повторениями

Перестановки с повторениями

$$\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Размещения с повторениями

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Сочетания с повторениями

$$\overline{C_n^m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m$$

Правила сложения и умножения

Правило сложения. Если одно действие можно выполнить *m* способами, а другое *n* способами, и они взаимно исключают друг друга, то выполнить одно любое из этих действий можно *(n + m)* способами.

Правило произведения. Если объект *A* можно выбрать из совокупности объектов *m* способами и после каждого такого выбора объект *B* можно выбрать *n* способами, то пара объектов *(A, B)* в указанном порядке может быть выбрана *m·n* способами.

Примеры решения задач

Размещения без повторений

Задача 1. Сколько можно составить телефонных номеров из 6 цифр каждый, так чтобы все цифры были различны?

Решение. Это пример задачи на размещение без повторений. Размещаются здесь 10 цифр по 6. А варианты, при которых одинаковые цифры стоят в разном порядке считаются разными. Значит, ответ на задачу будет:

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = 151200$$

.

Задача 2. Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

Решение. Два юноши не могут одновременно пригласить одну и ту же девушку. И варианты, при которых одни и те же девушки танцуют с разными юношами, считаются разными, поэтому:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Возможно 360 вариантов.

Перестановки без повторений

Задача 3. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4,5, если цифры в числе не повторяются?

Решение.

1) Найдем количество всех перестановок из этих цифр: P_6=6!=720.
2) 0 не может стоять впереди числа, поэтому от этого числа необходимо отнять количество перестановок, при котором 0 стоит впереди. А это P_5=5!=120.

P_6-P_5=720-120=600.

Сочетания без повторений

Задача 4. Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр.

Решение. Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможно $C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120$ вариантов.

Задача 5. У одного человека 7 книг по математике, а у второго – 9. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги.

Решение:

Так как порядок следования книг не имеет значения, то выбор двух книг - сочетание. Первый человек может выбрать 2 книги $C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$ способами. Второй человек может выбрать 2 книги $C_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 9}{2} = 36$ способами. Значит всего по правилу произведения возможно 21·36=756 вариантов.

Задача 6. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Решение: Первый игрок делает выбор из 28 костей. Второй из 28–7=21 кости, третий из 14, а четвертый игрок забирает оставшиеся кости. Следовательно, возможно $C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7$.

Размещения и сочетания с повторениями

Задача 7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Так как порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то это будут размещения с повторениями из пяти элементов по три, а их число равно $\overline{A_5^3} = 5^3 = 125$.

Задача 8. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных.

Решение. Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пирожные в коробку. Покупки будут различными, если они отличаются количеством купленных пирожных хотя бы одного сорта. Следовательно, количество различных покупок равно числу сочетаний четырех видов пирожных по семь: $\overline{C_4^7} = \frac{(7+4-1)!}{7!(4-1)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$.

Задача 9. Обезьяну посадили за пишущую машинку с 45 клавишами, определить число попыток, необходимых для того, чтобы она наверняка напечатала первую строку романа Л.Н. Толстого «Анна Каренина», если строка содержит 52 знака и повторений не будет?

Решение. Порядок букв имеет значение. Буквы могут повторяться. Значит, всего есть $\overline{A_{45}^{52}} = 45^{52}$ вариантов.

Перестановки с повторениями

Задача 10. Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

Решение. Всего букв 6. Из них одинаковы: n1 (а)=3, n2(н)=2, n3 (с)=1. Следовательно, число различных перестановок равно $P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи».
Ответ: 2520
2. Имеется пять различных стульев и семь рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев.
Ответ: 16807
3. На памятные сувениры в «Поле Чудес» спонсоры предлагают кофеварки, утюги, телефонные аппараты, духи. Сколькими способами 9 участников игры могут получить эти сувениры? Сколькими способами могут быть выбраны 9 предметов для участников игры?
Ответ: 4^9, 220
4. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы на одна из них не могла бить другую?
Ответ: 40320
5. Сколько может быть случая выбора 2 карандашей и 3 ручек из пяти различных карандашей и шести различных ручек?
Ответ:200
6. В течение 30 дней сентября было 12 дождливых дней, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, а один день был и дождливым, и ветреным, и холодным. В течение скольких дней в сентябре стояла хорошая погода.
Ответ: 15
7. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?
Ответ: 480, 437
8. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?
Ответ: 9
9. Сколько существует четных пятизначных чисел, начинающихся нечетной цифрой?
Ответ: 25000
10. В книжный магазин поступили романы Ф. Купера «Прерия», «Зверобой», «Шпион», «Пионеры», «Следопыт» по одинаковой цене. Сколькими способами библиотека может закупить 17 книг на выбранный чек?
Ответ: 2985

