Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/С.А. Махновский
«01» марта 2018г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ**

**по учебной дисциплине
ОПЦ.10 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
для студентов
специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование
Квалификация: Разработчик веб и мультимедийных приложений**

Магнитогорск, 2018

ОДОБРЕНО:
Предметно-цикловой комиссией
«Информатика и вычислительная техника»
Председатель И.Г.Зорина
Протокол № 6 от 21.02.2018

Методической комиссией МпК
Протокол №4 от «01» марта 2018г

Составитель:
преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», к.т.н., доцент В.Д. Тутарова

Методические указания по выполнению лабораторных работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Численные методы».

Содержание лабораторных работ ориентировано на формирование универсальных учебных действий, подготовку обучающихся к освоению программы подготовки специалистов среднего звена.

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание лабораторных занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является формирование учебных практических умений, необходимых в последующей учебной деятельности.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является экспериментальное подтверждение и проверка существенных теоретических положений (законов, зависимостей).

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Численные методы» предусмотрено лабораторных занятий. В рамках лабораторного занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько лабораторных работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

–использовать основные численные методы решения математических задач;

– выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;

– давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;

– разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;

Содержание лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 1.1 – Формировать алгоритмы разработки программных модулей в соответствии с техническим заданием.

ПК 1.2 – Разрабатывать программные модули в соответствии с техническим заданием.

ПК 1.5 – Осуществлять рефакторинг и оптимизацию программного кода.

ПК 11.1 – Осуществлять сбор, обработку и анализ информации для проектирования баз данных.

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 1 – Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2 – Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 4 – Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5 – Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 9 – Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10 – Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языке.

Выполнение обучающихся лабораторных работ по учебной дисциплине «Численные методы» направлено на:

- *обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины.*

Лабораторные занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2ПЕРЕЧЕНЬ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Разделы/темы	**Темы лабораторных занятий**	**Количество часов**	**Требования ФГОС СПО (уметь)**
Тема 1. Основные понятия теории погрешностей вычислений.	Лабораторная работа №1 «Решение простейших задач на вычисление погрешностей»	**2**	У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2, У10.4
Тема 2. Численное решение СЛАУ	Лабораторная работа №2 «Составление алгоритма и написание программ для прямого и итерационного метода»	**6**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
Тема 3. Алгоритмы и методы поиска корней уравнения и решения нелинейных систем	Лабораторная работа №3 «Составление алгоритма и написание программ для поиска корней уравнения и решения систем нелинейных уравнений»	**6**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
Тема 4. Методы аналитического представления таблично заданной функции	Лабораторная работа №4 «Составление алгоритма и написание программ для интерполирования функции».	**4**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
Тема 5. Алгоритмы и методы численного интегрирования и дифференцирования	Лабораторная работа №5 «Составление алгоритма и написание программ для численного интегрирования и дифференцирования».	**4**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
Тема 6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	Лабораторная работа №6 «Составление алгоритма и написание программ для решения обыкновенных уравнений».	**2**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
ИТОГО		**24**	

Тема 1. Основные понятия теории погрешностей вычислений.
Лабораторная работа №1
«Решение простейших задач на вычисление погрешностей»

Цель: получить навыкиопределения основных источников погрешностей.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять округление чисел;
- определять абсолютную и относительную погрешности результата;
- вычислять погрешности результата различных арифметических операций над приближенными числами.

Материальное обеспечение:пакет прикладных программ MicrosoftOffice.

Задание:

а) определить, какое равенство точнее;

б) округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки; определить абсолютную погрешность результата;

в) найти предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа, все цифры которого по умолчанию верные.

Варианты заданий:

1. а) $14/17 = 0{,}824$, $\sqrt{53} = 7{,}28$; б) 23,3748, $\delta = 0{,}27\%$; в) 0,645.
2. а) $7/3 = 2{,}33$, $\sqrt{58} = 7{,}62$; б) $13{,}5726 \pm 0{,}0072$; в) 4,8556.
3. а) $27/31 = 0{,}871$, $\sqrt{42} = 6{,}48$; б) 0,088748, $\delta = 0{,}56\%$; в) 71,385.
4. а) $23/9 = 2{,}56$, $\sqrt{87} = 9{,}33$; б) $4{,}57633 \pm 0{,}00042$; в) 6,8346.
5. а) $6/7 = 0{,}857$, $\sqrt{41} = 6{,}40$; б) 46,7843, $\delta = 0{,}32\%$; в) 7,38.
6. а) $12/7 = 1{,}71$, $\sqrt{47} = 6{,}86$; б) $0{,}38725 \pm 0{,}00112$; в) 0,00646.
7. а) $21/13 = 1{,}62$, $\sqrt{63} = 7{,}94$; б) 45,7832, $\delta = 0{,}18\%$; в) 3,6765.
8. а) $16/7 = 2{,}29$, $\sqrt{11} = 3{,}32$; б) $0{,}75244 \pm 0{,}00013$; в) 5,374.
9. а) $18/7 = 2{,}57$, $\sqrt{22} = 4{,}69$; б) 46,453, $\delta = 0{,}15\%$; в) 6,125.
10. а) $17/9 = 1{,}89$, $\sqrt{17} = 4{,}12$; б) $0{,}66385 \pm 0{,}00042$; в) 24,6.
11. а) $51/11 = 4{,}64$, $\sqrt{35} = 5{,}92$; б) 0,66385, $\delta = 0{,}34\%$; в) 0,543.
12. а) $19/12 = 1{,}58$, $\sqrt{12} = 3{,}46$; б) $4{,}88445 \pm 0{,}00052$; в) 4,633.
13. а) $13/7 = 1{,}857$, $\sqrt{7} = 2{,}65$; б) 2,8867, $\delta = 0{,}43\%$; в) 63,749.
14. а) $49/13 = 3{,}77$, $\sqrt{14} = 3{,}74$; б) $5{,}6483 \pm 0{,}0017$; в) 0,00858.
15. а) $5/3 = 1{,}667$, $\sqrt{38} = 6{,}16$; б) 3,7542, $\delta = 0{,}32\%$; в) 0,389.
16. а) $17/11 = 1{,}545$, $\sqrt{18} = 4{,}243$; б) $0{,}8647 \pm 0{,}0013$; в) 0,864.
17. а) $7/22 = 0{,}318$, $\sqrt{13} = 3{,}61$; б) 0,3944, $\delta = 0{,}15\%$; в) 21,7.
18. а) $13/17 = 0{,}765$, $\sqrt{31} = 5{,}57$; б) $3{,}6878 \pm 0{,}0013$; в) 8,74.
19. а) $50/19 = 2{,}63$, $\sqrt{27} = 5{,}20$; б) 0,85638, $\delta = 0{,}22\%$; в) 231,57.
20. а) $21/29 = 0{,}724$, $\sqrt{44} = 6{,}63$; б) $13{,}6853 \pm 0{,}0023$; в) 2,16.
21. а) $17/19 = 0{,}895$, $\sqrt{52} = 7{,}21$; б) 7,521, $\delta = 0{,}12\%$; в) 0,5748.
22. а) $6/11 = 0{,}545$, $\sqrt{83} = 9{,}11$; б) $3{,}7832 \pm 0{,}0043$; в) 2,678.
23. а) $16/19 = 0{,}842$, $\sqrt{55} = 7{,}416$; б) 17,356, $\delta = 0{,}11\%$; в) 0,5718.
24. а) $23/15 = 1{,}53$, $\sqrt{98} = 9{,}899$; б) $8{,}7432 \pm 0{,}0023$; в) 0,578.
25. а) $2/21 = 0{,}095$, $\sqrt{22} = 4{,}69$; б) 24,5641, $\delta = 0{,}09\%$; в) 4,478.
26. а) $12/11 = 1{,}091$, $\sqrt{68} = 8{,}246$; б) $0{,}5532 \pm 0{,}0014$; в) 3,4479.
27. а) $6/7 = 0{,}857$, $\sqrt{48} = 6{,}928$; б) 14,5841, $\delta = 0{,}17\%$; в) 0,421.
28. а) $15/7 = 2{,}14$, $\sqrt{10} = 3{,}16$; б) $4{,}5012 \pm 0{,}0013$; в) 1,4229.
29. а) $4/17 = 0{,}235$, $\sqrt{105} = 10{,}25$; б) 1,1341, $\delta = 0{,}12\%$; в) 2,401.
30. а) $7/15 = 0{,}467$, $\sqrt{30} = 5{,}48$; б) $6{,}7702 \pm 0{,}0015$; в) 11,1239.

Краткие теоретические сведения:

Выделим следующие основные источники погрешностей:

а) параметры, входящие в описание задачи, заданы неточно; соответствующую погрешность называют неустранимой (погрешность данных);

б) математическая модель описывает изучаемый объект приближенно с учетом основных, наиболее существенных факторов (погрешность математической модели);

в) численный алгоритм, применяемый для решения математической задачи, зачастую дает лишь приближенное решение (погрешность метода);

г) в процессе вычислений на компьютере промежуточные и конечные результаты округляются (вычислительная погрешность или погрешность округления). Методы, причисляемые к точным, не учитывают наличие вычислительной погрешности.

Часто первые два вида погрешности, объединяя в один, также называют неустранимой погрешностью.

Обозначив через I абсолютную величину погрешности результата, а через $I_н$, $I_м$ и $I_о$ – абсолютные величины неустранимой погрешности, погрешности метода и округления соответственно – нетрудно получить следующее соотношение:

Неравенство (1.1) дает оценку для погрешности результата. Из этого неравенства можно сделать важный вывод: полную погрешность результата нельзя сделать меньше, чем наибольшая из составляющих ее погрешностей.

Определение 1.1. *Приближенным значением*некоторой величиныaназывается число a_p , которое незначительно отличается от точного значения этой величины.

Пусть a – точное значение некоторой величины, а a_p – ее приближенное значение.

Определение 1.2. *Абсолютной погрешностью*Δприближенногозначения называется модуль разности между точным и приближенным значениями этой величины:

$$\Delta = \left|a - a_p\right| \tag{1.2}$$

Пример 1.1. Если a = 20,25 и a_p = 20, то абсолютная погрешность = 0,25 .

Определение 1.3. Относительной погрешностью приближенной величины a_p называется отношение абсолютной погрешности приближенной величины к абсолютной величине ее точного значения:

$$\delta = \frac{|a - a_p|}{|a|} = \frac{\Delta}{|a|} \tag{1.3}$$

Это равенство можно записать в другой форме:

$$\Delta = |a|\delta \tag{1.4}$$

Пример 1.2. Пустьa= 20,25иa_p =20, тогда относительная погрешность δ= 0,25/20 = 0,0125.

На практике, как правило, точное значение величины неизвестно. Поэтому вместо теоретических понятий абсолютной и относительной погрешностей используют практические понятия предельной абсолютной погрешности и предельной относительной погрешности.

Определение 1.4. Под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа понимается всякое число Δ_aне меньшее абсолютнойпогрешности этого числа:

$$\Delta = \left|a - a_p\right| \le \Delta_a \tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) позволяет для точного значения величины получить оценку

$$a_p - \Delta_a \le a \le a_p + \Delta_p \tag{1.6}$$

Часто неравенства (1.6) записывают в другой форме

$$a = a_p \pm \Delta_a = a_p(1 \pm \delta_a) \tag{1.7}$$

На практике в качестве предельной абсолютной погрешности выбирают наименьшее из чисел Δ_a , удовлетворяющих неравенству (1.5), однако это не всегда возможно.

Пример 1.3. Оценить предельную абсолютную погрешность приближенного значения a_p = 2,72 числа e, если известно, чтоe= 2,718281828459045.

Решение.

Очевидно, что $|a_p - e| < 0{,}01$.Следовательно,Δ_a= 0,01. Также справедливо неравенство $|a_p - e| = |2{,}720 - 2{,}71828\ldots| < 0{,}002$. Получаем другое значение абсолютной погрешности Δ_a = 0,002. Ясно, что следует выбрать наименьшее из найденных значений предельной погрешности, так как это позволит сузить диапазон (1.5), в котором находится точное значение изучаемой величины.

Определение 1.5. Предельной относительной погрешностью δ_a данного приближенного числа называется любое число, не меньшее относительной погрешности этого числа:

$$\delta \leq \delta_a \tag{1.8}$$

Так как справедливо неравенство

$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \leq \frac{\Delta_a}{|a|}$,

то можно считать, что предельные абсолютная и относительная погрешности связаны формулой

$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$ или $\Delta_a = |a|\delta_a$.

Пример 1.4. Пусть длина бруска измерена сантиметровой линейкойи получено приближенное значение a_p=251 см. Найти предельную относительную погрешность δ_a

Решение.

Так как сантиметровая линейка не содержит делений меньше сантиметра, то предельная абсолютная погрешность Δ_a = 1 см, а точное значение, a длины бруска находится в диапазоне 250 см <a< 252 см. Хотя точное значение a неизвестно, можно для относительной погрешности записать неравенство

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{1}{250} = 0{,}004$$

т. е. считать, что δ_a=0,004 .

Если абсолютная погрешностьΔ_aзначительно меньше точного значения $|a|$, то относительную погрешность подразделяют приближенно как отношение абсолютной погрешности к приближенному значению:

$$\delta_a \approx \frac{\Delta_a}{|a_p|}, \Delta_a \approx |a_p|\delta_a. \tag{1.10}$$

Часто в формуле (1.10) вместо знака «≈» используют знак точного равенства «=». Относительную погрешность иногда задают в процентах.

Пример 1.5. Определить предельную относительную и абсолютнуюпогрешности значения x=125±5% .

Решение.

Здесь δ_a=5% =0,05 и Δ_a=0,05 125=6,25 . В этом примере мы воспользовались формулой (1.10).

Значащие цифры

Определение 1.6. Значащими цифрами в записи приближенногочисла называются:

все ненулевые цифры;

нули, содержащиеся между ненулевыми цифрами;

нули, являющиеся представителями сохраненных десятичных разрядовпри округлении.

В следующих примерах значащие цифры подчеркнуты.

Пример 1.6. <u>2,305</u>; 0,0<u>357</u>; 0,00<u>1123</u>; 0,035299879≈0,0<u>35300</u>.

При округлении числа 0,035299879 до шести знаков после запятой получается число 0,035300, в котором последние два нуля являются значащими. Если отбросить эти нули, то полученное число 0,0353 не является равнозначным с числом 0,035300 как приближенным значением числа 0,035299879, так как погрешности указанных приближенных чисел отличаются!

Определение 1.7. Первыеnзначащих цифр в записи приближенного числа называются верными в узком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего n -й значащей цифре, считая слева направо.

Наряду с данным определением иногда используется другое.

Определение 1.8. Первыеnзначащих цифр в записи приближенного числа называются верными в широком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего n -й значащей цифре.

Пример 1.7. Определить верные цифры приближенного значенияa_p=2,721числа e ,если известно,что e =2,71828...

Решение.

Очевидно, что $|a_p - e| = |2{,}721 - 2{,}71828\ldots| < 0{,}003 < 0{,}005$. Следовательно, верными являются только три первые цифры (в узком и широком смысле), последнюю цифру можно отбросить, a_p = 2,72.

Пример 1.8. Пустьx=1,10253±0,00009.Верными являются первыечетыре значащие цифры, а цифры 5 и 3 не удовлетворяют определению. В широком смысле верными являются первые пять цифр.

Пример 1.9. При записи следующих физических констант указанытри верные значащие цифры:

а)гравитационная постоянная γ=6,67 10^{11}Н, $м^2/кг^2$;

б)скорость света в вакууме c=3,00·10^8, м/с;

в)постоянная Планка h=6,63·10^{34}, Дж с.

Замечание. Термин«верные значащие цифры»нельзя понимать буквально. Например, современное опытное значение скорости света в вакууме составляет c= 2,997925·10^8, м/с. Очевидно, что ни одна значащая цифра в примере 1.9, не совпадает с соответствующей точной цифрой, но абсолютная погрешность меньше половины разряда, соответствующегопоследней значащей цифре в записи 3,00 10^8 :

$$|3{,}00\cdot10^8 - 2{,}997925\cdot10^8| < 0{,}003\cdot10^8 < 0{,}01\cdot10^8 / 2 = 0{,}005\cdot10^8 .$$

Правило округления чисел

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры, стоящие справа от n -й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

если первая отброшенная цифра меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняют без изменения;

если первая отброшенная цифра больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

если первая отброшенная цифра равна 5 и среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

если первая из отброшенных цифр равна 5 и все отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра оставляется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если нет (правило четной цифры).

Это правило гарантирует, что сохраненные значащие цифры числа являются верными в узком смысле, т. е. погрешность округления не превосходит половины разряда, соответствующего последней оставленной значащей цифре. Правило четной цифры должно обеспечить компенсацию знаков ошибок.

Пример 1.10.Приведем примеры округления до четырех значащихцифр;

а) 3,1415926 ≈ 3,142;

Δ_a=|3,142 - 3,1415926|< 0,00041 < 0,0005 ;

б) 1 256 410 ≈ 1 256 000;

a=|1 256 000 -1 256 410 |< 500 ;

в) 2,997925·10^8≈ 2,998·10^8 ;

a=|2,998·10^8- 2,997925·10^8 |< 0,000075·10^8< 0,0005·10^8

Следующая теорема выявляет связь относительной погрешности числа с числом верных десятичных знаков.

Теорема 1.1. Если положительное приближенное число имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность δ не превосходит величины 10^{1-n}, деленной на первую значащую цифру α_H

$$\delta \le 10^{1-n}/\alpha_H \tag{1.11}$$

Формула (1.11) позволяет вычислить предельную относительную погрешность

$$\delta_a = 10^{1-n}/\alpha_H \tag{1.12}$$

Пример 1.11. Найти относительную и абсолютную погрешности приближенных чисел: а) 3,142, б) $2,997925 \cdot 10^8$.

Решение.

а) Здесь n= 4, $\alpha_н$=3. Используем формулу (1.12) для оценки относительной погрешности:

$$\alpha = 10^{1-n}/\alpha_H = 0,001/3 \approx 0,00033.$$

Для определения абсолютной погрешности применим формулу (1.10):

$a \approx |a_p|\delta_a = 3,1420,00033 \approx 0,001.$

б) Аналогично вычислим: n=7,$\alpha_н$=2 , δ_a=10^{1-n} / $\alpha_н$= 0,000001/ 2 =0,0000005;

$$\alpha \approx |a_p|\delta_a = 2,997925 \cdot 10^8 \cdot 0,0000005 = 150$$

Погрешности арифметических операций

Приведем правила вычисления погрешности результата различных арифметических операций над приближенными числами.

Относительно алгебраической суммы u=x±y можно утверждать следующее.

Теорема 1.2. Предельная абсолютная погрешность суммы приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta_u = \Delta_x + \Delta_y \tag{1.13}$$

Из формулы (1.13) следует, что *предельная абсолютная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых,* т.е.если в состав суммы входят приближенные слагаемые с разными абсолютными погрешностями, то сохранять лишние значащие цифры в более точных не имеет смысла.

Пример 1.12. Найти сумму приближенных чисел,все цифры которых являются верными в широком смысле, и ее предельную абсолютную и относительную погрешности u = 0,259 + 45,12 + 1,0012.

Решение. Предельные абсолютные погрешности слагаемых здесьравны соответственно 0,001; 0,01; 0,0001.

Суммирование производим, руководствуясь следующим правилом:выделим наименее точные слагаемые (в нашем примере это второе слагаемое) и оставим их без изменения;

остальные числа округлим по образцу выделенных, оставляя один или два запасных знака;

сложим данные числа, учитывая все сохраненные знаки;

полученный результат округлим до точности наименее точных слагаемых. Имеем

$$\Delta_u = 0,001 + 0,01 + 0,0001 = 0,0111;$$

$$= 0,259 + 45,12 + 1,0012 \approx 0,26 + 45,12 + +1,00 = 46,38 \pm 0,01.$$

Основной вклад в абсолютную погрешность результата здесь вносятпредельные погрешности исходных данных, приведенные выше.

Теорема 1.3. Если все слагаемые в сумме имеют один и тот же знак,то предельная относительная погрешность суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых:

$$\delta_u \leq \max(\delta_x, \delta_x, \ldots, \delta_x) \qquad (1.14)$$

При вычислении разности двух приближенных чисел $u=x\text{-}y$ ее абсолютная погрешность, согласно теореме 1.2, равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т.е. $\Delta_u=\Delta_x+\Delta_y$,а предельная относительная погрешность.

$$\delta_u = \frac{\Delta_x+\Delta_y}{|x-y|} \qquad (1.15)$$

Из формулы (1.15) следует, что если приближенные значения x и y близки, то предельная относительная погрешность будет очень большой.

Пример 1.13. Найти разность$u=x\text{-}y$с тремя верными знаками,если x =12,1254 ± 0,0001, y =12,128 ± 0,001.

Решение.

Имеем 12,1254 – 12,128 = – 0,0026.

$$u = 0{,}0001 + 0{,}001 = 0{,}0011;$$

$$u = \frac{0{,}0011}{|-0{,}0026|} = 0{,}42;$$

$$x = \frac{0{,}0001}{|12{,}1254|} \approx 0{,}000008;$$

$$y = \frac{0{,}001}{|12{,}128|} \approx 0{,}00008;$$

Согласно этим результатам разность $x\text{-}y$ имеет не более однойверной цифры и относительная погрешность очень велика по сравнению с относительными погрешностями операндов.

В некоторых случаях удается избежать вычисления разности близгих чисел с помощью преобразования выражения так, чтобы разность была исключена. Рассмотрим один из таких примеров.

Пример 1.14. Найти разность$\sqrt{4{,}05} - \sqrt{4}$с тремя верными знаками.

Решение. Умножим и разделим на сопряженное.Получим

$$\sqrt{4{,}05} - \sqrt{4} = \frac{\left(\sqrt{4{,}05} - \sqrt{4}\right) \cdot \left(\sqrt{4{,}05} + \sqrt{4}\right)}{\sqrt{4{,}05} + \sqrt{4}} = \frac{4{,}05 - 4}{\sqrt{4{,}05} + \sqrt{4}} \approx \frac{0{,}05}{4{,}012461} \approx 0{,}01246 \approx 0{,}0125$$

Если представляется сложным заменить вычитание близких приближенных чисел сложением, то следует поступать так: если известно, что при вычитании должно пропасть m первых значащих цифр, а в результате требуется сохранить n верных цифр, тогда в уменьшаемом и вычитаемом следует сохранять $m+n$ верных значащих цифр:

$\sqrt{4{,}05} - \sqrt{4} \approx 2{,}012461 - 2 \approx 0{,}0125$

Теорема 1.4. Предельная относительная погрешность произведения$u=x\cdot y$ приближенных чисел,отличных от нуля,равна сумме предельныхотносительных погрешностей сомножителей, т. е.

$$\delta_u=\delta_x+\delta_y\,. \qquad (1.16)$$

В частности, если $u=k\cdot x$, где k – точное число, имеем $\Delta_u=|k|\cdot\Delta_x$, $\delta_u=\delta_x$.

Пример 1.15.Определить произведение приближенных чиселx=12,45и y=2,13и число верных значащих цифр в нем,если все написанные цифры сомножителей – верные в узком смысле.

Решение. По условию предельные абсолютные погрешности сомножителей равны $\Delta_x=\Delta_y$= 0,005 ; δ_x= 0,005 /12,45 □=0,0004 ; δ_y =0,005/2,13 = 0,0023. Тогда по теореме 1.4 имеем $\delta_u=\delta_x+\delta_y$= 0,0004 + 0,0023 = 0,0027 ≈ 0,003. Вычислим произведение 12,45 ·2,13 = 26,5185.u= 26,5185·0,003≈0,079≈0,08. Таким образом, результат имеет триверных значащих цифры в широком смысле и может быть записан в виде

=26,5·(1±0,003) .

Теорема 1.5. Предельная относительная погрешность частного равнасумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

Пример 1.16. Вычислить частное приближенных чиселx=12,45иy=2,13и число верных значащих цифр в нем,если все написанные цифры сомножителей – верные в узком смысле.

Решение. Предельная относительная погрешность частного по теореме 1.5 равна δ_u≈0,003. Вычислим частное 12,45 / 2,13 ≈5,84507 .

u= 5,84507·0,003≈0,0175≈0,02 . Результат имеет две верных значащихцифры в узком смысле и может быть записан в виде

=5,8·(1±0,003) .

Погрешность произвольной функции

Пустьзадана произвольная функцияu=f (x_1,x_2, ..., x_n), гдеx_1, x_2, ..., x_n– приближенные величины, а Δ_{x1} , $\Delta_{x2}, \dots, \Delta_{xn}$– их известныепредельные абсолютные погрешности. Тогда предельная абсолютная погрешность результата – функции u – для малых Δ_{xi} вычисляется по формуле

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta_{xi} \text{ в точке } (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (1.17)$$

Как видно из формулы (1.17), для ее применения требуется, чтобы функция f (x_1, x_2 , ..., x_n) была дифференцируемой по всем переменным.

Пример 1.17. Вычислить функциюu=2sin(3x+4y),eсли

$x = \frac{\pi}{24} \pm 0{,}002 и\ y = \frac{\pi}{24} \pm 0{,}005$

Найти предельные абсолютную и относительную погрешности результата и определить число верных значащих цифр.

Решение. Применяя формулу(1.17),имеем

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \Delta_y = |6\cos(3x+4y)| \cdot 0{,}002 + |8\cos(3x+4y)| \cdot 0{,}005 =$$

$$=|2\cos(3x+4y)| \cdot (3 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0{,}005) = \left|2\cos\frac{\pi}{4}\right| \cdot (3 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0{,}005) =$$

$$=\sqrt{2} \cdot 0{,}026 \approx 0{,}037.$$

Для функции u находим u=$\sqrt{2}$ ≈1,414214. Учитывая предельную абсолютную погрешность Δ_u≈0,04 , получаем результат, который имеет две верных значащих цифры в узком смысле. Ответ можно записать в виде

=1,4±0,04.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить на бумажном носителе.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 2. Численное решение СЛАУ

Лабораторная работа №2 «Составление алгоритма и написание программ для прямого и итерационного метода»

Цель: ____

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2____;
- ____.

Материальное обеспечение: ____

Задание: ____

Краткие теоретические сведения:

Методы решения систем уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.1)$$

делятся на точные (прямые) и приближенные (итерационные). Прямые методы позволяют в предположении отсутствия ошибок округления получить точное решение задачи за конечное число арифметических действий. Итерационные методы основаны на использовании повторяющегося процесса и позволяют получить решение в результате последовательных приближений.

2.1. Метод Гаусса

Этот метод является одним из наиболее распространенных прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений. В основе метода Гаусса лежит идея последовательного исключения неизвестных.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} I&: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ II&: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ III&: a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Система уравнений (2.2) приводится к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} I&: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ II'&: \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b_2{}' \\ III''&: \quad a''_{33}x_3 = b_3{}'' \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Достигается это при помощи цепочки элементарных преобразований, при которых из каждой строки вычитаются некоторые кратные величины расположенных выше строк.

Процесс приведения системы (2.2) к системе (2.3) называется прямым ходом, а нахождение неизвестных x_1 , x_2 , x_3 из системы (2.3) называется обратным ходом.

Прямой ход исключения: Исключаем x_1 из уравнений (II) и (III) системы (2.2). Для этого умножаем уравнение (I) на $d_1 = -a_{21} / a_{11}$ и складываем со вторым, затем умножаем на $d_2 = -a_{31} / a_{11}$ и складываем с третьим.

В результате получаем следующую систему:

$$II': \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b_2{}'$$

$$III': \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b_3{}' \qquad (2.4)$$

Из полученной системы (2.4) исключаем x_2. Для этого, умножая новое уравнение на $d_3 = -a'_{32}/\, a'_{22}$ и складывая со вторым уравнением, получим уравнение:

$$III'': \quad a''_{33}x_3 = b_3{}'' \qquad (2.5)$$

Взяв из каждой системы (2.2), (2.4) и (2.5) первые уравнения, получим систему уравнений с треугольной матрицей.

Обратный ход: Из уравнения(III'')находим$x_3 = \frac{b_3{}''}{a''_{33}}$. Из уравнения ($II'$) находим$x_2 = b'_2 - a'_{23}x_3$. Из уравнения (I) находим$x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$.Коэффициенты$a_{11}, a'_{22}$называются ведущими элементами 1-го и 2-го шагов исключения неизвестных. Они должны быть отличны от нуля. Если они равны нулю, то, меняя местами строки, необходимо на их место вывести ненулевые элементы.

Аналогичным путем методом Гаусса решаются системы *n* уравнений с *n* неизвестными.

Пример 2.1.Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Решение: Удалить члены сx_1из2-го и3-го уравнений можно,вычитая из 2-й строки 1-ую, умноженную на 2 , а из 3-й - первую, умноженную на 3:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$
$$-7x_2 - 7x_3 = -21$$
$$-13x_2 - 8x_3 = -19$$

2-я строка делится на – 7 :

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_2 + x_3 = 3$$
$$13x_2 + 8x_3 = 19$$

2-я строка умножается на 13 и вычитается из 3-й:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_2 + x_3 = 3$$
$$-5x_3 = -20$$

3-я строка делится на – 5:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_2 + x_3 = 3$$
$$x_3 = 4$$

Процедура обратного хода дает решение:

$$x_3 = 4$$
$$x_2 = 3 - x_3 = 3 - 4 = -1$$
$$x_1 = 10 - 4x_2 - 3x_3 = 10 - 4 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = 10 + 4 - 12 = 2$$

Пример 2.2.Решить системуфуравнений методом Гаусса с помощью программы на языке VBAExcel:

$$\begin{cases} 13x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 1 \\ 7x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

Порядок решения.

1) Ввести матрицу ***А***и векторв рабочий лист Excel (рис. 2.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	13	-2	1	-4		8		1,767019

2	2	0	-3	5		-7		9,807512
3	4	-1	3	9		1		2,702465
4	7	-5	11	-4		-5		-0,48533

Рис. 2.1. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы с помощью программы Excel

Ввести код программы (рис. 2.2) в модуль листа. В качестве значения переменной n указать число уравнений.

Выполнить программу. В столбце H содержится решение системы:

x_1=1,767019; x_2=9,807512; x_3=2,702465; x_4= –0,48533.

2.2. Метод обратной матрицы

Систему (2.1) можно представить в матричном виде как AX=B,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ \dots \ a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ \dots \ a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}a_{n2} \ \dots \ a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Решение можно выразить, используя умножение на матрицу A^{-1}, обратную к A:

$$A^{-1} AX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B$$

```
Sub Gauss()
    n = 4
    ReDima(1 To n, 1 To n + 2)
    For i = 1 To n
        For j = 1 To n
            a(i, j) = Cells(i, j)
        Next j
        a(i, n + 1) = Cells(i, n + 2)
    Next i
    For i = 1 To n - 1
    If Abs(a(i, i)) < 0.00000001 Then
        For k = i + 1 To n
            If Abs(a(k, i)) > 0.00000001 Then
                For j = 1 To n + 1
                        tmp = a(i, j)
                        a(i, j) = a(k, j)
                        a(k, j) = tmp
                    Next j
                    Exit For
                End If
            Next k
        End If
    If Abs(a(i, i)) > 0.00000001 Then
        For k = i + 1 To n
                f = -a(k, i) / a(i, i)
                For j = i To n + 1
                    a(k, j) = a(k, j) + f * a(i, j)
                Next j
            Next k
        End If
    Next i
    For i = n To 1 Step -1
        tmp = a(i, n + 1)
        For k = i + 1 To n
            tmp = tmp - a(i, k) * a(k, n + 2)
```

```
            Next k
            a(i, n + 2) = tmp / a(i, i)
        Next i
        For i = 1 To n
            Cells(i, n + 4) = a(i, n + 2)
        Next i
    End Sub
```

Рис.2.2. Программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса на языке VBA

Пример 2.3.Решить систему уравнений из примера2.2методом обратной матрицы с помощью программы Excel:

	A	B	C	D	E	F
1	A					B
2	13	-2	1	-4		8
3	2	0	-3	5		-7
4	4	-1	3	9		1
5	7	-5	11	-4		-5
6						
7	1/A					X
8	0,098005	-0,09214	0,071009	-0,0534	X1=	1,767019
9	0,201878	-0,85446	0,403756	-0,3615	X2=	9,807512
10	0,019366	-0,31162	0,163732	-0,04049	X3=	2,702465
11	-0,02758	0,049883	0,069836	-0,00293	X4=	-0,48533

Рис. 2.3. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы с помощью программы Excel

Порядок решения.

Ввести матрицу A и вектор B в рабочий лист Excel (рис. 2.3).

Выделить ячейки для хранения обратной матрицы 4 × 4; например, ячейки A8:D11.

Вызвать мастер функций, в категории «Математические» выбрать функцию вычисления обратной матрицы МОБР. В диалоговом окне аргументов функции заполнить поле ввода «Массив» - указать диапазон ячеек матрицы A - в нашем случае A2:D5. Нажать кнопку ОК. В первой ячейке выделенного под обратную матрицу диапазона (A8) появится число.

Чтобы получить всю обратную матрицу, нажать клавишу F2 для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter. В ячейках A8:D11 появятся значения обратнойматрицы A^{-1} .

Выделить ячейки для хранения вектора-столбца X 4 × 1; например, ячейки F8:F11.

Вызвать мастер функций, в категории «Математические» выбрать функцию матричного умножения МУМНОЖ. В диалоговом окнеаргументов функции в поле ввода «Массив1» указать диапазон ячеек матрицы A^{-1} - в нашем случае A8:D11, в поле ввода «Массив2» указать диапазон ячеек вектора B - в нашем случае F2:F5. Нажать кнопку ОК. В первой ячейке выделенного под результат диапазона (F8) появится число.

Чтобы получить весь вектор $\boldsymbol{X}$, нажать клавишу F2 для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter. В ячейках **F8:F11** появятся значения решения системы уравнений:

x_1=1,767019; x_2=9,807512;x_3=2,702465;x_4= −0,48533.

2.3. Метод прогонки

Применяется для решения систем уравнений с трехдиагональной (ленточной) матрицей. Такая система уравнений записывается в виде:

$$a_i x_{i-1}+b_i x_i+c_i x_{i+1}=d_i \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n, \qquad (2.6)$$

$$a_1=0,\ \ c_n=0.$$

Является частным случаем метода Гаусса и состоит из прямого и обратного хода. Прямой ход состоит в исключении элементов матрицы системы (2.6), лежащих ниже главной диагонали. В каждом уравнении останется не более двух неизвестных и формулу обратного хода можно записать в следующем виде:

$$x_i = U_i\,x_{i+1}+V_i, \qquad i = n,\ n-1,\ \dots,\ 1 \qquad (2.7)$$

Уменьшим в формуле (2.7)индекс на единицу: $x_{i-1}=U_{i-1}x_i+V_{i-1}$иподставим в (2.6):

$a_i(U_{i-1}x_i+V_{i-1})+b_i x_i+c_i x_{i+1}=d_i$

Выразим x_i:

$$x_i = \frac{c_i}{a_i U_{i-1}+b_i}x_{i+1}+\frac{d_i-a_i V_{i-1}}{a_i U_{i-1}+b_i} \qquad (2.8)$$

Сравнивая (2.7) и (2.8), получим:

$$U_i=-\frac{c_i}{a_i U_{i-1}+b_i} \qquad V_i=\frac{d_i-a_i V_{i-1}}{a_i U_{i-1}+b_i} \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n \qquad (2.9)$$

Поскольку a_1= 0, то

$$U_1=-\frac{c_1}{b_1}, \qquad V_1=\frac{d_1}{b_1} \qquad (2.10)$$

Теперь по формулам (2.9) и (2.10) можно вычислить прогоночные коэффициенты U_i и V_i (i=1, 2, 3, ..., n). Это прямой ход прогонки. Зная прогоночные коэффициенты, по формулам (2.7), можно вычислить все x_i ($i=n$, n–1, ..., 1) (обратный ход прогонки). Поскольку c_n= 0 , то U_n= 0 и x_n= V_n.Далее вычисляем x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1.