Форма представления результата:

Решение задач, оформленное в тетради.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Тема 2. Основы теории вероятностей

Практическое занятие № 2
Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики

Цель: сформировать умение решать задачи на вычисление вероятности с использованием формул комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач;
- решать задачи с использованием формул комбинаторики;
- анализировать задачу и выделять её составные части;
- составлять план действия;
- реализовать составленный план;
- оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника);
- определять необходимые источники информации;
- структурировать получаемую информацию;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке;
- понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые);
- участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Разберите решение задач, приведенных ниже, и запишите их в тетрадь.

Решите задачи из раздела для самостоятельного решения.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число, кратное трём.

Решение: Число всех элементарных событий $n=6$, число элементарных событий, благоприятствующих данному событию A, $m=2$ (это выпадение 3 или 6), значит, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$.

В следующих двух примерах мы используем комбинаторные понятия (сочетания и перестановки), разобранные выше.

Задача 2. В урне находится 7 шаров, из которых 4 белых и 3 черных. Из урны наугад вынимается три шара. Найти вероятность того, что два шара будут белыми, а один – чёрным.

Решение: Число всех элементарных событий $n = C_7^3 = 35$, число элементарных событий, благоприятствующих данному событию A, $m = C_4^2 C_3^1 = 18$, значит, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$ (по поводу нахождения n и m см. аналогичную задачу в примере 7).

Задача 3. На книжной полке случайно размещаются 8 книг, из которых 5 – по математике и 3 – по физике. Найти вероятность того, что слева будут все книги по математике, а справа – все книги по физике.

Решение: Число всех элементарных событий $n = P_8 = 8!$, число элементарных событий, благоприятствующих данному событию A, $m = P_5 P_3 = 5!3!$, значит, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5!3!}{8!} = \frac{1}{56}$.

Задачи для самостоятельного решения

Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число не содержит ни одной двойки?

2. Отряд учащихся из 25 человек участвует в военизированной игре. В отряде 5 следопытов и 4 связиста. В разведку надо направить четырех человек. Какова вероятность того, что в разведгруппу будут включены 2 связиста и 2 следопыта, если включение в разведгруппу равновероятно для любого ученика?

3. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на этих карточках, равна десяти?

4. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяются 5 человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой 10 юношей и 2 девушки. Найдите вероятность того, что в число дежурных войдут обе девушки.

5. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 билета на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных билетов два окажутся на места первого ряда?

6. Билет в партер стоит 50 коп., на бельэтаж — 40 коп. и на ярус — 30 коп. Найдите вероятность того, что взятые наудачу два билета стоят вместе не дороже 80 коп.

7. На один ряд из семи мест случайным образом рассаживаются 7 учеников. Найдите вероятность того, что 3 определенных ученика окажутся рядом.

8. Из букв слова событие, составленного с помощью разрезной азбуки, извлекаются наудачу и складываются друг за другом в порядке их извлечения 3 карточки (буквы). Какова вероятность получить при этом слово быт?

9. Из пяти видов открыток, имеющихся в автомате, наудачу выбираются 3 открытки. Какова вероятность того, что все отобранные открытки будут разные?

10. Во время спортивной игры по команде ведущего «становись!» 10 учеников в случайном порядке образовали строй в одну шеренгу. Какова вероятность того, что ученики А и В окажутся отделенными друг от друга тремя учениками?

Форма представления результата:

Решение задач, оформленное в тетради.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Практическое занятие № 3
Вычисление вероятностей сложных событий

Цель: сформировать умение решать задачи на вычисление вероятностей сложных событий.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач;
- решать задачи с использованием теорем вероятности;
- анализировать задачу и выделять её составные части;
- составлять план действия;
- реализовать составленный план;
- оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника);
- определять необходимые источники информации;
- структурировать получаемую информацию;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке;
- понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые);
- участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Разберите решение задач, приведенных ниже, и запишите их в тетрадь.

Решите задачи из раздела для самостоятельного решения.

Примеры решения задач

Задача 1. В урне находятся 6 белых и 5 чёрных шаров. Найти вероятность того, что из пяти случайно взятых шаров

а) не больше двух белых;

б) хотя бы один белый.

<u>Решение.</u> а). Событие A – не больше двух белых шаров – равно сумме трёх попарно несовместимых событий A_0, A_1, A_2 – белых шаров соответственно ни одного, один,

два: $A = A_0 + A_1 + A_2$. Значит, по теореме сложения для несовместных событий $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_6^0 C_5^5}{C_{11}^5} + \frac{C_6^1 C_5^4}{C_{11}^5} + \frac{C_6^2 C_5^3}{C_{11}^5} =$

$\frac{1}{462} + \frac{30}{462} + \frac{150}{462} = \frac{181}{462}$ (по поводу вычисления данных вероятностей см. аналогичную задачу в примере 12).

б). Для нахождения вероятности события B – хотя бы один белый шар – неудобно использовать теорему сложения, т. к. пришлось бы подсчитывать вероятности пяти событий. Поэтому воспользуемся теоремой 5, которая сводит вычисление $P(B)$ к вычислению вероятности противоположного события $\overline{B}$ – ни одного белого шара, т. е. все шары чёрные:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_5^5}{C_{11}^5} = 1 - \frac{1}{462} = \frac{461}{462}.$$

Задача 2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,6 второго – 0,8. Найти вероятности попадания

а) обоих стрелков;

б) ровно одного стрелка;

в) хотя бы одного стрелка.

Решение. Обозначим через A и B события – попал в мишень первый и, соответственно, второй стрелок. Заметим, что эти события *независимы*. Заметим также, что и противоположные события (промахи стрелков) – независимы. С помощью известных нам операций над событиями выразим через A и B события, вероятности которых являются искомыми.

а). Очевидно, интересующее нас событие есть AB. Тогда по теореме умножения для независимых событий $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$

б). Интересующее нас событие есть $A\overline{B} + \overline{A}B$. Слагаемые в этой сумме – несовместные события, а сомножители в каждом произведении – независимые. Тогда по теоремам сложения для несовместных событий и умножения для независимых событий $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}44.$

в). Интересующее нас событие есть $A + B$. По теореме сложения (для двух произвольных событий)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}92.$$

Заметим, что противоположным событием к $A + B$ является $\overline{A}\,\overline{B}$ (ни один не попал). Тогда искомую вероятность можно найти и через противоположное событие:

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}92.$$

Задача 3. Телеграфное сообщение состоит из сигналов "точка" и "тире". Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сигналов "точка" и 1/3 сигналов "тире". Известно, что среди передаваемых сигналов "точка" и "тире" встречаются в соотношении 5:3. Определить вероятность того, что переданный сигнал искажён.

Решение: Рассмотрим следующие события: A – сигнал искажён (вероятность которого является искомой), H_1 – передан сигнал "точка", H_2 – передан сигнал "тире" (две гипотезы, образующие полную группу, т. к. они несовместны и одна из них обязательно имеет место). По условию $P(H_1) : P(H_2) = 5 : 3$ и $P(H_1) + P(H_2) = 1$, поэтому $P(H_1) = \frac{5}{8}$ и $P(H_2) = \frac{3}{8}$. Известные вероятности того, что сигналы "точка" и "тире" искажаются, выступают как условные вероятности интересующего нас события при справедливости гипотез:

$P_{H_1}(A)=2/5,\ P_{H_2}(A)=1/3.$ Вероятность события A находим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{8}.$$

В условиях применения формулы полной вероятности рассмотрим следующую задачу: чему равна условная вероятность гипотезы H_i, если событие A произошло? Ответ даётся следующей *формулой Байеса*:

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Продолжение задачи 3. Пусть переданный сигнал искажён. Чему равна вероятность того, что была передана "точка"?