Пример 3.4.Решить систему уравнений методом прогонки:

$$\begin{cases} 10x_1+x_2=5 \\ -2x_1+9x_2+x_3=-1 \\ 0{,}1x_2+4x_3-x_4=-5 \\ -x_3+8x_4=40 \end{cases}$$

Решение.Коэффициенты записываем в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0	10	1	5
2	-2	9	1	-1
3	0,1	4	-1	-5
4	-1	8	0	40

Прямой ход прогонки. По формулам (2.9) и (2.10) определяем прогоночные коэффициенты U_i и V_i (i=1, 2, 3, 4).

$U_1= -c_1/\ b_1= -1/10= -0{,}1$

$V_1= d_1/\ b_1=5\ /10=0{,}5$

$U_2= -c_2/(a_2U_1+ b_2)= -1/(2\cdot0{,}1+9)= -0{,}1087$

$V_2=(d_2- a_2V_1)\ /(a_2U_1+ b_2)=(-1+2\cdot0{,}5)\ /(2\cdot0{,}1+9)=0$

$U_3= -c_3/(a_3U_2+ b_3)=1/(-0{,}1\cdot0{,}1087+4)=0{,}2507$

$V_3=(d_3- a_3V_2)\ /(a_3U_2+ b_3)=(-5-0{,}1\cdot0)\ /(-0{,}1\cdot0{,}1087+4)= -1{,}2534$

$U_4= -c_4/(a_4U_3+ b_4)=0,$ т.к. c_4= 0

$V_4=(d_4- a_4V_3)\ /(a_4U_3+ b_4)=(40-1\cdot1{,}2534\ )\ /(-1\cdot0{,}2507+8)=5$

Обратныйходпрогонки.Поформулам(2.7)вычисляемвсеx_i(i= 4, 3, 2,1). Поскольку $U_4 = 0$, то $x_4 = V_4 = 5$.

Далее вычисляем:

$x_3 = U_3\, x_4 + V_3 = 0{,}2507 \cdot 5 - 1{,}2534 = 0{,}0001 \approx 0$

$x_2 = U_2\, x_3 + V_2 = -1{,}1087 \cdot 0{,}0001 + 0 = -0{,}0001 \approx 0$

$x_1 = U_1\, x_2 + V_1 = 0{,}1 \cdot 0{,}0001 + 0{,}5 = 0{,}5001 \approx 0{,}5$

Вычисляем невязки $r_i = d_i - a_i x_{i-1} - b_i x_i - c_i x_{i+1}$ (i=1, 2, 3, 4)

$r_1 = d_1 - b_1\, x_1 - c_1\, x_2 = 5 - 10 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 0 = 0$

$r_2 = d_2 - a_2\, x_1 - b_2\, x_2 - c_2\, x_3 = -1 + 2 \cdot 0{,}5 - 9 \cdot 0 - 0 = 0$

$r_3 = d_3 - a_3\, x_2 - b_3\, x_3 - c_3\, x_4 = -5 - 0{,}1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 0$

$r_4 = d_4 - a_4\, x_3 - b_4\, x_4 = 40 + 1 \cdot 0 - 8 \cdot 5 = 0$

На рис. 2.4 приведена программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки на языке VBA.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	d	n	x	r
2	0	10	1	5	4	0,5	0
3	-2	9	1	-1		0	0
4	0,1	4	-1	-5		0	0
5	-1	8	0	40		5	0

```
Sub program4()
n = Cells(2, 5)
ReDim    a(n),b(n),c(n),d(n),u(n),v(n),x(n+1),r(n)
For i = 1 To n
  a(i) = Cells(i + 1, 1)
  b(i) = Cells(i + 1, 2)
  c(i) = Cells(i + 1, 3)
  d(i) = Cells(i + 1, 4)
  u(i) = -c(i)/(a(i)*u(i-1)+b(i))
  v(i) = (d(i)-a(i)*v(i-1))/(a(i)*u(i-1)+b(i))
Next i
For i = n To 1 Step -1
  x(i) = u(i)*x(i+1)+v(i)
Next i
For i = 1 To n
    r(i) = d(i)-a(i)*x(i-1)-b(i)*x(i)-c(i)*x(i+1)
    Cells(i + 1, 6) = x(i)
    Cells(i + 1, 7) = r(i)
Next i
End Sub
```

Рис.2.4. Программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки на языке VBA

Пример 2.5.Решить систему уравнений из примера(2.4)методомпрогонки с помощью программы Excel.

Порядок решения.

Ввести в ячейки **A1:G1** заголовки столбцов (рис. 2.5).

В ячейки **A3:D6** – коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i. Строки выше и ниже данных оставить пустыми.

В ячейку **E3** – формулу U_1 **=-C3/(A3*E2+B3)**

В ячейку **F3** – формулу V_1 **=(D3-A3*F2)/(A3*E2+B3)**

В ячейку **G3** – формулу x_1 **=G4*E3+F3**

Выделить ячейки **E3:G3** и скопировать формулы в соседние ячейки **E4:G4** … **E6:G6** при помощи маркера заполнения.

В ячейках **G3:G6** появятся значения решения системы уравнений.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	d	u	v	x

2							
3	0	10	1	5	-0,1	0,5	0,5
4	-2	9	1	-1	-0,1087	0	0
5	0,1	4	-1	-5	0,250681	-1,25341	0
6	-1	8	0	40	0	5	5
7							

Рис. 2.5. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки с помощью программы Excel

2.4. Метод простой итерации (метод Якоби)

Суть вычислений итерационными методами состоит в следующем: расчет начинается с некоторого заранее выбранного приближения $x^{(0)}$(начального приближения). Вычислительный процесс, использующий матрицу A, вектор B системы (3.1) и$x^{(0)}$, приводит к новому вектору $x^{(1)}$:

$$x_i^{(1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(0)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(0)}\right), \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \qquad (2.11)$$

Затем процесс повторяется, только вместо $x^{(0)}$используется новое значение$x^{(1)}$. На k+1 –м шаге итерационного процесса получают:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \qquad (2.12)$$

При выполнении некоторых заранее оговоренных условий процесс сходится при k →∞. Сходимость метода простой итерации обеспечивается при выполнении условия преобладания диагональных элементов матрицы A:

$$\sum_{i\neq j}|a_{ij}| < |a_{ii}|, \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \qquad (2.13)$$

Заданная точность достигается при выполнении условия:

$$\max_i\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon \qquad (2.14)$$

Пример 2.6. Преобразовать систему уравнений (3.15) к виду, пригодному для построения итерационного процесса методом Якоби и выполнить три итерации.

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_{1+}x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases} \qquad (2.15)$$

Решение. Достаточное условие сходимости(2.13)выполняется,поэтому начальное приближение может быть любым.

$| a_{12} | + | a_{13} | = 4 + 1 <| a_{11} | = 7$

$| a_{21} | + | a_{23} | = 2 + 3 <| a_{22} | = 6$

$| a_{31} | + | a_{32} | = 1 + 1 <| a_{33} | = 4$

В i -ом уравнении все члены, кроме x_i, переносятся в правую часть:

$$x_1=(7-4x_2+ x_3) / 7$$
$$x_2=(-2-2x_1-3x_3) / 6 \qquad (2.16)$$
$$x_3=(4+ x_1- x_2) / 4$$

Задается начальное приближение $x^{(0)} = x_1^{(0)};\ x_2^{(0)};\ x_3^{(0)}$), которое подставляется в правую часть (2.16). Если $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$,то результаты первой итерации:

$x_1^{(1)} = (7 - 4 \cdot 0 + 0) / 7 = 1$

$x_2^{(1)} = (-2 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0) / 6 = -1/ 3 = -0,333$

$x_3^{(1)}=(4+0-0) / 4=1$

Результаты первой итерации $x^{(1)}= (x_1^{(1)} ; x_2^{(1)} ; x_3^{(1)})$ подставляют в правую часть (2.16) и получают результаты второй итерации:

$x_1^{(2)} =(7-4\cdot(-0,333)+1) / 7=4 / 3=1,333$

$x_2^{(2)} ==(-2-2\cdot1-3\cdot1) / 6= -7 / 6= -1,167$

$$x_3^{(2)} = \frac{4 + 1 - (-0{,}333)}{4} = \frac{4}{3} = 1{,}333$$

Результаты второй итерации $x^{(2)} = (x_1^{(2)};\ x_2^{(2)};\ x_3^{(2)})$ подставляют в правую часть (2.16) и получают результаты третьей итерации:

$x_1^{(3)}$=(7–4·(–1,167)+1,333) / 7=1,857

$x_2^{(3)}$=(–2–2·1,333–3·1,333) / 6= –1,444

$x_3^{(3)}$=(4+1,333–(–1,167)) / 4=1,625

Определяют достигнутую точность

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |1{,}857 - 1{,}333| = 0{,}524$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |-1{,}444 + 1{,}167| = 0{,}278$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |1{,}625 - 1{,}333| = 0{,}292$$

$$max_i\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0{,}524$$

	A	B	C
1	X1	X2	X3
2	0,00	0,00	0,00
3	1,00	-0,33	1,00
4	1,33	-1,17	1,33
5	1,86	-1,44	1,63
6	2,06	-1,76	1,83
7	2,27	-1,93	1,96
…	…	…	…
20	2,66	-2,34	2,25
21	2,66	-2,35	2,25
22	2,66	-2,35	2,25

Рис. 2.6. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби с помощью программы Excel

Пример 2.7. Решитьсистему уравнений методом Якоби с помощью программы Excel с точностью ε = 0,01:

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_{1+}x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Порядок решения.

Представить систему в виде (2.16);

Ввести в ячейки **A1:C1**заголовкистолбцов(рис. 2.6);

В ячейки **A2:C2**– начальное приближение**0, 0, 0**;

В ячейку **A3** – формулу $\boldsymbol{x_1}$=(7-4*B2+C2)/7

В ячейку **B3** – формулу $\boldsymbol{x_2}$=(-2-2*A2-3*C2)/6

Вячейку**C3** – формулу$\boldsymbol{x_3}$=(4+A2-B2)/4

Выделить столбцы A, B, C, вызвать контекстное меню Формат ячеек, установить формат числовой и указать число десятичных знаков, соответствующее необходимой точности, т.е. 2;

Выделить ячейки A3:C3 и скопировать формулы в соседние ячейки расположенных ниже строк A4:C4, A5:C5 и т.д. при помощи маркера заполнения. Каждая новая строка содержит результаты очередного приближения;

Продолжать копирование, пока результат не перестанет меняться;

Ячейки **A21, B21, C21** содержат решение системы уравнений, соответствующее заданной точности.

Приближенное решение системы с точностью ε = 0,01:

x_1=2,66, x_2= –2,35, x_2=2,25

2.5. Метод Зейделя

В методе Зейделя при нахождении (k +1) -ой компоненты используются уже найденные компоненты этой же итерации с меньшими номерами, т.е. последовательность итераций задается формулой:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}), i = 1,2,3,...,n \quad (2.17)$$

Сходимость и точность достигаются условиями (2.13) и (2.14).

Пример 2.8. Задать итерационный процесс Зейделя для нахождениярешений системы уравнений (2.15).

Решение. Достаточное условие сходимости (2.13) выполняется, поэтому начальное приближение может быть любым.

Используя (2.16) получим:

$$x_1^{(k+1)} = (7 - 4x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) / 7$$

$$x_2^{(k+1)} = (-2 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)}) / 6$$

$$x_3^{(k+1)} = (4 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) / 4$$

После задания начального приближения, например, $x^{(0)} = (0;0;0)$ выражение для первой итерации имеет вид:

$$x_1^{(1)} = (7 - 4 \cdot 0 + 0) / 7 = 1$$

$$x_2^{(1)} = (-2 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0) / 6 = -0{,}667$$

$$x_3^{(1)} = (4 + 1 + 0{,}667) / 4 = 1{,}417$$

Результаты первой итерации подставляют в правую часть и получают результаты второй итерации:

$$x_1^{(2)} = (7 - 4 \cdot (0{,}667) + 1{,}417) / 7 = 1{,}583$$

$$x_2^{(2)} = (-2 - 2 \cdot 1{,}538 - 3 \cdot 1{,}417) / 6 = -1{,}945$$

$$x_3^{(3)} = (4 + 2{,}152 - (-1{,}569)) / 4 = 1{,}788$$

Результаты второй итерации подставляют в правую часть и получают результаты третьей итерации:

$$x_1^{(3)} = (7 - 4 \cdot (-1{,}569) + 1{,}788) / 7 = 1{,}152$$

$$x_2^{(3)} = (-2 - 2 \cdot 2{,}152 - 3 \cdot 1{,}788) / 6 = -1{,}945$$

$$x_3^{(3)} = (4 + 2{,}152 - (-1{,}945)) / 4 = 2{,}024$$

Погрешность решения:

$$\left| x_1^{(3)} - x_1^{(2)} \right| = \left| 2{,}152 - 1{,}583 \right| = 0{,}469$$

$$\left| x_2^{(3)} - x_2^{(2)} \right| = \left| 1{,}945 + 1{,}569 \right| = 0{,}376$$

$$\left| x_3^{(3)} - x_3^{(2)} \right| = \left| 2{,}024 - 1{,}788 \right| = 0{,}236$$

$$\max_i \left| x_i^{(3)} - x_i^{(2)} \right| = 0{,}469$$

Пример 2.9. Решить систему уравнений из примера 2.4 итерационными методами на VBA и оценить погрешность.

Порядок решения.

1) Ввести код программы (рис. 2.7) в модуль листа. Удалить помеченные строки, не соответствующие выбранному методу решения.

```
Sub Iter()
        n = Cells(1, 2)
        kmax = Cells(1, 4)
        ReDim a(n, n), b(n), x(n), r(n)
        ReDim y(n) 'Якоби
        For i = 1 To n
                For j = 1 To n
                        a(i, j) = Cells(i + 2, j)
```

```
        Next j
        b(i) = Cells(i + 2, n + 2)
        x(i) = Cells(i + 2, n + 4)
    Next i
    For k = 1 To kmax
        For i = 1 To n
            s = 0
            For j = 1 To n
                s = s + a(i, j) * x(j)
            Next j
            x(i) = x(i) + (b(i) - s) / a(i, i) ‘Зейдель
            y(i) = x(i) + (b(i) - s) / a(i, i) ‘Якоби
        Next
        x = y ‘Якоби
    Next
    For i = 1 To n
        s = 0
        For j = 1 To n
            s = s + a(i, j) * x(j)
        Next j
        r(i) = b(i) - s
        Cells(i + 2, n + 4) = x(i)
        Cells(i + 2, n + 5) = r(i)
    Next
End Sub
```

Рис. 2.7. Программа решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами на языке VBA

2) Ввести число уравнений n, максимальное число итераций k_{max} ,матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{B}$ в рабочий лист Excel (рис. 2.8).

3) Ввести начальное приближение в столбец H, например, $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 1$.

4) Выполнить программу. В столбце H содержится решение системы:

x_1=1,767019 ; x2=9,807512; x3=2,702465; x4=-0,48533.

5) В столбце I содержатся невязки. Если они велики, повторить расчет,увеличивk_{max}.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n=	4	kmax=	10				x	r
2	10	1	0	0		5		1	
3	-2	9	1	0		-1		1	
4	0	0,1	4	-1		-5		1	
5	0	0	-1	8		40		1	

Рис. 2.8. Таблица исходных данных для решения системы линейных алгебраическихуравнений итерационными методами на языке VBA

Порядок выполнения работы: *(прописывается с учетом специфики учебной дисциплины и МДК)*

1 ____

2 ____.

3

____.

Форма представления результата:

Критерии оценки:

Тема 3. Алгоритмы и методы поиска корней уравнения и решения нелинейных систем

Лабораторная работа №3 «Составление алгоритма и написание программ для поиска корней уравнения и решения систем нелинейных уравнений»

Цель: ____

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2____;
- ____.

Материальное обеспечение: ____

Задание: ____

Краткие теоретические сведения:

Требуется решить систему нелинейных уравнений вида:

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1, x_2,..., x_n)=0\\
&F_2(x_1, x_2,..., x_n)=0\\
&\dots\\
&F_n(x_1, x_2,..., x_n)=0.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

3.1. Метод простой итерации (метод Якоби) для систем нелинейных уравнений

Систему нелинейных уравнений (3.1) после преобразований

$x_i=x_i-F_i(x)\,/M_i,\qquad i=1, 2, 3,...,n$

(здесь M_i определяются из условия сходимости), представим в виде:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(x_1, x_2,..., x_n)\\
x_2 &= f_2(x_1, x_2,..., x_n)\\
&\dots\\
x_n &= f_n(x_1, x_2,..., x_n)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Из системы (3.2) легко получить итерационные формулы метода Якоби. Возьмем в качестве начального приближения какую-нибудь совокупность чисел $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$,..., $x_n^{(0)}$. Подставляя их в правую часть (3.2) вместо переменных x_1, x_2 ,..., x_n , получим новое приближение к решению исходной системы:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})\\
x_2^{(1)} &= f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})\\
&\dots\\
x_n^{(1)} &= f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Эта операция получения первого приближения $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$,..., $x_n^{(1)}$ решения системы уравнения (3.2) называется первым шагом итерации. Подставляя полученное решение в правую часть уравнения (3.2) получим следующее итерационное приближение: $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$ и т.д.:

$$x_i^{(k+1)} = f_i\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{3.4}$$

Итерационный процесс можно считать законченным, если все значения переменных (k+1)-ой итерации, отличаются от значений соответствующих переменных предыдущей итерации, на величину по модулю меньшую заданной точности **ε** , т.е. если:

$$max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^k \right| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

4.2. Метод Зейделя для систем нелинейных уравнений

Метод Зейделя отличается от метода Якоби тем, что вычисления ведутся не по формулам (2.4), а по следующим формулам:

$$\begin{gathered} x_1^{(k+1)} = f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = f_2\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = f_3\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = f_n\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}\right) \end{gathered} \tag{3.6}$$

При решении систем нелинейных уравнений необходимо определить приемлемое начальное приближение. Для случая двух уравнений с двумя неизвестными начальное приближение находится графически.

Сходимость метода Зейделя (Якоби тоже) зависит от вида функции в (3.2), вернее она зависит от матрицы, составленной из частных производных:

$$F' = \begin{pmatrix} f'_{11} f'_{12} f'_{13} \cdots f'_{1n} \\ f'_{21} f'_{22} f'_{23} \cdots f'_{2n} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ f'_{n1} f'_{n2} f'_{n3} \cdots f'_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

где $f'_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Итерационный процесс сходится, если сумма модулей каждой строки F' меньше единицы в некоторой окрестности корня:

$$|f'_{i1}| + |f'_{i2}| + |f'_{i3}| + \cdots + |f'_{in}| < 1, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

или

$$max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| f'_{ij} \right| < 1$$

Пример 4.1. Найти решение системы методом Зейделя с точностьюε= 0,001:

$$\begin{gathered} F\,(x, y) = 2\sin(\,x+1) - y - 0{,}5 = 0 \\ G(x, y) = 10\,\cos(\,y-1) - x + 0{,}4 = 0 \end{gathered} \tag{3.8}$$

Решение: Представим(3.8)в виде(3.5):

$$\begin{gathered} x = f_1(x, y) = x - (2\,\sin(\,x+1) - y - 0{,}5)\,/\,M_1 \\ y = f_2(x, y) = y - (10\,\cos(\,y-1) - x + 0{,}4)\,/\,M_2 \end{gathered} \tag{3.9}$$

Задаем начальные приближения $x_0 = -1$, $y_0 = -0{,}7$.

Запишем достаточное условие сходимости и определяем M_1 , M_2:

$$F' = \begin{pmatrix} f'_{1x} f'_{1y} \\ f'_{2x} f'_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2\cos(x+1)}{M_1} & 1/M_1 \\ -\dfrac{1}{M_2} & 1 + 10\sin\,(y-1)/M_2 \end{pmatrix}$$

$$\left| 1 - \frac{2\cos(x_0+1)}{M_1} \right| + \left| \frac{1}{M_1} \right| < 1$$

$$\left|-\frac{1}{M_2}\right| + \left|1 + \frac{10\sin(y_0 - 1)}{M_2}\right| < 1$$

$$\left|1 - \frac{2\cos(1+1)}{M_1}\right| + \left|\frac{1}{M_1}\right| < 1$$

$$\left|-\frac{1}{M_2}\right| + \left|1 + \frac{10\sin(-0{,}7 - 1)}{M_2}\right| < 1$$

$\left|1 - \frac{2}{M_1}\right| + \left|\frac{1}{M_1}\right| < 1$и $\left|-\frac{1}{M_2}\right| + \left|1 + \frac{9{,}91665}{M_2}\right| < 1$

Определяем частные значения M_1= 2 , M_2=10 ,которые удовлетворяют неравенствам

1–2/2+1/2<1 и 1/10–9,91665/10<1

Переходим к реализации итерационного процесса:

$x_{k+1}= x_k–$ (2 sin(x_k+1)–y_k–0,5)/2

$y_{k+1}= y_k–$ (10 cos(y_k–1)–x_k+ 0,4)/10

$x_1= x_0$–(2sin(x_0+1)–y_0–0,5)/2=–1–(2sin(–1+1)+0,7–0,5)/2= –1,1

$y_1= y_0$–(10 cos(y_0–1)–x_0+0,4)/10=–0,7–(10 cos(–0,7–1)+1,1+0,4)/10= –0,72116

$x_2= x_1$–(2sin(x_1+1)–y_1–0,5)/2=–1,1–(2sin(–1,1+1)+0,72116–0,5)/2= –1,11075

$y_2=y_1$–(10 cos(y_1–1)–x_1+0,4)/10=–0,72116–(10 cos(–0,72116–1)+1,11075+0,4)/10== –0,72244

$x_3=x_2$–(2 sin(x_2+1)–y_2–0,5)/2=–1,11075–(2 sin(–1,11075+1)+0,72244–0,5)/2== –1,11145

$y_3=y_2$–(10 cos(y_2–1)–x_2+0,4)/10=–0,72244–(10 cos(–0,72244–1)+1,11145+0,4)/10== –0,72252

Определяем погрешность по формуле

$$max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon$$

$$|x_3 - x_2| = |-1{,}11145 + 1{,}11075| = 0{,}0007 < \varepsilon = 0{,}001$$

$$|y_3 - y_2| = |-0{,}72252| = 0{,}00008 < \varepsilon = 0{,}001$$

Таким образом, имеем решение: x*=-1,1115 , y*=-0,7225.

Программа, реализующая решение данной задачи, представлена на рис. 3.1. Исходные данные – начальные приближения x_0, y_0, множители M_1, M_2, точность ε и максимальное число итераций n.

	A	B
1	X0	-1
2	Y0	-0,7
3	M1	2
4	M2	10
5	e	0,001
6	n	10000
7	x	-1,1112
8	y	-0,72245

```
Sub program5()
  x = Cells(1, 2)
  y = Cells(2, 2)
  m1 = Cells(3, 2)
  m2 = Cells(4, 2)
  eps = Cells(5, 2)
  n = Cells(6, 2)
  For k = 1 To n
   xk = x-(2*Sin(x+1)-y-0.5)/m1 yk = y-(10*Cos(y-
1)-x+0.4)/m2
If Abs(xk-x)<e And Abs(yk-y)< e Then Cells(7, 2) = xk
```

```
      Cells(8, 2) = yk
      End
    End If
    x = xk
    y = yk
   Next k
   MsgBox "решение не найдено"
End Sub
```

Рис. 3.1. Программа решения системы нелинейных уравнений методом Зейделя

4.3. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений

Основная идея метода Ньютона состоит в выделении из уравненийсистемы линейных частей, которые являются главными при малых приращениях аргументов. Это позволяет свести исходную задачу к решению последовательности систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными вида:

$$\begin{cases} F(x, y)=0 \\ G(x, y)=0 \end{cases} \qquad (4.10)$$

Пусть известно некоторое приближение x_k, y_k корня x^*, y^*. Тогда поправки $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ можно найти, решая систему:

$$\begin{cases} F(x_k + \Delta x_k, y_k + \Delta y_k) = 0 \\ G(x_k + \Delta x_k, y_k + \Delta y_k) = 0 \end{cases} \qquad (4.11)$$

Для этого разложим функции F, G в ряд Тейлора по Δx_k, Δy_k. Сохранив только линейные по Δx_k, Δy_k части, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x_k, y_k)}{\partial x} \Delta x_k + \dfrac{\partial F(x_k, y_k)}{\partial y} \Delta y_k = -F(x_k, y_k) \\ \dfrac{\partial G(x_k, y_k)}{\partial x} \Delta x_k + \dfrac{\partial G(x_k, y_k)}{\partial y} \Delta y_k = -G(x_k, y_k) \end{cases} \qquad (4.12)$$

относительно неизвестных поправок Δx_k, и Δy_k. Решая эту систему ли-нейных уравнений, определяем значения Δx_k, Δy_k.

Таким образом, решение системы уравнений по методу Ньютона со-стоит в построении итерационной последовательности:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \\ y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \end{cases} \qquad (4.13)$$

где Δx_k, Δy_k - решения систем линейных уравнений, вида (4.12) на каж-дом шаге итерации.

методе Ньютона для обеспечения хорошей сходимости также ва-жен правильный выбор начального приближения.

Пример 4.2. Найти решение системы(4.8)методом Ньютона с точ-ностью $\varepsilon = 0{,}001$.

$$\begin{cases} F(x,y)=2\sin(x+1)-y-0{,}5=0 \\ G(x,y)=10\cos(y-1)-x+0{,}4= \end{cases} \qquad (4.13)$$

Решение. Начальные приближения $x_0=-1$, $y_0=-0{,}7$. Определим частные производные:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=2\cos(x+1)\,; \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=-1$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}=-1 \qquad \frac{\partial G(x,y)}{\partial x}=-10\sin(y-1)$$

и, используя (4.12), построим систему линейных уравнений относительно поправок

$$\begin{cases} 2\cos(x_k+1)\Delta x_k-1\cdot\Delta y_k=-2\sin(x_k+1)+y_k+0{,}5 \\ -1\cdot\Delta x_k-10\sin(y_k-1)\Delta y_k=-10\cos(y_k-1)-x_k+0{,}4 \end{cases}$$

Подставляя начальные приближения $x_0=-1$, $y_0=-0{,}7$ и решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \Delta x_0-\Delta y_0=-0{,}2 \\ -\Delta x_0+9{,}9166\Delta y_0=-0{,}116 \end{cases},$$

определяем поправки на первом шаге итерации

$\Delta x_0=-0{,}1112$, $\Delta y_0=-0{,}0225$

Далее начальное приближение уточняем по формулам (4.13)

$x_1=x_0+\Delta x_0=-1-0{,}1112=-1{,}1112$

$y_1=y_0+\Delta y_0=-0{,}7-0{,}0225=-0{,}7225$

Подставляя результаты первой итерации $x_1=-1{,}1112$, $y_1=-0{,}7225$ и решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 1{,}9876\Delta x_1-\Delta y_1=-5{,}5806\cdot10^{-4} \\ -\Delta x_1+9{,}8852\Delta y_1=2{,}4576\cdot10^{-5} \end{cases}$$

определяем поправки на втором шаге итерации

$\Delta x_1=-2.945\cdot10^{-4}\approx0{,}0003$, $\Delta y_1=-2.73\cdot10^{-5}\approx0{,}00003$

Далее x_1 и y_1 уточняем по формулам (4.12)

$x_2=x_1+\Delta x_1=-1{,}1112-0{,}0003\approx-1{,}1115$

$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = -0{,}7225 - 0{,}00003 \approx -0{,}7225$

Определяем погрешность по формуле $\max\limits_{1 \le i \le n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$:

$|x_2 - x_1| = 0{,}0003 < \varepsilon = 0{,}001$

$|y_2 - y_1| = 0{,}00003 < \varepsilon = 0{,}001$

Таким образом, имеем решение: $x^* = -1{,}1115$, $y^* = -0{,}7225$.

Программа, реализующая метод Ньютона для указанной задачи, представлена на рис. 4.2. Исходные данные – начальные приближения x_0 , y_0,точностьεи максимальное число итераций n .

		B
	0	-1
	0	-0,7
		0,00 1
		1000
		0
		- 1,11149
		- 0,72253

```
Sub program6()
 x = Cells(1, 2)
 y = Cells(2, 2)
 e = Cells(3, 2)
 n = Cells(4, 2)
 For k = 1 To n
  F = 2 * Sin(x + 1) – y - 0.5 G = 10 * Cos(y -
1) – x + 0.4 Fx = 2 * Cos(x + 1) Fy = -1

  Gx = -1
  Gy = -10 * Sin(y - 1)
  D = Fx * Gy – Gx * Fy
  Dx = (G * Fy – F * Gy) / D
  Dy = (F * Gx – G * Fx) / D
  xk = x + Dx
  yk = y + Dy
If Abs(xk-x)< e And Abs(yk-y)< e Then Cells(5, 2) = xk
    Cells(6, 2) = yk
    End
  End If
  x = xk
  y = yk
```

```
    Next k
    MsgBox "решение не найдено"
    End
  End Sub
```

Рис. 4.2. Программа, реализующая метод Ньютона на языке VBA.

Пример 4.3. Найти решение системы(4.8)с помощью программы Excel.

$$F(x, y)=2\sin(x+1)-y-0{,}5=0$$

$$G(x,y)=10\cos(y-1)-x+0{,}4=0$$

Порядок решения.

Подключить надстройку «Поиск решения» через *Кнопка«Офис»-Параметры Excel-Надстройки-Надстройки Excel-Перейти* (рис. 4.3);

Ввести в ячейки **A1, B1, C1, D1** заголовки столбцов (рис. 4.4а);

) В ячейку **A2** – начальное приближение для ***x*** : **1**

) В ячейку **B2** – начальное приближение для ***y*** : **0,7**

) В ячейку **C2** – формулу ***F*(*x*,*y*)** **=2*SIN(A2+1)-B2-0,5**

) В ячейку **D2** – формулу ***G*(*x*,*y*)** **=10*COS(B2-1)-A2+0,4**

Вызвать диалоговое окно «Поиск решения»: *Данные-Поиск решения* (рис. 4.5)

В качестве целевой ячейки указываем результат вычисления левой части одного из уравнений, например, $F(x, y)$, т.е. ячейку **C2**

Для решения уравнения значение $F(x, y) = 0$, поэтому выбираем переключатель «значение», а в соответствующее поле вводим **0**

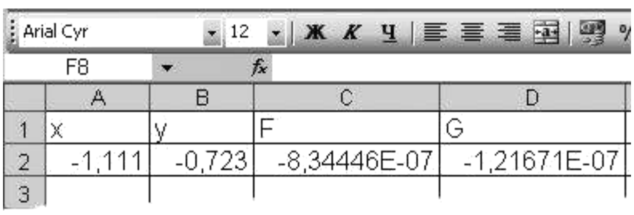
Установив курсор в поле «Изменяя ячейки», выделяем ячейки незвестных x, y, т.е. **A2: B2**

Остальные уравнения системы рассматриваются как дополнительные ограничения ($G(x, y) = 0$). Нажимаем кнопку «Добавить», отмечаем мышью ячейку **D2** и вводим **=0**

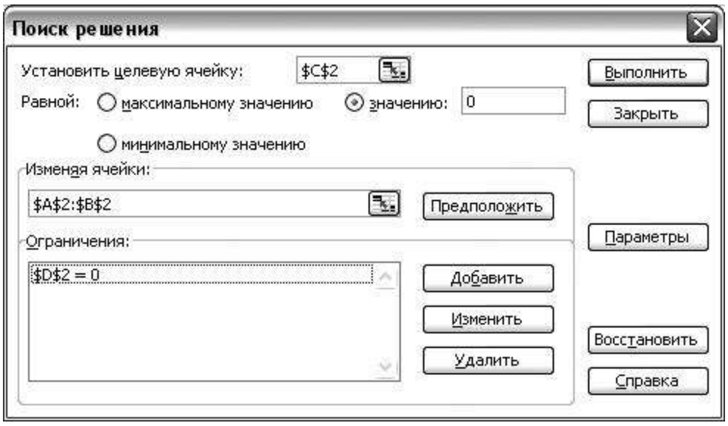
Нажимаем кнопку «Выполнить». Если решение найдено, появляется окно сообщения предложением сохранить найденное решение или восстановить исходные значения. Нажимаем кнопку ОК.

В ячейках **A2: B2** - решение системы (рис. 4.4б),

т.е $x= -1{,}111$, $y= -0{,}723$



	A	B	C	D
1	x	y	F	G
2	-1,111	-0,723	-8,34446E-07	-1,21671E-07
3				



а)

б)

Рис. 4.3. Подключения надстройки «Поиск решения».

Рис. 4.4. Рабочий лист до и после выполнения поиска решения.

Рис. 4.5. Параметры окна «Поиск решения».

Порядок выполнения работы: *(прописывается с учетом специфики учебной дисциплины и МДК)*

1 ____

2 ____.

3 ____.

Форма представления результата:

Критерии оценки:

Тема 4. Методы аналитического представления таблично заданной функции

Лабораторная работа №4 «Составление алгоритма и написание программ для интерполирования функции»

Цель: ____

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- ____;
- ____.