Решение: Искомая вероятность вычисляется по формуле Байеса:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбивает 10 очков, равна 0,4; 9 очков – 0,3 и 8 или меньше очков – 0,3. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.
2. В клуб принесли в корзине 9 рыжих и 11 серых котят. Сначала вынимают одного котенка, затем другого, не возвращая первого обратно. Какова вероятность того, что котята разного цвета?
3. В одном ящике 6 синих и 11 зеленых шаров, а в другом – 7 синих и 9 зеленых шаров. Из каждого ящика взяли по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара синие?
4. В коробке 4 белых и 5 черных футболок. Наугад вытаскивают две футболки. Найти вероятность того, что одна футболка белая, другая – черная?
5. В урне находятся 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Извлекают один шар, а затем другой. Найти вероятность того, что первый шар черный, а второй – синий.
6. В специализированную больницу поступает в среднем 50% больных с заболеванием А, 30% - с заболеванием В, 20% - с заболеванием С. Вероятность полного излечения болезни А равна 0.7, для болезней В и С эти вероятности равны соответственно 0.8 и 0.9. Какой процент пациентов, полностью излечившихся по окончании курса лечения?
7. На трех дочерей Нину, Еву и Айгуль в семье возложена обязанность мыть посуду. Нина выполняет 40% всей работы, а остальные 60% работы Ева и Айгуль делят поровну. С вероятностью 0.02 Нина может разбить по крайней мере одну тарелку; для Евы и Айгуль эта вероятность равна соответственно 0.03 и 0.04. Родители не знают, кто мыл посуду вечером, но они слышали звон разбитой посуды. Чья очередь мыть посуду в этот вечер наиболее вероятна?
8. Один властелин, которому его звездочет наскучил своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи очень добрым повелителем, он решил дать звездочету шанс и предложить ему распределить по двум урнам четыре шара: два белых и два черных. Палач выбирает одну из урн и извлекает из нее один шар. Если шар будет черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен разместить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность спасения?
9. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы для них равны соответственно 0.6, 0.7, 0.8. Найти вероятность того, что отказал один элемент, а два другие - исправны.

10. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо. Вероятности отказа каждого из элементов равны соответственно 0.1, 0.15, 0.2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Форма представления результата:

Решение задач, оформленное в тетради.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Тема 3. Дискретные случайные величины (ДСВ)

Практическая работа № 4
Построение закона распределения и функция распределения ДСВ. Вычисление основных числовых характеристик ДСВ
Практическая работа № 5
Решение задач с применением законов распределения вероятностей ДСВ

Цель работы: изучение законов распределения дискретной случайной величины; научится решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Задание 1. В книжном магазине организована лотерея. Разыгрываются две книги стоимостью по 10 руб. и одна – стоимостью в 30 руб. Составить закон распределения случайной величины X – суммы чистого (возможного) выигрыша для того, кто приобрел один билет за 1 руб., если всего продано 50 билетов.

Задание 2. Задан закон распределения (из задания 1). Определите функцию распределения и постройте график.

Задание 3. Дискретная случайная величина x задана таблицей распределения. Требуется найти M [x], D[x] и σ [x]:

1)

0	1	2
0,3	0,5	0,2

2)

-2	-1	0	1	2
0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Задание 4. Строительная инвестиционная компания в настоящий момент продает акции по 16 условных денежных единиц за штуку. Инвестор планирует покупку пакета акций и предполагает хранение их в течение года. Пусть X – случайная величина, означающая цену одной акции спустя год. Ряд распределения дан в таблице:

Цена акции (x)	*P(X)*
16	0,35
17	0,25
18	0,25
19	0,10
20	0,05

1. Показать, что заданное распределение обладает всеми свойствами ряда распределения.
2. Чему равно ожидаемое среднее значение цены акции спустя один год?
3. Чему равен ожидаемый средний выигрыш от акции, спустя год? Чему равен процент возврата инвестиций, отражаемый этим ожидаемым значением?
4. Определите дисперсию цены акции спустя год.
5. Другая акция с одинаковым ожидаемым значением возврата инвестиций имеет дисперсию, равную 3. Какая из акций лучше в смысле минимизации риска или неопределенности, ассоциируемой с инвестициями? Объясните.

Краткие теоретические сведения:

Пример №1. Рассматривается работа трех независимых работающих технических устройств (ТУ); вероятность нормальной работы первого ТУ равна 0,2, второго – 0,4, третьего – 0,5; Построить ряд распределения случайной величины X.

Решение:

Случайная величина X - число работающих ТУ. Возможные значения случайной величины: 0,1,2,3.

Определим соответствующие вероятности, пользуясь правилами сложения и умножения. Для краткости будем обозначать нормальную работу знаком “+”, а отказ – знаком “-”.

$$p1 = P\{X=0\} = \mathrm{P}\{---\} = 0,8\cdot 0,6\cdot 0,5 = 0,24$$

$$p2 = P\{X=1\} = \mathrm{P}\{+--\} + \mathrm{P}\{-+-\} + \mathrm{P}\{--+\} = 0,2\cdot 0,6\cdot 0,5 +$$
$$+ 0,8\cdot 0,4\cdot 0,5 + 0,8\cdot 0,6\cdot 0,5 = 0,46$$

$$p1 = P\{X=2\} = \mathrm{P}\{-++\} + \mathrm{P}\{+-+\} + \mathrm{P}\{++-\} = 0,8\cdot 0,4\cdot 0,5 +$$
$$+ 0,2\cdot 0,6\cdot 0,5 + 0,2\cdot 0,4\cdot 0,5 = 0,26$$

$$p1 = P\{X=3\} = \mathrm{P}\{+++\} = 0,2\cdot 0,4\cdot 0,5 = 0,04$$

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

X	0	1	2	3
n	0,24	0,46	0,26	0,04

Пример №2. Задан ряд распределения. Построить функцию распределения.

X	1	2	3	4
P	1/14	6/14	6/14	1/14

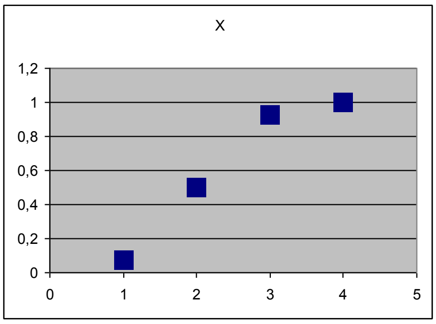
при $x <= 1$ $F(x) = P(x < 1) = 0$;

при $1 < x <= 2$ $F(x) = P(x < 2) = \frac{1}{14}$;

при $2 < x <= 3$ $F(x) = P(x < 3) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$;

при $3 < x <= 4$ $F(x) = P(x < 4) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} + \frac{6}{14} = \frac{13}{14}$

при $x > 4$ $F(x) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} + \frac{6}{14} + \frac{1}{14} = 1$



Из рисунка видно, что F(x) имеет 4 скачка по числу X. Если увеличить X, то число скачков так же становится больше, а сами скачки меньше, вследствие чего ступенчатая кривая становится более плавной. В этом случае дискретная случайная величина постепенно приближается к непрерывной.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 4. Непрерывные случайные величины (НСВ)

Практическая работа № 6
Вычисление числовых характеристик НСВ. Построение функции плотности и интегральной функции распределения.

Цель работы: изучение законов распределения непрерывной случайной величины; научится решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Ход работы:

Задание 1

Задана плотность распределения f(x) непрерывной случайной величины ξ.

1. Построить график f(x).

2. Найти интегральную функцию F(x).

3. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, средеквадратическое отклонение, моду, медиану.

4. Найти вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (a, b).

Пример 1.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1 \\ x^2 + A \cdot |x| & \text{при} -1 < x \le 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

a=0, b=1

Решение:

1. Найдем неизвестный параметр A плотности распределения вероятности из соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

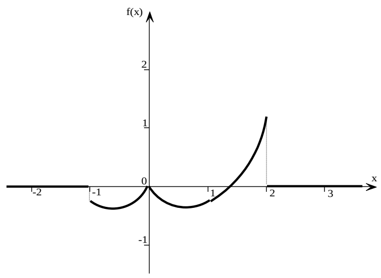
Поскольку в нашем примере плотность f(x) на (-∞;-1] и на (2;+ ∞) равна нулю, то можно записать:

$$\int_{-1}^{2} x^2 + A\cdot|x|dx = 1$$

Решив данный интеграл и полученной уравнение получим, что A=-4/3, тогда плотность распределения примет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le -1 \\ x^2-\frac{4}{3}|x| & \text{при} -1<x\le 2 \\ 0 & \text{при } x>2 \end{cases}$$

График функции f(x) изображен на рисунке.



2. Найдем интегральную функцию F(x):

$$x\in(-\infty;-1], F(x)=P\{\xi<x\}=0$$

$$x\in(-1;2], F(x)=P\{\xi<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt=\int_{-\infty}^{-1}0\cdot dt+\int_{-1}^{x} t^2-\frac{4}{3}\cdot|t|\cdot dt=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}|x|^2+1$$

$$x\in(-1;+\infty), F(x)=P\{\xi<x\}=\int_{-\infty}^{-1}0\cdot dt+\int_{-1}^{2} t^2-\frac{4}{3}\cdot|t|\cdot dt+\int_{2}^{x}0dt=1$$

Тогда можно записать:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при x} \le -1 \\ \frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}|x|^2+1 & \text{при} -1<\text{x}\le 2 \\ 1 & \text{при x}>2 \end{cases}$$

3. Числовые характеристики искомой случайной величины.