Материальное обеспечение: ____

Задание:

Варианты заданий:

1) $f(x) = (\ln x)^{13/4}$; $x_i = 2, 3, 4$; $a = 2{,}5$;
2) $f(x) = (\ln x)^{17/4}$; $x_i = 9, 11, 13$; $a = 10{,}5$;
3) $f(x) = (\ln x)^{12/5}$; $x_i = 4, 5, 6$; $a = 4{,}5$;
4) $f(x) = (\ln x)^{4/7}$; $x_i = 3, 6, 9$; $a = 8{,}5$;
5) $f(x) = (\ln x)^{11/3}$; $x_i = 5, 6, 7$; $a = 5{,}5$;
6) $f(x) = (\ln x)^{13/3}$; $x_i = 9, 11, 13$; $a = 11{,}5$;
7) $f(x) = (\ln x)^{11/7}$; $x_i = 6, 7, 8$; $a = 6{,}5$;
8) $f(x) = (\ln x)^{12/11}$; $x_i = 10, 12, 14$; $a = 13{,}5$;
9) $f(x) = (\ln x)^{1/2}$; $x_i = 7, 8, 9$; $a = 7{,}5$;
10) $f(x) = (\ln x)^{13/7}$; $x_i = 8, 11, 14$; $a = 12{,}5$;
11) $f(x) = (\ln x)^{3/2}$; $x_i = 8, 9, 10$; $a = 8{,}5$;
12) $f(x) = (\ln x)^{10/9}$; $x_i = 11, 13, 15$; $a = 12{,}5$;
13) $f(x) = (\ln x)^{11/5}$; $x_i = 2, 4, 6$; $a = 4{,}5$;
14) $f(x) = (\ln x)^{9/7}$; $x_i = 9, 12, 15$; $a = 11{,}5$;
15) $f(x) = (\ln x)^{10/7}$; $x_i = 4, 6, 8$; $a = 6{,}5$;
16) $f(x) = (\ln x)^{9/5}$; $x_i = 5, 8, 11$; $a = 9{,}5$;
17) $f(x) = (\ln x)^{11/7}$; $x_i = 6, 8, 10$; $a = 8{,}5$;
18) $f(x) = (\ln x)^{9/2}$; $x_i = 11, 12, 13$; $a = 11{,}5$;
19) $f(x) = (\ln x)^{12/7}$; $x_i = 2, 5, 8$; $a = 5{,}5$;
20) $f(x) = (\ln x)^{3/5}$; $x_i = 6, 9, 12$; $a = 11{,}5$;
21) $f(x) = (\ln x)^{1/3}$; $x_i = 5, 8, 11$; $a = 8{,}5$;
22) $f(x) = (\ln x)^{10/7}$; $x_i = 6, 9, 12$; $a = 10{,}5$;
23) $f(x) = (\ln x)^{5/3}$; $x_i = 2, 6, 10$; $a = 6{,}5$;
24) $f(x) = (\ln x)^{13/5}$; $x_i = 7, 10, 13$; $a = 12{,}5$;
25) $f(x) = (\ln x)^{9/4}$; $x_i = 3, 6, 9$; $a = 6{,}5$;
26) $f(x) = (\ln x)^{5/9}$; $x_i = 2, 4, 6$; $a = 4{,}5$;
27) $f(x) = (\ln x)^{5/7}$; $x_i = 8, 12, 16$; $a = 9{,}5$;
28) $f(x) = (\ln x)^{2/11}$; $x_i = 5, 7, 9$; $a = 8{,}5$;
29) $f(x) = (\ln x)^{2/13}$; $x_i = 3, 5, 7$; $a = 3{,}5$;
30) $f(x) = (\ln x)^{11/20}$; $x_i = 11, 14, 17$; $a = 15{,}5$.

Краткие теоретические сведения:

Очень часто в практической работе возникает необходимость найти в явном виде функциональную зависимость (формулу) $y = \tilde{y}(x)$ между величинами x и y, которые заданы отдельными парами значений x_i, y_i (таблицей), например, полученными в результате измерений.

Задача восстановления аналитической функции по отдельным зна-чениям называется аппроксимацией. Для получения единственного реше-ния задачи аппроксимации необходимо

Задать общий вид аппроксимирующей функции, включающий неиз-вестные параметры (коэффициенты). Вид функции задается, исходя из формы распределения аппроксимируемых значений (расположения то-чек на графике), из предполагаемой функциональной зависимости, или просто в виде полинома некоторой степени;

Определить значения параметров на основе заданного критерия близо-сти. Здесь существует два основных подхода – интерполяция и сглажи-вание.

5.1. Интерполяция

Для задачи интерполяции критерий близости аппроксими-рующей функции $y = \tilde{y}(x)$ к исход-ным данным x_i, y_i рассматривается как совпадение значений в заданных точках, называемых узлами интер-

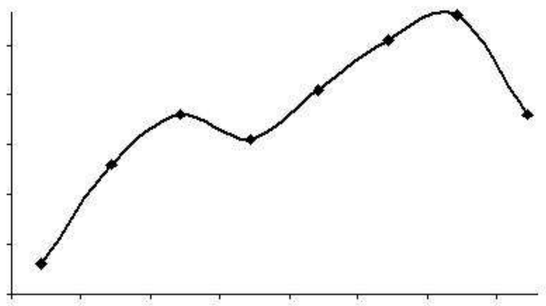


Рис. 5.1. График интерполирующей функции проходит через заданные точ-ки.

поляции (рис. 5.1), т.е. $\tilde{y}(x_i)= y_i$. Если функция задана в виде полинома, то он называется интер-

поляционным полиномом и может быть записан, например, в форме Ла-гранжа или Ньютона.

5.1.1. Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Пусть на некотором промежутке $[a; b]$ заданы n различных узлов x_1 , x_2, x_3, …, x_n,а также значения некоторой функции y_1, y_2, y_3, …, y_nвэтих узлах. Необходимо построить полином $P(x)$, проходящий через за-данные точки, т.е.

$$P(x_i)= y_i$$

Интерполяционный полином Лагранжа имеет следующую формулу:

$$P(x)= L_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x) \tag{5.1}$$

де $l_i(x) = \dfrac{(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$ – фундаментальные поли-номы Лагранжа. Они удовлетворяют равенствам

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{5.2}$$

зависят лишь от заданных узлов x_i , но не от значений интерполируемой функции y_i .

Пример 5.1. Пусть задана таблица:

Табли ца 5.1

x_i	−1	0	1/2	

i	0	2	9/8

Необходимо построить интерполяционный полином Лагранжа, про-ходящий через заданные точки

Решение.Полином Лагранжа имеет вид:

$L_3(x)= y_1 l_1(x)+ y_2 l_2(x)+ y_3 l_3(x)+ y_4 l_4(x)=$

$$0 \cdot l_1(x) + 2l_2(x) + \frac{9}{8} l_3(x) + 0 \cdot l_4(x) = 2l_2(x) + \frac{9}{8} l_3(x)$$

Найдем фундаментальные полиномы Лагранжа:

$$l_2(x) = \frac{(x-x\ )(x-x\ )(x-x\ )}{x \quad x\ )(x - x\ )(x - x\ )} \quad \frac{(x+1)(x- \quad (x-1)}{(0+1)(0- \quad (0-1)} \quad -2x \quad x \quad 2x+1$$

$$_3\ x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{x \quad x\ )(x - x\ )(x - x\ )} \quad \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{1)(\quad 0)(\quad 1)} \quad - \quad x$$

Подставляя $l_i(x)$ в полином Лагранжа, находим:

$$L_3(x)=2l_2(x)+\frac{9}{8} l_3(x)= x^3-2x^2- x +2$$

5.1.2. Интерполяционный полином в форме Ньютона

Интерполяционный полином Ньютона имеет вид:

$$N_{n-1}(x)= \Delta^0(x_1)+ \Delta^1(x_1, x_2)(x-x_1) + \Delta^2(x_1, x_2, x_3)(x-x_1)(x-x_2) +\ldots$$
$$\ldots + \Delta^{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}) \tag{5.3}$$

де

$\Delta^0(x\ ) = y$

$(x_i \quad x_k = \dfrac{\Delta^0(x_i) - \Delta^0(x_k)}{\quad_i \quad x_k}$ - разделенная разность первого порядка,

$\Delta^2(x, x \quad x = \dfrac{\Delta^1(x, x \quad - \Delta^1(x \quad x}{x_i - x_k}$ - разделенная разность второго порядка,

$\Delta^3(x, x \quad x, x = \dfrac{2 \quad x, x\ ) - \Delta^2 \quad x \quad x, x}{}$ – разделенная разность третьего

$_i - x_k$

порядка и т.д.

Пример 5.2. Построить интерполяционный полином в форме Нью-тона, проходящий через точки, заданные таблицей 5.1.

Решение.Расчеты представим в виде таблицы.

Таблица 5.2

x_i	y_i	Δ1	2	3
−1	0			
		2		
	2		$\boxed{5/2}$	
		− 7 / 4		
1/2	9 / 8		1/ 2	
		−9 / 4		
	0			

$\Delta^1(1,2) = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (0-2)/(-1-0) = 2$

$\Delta^1(2,3) = (y_2 - y_3)/(x_2 - x_3) = (2 - 9/8)/(0 - 1/2) = -7/4$

$\Delta^1(3,4) = (y_3 - y_4)/(x_3 - x_4) = (9/8 - 0)/(1/2 - 1) = -9/4$

$\Delta^2(1,2,3) = (\Delta^1(1,2) - \Delta^1(2,3))/(x_1 - x_3) = (2 + 7/4)/(-1 - 1/2) = -5/2$

$\Delta^2(2,3,4) = (\Delta^1(2,3) - \Delta^1(3,4))/(x_2 - x_4) = (-7/4 + 9/4)/(0 - 1) = -1/2$ $\Delta^3(1,2,3,4) = (\Delta^2(1,2,3) - \Delta^2(2,3,4))/(x_1 - x_4) = (-5/2 + 1/2)/(-1-1) = 1$

$N_3(x) = \Delta^0(1) + \Delta^1(1,2)(x - x_1) + \Delta^2(1,2,3)(x - x_1)(x - x_2) +$

$\Delta^3(1,2,3,4)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$

$2(x+1) = 0 + - \quad (x+1)x + 1\cdot(x+1)x \,|\, x - \quad x \quad 2x \quad x + 2$

Пример 5.3. Построить интерполяционный полином,проходящийчерез точки, заданные таблицей 5.1, используя программу Excel.

Порядок решения.

Ввести таблицу в рабочий лист Excel (обыкновенные дроби вводятся как формулы, т.е. **=9/8**). Выделить ячейки таблицы.

Вставить диаграмму: **Вставка** – **Диаграммы** – **Точечная** – **точечная с маркерами**.На рабочем листе появится график точек табли-цы.

Вызвать контекстное меню (правой кнопкой мыши) одной из точек графика. Выбрать пункт «**Добавить линию тренда**».

Выбрать **Полиномиальную** аппроксимацию и установить степень полинома на единицу меньше числа точек, т.е. **3**.

Отметить «**показывать уравнение на диаграмме**».

Закрыть окно настроек. Появляется линия графика интерполирую-щей функции и соответствующая формула:

$$y(x)=x^3-2x^2-x+2$$

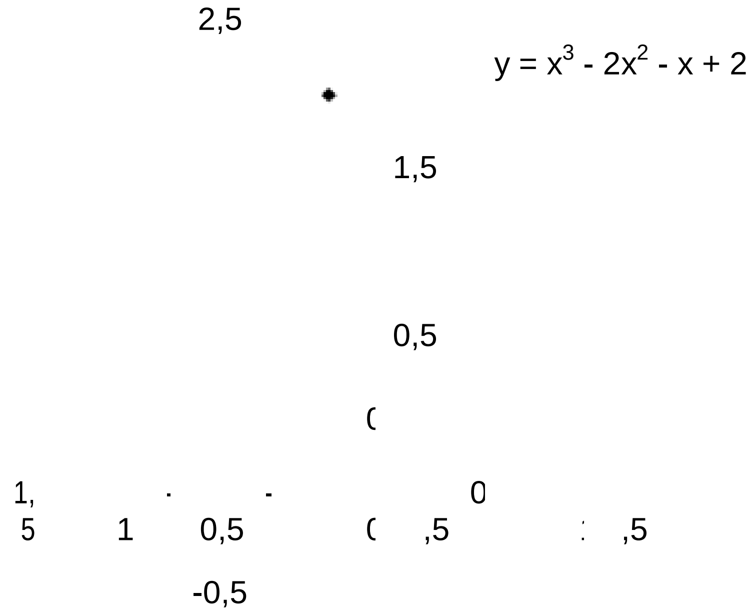


Рис. 5.2. Результаты интерполяции в программе Excel.

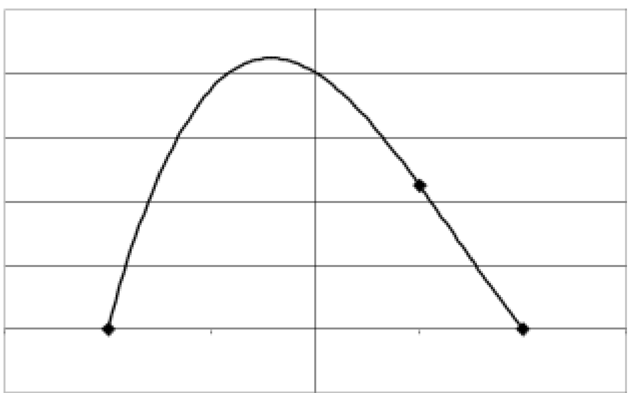
Интерполяционный полином определяется единственным образом независимо от метода его построения. Степень интерполирующего поли-нома на единицу меньше числа точек

Повышение степени интерполирующего полинома может приводить появлению нежелательных «осцилляций» функции между узлами интер-поляции. Поэтому сложные интерполяционные формулы имеет смысл применять для достаточно гладких функций, о которых известно, что ха-рактер изменения функций и производных примерно соответствует харак-теру изменения интерполирующих полиномов.

5.1.3. Сплайн-интерполяция

Сплайн-интерполяция предполагает представление интерполирую-щей функции в виде комбинации разных функций, соответствующих от-резкам между соседними узлами. На функции-сплайны накладываются ус-ловия непрерывности, т.е. совпадения значений для соседних сплайнов в узле. Условие непрерывности может касаться как функции, так и ее произ-водных, в зависимости от сложности сплайна. Из условий непрерывности определяются коэффициенты сплайнов, которые и задают интерполирую-щую функцию в целом.

Простейший вид сплайн-интерполяции – ступенчатая интерполяция, функции-сплайны постоянны между узлами. Линейный сплайн непреры-вен в узлах интерполяции, первая производная имеет разрывы, вторая и высшие производные не



существуют. Для достижения более высокой точности интерполирования применяют полиномиальные сплайны более вы-соких степеней. Наиболее широкое применение получил кубический сплайн. Кубический сплайн на каждом отрезке между соседними узлами представляет собой полином 3-й степени, удовлетворяет условию непре-

рывности вместе со своей первой и второй производной.

Сплайн-интерполяция функции $y = y(x)$, заданной таблицей значе-ний в узлах (x_i ; y_i) , определяет набор фунций-сплайнов $f_i(x)$,аппрокси-мирующих $y(x)$ на интервалах $x_{i-1} \le x < x_i$, $i = 0, 1, 2, ..., n$.

	i	y i
	0	y 0
	1	y 1
	2	y 2
..	. ..	. ..
	n	y n

$$y(x) = \begin{cases} f_1(x) & x_0 \le x < x_1 \\ f2\ x) & x_1 \le x < x_2 \\ ... & ... \\ f_n\ x) & x_{n-1} \le x < x_n \end{cases}$$

Если применить кубические сплайны, то

$$(x) = a + b\,(x - x\ ) + c\,(x - x\ )^2 + d\ \ (x - x\ )^3 . \quad i \tag{5.4}$$

Введем обозначения $i = x_i - x_{i-1}$,

тогда в пределах каждого из сплайнов $0 \le x - x_i < h_i$.

Из условия непрерывности функции (x) следует $2n$ уравнений:

$f_i\,(x_{i-1}) = y_{i-1}$

$f_i(x_i) = y_i$ $=1, \ , \ .., \ .$

И

ли

$a_i = y_{i-1}$ (5.5)

$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i$ $\quad i = 1, 2, ..., \quad .$ (5.6)

Из условия непрерывности 1-й производной функции $f\,(x)$следует -1 уравнений:

$f_i(x_i)$ $(x_i\ )$ $i = 1, 2, ..., n$

$= f_{i+1}$ -1.

Т.к. $f_i' = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$, то

$$b_i + 2c_i(x_i - x_{i-1}) + 3d_i(x_i - x_{i-1})^2 = b_{i+1} \quad \text{или}$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 - b_{i+1} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5.7}$$

Из условия непрерывности 2-й производной функции $f(x)$ следует -1 уравнений:

$$f''_{i+1}(x_i) = f''_i(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

.к. $= 2c + 6d(x - x_{i-1})$, то

$$2c_i + 6d_i(x_i - x_{i-1}) = 2c_{i+1} \quad \text{или}$$

$$c_i + 3d_i h_i - c_{i+1} = 0 \qquad = 1, \ldots, n-1. \tag{5.8}$$

Получаем $2n + (n-1) + (n-1) = 4n - 2$ уравнения относительно $4n$ неизвестных. Оставшиеся два уравнения задают, фиксируя значения производных на концах кривой, например так:

$$f''(x_0) = 0 \qquad f''(x_n) = 0,$$

или

$$c_1 = 0 \tag{5.9}$$

$$c_n + 3d_n h_n = 0. \tag{5.10}$$

Полученные уравнения представляют собой систему линейных ал-гебраических уравнений относительно $4n$ неизвестных a_i, b_i, c_i, d_i, ($i = 0, 1, \ldots, n$).

Эту систему можно привести к более удобному виду. Из условия (5.5) сразу можно найти все коэффициенты a_i. Далее из (5.8)-(5.10) получим

$$_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad _n = -\frac{d_n}{3h_n}. \tag{5.11}$$

Подставим эти соотношения, а также значения $a_i = y_{i-1}$ в (5.6) и найдем отсюда коэффициенты

$$= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \;(c_{i+1} + 2c), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \; h_n c_n. \tag{5.12}$$

Учитывая выражения (5.11) и (5.12), исключаем из уравнения (5.7) коэффициенты d_i и b_i . Окончательно получим следующую систему уравнений только для коэффициентов c_i :

$$c_1=0, \qquad c_{n+1}=0,$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \tag{5.13}$$

$i = 2,3,..., n$.