Математическое ожидание:

$$M_\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0dx+\int_{-1}^{2} x\cdot(x^2-\frac{4}{3}\cdot|x|)dx+\int_{2}^{+\infty} x\cdot 0dx=0.63(8)$$

Дисперсия:

$$D_\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-M_\xi=\int_{-\infty}^{-1} x^2\cdot 0dx+\int_{-1}^{2} x^2\cdot(x^2-\frac{4}{3}\cdot|x|)dx+\int_{2}^{+\infty} x^2\cdot 0dx-0.63(8)=2.8500$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_\xi=\sqrt{D_\xi}=1{,}688194301613$$

Мода равна 2.

4. Вероятность того, что 0≤ξ≤1, вычислим по формуле:

$$P\{0<\xi<1\}=\int_{0}^{1} x^2-\frac{4}{3}|x|dx=0.333.$$

Решить задачи.

1.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0; \\ \frac{x^2}{\pi^2} & \text{при } 0<x\le \pi; \\ 1 & \text{при } x>\pi; \end{cases}$	.	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0; \\ \frac{x^2}{e^2} & \text{при } 0<x\le e; \\ 1 & \text{при } x>e; \end{cases}$

2.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ \frac{x^4}{16} & \text{при } 0<x\le 2;\\ 1 & \text{при } x>2;\end{cases}$	.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \frac{x^2}{1+x^2} & \text{при } x>0;\end{cases}$
3.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \frac{(x^2-x)}{2} & \text{при } 1\le x\le 2;\\ 1 & \text{при } x>2;\end{cases}$	.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ \frac{16}{25}x^2 & \text{при } 0<x\le \frac{5}{4};\\ 1 & \text{при } x>\frac{5}{4};\end{cases}$
4.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ x^2 & \text{при } 0\le x\le 1;\\ 0 & \text{при } x>1;\end{cases}$	.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \frac{x^3}{125} & \text{при } 0<x\le 5;\\ 1 & \text{при } x>5;\end{cases}$
5.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \frac{x^3}{8} & \text{при } 0<x<2;\\ 1 & \text{при } x>2;\end{cases}$	0.	$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ x & \text{при } 0\le x<1\\ -x+2 & \text{при } 1\le x<2;\\ 0 & \text{при } x>2;\end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Тема 5. Математическая статистика

Практическая работа № 7
Построение эмпирической функции распределения. Вычисление числовых характеристик выборки
Практическая работа № 8
Вычисление точечных и интервальных оценок

Цель работы: научиться осуществлять расчет по заданной выборке числовых характеристик; научиться осуществлять расчет по заданной выборке числовых характеристик.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- осуществлять расчет по заданной выборке числовых характеристик.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Пятьюдесятью абитуриентами на вступительных экзаменах в МПК получены следующие количества баллов:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12,
20, 17, 15, 13, 17, 16, 20, 14, 14, 13,
17, 16, 15, 19, 16, 15, 18, 17, 15, 14,
16, 15, 15, 18, 15, 15, 19, 14, 16, 18,
18, 15, 15, 17, 15, 16, 16, 14, 14, 17.

Требуется: а) составить вариационный ряд; б) составить таблицу частот; в) построить полигон частот.

α_1									
μ_1									

2. Обследование оплаты труда 60 преподавателей дало следующие результаты (в усл.ед.):

114, 104, 112, 101, 90, 122, 126, 116, 128, 140, 124, 120, 160, 104, 140, 90, 118, 132, 154, 124, 104, 121, 156, 160, 128, 132, 104,82, 130, 114, 142, 122, 160, 98, 116, 98, 132, 142, 116, 126, 108, 121, 102, 104, 122, 96, 122, 138, 124, 123, 108, 121, 102, 104, 122, 96, 122, 138, 124, 123.

а) Составьте интервальную таблицу частот с шириной интервала 10 (у.е.) начиная с 80 (у.е.).

б) Постройте гистограмму.

α_1										
μ_1										

3. Построить эмпирическое распределение веса студентов в килограммах для следующей выборки:

64,57,63,62,58,61,63,60,60,61,65,62,62,60,64,61,59,59,63,61,62,58,58, 63,61,59,62,60,60,58,61,60,63,63,58,60,59,60,59,61,62,62,63,57,61,58,60,64,60,59,61,64,62,59,65.

Воспользуемся процедурой Гистограмма.

1. В ячейку A1 введем слово Наблюдения, а в диапазон A2:E12 — значения веса студентов.
2. Для вызова процедуры Гистограмма выберем из меню Сервис подпункт Анализ данных и в открывшемся окне в поле Инструменты анализа укажем процедуру Гистограмма.
3. В появившемся окне Гистограмма заполним рабочие поля: во Входной диапазон введем диапазон исследуемых данных (A2:E12); в Выходной диапазон — ссылку на левую верхнюю ячейку выходного диапазона *(F1)*. Установим переключатели в положение Интегральный процент и Вывод графика;
4. После этого нажмем кнопку ОК.

В результате получим таблицу и диаграмму (рис.1).

Рис.1. Результаты процедуры Гистограмма пакета Анализа.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради и на компьютере.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их.

Задание

Решить задачу. На заводе железобетонных изделий N для создания марки бетона высокого качества проводилось исследование 100 различных пробных сортов бетона, для которых подсчитывался процент прочности на сжатие (случайная величина X). Получен следующий результат (таблица из 100 чисел). Найти эмпирическое распределение признака X, построить графическое отображение распределения. Найти исправленные оценки (статистики) генеральных параметров (выборочное среднее; исправленная дисперсия; исправленное среднеквадратичное отклонение; исправленная асимметрия; исправленный эксцесс. Найти моду и медиану по сгруппированным данным. Проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность измеримого признака X, из которой извлечена выборка, распределена по нормальному закону при уровне значимости α =0,05.

42.7		
32.9	35.1	
37.0	37.1	44.2
28.8	42.3	43.5
34.0	44.3	41.0
	37.8	43.7
39.7		27.3
44.9	37.9	
38.5	41.7	38.7
31.5	23.2	30.8
36.6	47.7	38.1
	32.4	44.3
30.2		36.9
38.4	43.8	
35.5	31.7	36.2
45.9	44.5	42.8
37.7	37.0	37.6
	40.3	29.3
37.4		30.2
38.8	40.5	
42.8	41.1	42.5
39.4	32.9	39.6
54.3	43.0	37.1
	32.7	16.6
		43.1
37.4		
37.1	49.9	
29.6	36.7	
31.4	42.5	
47.1	26.4	
	34.2	
31.1		
43.2	37.2	
29.6	33.3	
31.4	38.8	
47.1	25.2	
	33.7	
28.2		
31.3	49.2	
29.0	35.2	
32.4	32.9	
26.6	37.5	
	37.9	
34.6		
36.1	47.0	
41.2	38.6	
32.3	29.3	
48.7	41.0	
	44.5	

Пример. Пусть для изучения количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=100$, имеющая следующее статистическое распределение:

			5	7	9	11	13	5
			7	5	2	1		

Требуется:

а) построить полигон частот по данному распределению выборки;

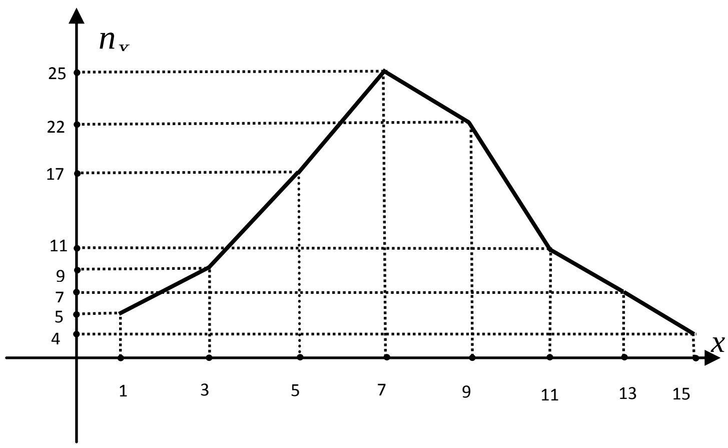
б) найти выборочное среднее $\bar{X}$, выборочное среднее квадратичное отклонение $\bar{\sigma}$, «исправленное» выборочное среднее квадратичное отклонение S;

в) при данном уровне значимости α проверить по критерию Пирсона гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности;

г) в случае принятия гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности найти доверительные интервалы для математического ожидания m и среднего квадратичного отклонения σ, при уровне надежности $\gamma=1-\alpha$.

Решение

а). Отложим на оси абсцисс варианты $x_1,...,x_8$, а на оси ординат – соответствующие частоты $n_1,...,n_8$. Соединив полученные точки ломаной, получим полигон частот.