Матрица этой системы трехдиагональная, т.е. ненулевые элементы находятся лишь на главной и двух соседних с ней диагоналях, располо-женных сверху и снизу. Для ее решения целесообразно использовать ме-тод прогонки. По найденным из системы (5.13) коэффициентам c_i легко вычислить коэффициенты d_i, b_i .

Пример 5.4. Построить кубический сплайн для функции $f(x)=\sin(\pi x)$ на отрезке [0; 2], используя разбиения отрезка n =10 частей.

Найти значение в точке x= 0,48 .

Решение. В ячейках **A1:N1** запишем обозначения столбцов как в таблице.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	i	x	h	y	d1	a1	b1	c1	u	v	c	a	b	d		
2	0	0,000		0,000												
3	1	0,200	0,200	0,588							0	0,000	3,1387	-4,9954		
4	2	0,400	0,200	0,951	-3,368	0,000	0,800	0,200	-0,250	-4,210	-2,9972	0,588	2,5393	-3,0873		
5	3	0,600	0,200	0,951	-5,449	0,200	0,800	0,200	-0,267	-6,143	-4,8496	0,951	0,9699	-1E-07	0,08	0,9976
6	4	0,800	0,200	0,588	-5,449	0,200	0,800	0,200	-0,268	-5,652	-4,8496	0,951	-0,97	3,0873		
7	5	1,000	0,200	0,000	-3,368	0,200	0,800	0,200	-0,268	-2,997	-2,9972	0,588	-2,539	4,9954		
8	6	1,200	0,200	-0,588	0,000	0,200	0,800	0,200	-0,268	0,803	-3E-07	0,000	-3,139	4,9954		
9	7	1,400	0,200	-0,951	3,368	0,200	0,800	0,200	-0,268	4,297	2,99723	-0,588	-2,539	3,0873		
10	8	1,600	0,200	-0,951	5,449	0,200	0,800	0,200	-0,268	6,149	4,84962	-0,951	-0,97	3E-07		
11	9	1,800	0,200	-0,588	5,449	0,200	0,800	0,200	-0,268	5,653	4,84962	-0,951	0,9699	-3,0873		
12	10	2,000	0,200	0,000	3,368	0,200	0,800	0,000	0,000	2,997	2,99723	-0,588	2,5393	-4,9954		
13											0					

Построим таблицу значений функции.

ячейки **A2:A12** запишем значение индекса i = **0, 1,…, 10**.

ячейку **B2** запишем **0**, а в **B3** запишем **0,2**. Выделим **B2:B3** и маркером заполнения протянем вниз до **B12**.

ячейку **C3** запишем формулу **=B3-B2** и маркером заполнения протя-нем вниз до **C12**.

ячейку **D2** запишем формулу **=sin (3,1415926*B2)**, выделим **D2** и маркером заполнения протянем вниз до **D12**.

Вычислим коээфициенты системы 2.9.

ячейку **E4** запишем формулу **=3*(D4-D3)/C4-3*(D3-D2)/C3** и марке-ром заполнения протянем вниз до **E12**.

ячейку **F4** запишем **0**, в ячейку **F5** запишем **=C4** и маркером запол-нения протянем вниз до **F12**.

ячейку **G4** запишем формулу **=2*(C3+C4)** и маркером заполнения протянем вниз до **G12**.

ячейку **H4** запишем формулу **=C4** и маркером заполнения протянем вниз до **H12**.

Вычислим прогоночные коэффициенты (прямой ход прогонки).

ячейку **I4** запишем формулу **=H4/(F4*I3+G4)** и маркером заполнения протянем вниз до **I12**.

ячейку **J4** запишем формулу **=(E4-F4*J3)/(F4*I3+G4)** и маркером за-полнения протянем вниз до **J12**.

Вычислим коэффициенты сплайна (обратный ход прогонки).

ячейки **K3** и **K13** запишем **0**. В ячейку **K12** запишем формулу **=I12*K13+J12** и маркером заполнения протянем вверх до **K4**.

ячейку **L3** запишем формулу **=D2** и маркером заполнения протянем вниз до **L12**.

ячейку **M3** запишем формулу **=(D3-D2)/C3-(K4+2*K3)*C3/3** и марке-ром заполнения протянем вниз до **M12**.

ячейку **N 3** запишем формулу **=(K4-K3)/3/C3** и маркером заполнения протянем вниз до **N12**.

Вычислим значение сплайна.

Точка x= 0,48 попадает в отрезок [0,4; 0,6]. Следовательно, нужно ис-пользовать строку i = 3. Поэтому запишем в ячейку **O5** формулу **=0,48-0,4**,в ячейку **P5** формулу **=L5+M5*O5+K5*O5^2+N5*O5^3**.

Получим значение **0,9976**. Точное значение sin(0,48π)=0,998026… Следовательно, погрешность равна 0,0004.

Пример 5.5.Найти значение функцииy(x),заданной таблично,вточке x=1,324 с помощью кубического сплайна. Использовать подпро-грамму-функцию, реализующую интерполяцию кубическими сплайнами на VBA в Excel (рис. 5.3).

x	1	1,1	1,2	1,4
y	1	0,7513	0,5787	0,364 4

Порядок решения.

Вставить в проект VBA стандартный модуль: в главном меню редак-тора VBA выбрать Insert→Module.

Ввести подпрограмму-функцию spline3 (рис. 5.3) в стандартный мо-дуль проекта VBA. Теперь функция spline3 доступна в табличном процессоре Excel через мастер функций.

Ввести данные таблицы в столбцы Excel. Ввести значение, для кото-рого необходима интерполяция в ячейку **A7**.

Через мастер функций (или вводом текста) вставить функцию spline3 в ячейку **B7**. У функции spline3 два аргумента: первый – диа-пазон ячеек, содержащий таблицу данных **$A$2:$B$5**, второй – ад-рес ячейки, содержащий значение, для которого необходима интер-поляция, т.е. **A7.**

	A	B
1	x	y
2	1	1
3	1,1	0,7513
4	1,2	0,5787
5	1,4	0,3644
6		
7	1,324	=spline3($A$2:$B$5;A7)

5) В ячейке **B7** получаем результат интерполяции **0,436284991**.

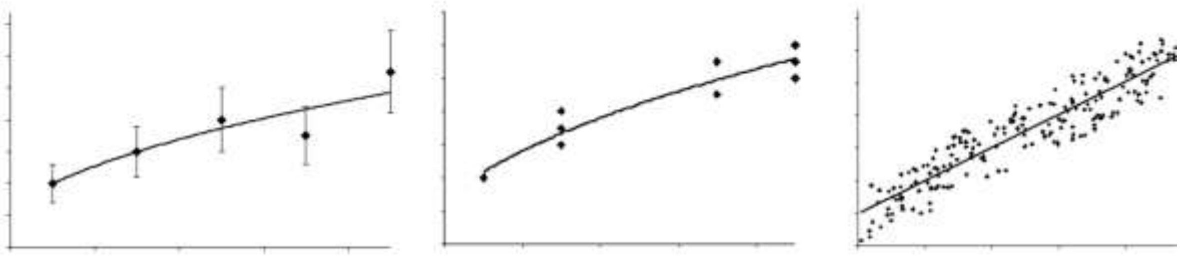
```
Function spline3(xy As Range, t As Double) As Double n =
  xy.Rows.Count
      ReDim a(n), b(n), c(n + 1), d(n)
      ReDim x(n) As Double, y(n) As Double, h(n) As
  Double ReDim a1(n), b1(n), c1(n), d1(n), u(n), v(n) For
  i = 1 To n
        x(i) = xy.Cells(i, 1).Value
        y(i) = xy.Cells(i, 2).Value
      Next
      For i = 1 To n
        h(i) = x(i) - x(i - 1)
      Next
      For i = 2 To n
        a1(i) = h(i - 1)
        b1(i) = 2 * (h(i - 1) + h(i))
        c1(i) = h(i)
    d1(i)    =    3*((y(i)-y(i-1))/h(i)-_
          (y(i-1)-y(i-2))/h(i-1))

      Next
      a1(2) = 0
      c1(n) = 0
      For i = 2 To n
        u(i) = -c1(i) / (a1(i)*u(i-1)+b1(i))
        v(i) = (d1(i)-a1(i)*v(i-1)) / (a1(i)*u(i-1)+b1(i))
      Next
      c(1) = 0
      c(n + 1) = 0
      For i = n To 2 Step -1
        c(i) = u(i) * c(i + 1) + v(i)
      Next
      For i = 1 To n
        a(i) = y(i-1)
        d(i) = (c(i + 1) - c(i)) / (3 * h(i))
```

```
  b(i)   =   (y(i)-y(i-1))/h(i)-h(i)/3*(c(i+1)+2*c(i))
Next
     For k = 1 To n
  If x(k - 1) <= t And t <= x(k) Then GoTo L2
Next
L2: S = a(k) + b(k) * (t - x(k - 1)) + _
        c(k) * (t - x(k - 1)) ^ 2 + _ d(k)
        * (t - x(k - 1)) ^ 3
    spline3 = S
   End Function
```

Рис. 5.3. Подпрограмма-функция, реализующая интерполяцию кубическими сплайнами на VBA в Excel.

5.2. Сглаживание. Метод наименьших квадратов

Задача аппроксимации функции может ставиться, когда исходные данные содержат погрешности (рис. 5.4а), повторы (рис. 5.4б) или очень большое количество точек (рис. 5.4в). В этих случаях аппроксимация на основе интерполяции не имеет смысла или невозможна.



а) б) в)

Рис. 5.4. Аппроксимация функции сглаживанием.

Для задачи аппроксимации сглаживанием критерий близости аппроксимирующей функции $\tilde{y}(\bar{x})$, к исходным данным x y_i рассматривается как минимальное отклонение значений в заданных точках. Количественно отклонение может быть оценено различными способами. Наи-большее распространение получил метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому необходимо минимизировать сумму квадратов:

$$S = \sum_{i=1} \left(\tilde{y}(x_i a) - y_i \right)^2 \to \min \qquad (5.14)$$

где $x_i y_i$ – значения данных $\tilde{y}(x_i, a)$ – значение аппроксимирующей функ-ции в точке x_i ; n – число данных, a – незвестные параметры. Задача сво-дится к нахождению экстремума функции параметров $S(a)$.

Линейная аппроксимация. В случае линейной формулы $\tilde{y}(x) = ax + b$ сумма квадратов(5.14)принимает вид:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \to \min \qquad (5.15)$$

Функция (5.15) имеет минимум в точках, в которых частные производные от S по параметрам a и b обращаются в нуль, т.е.

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0\,, \qquad \frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0 \qquad (5.16)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i+b-y_i)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i+b-y_i) = 0$$

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (5.17)$$

Решая систему уравнений (5.17), получим значения a и b уравнения $\tilde{y}(x) = ax + b$.

Пример 5.6. Подобрать аппроксимирующий полином первой степени $\tilde{y}(x) = ax + b$ для данных

Таблица 5.3.

x_i	0	1	2	4
y_i	0,2	0,9	2,1	3,7

Решение. Для удобства вычисленные значения расположим в таблице.

Таблица 5.4.

			x_i^2	y
		0,2	0	0,0
		0,9	1	0,9
		2,1	4	4,2
		3,7	16	14,8
$\sum\limits_{i=1}^{n}$		6,9	21	19,9

Система для определения коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} 21a + 7b = 19{,}9 \\ 7a + 4b = 6{,}9 \end{cases} \qquad (5.18)$$

Решая систему (5.18), получим следующие значения параметров: $a = 0{,}894$, $b = 0{,}160$. Следовательно, искомый полином имеет вид:

$$\tilde{y}(x) = 0{,}894x + 0{,}160.$$

Полиномиальная аппроксимация. В случае выбора зависимости в виде полинома, например, 2-й степени $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$ и (5.14) принимает вид:

$$S(a,b,c)=\sum_{i=1}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\rightarrow\min \tag{5.19}$$

Функция (5.19) имеет минимум в точках, в которых частные произ-водные от S по параметрам a , b , c обращаются в нуль, т.е.:

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial b}=0,\quad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial c}=0 \tag{5.20}$$

результате дифференцирования и элементарных преобразований для определения параметров получают систему из трех линейных уравне-ний с тремя неизвестными:

$$\sum_{=1}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2=0$$

$$\sum_{=1}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i=0$$

$$\sum_{=1}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0$$

ли

$$\begin{cases} a\sum_{=1} x_i^4+b\sum_{=1} x_i^3+c\sum_{=1} x_i^2=\sum_{=1} x_i^2 y_i \\ a\sum_{=1} x_i^3+b\sum_{=1} x_i^2+c\sum_{=1} x_i=\sum_{=1} x_i y_i \\ a\sum_{=1} x_i^2+b\sum_{=1} x_i+cn=\sum_{=1} y_i \end{cases} \tag{5.21}$$

Решая систему линейных уравнений (5.21), получим значения параметров a, b и c функции $\tilde{y}(x)$ ax + $bx + c$.

Пример 5.7. Используя МНК, построить зависимость вида

$\tilde{y}(x) = ax$ + $bx + c$, аппроксимирующую следующие табличные значения:

Таблица 5.5.

i	2	1			2
i	6		1	2	-1

Решение. Расчеты представим в виде таблицы.

Таблица 5.6.

	i	i	2	3	4	$x_i y_i$	$^2 y_i$
	2			8	16	12	24
	1			1	1	2	2
		1			0		0
		2			1	2	-2
		1			16	2	-4
=1			0		34	18	20

Тогда система линейных уравнений (5.21) относительно значений a, и c примет вид:

$$\begin{cases} 34a + 0b + 10c = 20 \\ 0a + 10b + 0c = -18 \\ 10a + 0b + 5c = 4 \end{cases} \qquad (5.22)$$

Решая систему (5.22), получим следующие значения параметров $a = 0{,}857$; $b = -1{,}800$; $c = -0{,}914$. Таким образом, искомый полином имеет вид:

$$y(x) = 0{,}857x \quad -1{,}8x - 0{,}914$$

Таблица 5.7.

	i	i	$\tilde{y}(x_i)$	$(y - \tilde{y}(x))$
	-2		6,114	0,012
	-1		1,743	0,066
	0	1	-0,914	0,007
	1	2	-1,857	0,020
	2	1	-1,086	0,007
			$\sum$	,112

Пример 5.8. Используя программуExcel,построить функцию вида $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$,аппроксимирующую значения из таблицы5.5:

Порядок решения.

Ввести таблицу в рабочий лист Excel (рис. 5.5). Выделить ячейки таблицы. Вставить диаграмму: **Вставка – Диаграммы – Точечная – точечная с маркерами**.На рабочем листе появится график точек табли-цы.

Рис. 5.5. Добавление линии тренда в точечную диаграмму.

Вызвать контекстное меню (правой кнопкой мыши) одной из точек графика. Выбрать пункт «**Добавить линию тренда**».

Выбрать «**Полиномиальная№** аппроксимация и установить степень полинома, равной **2** (рис. 5.6).

Отметить «**показывать уравнение на диаграмме**».

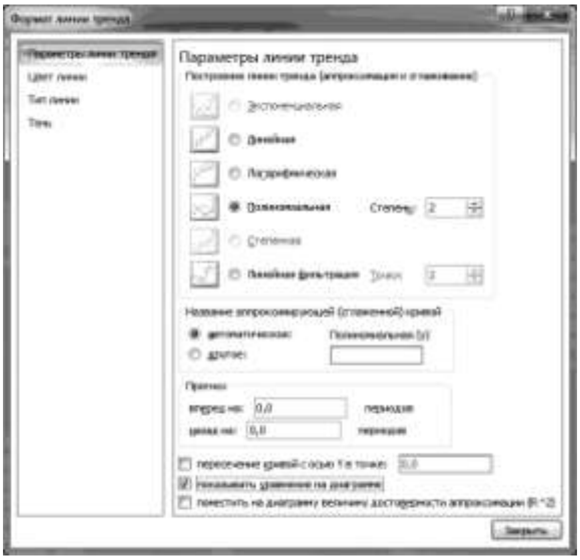


Рис. 5.6. Настройка параметров линии тренда.

Закрыть окно настроек. Появляется линия графика аппроксими-рующей функции и соответствующая формула (рис. 5.7):

$$y(x)=0{,}8571x^2-1{,}8x-0{,}9143$$

$y = 0{,}8571x^2 - 1{,}8x - 0{,}9143$

7

6

5

4

3

2

1

0

2,
5 2 1,5 1 0,5 ,5 ,5 ,5

1

2

3

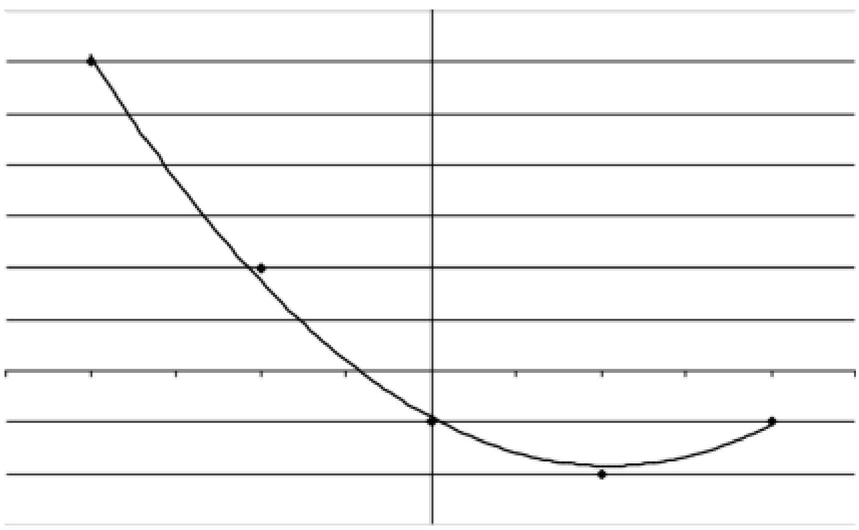
Рис. 5.7. Результаты аппроксимации.

Аппроксимация линеаризацией. Многие нелинейные функции,за-висящие от двух параметров, можно линеаризовать путем замены пере-менных. Для этого необходимо подобрать такое преобразование исходной зависимости $y(x) = \varphi(x, a, b)$, в результате которого она приобретает ли-нейный вид $Y=AX+B$. Далее решается задача линейной аппроксимации для новой зависимости, и вычисленные коэффициенты A и B пересчиты-ваются в a и b .

Таблиц
а 5.8.

Таблица замены переменых для метода линеаризации данных

	Функция	Линеаризованная форма $Y = AX$	Замена переменных и констант			
			X			



		+ B				
.	= — b +	= a — b +	—			
.	a ——— $y= x + b$	1 —— — $y =_b(xy)+_b$	y	x	— A	— A
.	x = ——— ax + b	— — + b a	—	—		
.	$y = a \ln x +$ b	$y = a \ln$ $x + b$	l n x			
.	$y = be^{ax}$	$\ln y$=ax+ $\ln b$		ln y		B
.	$y = bx^a$	$\ln y$=$a \ln x$+ ln b	l n x	ln y		B

Пример 5.9. Используя МНК,построить функцию вида $y(x) = bx$ аппроксимирующую следующие табличные значения:

Табл ица 5.9.

i	,5	,5	3 ,3	
i		1	6 6	1 08

Решение. Расчеты представим в виде таблицы.

Таблица 5.10.

	i	i	X_i=ln x_i	Y_i= ln y_i	2 X_i	$i^Y i$	~ y (x_i)
	,5		0,405	2,19 7	0 ,164	0, 891	8,8 1
	,5	1	0,916	3,43 4	0 ,840	3, 147	32, 08
	,3	6	1,194	4,19 0	1 ,425	5, 002	64, 75
		08	1,386	4,68 2	1 ,922	6, 491	10 5,35
n $\sum$ i =1			3,902	14,5 03	4 ,351	15 ,530	

Система для определения коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} 4,351A + 3,902B = 15,530 \\ 3,902A + 4B = 14,503 \end{cases} \qquad (5.23)$$

Решая систему (5.23), получим следующие значения параметров: A =2,538, B =1,15.

Тогда (табл. 5.8) a=A= 2,538, b=e^B=$e^{1,15}$= 3,158.

Аппроксимирующая функция имеет вид:

,538

(x)= ,158x

Аппроксимация произвольной функцией может быть выполнена в программе Excel с помощью модуля «Поиск решения».

Пример 5.10. Используя программуExcel,построить функцию,аппроксимирующую значения из таблицы:

Таблица 5.11.

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,3	0,7	1,4	1,9	1,3	0,5	0,3

Порядок решения.

Аппроксимирующая функция должна иметь экстремум в виде пика. Выберем следующую функцию, зависящую от трех параметров $\boldsymbol{a_i}$:

$$\tilde{y}(x) = a_1 e^{-\frac{(x-a_2)^2}{a_3}}$$

Ввести в ячейки **A2, B2, C2** (рис. 5.8) начальные значения параметров a_i, например **1**

В ячейки **A5:A11** – значения $\boldsymbol{x_i}$

В ячейки **B5:B11** – значения $\boldsymbol{y_i}$

В ячейку **C5** – формулу аппроксимирующей функции (на ячейки с параметрами абсолютные ссылки):

=$A$2*EXP(-((A5-$B$2)^2)/$C$2)

Скопировать формулу в ячейки **C6:C11**

7) В ячейку **D5** – формулу квадрата разности: **=(B5-C5)^2**

Скопировать формулу в ячейки **D6:D11**

9) В ячейку **D12** – сумму квадратов: **=СУММ(D5:D11)**

Вызвать окно **Поиск решения**. В настройках указать:

Установить целевую ячейку **$D$12**

Равной **минимальному значению**

Изменяя ячейки **$A$2:$C$2**

Нажать кнопку **Выполнить**.

Подтвердить сохранение найденного решения.

Рабочий лист изменился и содержит решение (рис. 5.8):

a_1=1,81559 a_2=2,450734 a_3=0,968182

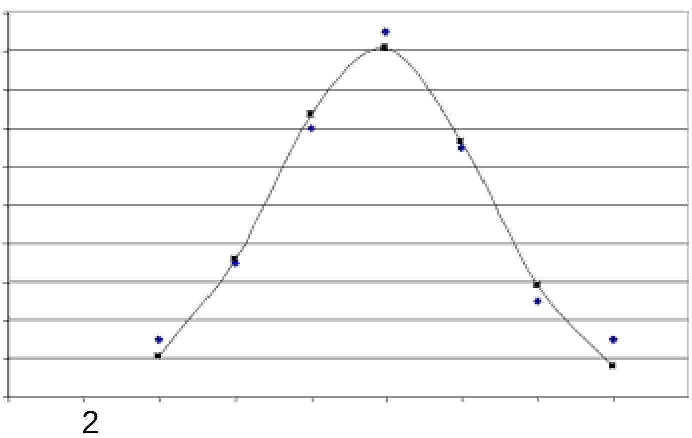
Таким образом, аппроксимирующая данные табл. 5.11 функция име-ет вид:

$$\tilde{y}(x)=1{,}81559e^{\frac{(x-2{,}450734)^2}{0{,}968182}}$$

Графически результаты аппроксимации редставлены на рис. 5.9.

	A	B	C	D	
	a1	a2	a3		
	1,815599	2,450734	0,968182		
	x	y	y ~	квадрат разности	
	1	0,3	0,206516	0,00873931	
	1,5	0,7	0,713777	0,000189808	
	2	1,4	1,471935	0,005174633	
	2,5	1,9	1,811053	0,007911556	
	3	1,3	1,329506	0,000870603	
0	3,5	0,5	0,582326	0,006777524	
1	4	0,3	0,15218	0,021850689	
2			сумма:	0,051514122	

Рис. 5.8. Аппроксимация данных нелинейной функцией с тремя параметрами с помощью программы Excel.



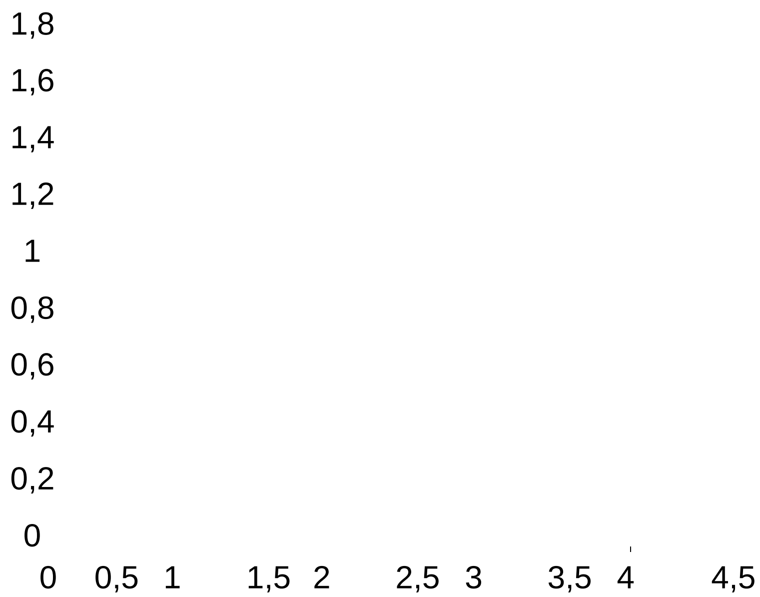


Рис. 5.9. Результаты аппроксимации функцией с тремя параметрами.

Точность аппроксимации можно оценить среднеквадратическойошибкой

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}(x_i)-y_i)}{n}}$$

которая не должна превышать погрешность исходных данных (рис. 5.4а).

Порядок выполнения работы: *(прописывается с учетом специфики учебной дисциплины и МДК)*

1 ____

2 ____.

3 ____.

Форма представления результата:

Критерии оценки:

Тема 5. Алгоритмы и методы численного интегрирования и дифференцирования Лабораторная работа №5 «Составление алгоритма и написание программ для численного интегрирования и дифференцирования». **4**

У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2

Тема ____

(наименование темы, к которой относится занятие)

Практическое занятие № 1

____

(наименование)

Цель: ____

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- ____;
- ____.

Материальное обеспечение: ____

Задание: ____

Краткие теоретические сведения:

Требуется вычислить определенный интеграл:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (6.1)$$

Выберем на отрезке интегрирования $[a, b]$ n различных узлов

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

интерполируем функцию $f(x)$ по ее значениям в этих узлах некоторым полиномом $P_m(x)$. Тогда определенный интеграл (6.1) приближенно можно вычислять по формуле

$$I = \int_a^b P_m(x)dx\,, \qquad (6.2)$$

которая называется квадратурной формулой интерполяционного типа.

6.1. Метод прямоугольников

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ функция $f(x)$ заменя-ется полиномом нулевой степени $P_0(x) = f(x_i)$.

Поэтому приближенно I вычисляется по формуле (см. рис. 6.1):

$n-1$

$$I = \sum_{i=0} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (6.3)$$

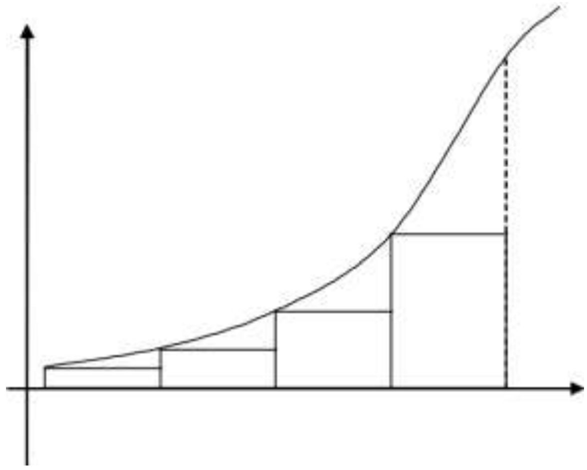


Рис. 6.1. Метод прямоугольников.

Для равноотстоящих узлов формула (6.3) имеет следующий вид:

$$I = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad h = x_{i+1} - x_i \qquad (6.4)$$

Или

$$I = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (6.5)$$

Формулу (6.4) называют формулой левых прямоугольников, а (6.5) - правых прямоугольников.

Программа вычисления интеграла методом прямоугольников пред-ставлена на рис. 6.2. Исходные данные: пределы интегрирования и число разбиений

		B
		0
		1
		8
		1, 227024

```
Function f(x)
     f = Sqr(2 * x ^ 2 + 1)
End Function
Sub Integral()
     a = Cells(1, 2)
     b = Cells(2, 2)
     n = Cells(3, 2)
     h = (b - a) / n
     x = a
     S = 0
1    s = s + f(x) * h x
     = x + h
     If x < b Then GoTo
1 Cells(5, 2) = s
End Sub
```

Рис. 6.2. Программа вычисления интеграла методом прямоугольников.

6.2. Метод трапеций

В этом методе на каждом отрезке $[x_i , x_{i+1}]$ функция $f(x)$ заменяется полиномом 1-й степени $P_1(x)$.

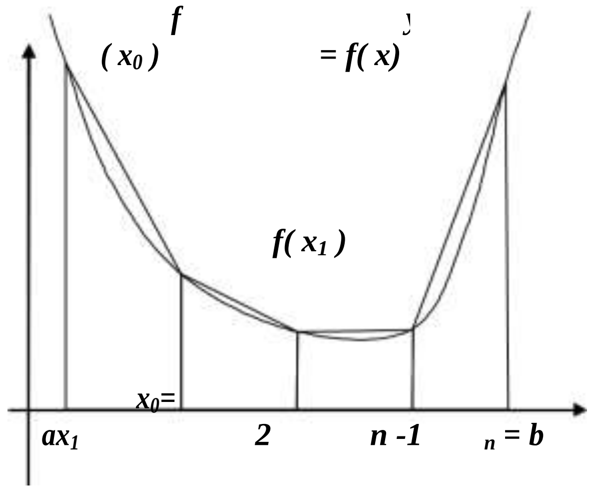


Рис. 6.3. Метод трапеций.

По формуле Лагранжа:

$$P_1(x) = f(x_i)\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \qquad (6.6)$$

Интегрируя $P_1(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, получим:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx = \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) \qquad (6.7)$$

Суммируя по всем i ($i = 0, 1, 2, ..., n-1$), получим формулу трапеций (см. рис. 6.3):

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f(x_i) + f(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i)}{2} \qquad (6.8)$$

Для равноотстоящих узлов x_0, $x_1 = x_0 + h$, …, $x_n = x_0 + nh$ формула (6.8) принимает следующий вид:

$$I = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \qquad (6.9)$$

или

$$I = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \qquad (6.10)$$

Программа вычисления интеграла методом трапеций:
программе, представленной на рис. 6.2, заменить отмеченные строки на следующие:

```
s = s + 0.5 * (f(x) + f(x + h)) * h x =
x + h
```

6.3. Метод парабол (Симпсона)

Интервал $[a, b]$ разделим на $2n$ отрезков. Группируя узлы тройками x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ $i = 1, 3, ..., 2n-1$ интерполируем функцию $f(x)$ полиномом 2-й степени $P_2(x)$

По формуле Лагранжа:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} f(x_{i-1}) + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} f(x_i) + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} f(x_{i+1})$$

Интегрируя $P_2(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, получим:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x)dx = [f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})] \qquad (6.11)$$

Суммируя формулу (6.11) по всем n отрезкам, получаем формулу для приближенного интегрирования (см. рис.6.4):

$$= \frac{\quad}{3}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})] \qquad (6.12)$$

или

$$= \frac{\quad}{\quad}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f(b)) \qquad (6.13)$$

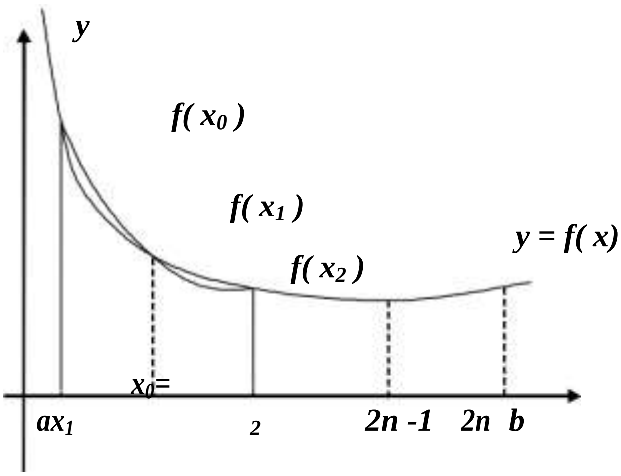


Рис. 6.4. Метод парабол.

Программа вычисления интеграла методом парабол (Симпсона): программе, представленной на рис. 6.2, заменить отмеченные строки на следующие:

```
s = s + (f(x) + 4*f(x + h) + f(x + 2*h))*h/3 x = x
+ 2*h
```

Оценка точности вычисления определенного интеграла.

Погрешность вычисления значения интеграла I_{2n} при числе шагов h ,равном$2n$,определяется по формуле Рунге:

$$n \qquad \frac{|I_{2n} - I_n|}{2^p - 1}$$

где I_n-значения интеграла при числе шагов,равном n ,

- порядок точности, равный 1 для формулы левых (правых) прямоугольников, 2 для формулы трапеций и 4 для формулы Симпсона.

Таким образом, интеграл вычисляется по выбранной формуле (прямоугольников, трапеций, парабол Симпсона) для последовательных зна-чений числа шагов N=n , $2n$, $4n$, и т.д. Процесс вычислений заканчивает-ся, когда для очередного значения N будет выполнено условие $\Delta_{2n} < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

Пример 6.1. Вычислить определенный интеграл методами прямо-угольников, трапеций и парабол:

$$I=\int_0^1 \sqrt{2x^2+1}\,dx$$

Решение. Выберем на отрезке интегрирования[0; 1]n=8различ-ных узлов

$$x_0=a\ ,\ x_{i+1}=x_i+h$$

Шаг разбиения для равноотстоящих узлов определяем по формуле

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{8}=0{,}125$$

Сравнивая формулы 6.4, 6.5, 6.10 и 6.13, обратим внимание, что оп-ределенный интеграл приближенно можно вычислять по формуле

$$I=h\sum_{i=0}^{n} c_i\, f(x_i) \qquad (6.14)$$

где c_i - числовые коэффициенты, на которые умножаются значения функ-ции в узлах $f(x_i)$:

c_i=1, 1, 1, ..., 1, 0-для метода левых прямоугольников;

c_i=0, 1, 1, ..., 1, 1-для метода правых прямоугольников;

c_i=0,5; 1; 1; ...; 1; 0,5-для метода трапеций;

= _ _ _ _ _ ..., _ _ _ - для метода парабол

Вычислим значения функции в узлах (табл. 6.3).