б). Выборочное среднее $\bar{X}$, выборочное среднее квадратичное отклонение $\bar{\sigma}$, «исправленное» выборочное среднее квадратичное отклонение S находятся соответственно по формулам (см. п.13):

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8}x_i n_i, \quad \bar{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{X})^2 n_i}, \; S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{X})^2 n_i}.$$

Результаты вычислений удобно оформлять в виде таблицы.

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\bar{X}$	$x_i-\bar{X}$	$(x_i-\bar{X})^2$	$(x_i-\bar{X})^2 n_i$	$\bar{\sigma}^2$	$\bar{\sigma}$	S^2
1	1	5	5		-6,62	43,82	219.10			
2	3	9	27		-4,62	21,34	192,06			
3	5	17	85		-2,62	6,86	116,62			
4	7	25	175		-0,62	0,38	9,50			
5	9	22	198		1,38	1,90	41,80			

6	11	11	121		3,38	11,42	125,62			
7	13	7	91		5,38	28,94	202,58			
8	15	4	60		7,38	54,46	217,84			
Σ		100	762	7,62			1125,12	11,25	3,36	11,36

Итак, $\overline{X}=7,62$, $\overline{\sigma}=3,36$, $S=3,37$. $(S=\sqrt{S^2}=\sqrt{11,36})$

в). Для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности применим критерий Пирсона. Учитывая, что варианты равноотстоят друг от друга (с шагом $h=x_i - x_{i-1}=2$), это можно сделать следующим образом.

Концы интервалов, серединами которых являются x_i, вычисляются по формулам: $\alpha_{i-1}=x_i-\dfrac{h}{2}$, $\alpha_i=x_i+\dfrac{h}{2}$, теоретические вероятности попадания X в интервал (α_{i-1},α_i), согласно формуле п.14, равны $p_i=\Phi\left(\dfrac{\alpha_i-\overline{X}}{S}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha_{i-1}-\overline{X}}{S}\right)$, теоретические частоты равны $n_i'=np_i$ и, согласно п.14, $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{8}\dfrac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$.

Оформим вычисления в виде таблицы (см. ниже).

Из приложения 3 находим при данном уровне значимости $\alpha=0{,}05$ и при числе степеней свободы $k=8-3=5$ критическое значение $\chi^2_{крит}=11{,}1$. Поскольку $\chi^2=2{,}856<\chi^2_{крит}=11{,}1$, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

i	x_i	α_i	$\dfrac{\alpha_i-\overline{X}}{S}$	$\Phi\left(\dfrac{\alpha_i-\overline{X}}{S}\right)$	p_i	n_i'	n_i	$\dfrac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$
0		0	-2,26	-0,4881				
1	1	2	-1,67	-0,4525	0,0356	3,56	5	0,582
2	3	4	-1,07	-0,3577	0,0948	9,48	9	0,024
3	5	6	-0,48	-0,1844	0,1733	17,33	17	0,006
4	7	8	0,11	0,0438	0,2282	22,82	25	0,208
5	9	10	0,71	0,2611	0,2173	21,73	22	0,003
6	11	12	1,30	0,4032	0,1421	14,21	11	0,725
7	13	14	1,89	0,4706	0,0674	6,74	7	0,010
8	15	16	2,48	0,4934	0,0228	2,28	4	1,298
Σ								$\chi^2=2{,}856$

г). Теперь в предположении, что случайная величина X распределена нормально, найдем доверительные интервалы для математического ожидания a и среднего квадратичного отклонения σ по формулам п.13:

$$a\in(\overline{X}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}})\ ,\ \sigma\in(S(1-q_\gamma),S(1+q_\gamma))\ ,$$

где $\overline{X}=7{,}62, S=3{,}37$ – выборочное среднее и исправленное выборочное среднее квадратичное отклонение, найденные в п.б), t_γ, q_γ – коэффициенты, зависящие от уровня надежности $\gamma=1-\alpha=0{,}95$ и объема выборки $n=100$, которые находятся из приложений 5, 6:

$$t_\gamma=t(0{,}95;100)=1{,}984,\ \ q_\gamma=q(0{,}95;100)=0{,}143.$$

Итак, с надежностью $\gamma=0{,}95$ a и σ принадлежат следующим интервалам: $a\in(6{,}95;8{,}29)$, $\sigma\in(2{,}89;3{,}85)$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.