Таблица 6.3

i		,125	,25	0 ,375	0 ,5	0 ,625	0 ,75	0 ,875	1
(x_i)	1 ,000	,016	,061	1 ,132	1 ,225	1 ,335	1 ,458	1 ,591	1 ,732

Вычислим интеграл:

По формуле левых прямоугольников

= 0,125(1,0 +1,016 +1,061+1,132 +1,225 +1,335 +1,458 +1,591) =1,227

По формуле правых прямоугольников

= 0,125(1,016 + 1,061 + 1,132 + 1,225 +1,335 +1,458 + 1,591 +1,732) =1,319

По формуле трапеций

= 0,125(0,5 ·1,0 +1,016 +1,061+1,132 +1,225 +

1,335 +1,458 +1,591+ 0,5 ·1,732) = 1,273

По формуле парабол

$= \frac{0,125}{3} (1 \cdot 1,0 + 4 \cdot 1,016 + 2 \cdot 1,061 + 4 \cdot 1,132 + 2 \cdot 1,225 +$

$4 \cdot 1,335 + 2 \cdot 1,458 + 4 \cdot 1,591 + 1 \cdot 1,732) = 1,271$

Пример 6.2. Вычислить с помощью программыExcelопределенныйинтеграл методом трапеций

$$I = \int_0^1 \sqrt{2x^2+1}\, dx .$$

Порядок решения.

Ввести в ячейки **A1:F1** заголовки столбцов (рис. 6.5).

В) ячейку **A2** – нижний предел интеграла ***a*** **0**

) В ячейку **E2** – шаг разбиения ***h*=(*b*–*a*) / 8** для ***n*=8** **=(1-0)/8**

В) ячейку **A3** – значение $\boldsymbol{x_1=a+h}$ **0,125**

Выделить ячейки **A2:A3** и при помощи маркера заполнения ввести значения $\boldsymbol{x_i=a+ih}$ до ***x*=*b*=1** в столбце **A**.

6) В ячейку **B2** – формулу ***f*(*x*)** **=КОРЕНЬ(2*A2^2+1)**

Выделить ячейку **B2** и при помощи маркера заполнения ввести зна-чения $\boldsymbol{f(x_i)}$ в столбце **B**.

В ячейки **C2, C3,…** – коэффициенты $\boldsymbol{c_i}$**=0,5; 1; 1; ...; 1; 0,5**

9) В ячейку **D2** – формулу $\boldsymbol{c_0 f(x_0)}$ **=B2*C2**

Выделить ячейку **D2** и при помощи маркера заполнения ввести зна-чения $\boldsymbol{c_i f(x_i)}$ в столбце **D**.

В ячейке **D11** найти сумму чисел столбца **D**, используя кнопку **Ав-тосумма Σ**.

12) В ячейке **F11** найти значение интеграла **=D11*E2**

				D		
	:	f(x)	f	c	I	I
	(	1	,5	0,5	,125	
	(,125	1,0 15505		1,015 505		
	(,25	1,0 6066		1,060 66		
	(,375	1,1 31923		1,131 923		
	(,5	1,2 24745		1,224 745		
	(,625	1,3 34635		1,334 635		
	(,75	1,4 57738		1,457 738		
	(,875	1,5 9099		1,590 99		
	:	1,7		0,866		

0		32051	,5	025			
				10,18		1,2	
1				222		72778	

Рис. 6.5. Вычисление определенного интеграла методом трапеций с помощью программы Excel.

Порядок выполнения работы: *(прописывается с учетом специфики учебной дисциплины и МДК)*

1 ____

2 ____.

3 ____.

Форма представления результата:

Критерии оценки:

Тема 6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений Лабораторная работа №6 «Составление алгоритма и написание программ для решения обыкновенных уравнений». **2** У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2

Тема ____

(наименование темы, к которой относится занятие)

Практическое занятие № 1

____

(наименование)

Цель: ____

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- ____;
- ____.

Материальное обеспечение: ____

Задание: ____

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальными называются уравнения,в которых неизвест-ными являются функции, которые входят в уравнения вместе со своими производными.

$$F(x, y, y', y'',..., y^{(n)})=0$$

Если в уравнение входит неизвестная функция только одной пере-менной, уравнение называется *обыкновенным*. Если нескольких – уравне-нием в *частных производных*.

Порядком дифференциального уравнения называют наивысший по-рядок производной, входящей в уравнение.

Решить дифференциальное уравнение, значит найти такую функцию $y = y(x)$,подстановка которой в уравнение обращала бы его в тождество.

Чтобы из уравнения n -го порядка получить функцию, необходимо выполнить $\boldsymbol{n}$ интегрирований, что дает n произвольных постоянных. Ре-шение, выражающее функцию в явном виде, называется *общим решением*.

$$= \varphi(x, C_1 , C_2 ,...C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется об-щее решение, для которого указаны конкретные значения произвольных постоянных. Для определения произвольных постоянных необходимо за-дать столько условий, сколько постоянных, т.е. каков порядок уравнения. Эти условия обычно включают задание значений функции и ее производ-ных в определенной точке, их называют *начальными условиями*,

$$y(x_0)=y_0 \qquad y'(x_0)=y'_0 \qquad \ldots y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

или значений функции в нескольких точках, т.е. *краевых условий*.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравне-ния при заданных начальных условиях называется *задачей Коши*.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравне-ния при заданных краевых условиях называется *краевой задачей*.

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является *метод конечных разно-стей*.Метод включает следующие этапы

Замена области непрерывного изменения аргумента дискретным множеством точек, называемых узлами сетки;

Аппроксимация производных в узлах конечно-разностными анало-гами;

Аппроксимация дифференциального уравнения системой линейных или нелинейных разностных уравнений;

Решение полученной системы разностных уравнений.

Разностные методы позволяют находить только частное решение. Результат численного решения дифференциального уравнения представ-ляется в виде таблицы x_i, y_i. Аналитический вид решения $y = \varphi(x)$ может быть получен аппроксимацией.

7.1. Решение задачи Коши

7.1.1. Метод Эйлера

Одним из простейших разностных методов решения обыкновенного дифференциального уравнения является метод Эйлера.

Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения первого поряд-ка:

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{7.1}$$

на отрезке $[a, b]$.

На данном отрезке выбираем некоторую совокупность точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ с равностоящими узлами,т.е. $x_{i+1} - x_i = h$.

Конечно-разностная аппроксимация прозводной

$$y'(x) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Так как $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$, получаем формулу Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, ..., n-1, \tag{7.2}$$

помощью которой значение сеточной функции y_{i+1} в любом узле x_{i+1} вы-числяется по ее значению y_i в предыдущем узле x_i. На каждом шаге по-грешность имеет порядок $O(h2)$. В конце интервала погрешность $O(h2)n \sim O(h2)(b - a) / h \sim O(h)$,т.е.метод Эйлера имеет первый порядок точности.Нарис. 7.1 дана геометрическая интерпретация метода Эйлера.

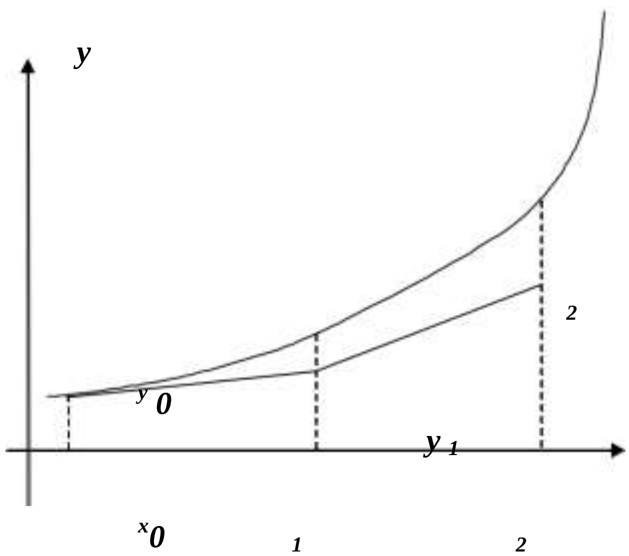


Рис. 7.1. Метод Эйлера.

Программа решения задачи Коши методом Эйлера дана на рис. 7.2.

		y			
				,1	,2
		,1	,1		
		,2	,211		
		,3	,3361		
		,4	,4787		
		,5	,6426		
		,6	,8318		
		,7	,051		
0		,8	,3051		
1		,9	,5996		
2	0		,9406		
3	1	,1	,3347		
4	2	,2	,7891		

```
     Function
f(x,             )
     f = x ^ 2
+ y
     End
Function

     Sub ODE()
     k        =
Cells(2,        )
     x        =
Cells(2,        )
     y        =
Cells(2,        )
     h        =
Cells(2,        )
     b        =
Cells(2,        )
     y = y + h * f(x,
y)
     x = x
+ h
     k = k
+ 1
     Cells(2 +
k,              ) k
     Cells(2 +
k,              ) x
     Cells(2 +
k,              ) y
     If x < b Then GoTo
1
     End Sub
```

Рис. 7.2. Программа решения задачи Коши методом Эйлера.

Пример 7.1. Решить задачу Коши методом Эйлера для дифференци-ального уравнения

$y' = x^2 + y$, $y(0)=1$на отрезке[0; 0,3]с шагом**0,1Решение.** По формуле(6.2)вычислим значениеy_1

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1+0,1(0^2+1)=1,1$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узло-вых точках

$= y + hf (x , y$ +1,1)

)=1,1+0,1(0,1^2 =1,211

1 1

$= y + hf(x , y)$=1,211+0,1(0,2^2 +1,211) =1,3361

2 2

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

		0 ,1	0,2	0,3
		1	1,211	1,336

| | ,1 | | 1

7.1.2. Модифицированный метод Эйлера

Модифицированный метод Эйлера позволяет уменьшить погреш-ность на каждом шаге до величины $O(h^3)$ вместо $O(h^2)$ в обычном методе (7.2). Запишем разложение функции в ряд Тейлора в виде:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \quad {}_i \quad O(h \quad) \qquad (7.3)$$

Аппроксимируем вторую производную с помощью отношения ко-нечных разностей:

$$y_i'' = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{h}$$

Подставляя это соотношение в (6.3) и пренебрегая членами порядка $O(h^3)$,получаем:

$$y_{i+1} \quad \_ \quad [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \qquad (7.4)$$

Полученная схема является неявной, поскольку искомое значение y_{i+1}входит в обе части соотношения(7.4),но можно построить прибли-женное решение с использованием двух итераций.

Сначала по формуле Эйлера (7.2) вычисляют первое приближение

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (7.5)$$

Затем находится уточненное окончательное значение

$$y_{i+1} = y_i \quad \_ \quad [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \qquad (7.6)$$

Такая схема решения называется модифицированным методом Эй-лера и имеет второй порядок точности.

Пример 7.2. Решить задачу Коши модифицированным методом Эй-лера для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y$, $y(0)=1$на отрезке[0; 0,3]с шагом0,1**Решение.** По формуле(6.5)вычислим первое приближение

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1(0 \quad 1) \quad 1,1$$

Используя формулу (6.6), находим окончательное значение в точке x_1 =0,1

$$y_1 = y_0 \quad \_ \quad [f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)] \quad \_\_ = 1 \quad ,1 \quad 0 \quad 2 \quad +1 \quad + 0,1 \quad +1,1) = 1,1055$$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узло-вых точках

$\tilde{y}_2$ y_3

y_2

~

$\tilde{y}_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1055 + 0,1(0,1^2 + 1,1055) = 1,21705$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, \tilde{y}_2)] = 1,1055 + \frac{0,1}{2}(0,1^2 + 1,1055 + 0,2^2 + 1,21705) = 1,224128$$

$y_2 + hf(x_2, y_2) = 1,224128 + 0,1(0,2^2 + 1,224128) = 1,350541$

~

— [$f(x_2, y_2)$ + $f(x_3, y_3$

3 y_2)] =

1,224128 + $^{0}{}_{2}{}^{,1}$ (0,2^2+1,224128 + 0,3^2+1,350541) =1,359361

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

	0	0,1	0,2	0,3
	1	1,10 55	1,224 128	1,359 361

Программа решения задачи Коши модифицированным методом Эй-лера отличается от приведенной на рис. 7.2 заменой отмеченных строк на следующие:

```
1     y1 = y + h*f(x,y)
       y = y + h*(f(x,y)+f(x+h,y1))/2
```

Пример 7.3. Решить задачу Коши модифицированным методом Эй-лера с помощью программы Excel для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y$, $y(0)=1$ на отрезке[0; 1]с шагом0,1.

		B	C		
		y ~	y		
		1	1	,1	
	,1	1,1	1,1055		
	,2	1,217 05	1,2241 275		
	,3	1,350 54	1,3593 609		
	,4	1,504 297	1,5150 438		
	,5	1,682 548	1,6954 234		
	,6	1,889 966	1,9051 928		
	,7	2,131 712	2,1495 381		
0	,8	2,413 492	2,4341 896		
1	,9	2,741 609	2,7654 795		
2		3,123 027	3,1504 048		

Рис. 7.3. Решение задачи Коши модифицированным методом Эйлера с помощью программы Excel.

Порядок решения.

Ввести в ячейки **A1:D1** заголовки столбцов (рис. 7.3).

) В ячейку **A2** – $\boldsymbol{x_0}$ **0**

В и **C2**

) ячейки **B2** $-\, \boldsymbol{y_0}$

В – шаг **0**

) ячейку **D2** интегрирования ***h*** **,1**

В – + **=A2+$D**

) ячейку **A3** значение x x h **$2**

1 2

В ячейку **B3** – $y_1 = y_0 +$

) формулу $h(x_0$ $+ y_0)$

=C2+$D$2*(A2^2+C2)

7) В ячейку **C3** – формулу $\tilde{y}_1 = y_0 + h((x_0^2 + y_0) + (x_1^2 + \tilde{y}_1))/2$

=C2+$D$2*(A2^2+C2+A3^2+B3)/2

Выделить ячейки **A3:C3** и при помощи маркера заполнения ввести формулы в ячейки **A4:C4 …A13:C12**.

Столбцы **A** и **C** содержат решение.

7.1.3. Метод Рунге-Кутта Формулы (6.5-6.6) можно представить в виде

$y_{i+1} = y_i + (k_0 + k_1)/2$

где

$k_0 = hf(x_i, y_i)$,

$k_1 = hf(x_i + h, y_i + k_0)$

Такая формулировка модифицированного метода Эйлера представ-ляет собой метод Рунге-Кутта второго порядка. На основе метода Рунге-Кутта могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Наиболее употребительной является следующая схема четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 \qquad (7.7)$$

где

$$k_0 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_1 = hf(x_i + h/2, y_i + k_0/2)$$
$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$
$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + k_2) \qquad (7.8)$$

Таким образом, метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четы-рехкратного вычисления правой части уравнения. Однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с относи-тельно большим шагом.

Программа решения задачи Коши методом Рунге-Кутта отличается от приведенной на рис. 7.2 заменой отмеченных строк на следующие:

```
1    k0      = h*f(x, y)
     k1      = h*f(x + h/2, y + k0/2)
     k2      = h*f(x + h/2, y + k1/2)
     k3      = h*f(x + h, y + k2)
      y      = y + (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3)/6
```

Пример 7.4. Решить задачу Коши методом Рунге-Кутта для дифференциального уравнения $y' = x^2 + y$, $y(0) = 1$ на отрезке [0; 0,3] с шагом 0,1.

Решение. По формулам(6.8)вычислим значения k_0, k_1, k_2, k_3:

$$k_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(0^2+1) = 0{,}1$$

$$k_1 = hf(x_0 + h/2,\ y_0 + k_0/2) = 0{,}1\left(\left(0 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{0{,}1}{2}\right) = 0{,}10525$$

$$k_2 = hf(x_0 + h/2,\ y_0 + k_1/2) = 0{,}1\left(\left(0 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{0{,}10525}{2}\right) = 0{,}105513$$

$$k_3 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_2) = 0{,}1((0+0{,}1)^2 + 1 + 0{,}105513) = 0{,}111551$$

Используя формулу (7.7), находим значение y_1 в точке $x_1 = 0{,}1$:

$$y_1 = y_0 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$$
$$1 + (0{,}1 + 2\cdot 0{,}10525 + 2\cdot 0{,}105513 + 0{,}111551)/6 = 1{,}105513$$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узло-вых точках

$$k_0 = hf(x_1, y_1) = 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}105513) = 0{,}111551$$

$$k_1 = hf(x_1 + h/2,\ y_1 + k_0/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}05513 + \frac{0{,}111551}{2}\right) = 0{,}118379$$

$$k_2 = hf(x_1 + h/2,\ y_1 + k_1/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}05513 + \frac{0{,}118379}{2}\right) = 0{,}11872$$

$$k_3 = hf(x_1 + h,\ y_1 + k_2) = 0{,}1((0{,}1+0{,}1)^2 + 1{,}05513 + 0{,}11872) = 0{,}126423$$

$$y_2 = y_1 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$$
$$1{,}105513 + (0{,}11151 + 2\cdot 0{,}118379 + 2\cdot 0{,}11872 + 0{,}126423)/6 = 1{,}224208$$

$$k_0 = hf(x_2, y_2) = 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}224208) = 0{,}126421$$

$$k_1 = hf(x_2 + h/2,\ y_2 + k_0/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}2 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}224208 + \frac{0{,}126421}{2}\right) = 0{,}134992$$

$k_2 = hf(x_2 + h/2, y_2 + k_1/2) = 0,1\left(\left(0,2 + \frac{0,1}{2}\right)^2 + 1,224208 + \frac{0,134992}{2}\right) = 0,13542$

$k_3 = hf(x_2 + h, y_2 + k_2) = 0,1((0,2+0,1)^2 + 1,224208 + 0,13542) = 0,144963$ $y_3 = y_2 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) / 6 =$

$1,224208 + (0,126421 + 2 \cdot 0,134992 + 2 \cdot 0,13542 + 0,144963) / 6 = 1,359576$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

	0	0,1	0,2	0,3
	1	1,105513	1,224208	1,359576

Порядок выполнения работы: *(прописывается с учетом специфики учебной дисциплины и МДК)*

1 ____

2 ____.

3 ____.

Форма представления результата:

Критерии оценки: