

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж



УТВЕРЖДАЮ

Директор

С.А. Махновский
«27» февраля 2019 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

ОПЦ.12 МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

программы подготовки специалистов среднего звена

по специальности СПО

**15.02.14 Оснащение средствами автоматизации технологических процессов
и производств (по отраслям)**

Магнитогорск, 2019

ОДОБРЕНО

Предметно-цикловой комиссией
Автоматизации технологических
процессов

Председатель: Н.В. Андриусенко
Протокол №6 от 20.02.2019 г.

Методической комиссией

Протокол №5 от 21.02.2019 г.

Разработчик

Н.В. Андриусенко,
преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания разработаны на основе рабочей программы
учебной дисциплины «Моделирование технологических процессов».

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	4
2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	6
3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	7
Практическое занятие 1	7
Практическое занятие 2	8
Практическое занятие 3	10
Практическое занятие 4	14
Практическое занятие 5	16
Практическое занятие 6	19
Практическое занятие 7	21
Практическое занятие 8	25
Практическое занятие 9	27

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции) необходимые в последующем в профессиональной деятельности.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- У1 использовать основные численные методы решения математических задач;
- У2 разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- У3 подбирать аналитические методы исследования математических моделей;
- У4 использовать численные методы исследования математических моделей.

Содержание практических ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 1.1. Осуществлять анализ имеющихся решений для выбора программного обеспечения для создания и тестирования модели элементов систем автоматизации на основе технического задания;

ПК 1.2. Разрабатывать виртуальную модель элементов систем автоматизации на основе выбранного программного обеспечения и технического задания;

ПК 1.3. Проводить виртуальное тестирование разработанной модели элементов систем автоматизации для оценки функциональности компонентов.

А также формированию **общих компетенций:**

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам;

ОК 02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной направленности;

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие;

ОК 04 Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами;

ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом требований особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей;

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно взаимодействовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Моделирование технологических процессов» направлено на:

- *обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;*

- *формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;*

- *формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем,*

графиков;

- приобретение навыков работы с различными приборами, аппаратурой, установками и другими техническими средствами для проведения опытов;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Разделы/темы	Темы практических/лабораторных занятий	Количество часов	Требования ФГОС СПО (уметь)
Раздел 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ		8	
Тема 2.1. Математические и численные методы решения прикладных задач	Практическая работа №1. Применение инструмента <i>Подбор параметра</i> для решения уравнений в MS Excel	2	У1. У3.
	Практическая работа №2. Применение инструмента <i>Поиск решения</i> для решения систем линейных уравнений в MS Excel	2	У1. У3.
	Практическая работа №3. Решение транспортной задачи средствами MS Excel	2	У1. У3. У4.
	Практическая работа №4. Решение задач оптимизации средствами MS Excel	2	У1. У3. У4.
Раздел 3. Моделирование систем		10	
Тема 3.1. Моделирование сложных систем	Практическая работа №5. Построение модели системы математических расчетов Mathcad: вычисление производной функции	2	У2. У3.
	Практическая работа №6. Построение модели системы математических расчетов Mathcad: вычисление определенных интегралов, расчет площади фигуры, ограниченной графиками функций	2	У2. У3.
	Практическая работа №7. Построение модели системы математических расчетов Mathcad: построение графиков функций в полярных координатах, построение поверхностей	2	У2. У3.
	Практическая работа №8. Реализация модели методом половинного деления средствами MS Excel и Mathcad	2	У2. У3.
	Практическая работа №9. Реализация метода наименьших квадратов средствами MS Excel и Mathcad	2	У2. У3.
ИТОГО		18	

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 2.1. Математические и численные методы решения прикладных задач

Практическое занятие №1

Применение инструмента Подбор параметра для решения простых математических задач в MS Excel

Цель работы:

Освоить технологию применения инструмента Подбор параметра для решения задач в MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- подбирать аналитические методы исследования математических моделей.

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

Подбор параметра, используется когда известен желаемый результат одиночной формулы (т.е. известно значение функции), но не известны, значения, которые требуется ввести для получения этого результата (значения аргумента функции).

При Подборе параметра MS Excel изменяет значение в одной конкретной ячейке до тех пор пока формула, зависящая от этой ячейки, не возвращает нужный результат.

Задание 1. Решить задачу, используя инструмент Подбор параметра. Какое расстояние можно преодолеть за 12 минут при скорости 75 км в час?

Порядок выполнения задания 1:

1. В ячейку A2 ввести формулу $=A4*(60/A3)$
2. В ячейке A3 ввести число 12.
3. В ячейку A4 ввести формулу $=A2*(A3/60)$
4. Выполнить команду *Данные* → *Анализ «что-если»* → *Подбор параметра*.
5. В поле ввода *Установить в ячейке* ввести A2 или щёлкнуть на ячейке A2.
6. В поле ввода *Значение* ввести число 75.
7. В поле ввода *Изменяя значение ячейки* ввести A4 или щёлкнуть на ячейке A4.
8. Щёлкнуть на кнопке *Ок*.
9. В открывшемся окне *Результат подбора параметра* щёлкнуть на кнопке *ОК*.

Ответ: за 12 минут при скорости 75 км в час можно преодолеть 15 км.

Задание 2. Решить задачу, используя инструмент Подбор параметра. Каково значение радиуса круга, если площадь круга равна 17?

Порядок выполнения задания 2:

1. В ячейке A1 ввести число 0 (значение радиуса окружности).
2. В ячейку A2 ввести формулу нахождения площади круга $=\text{ПИ}()*A2^2$
3. Выполнить команду *Данные* → *Анализ «что-если»* → *Подбор параметра*.
4. В поле ввода *Установить в ячейке* ввести A2 или щёлкнуть на ячейке A2.
5. В поле ввода *Значение* ввести число 17.
6. В поле ввода *Изменяя значение ячейки* ввести A1 или щёлкнуть на ячейке A1.
7. Щёлкните на кнопке *Ок*.
8. В открывшемся окне *Результат подбора параметра* щёлкнуть на кнопке *ОК*.

Ответ: если площадь круга равна 17, то радиус равен 2.3.

Форма представления результата: файл MS Excel с двумя листами, лист1-«Расстояние», лист2-«Радиус».

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №2

Применение инструмента Поиск решения для решения систем линейных уравнений в MS Excel

Цель работы:

Изучить надстройку «Поиск решения» для нахождения корней системы уравнений

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- подбирать аналитические методы исследования математических моделей.

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

Надстройка Поиск решения является мощным средством анализа данных в Excel . С ее помощью можно определить, при каких значениях указанных влияющих ячеек формула в целевой ячейке принимает нужное значение (минимальное, максимальное или равное какой-либо величине). Для процедуры поиска решения можно задать ограничения, причем не обязательно, чтобы при этом использовались те же влияющие ячейки. Для расчета заданного значения применяются различные математические методы поиска. Вы можете установить режим, в котором полученные значения переменных автоматически заносятся в таблицу.

В основе поиска решения лежит итерационный (приближенный) метод. Его особенности:

- ◆ *Поиск решения* позволяет использовать одновременно большое количество переменных, более 200;
- ◆ *Поиск решения* может задавать ограничения для изменяемых ячеек;
- ◆ *Поиск решения* обеспечивает поиск наилучшего результата из всех возможных;
- ◆ *Поиск решения* для сложных задач может генерировать множество различных решений и при этом сохранять каждое из полученных решений, определяя для них сценарий.

Задачи, для решения которых используется Поиск решения, имеет ряд свойств:

1. Имеется *единственная* целевая ячейка.

Целевая ячейка – это та ячейка, для которой нужно найти максимальное, минимальное или заданное значения.

2. Формула в целевой функции содержит ссылки на ряд *изменяемых ячеек* (прямо или косвенно), содержащие переменные неизвестные для решаемой задачи.

Изменяемые ячейки – это те ячейки, от которых зависит значение целевой ячейки.

Поиск решения заключается в том, чтобы подобрать такие значения изменяемых ячеек, которые давали бы оптимальные значения для формул целевой ячейки.

3. Может быть задано некоторое количество *ограничений* – условий или соотношений, которым должны удовлетворять некоторые из изменяемых ячеек.

Задание 1. Решить систему уравнений, используя надстройку *Поиск решения*.

$$\begin{cases} 9x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 8 \\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 13 \\ 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 6 \end{cases}$$

Порядок выполнения задания 1:

1. Ввести в столбец А начальное приближение для значений всех неизвестных. Пусть это будут 0.

2. В столбец В ввести формулу, описывающие левые части уравнений.

3. В столбец С ввести значения правых частей уравнений.

4. Установить курсор в ячейку В1 и запустить надстройку *Поиск решения*:

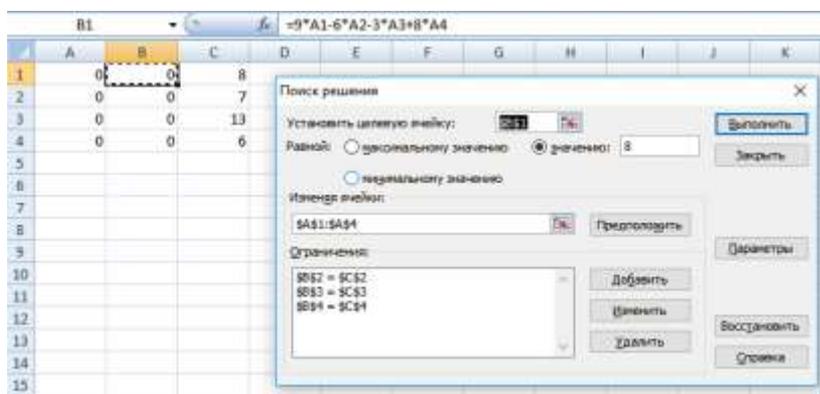
5. В поле ввода *Установить целевую ячейку* щелкнуть на ячейке В1.

6. В поле ввода *Значение* установить значение ячейки С1.

7. В поле ввода *Изменяя значение ячейки* ввести \$A\$1:\$A\$4.

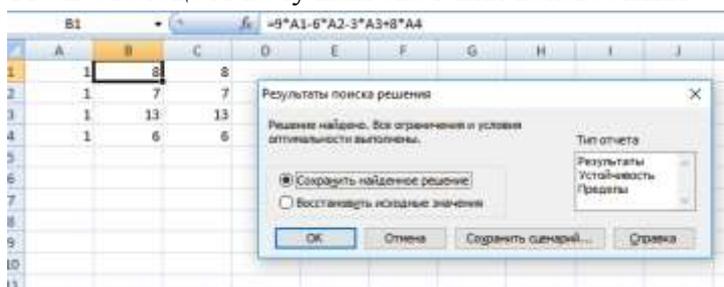
8. К ограничениям добавить все уравнения, кроме первого.

9. Для данной системы уравнений диалоговое окно *Поиск решения* будет выглядеть так.



10. Нажать кнопку *Выполнить*.

11. В столбце А получили значения неизвестных.



Форма представления результата: файл MS Excel «Система.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №3 **Решение транспортной задачи средствами MS Excel**

Цель работы:

Научиться решать транспортные задачи средствами MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;
- использовать численные методы исследования математических моделей.

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Краткие теоретические сведения:

В инженерных, маркетинговых, бухгалтерских исследованиях решаются задачи, которые требуют отыскать одно из оптимальных решений. Для отыскания таких решений в Excel имеется средство *Поиска решения*.

К задачам такого типа относятся:

- ◆ транспортная задача;
- ◆ задача о выборе оптимального меню;
- ◆ задача о назначениях;
- ◆ задача о выборе портфеля ценных бумаг;
- ◆ задачи линейной алгебры;
- ◆ и т.д.

Транспортная задача может быть сформулирована различными способами. *Постановка задачи А.* Пусть имеется m источников финансирования A_1, A_2, \dots, A_m и n периодов финансирования B_1, B_2, \dots, B_n . Известны затраты, связанные с выделением единицы денежных ресурсов C_{ij} из i -го источника в j -ом периоде, а также объемы финансирования из каждого i -го источника в течение всего времени – a_i . Известны суммарные объемы финансирования из всех источников в каждый j -й период времени – b_j .

Требуется

определить объемы финансирования x_{ij} из i -го источника в j -ом периоде, чтобы:

1. Ресурсы всех источников были реализованы.
2. Обеспечить финансирование в полном объеме в каждом периоде.
3. Достигнуть экстремума выбранного критерия оптимизации.

Постановка задачи В. Пусть имеется n пунктов производства (хранения) A_1, A_2, \dots, A_n , некоторого однородного ресурса, запасы которого составляют a_1, a_2, \dots, a_n условных единиц соответственно. Кроме этого, имеется m пунктов потребления B_1, B_2, \dots, B_m данного ресурса с потребностями b_1, b_2, \dots, b_m условных единиц. Кроме этого, известна матрица перевозок C , элементы которой c_{ij} – затраты на перемещение единицы ресурса из A_i – пункта хранения в B_j – пункт потребления.

Требуется вывезти все ресурсы из пунктов хранения A_i , удовлетворить потребности во всех пунктах B_j , все перевозки выполнить с минимальными суммарными затратами.

Для решения поставленной задачи сформулируем её математическую модель, первоначально сведя исходные данные в следующую таблицу:

$B_j \backslash A_i$	B1	B2	...	Bm	Запасы a_i
A1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}	a_1
A2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2m}	a_2
...
An	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}	a_n
Потребности b_j	b_1	b_2	...	B_m	$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$

Различают закрытую (сбалансированную) и открытую (несбалансированную) транспортную задачу. При этом, если

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$$

то задача называется сбалансированной, в противном случае – несбалансированной.

Для решения, сформулированной задачи, составим её математическую модель.

Математическая модель закрытой транспортной задачи. Для построения математической модели задачи:

1. Определим неизвестные и их количество.

Обозначим через x_{ij} количество ресурса, перемещаемого из A_i пункта хранения в B_j пункт потребления. Таким образом, элементы x_{ij} образуют матрицу перевозок X $n \times m$.

2. Запишем целевую функцию – суммарные затраты на перевозку ресурсов, которую необходимо минимизировать

$$F(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} * x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ресурсы из всех пунктов отправления должны быть вывезены. Это ограничение можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Т.е. сумма элементов каждой строки матрицы перевозок X равна запасу ресурса в данном пункте хранения.

3.2. Необходимо удовлетворить запросы каждого потребителя в данном ресурсе. Это

ограничение можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

3.3. Введем граничные условия, которые определяют предельно допустимые значения искомых переменных. Для нашей задачи их можно представить в виде:

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

Таким образом, целевая функция (1) и ограничения (2-4) образуют математическую модель сбалансированной транспортной задачи.

Порядок выполнения задания 1:

1. Идентифицировать свою работу, переименовав Лист1 в Титульный лист и записав номер лабораторной работы, ее название, кто выполнил и проверил.
2. На следующем листе, с именем Сбалансированная ТЗ, создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные.
3. Записать матрицу затрат на перевозки $C_{4 \times 4}$.
4. Составить матрицу перевозок $X_{4 \times 4}$ с пока нулевыми значениями x_{ij} .
5. Дополнить матрицу перевозок двумя столбцами справа и двумя строками снизу, в которые записать:

- запасы песка a_i и количество вывезенного ресурса из каждого карьера, используя встроенную функцию MS Excel – СУММ();
- потребности в песке b_j и количество доставленного песка на каждую стройку, используя встроенную функцию MS Excel – СУММ().

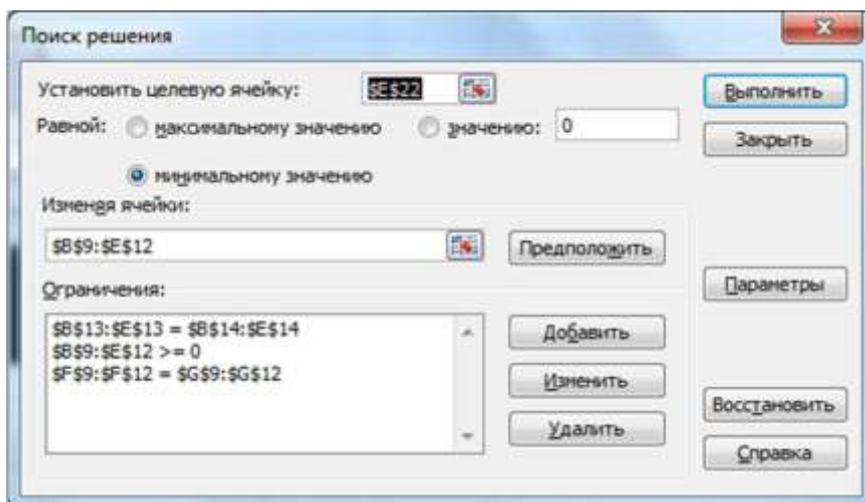
6. Проверить задачу на сбалансированность и записать целевую функцию $F(X)$,

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица себестоимости перевозок C:						
2		Стройка 1	Стройка 2	Стройка 3	Стройка 4		
3	Карьер 1	10	15	20	20		
4	Карьер 2	15	15	10	20		
5	Карьер 3	20	10	15	25		
6	Карьер 4	10	10	25	25		
7	Матрица перевозок X:						
8		Стройка 1	Стройка 2	Стройка 3	Стройка 4	Вывезено	Производительность карьера
9	Карьер 1	0	0	0	0	0	350
10	Карьер 2	0	0	0	0	0	200
11	Карьер 3	0	0	0	0	0	250
12	Карьер 4	0	0	0	0	0	400
13	Доставлено	0	0	0	0		
14	Потребность стройки	500	500	100	100		

используя встроенную функцию MS Excel – СУММПРОИЗВ().

	A	B	C	D	E	F	G
7	Матрица перевозок X:						
8		Стройка 1	Стройка 2	Стройка 3	Стройка 4	Вывезено	Производительность карьера
9	Карьер 1	0	0	0	0	0	350
10	Карьер 2	0	0	0	0	0	200
11	Карьер 3	0	0	0	0	0	250
12	Карьер 4	0	0	0	0	0	400
13	Доставлено	0	0	0	0		
14	Потребность стройки	500	500	100	100		
15	Суммарные потребности=	1200					
16	Суммарные затраты=	1200					
17	Следовательно, ТЗ сбалансирована.						
18	Целевая функция F(x)=	0					

7. Вызвать диалоговое окно надстройки «Поиск решения» и выполнить необходимые установки.



8. Сохранить и проанализировать полученное решение.

	A	B	C	D	E	F	G
7							
				Матрица перевозок X:			
8		Стройка 1	Стройка 2	Стройка 3	Стройка 4	Вывозно	Производительность карьера
9	Карьер 1	350	0	0	0	350	350
10	Карьер 2	0	0	100	100	200	200
11	Карьер 3	0	250	0	0	250	250
12	Карьер 4	250	250	0	0	400	400
13	Доставлено	500	500	100	100		
14	Потребность стройки	500	500	100	100		
15							
16	Суммарные потребности	1200					
17							
18	Суммарные затраты	1200					
19							
20		Следовательно, ТЗ сбалансирована.					
21							
22		Целевая функция F(x) =			13000		

Форма представления результата: файл MS Excel «Транспортная задача.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №4

Решение задач оптимизации средствами MS Excel

Цель работы:

Научиться решать задачи оптимизации средствами MS Excel

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;
- использовать численные методы исследования математических моделей.

Материальное обеспечение: персональный компьютер, MS Excel, Методические указания по выполнению практической работы

Задание 1: Составить план выгодного производства. Фирма производит несколько видов продукции из одного и того же сырья – А, В, С. Реализация продукции А дает прибыль 10 р., В – 15 р., С – 20 р. на единицу изделия.

Продукцию можно производить в любых количествах, поскольку известно, что сбыт, обеспечен, но ограничены запасы сырья. Необходимо определить, какой продукции и сколько надо произвести, чтобы прибыль от реализации была максимальной.

Порядок выполнения задания 1:

1. Создайте электронную таблицу по образцу:

	А	В	С	Д	Е	Ф
1	План выгодного производства					
2						
3	Сырье	Норма расхода сырья			Запас сырья	Расход сырья
4		А	В	С		
5	Сырье 1	18	15	12	350	
6	Сырье 2	6	4	8	200	
7	Сырье 3	5	3	3	100	
8	Прибыль на ед. изд.	10	15	20		
9	Количество					
10	Общая прибыль					

Введите исходные данные.

2. Расчетные формулы имеют вид:

Расход сырья 1 – (количество сырья 1)*(норма расхода сырья А)+(количество сырья 1)*(норма расхода сырья В)+(количество сырья 1)*(норма расхода сырья С).

Значит, в ячейку F5 нужно ввести формулу =B5*\$B\$9+C5*\$C\$9+D5*\$D\$9

Обратите внимание, что значения количества сырья каждого вида пока не известны и будут подобраны в процессе решения задания (ячейки B9: D9 пока пусты).

(Общая прибыль по А)=(прибыль на ед. изделий А)*(количество А),

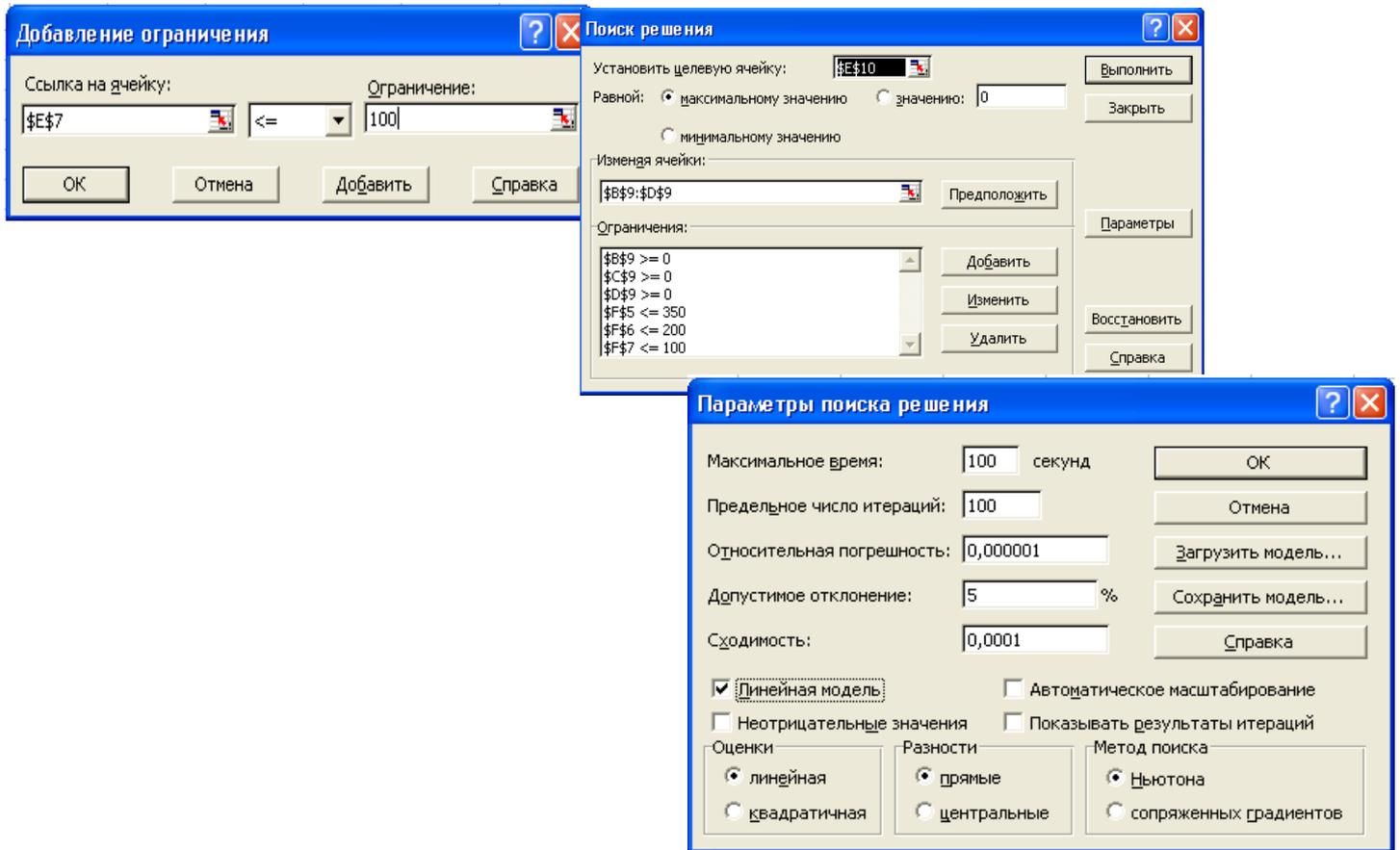
следовательно в ячейку B10 следует ввести формулу =B8*B9.

Итоговая общая прибыль = (Общая прибыль по А)+(Общая прибыль по В)+(Общая прибыль по С), значит в ячейку E10 следует ввести формулу =СУММ(B10:D10).

3. В меню Сервис активизируйте команду **Поиск решения** и введите параметры поиска:

☞ В качестве **целевой ячейки** укажите ячейку "Итоговая общая прибыль" (E10). Поскольку необходимо найти максимальное значение суммарной прибыли, активизируйте кнопку **равный** – **Максимальному значению**.

- ☞ В качестве **изменяемых ячеек** ввести ячейки количества сырья – (B9: D9).
- ☞ Используя кнопку *Добавить* в окнах *Поиск решения* и *Добавление ограничений*, опишите все **ограничения** задачи на запас сырья:
Расход сырья 1 ≤ 350 ; расход сырья 2 ≤ 200 ; расход сырья 3 ≤ 100 , а также положительные значения сырья A, B, C ≥ 0 .



☞ Установите **параметры поиска решения**. Для этого кнопкой *Параметры* откройте диалоговое окно *Параметры поиска решения*, установите параметры по образцу, задайте линейную модель расчета (*Линейность модели*).

4. Кнопкой *Выполнить* запустите **Поиск решения**. Если вы сделали все верно, то решение будет как на рисунке.

5. Сохраните созданный документ в своей папке с именем "План производства".

	A	B	C	D	E	F
1	План выгодного производства					
2						
3	Сырье	Норма расхода сырья			Запас сырья	Расход сырья
4		A	B	C		
5	Сырье 1	18	15	12	350	350,00
6	Сырье 2	6	4	8	200	200,00
7	Сырье 3	5	3	3	100	83,33
8	Прибыль на ед. изд.	10	15	20		
9	Количество	0	5,56	22,22		
10	Общая прибыль	0	83,33	444,44	527,78	

Выводы. Из решения видно, что оптимальный план выпуска предусматривает изготовление 5,56 кг продукции В и 22,22 кг продукции С. Продукцию А производить не стоит. Полученная прибыль при этом составит 527,78 р.

Форма представления результата: файл MS Excel «Задача оптимизации.xlsx»

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Тема 3.1 Тема 3.1. Моделирование сложных систем

Практическое занятие №5

Система математических расчетов Mathcad: вычисление производной функции

Цель работы:

Научиться вычислять производные в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Краткие теоретические сведения.

Оператор производной Mathcad предназначен для нахождения численного значения производной функции в заданной точке. Для вычисления производной используется клавиша со знаком ?.

Для того, чтобы найти производную функции и вычислить ее численное значение, необходимо сделать следующее:

- Сначала определить точку, в которой необходимо найти производную.
- Щелкнуть ниже определения этой точки. Затем набрать ?. Появится оператор

производной с двумя полями: $\frac{d}{d}$

- Щелкнуть на поле в знаменателе и набрать имя переменной, по которой проводится дифференцирование.

- Щелкнуть на поле справа от $\frac{d}{dx}$ и набрать выражение, которое нужно дифференцировать.

- Чтобы увидеть результат, нажать знак =.

Задание1.

Найти производную x^3 по x в точке $x=2$.

Порядок выполнения задания 1:

1. Определить точку, в которой необходимо найти производную:

$$x := 2$$

2. Ввести оператор производной, заполнить поля и вычислить производную:

$$\frac{d}{dx} x^3 = 12$$

Помните!

Результат дифференцирования есть не функция, а число – значение производной в указанной точке переменной дифференцирования.

Хотя дифференцирование возвращает только одно число, можно определить одну функцию как производную другой функции. Например: $f(x) := \frac{d}{dx} g(x)$.

Вычисление $f(x)$ будет возвращать в численной форме производную $g(x)$ в точке x .

Выражение, которое нужно дифференцировать, может быть вещественным или комплексным.

Переменная дифференцирования должна быть простой неиндексированной переменной.

Задание2.

Дана функция $y=f(x)$. Построить график функции и касательную к графику в точке с абсциссой $x=x_0$, если $f(x)=x^2 - 2x$, $x_0=0,5$, $y=f(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ - уравнение касательной.

Порядок выполнения задания 2:

1. Ввести данную функцию и найдем ее значение в точке x_0 :

$$f(x) := x^2 - 2 \cdot x$$

$$x_0 := 0.5$$

$$f(x_0) = -0.75$$

2. Найти значение производной данной функции в точке x_0 :

$$F(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

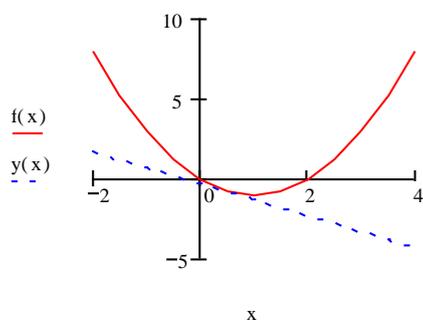
$$F(x_0) = -1$$

3. Записать уравнение касательной для данной функции:

$$y(x) := F(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

4. Построить график данной функции и касательную к ней.

$$x := -2, -1.5, .4$$



Задание3.

Найти производную функции в произвольной точке.

$$\begin{array}{lll}
1. \quad y = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) & 5. \quad y = (1 + \sqrt[3]{x})^3 & 9. \quad y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos 2x}} \\
2. \quad y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} & 6. \quad y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} & 10. \quad e^x \sin x \cos^3 x \\
3. \quad y = x \lg x & 7. \quad y = \cos 2x \lg x & \\
4. \quad y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} & 8. \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10} &
\end{array}$$

Задание 4.

Дана функция $y=f(x)$. Построить график функции и касательную к графику в точке с абсциссой $x=x_0$. $Y=f(x_0)(x-x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ – уравнение касательной.

$$\begin{array}{ll}
1. \quad f(x) = \frac{1}{x^4} + 2, x_0 = 1 & 6. \quad f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(4x - \frac{\pi}{3} \right), x_0 = \pi/6 \\
2. \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x_0 = 2 & 7. \quad f(x) = x^2 - 2x - 8, x_0 = -1 \\
3. \quad f(x) = x \ln x, x_0 = e & 8. \quad f(x) = \cos x, x_0 = -\pi/2 \\
4. \quad f(x) = x^2 + 1, x_0 = -1 & 9. \quad f(x) = x^2 - 3x + 2, x_0 = 3 \\
5. \quad f(x) = -x^2 + 1, x_0 = 1 & 10. \quad f(x) = e^{2x+3}, x_0 = -2
\end{array}$$

Форма представления результата: файлы Mathcad: «Производная.mcdx» и «Графики.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №6
Система математических расчетов Mathcad: вычисление определенных интегралов, расчет площади фигуры, ограниченной графиками функций

Цель работы:

Научиться вычислять определенные интегралы в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Краткие теоретические сведения.

Определенный интеграл.

Оператор интегрирования в Mathcad предназначен для численного вычисления определенного интеграла функции по некоторому интервалу.

Знак интеграла выводится при нажатии клавиши со знаком **&**.

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл, необходимо сделать следующее:

- Щелкнуть в свободном месте и набрать знак **&**. Появится знак интеграла с пустыми полями для подынтегрального выражения, пределов интегрирования и переменной интегрирования: \int
- Щелкнуть на поле внизу и набрать нижний предел интегрирования. Щелкнуть на верхнем поле и набрать верхний предел интегрирования.
- Щелкнуть на поле между знаком интеграла и **d** и набрать выражение, которое нужно интегрировать.
- Щелкнуть на последнее пустое поле и набрать переменную интегрирования.
- Чтобы увидеть результат, нажать знак **=**.

Задание1.

Вычислить определенный интеграл $\sin(x)^2$ от 0 до $\pi/4$

Порядок выполнения задания 1:

1. Ввести знак интеграла и заполнить пустые поля;
2. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x)^2 dx = 0.143$$

Помните!

- Пределы интегрирования должны быть вещественными. Выражение, которое нужно интегрировать может быть вещественным, либо комплексным.
- Кроме переменной интегрирования, все переменные в подынтегральном выражении должны быть определены ранее в другом месте рабочего документа.
- Переменная интегрирования должна быть простой переменной без индекса.
- Если переменная интегрирования является размерной величиной, верхний и нижний пределы интегрирования должны иметь ту же самую размерность.

Задание2.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y=x^2 - 2 \cdot x + 2, y=2 + 4 \cdot x - x^2$$

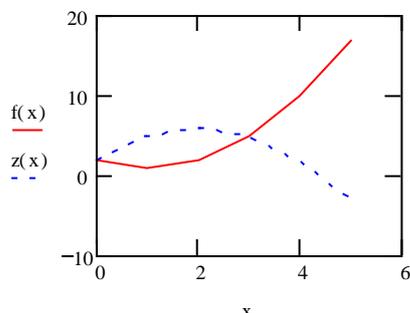
Порядок выполнения задания 2:

1. Построить графики этих функций в одном графическом блоке:

$$x := 0..5$$

$$f(x) := x^2 - 2 \cdot x + 2$$

$$z(x) := 2 + 4 \cdot x - x^2$$



2. Вычислить площадь полученной фигуры:

$$\int_0^3 2 + 4x - x^2 dx - \int_0^3 x^2 - 2x + 2 dx = 9 \quad (\text{кв.ед.})$$

Задание 3.

Вычислить определенный интеграл.

1. $\int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

5. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$

9. $\int_1^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2-1} dx$

2. $\int_4^9 \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$

6. $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$

10. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

4. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$

8. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Задание 4.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций. Построить эту фигуру.

1. $y = x^2 - 2x + 2, y = 2 + 4x - x^2$

2. $y = x^2, y = \frac{x^2}{x-2}, y = 0, x = 4$

3. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = 2\pi$

4. $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{4-3x}, y = 0$

5. $y = x^3, y = x^{\frac{1}{3}}, x = 0, x = 1$

6. $y = -x^2, y = 2e^x, x = 0, x = 1$

7. $y = \operatorname{tg}x, y = \frac{2}{3} \cos, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), x = 0$

8. $y = x - 2, y = x^2 - 4x + 2$

9. $y = 6x^2 - 5x + 1, y = \cos \pi x, x = 0, x = 1$

10. $y = \sin x, y = 2 \sin x, x = \frac{5\pi}{4}, x = 0$

Форма представления результата: файлы Mathcad: «Задание1.mcdx», «Задание2.mcdx», «Задание3.mcdx», «Задание4.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №7

Система математических расчетов Mathcad: построение графиков функций в полярных координатах, построение поверхностей

Цель работы:

Научиться строить разные виды графиков функций в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Краткие теоретические сведения.

Трехмерные, или **3D-графики**, отображают функции двух переменных вида $Z(X, Y)$. При построении трехмерных графиков в ранних версиях MathCAD поверхность нужно было определить математически (Рисунок 2, способ 2). Теперь применяют функцию MathCAD *CreateMesh*.

CreateMesh(F (или G , или $f1, f2, f3$), $x0, x1, y0, y1, xgrid, ygrid, fmap$)

Создает сетку на поверхности, определенной функцией F . $x0, x1, y0, y1$ – диапазон изменения переменных, $xgrid, ygrid$ – размеры сетки переменных, $fmap$ – функция отображения. Все параметры, за исключением F , – факультативные. Функция *CreateMesh* по умолчанию создает сетку на поверхности с диапазоном изменения переменных от -5 до 5 и с сеткой 20×20 точек.

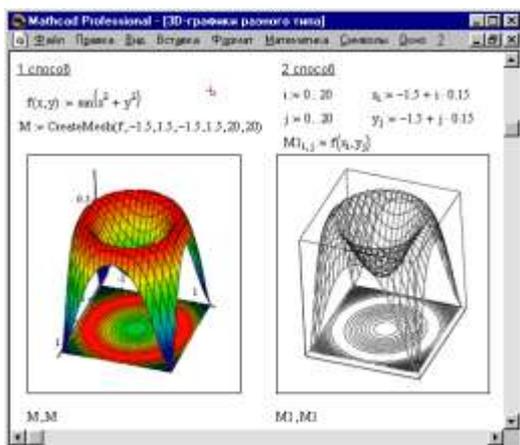


Рисунок 1. Пример построения на одном рисунке двух 3D-графиков разного типа

придать рисунку большую наглядность.

Нередко поверхности и пространственные кривые представляют в виде точек, кружочков или иных фигур. Такой график создается операцией **Вставка** \Rightarrow **График** \Rightarrow **3D Точечный**, причем поверхность задается параметрически – с помощью трех матриц (X, Y, Z) (см. Рисунок 3, способ 2), а не одной как в примере на Рисунке 2. Для определения исходных данных для такого вида графиков используется функция *CreateSpace* (см. Рисунок 3, способ 1).

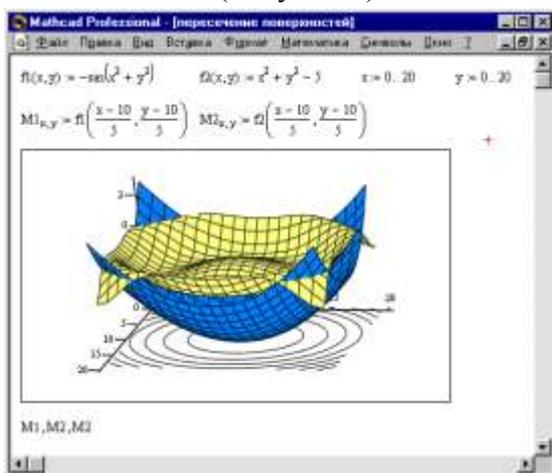
CreateSpace($F, t0, t1, tgrid, fmap$)

Пример использования функции *CreateMesh* для построения 3D-графиков приведен на Рисунке 2, способ 1. На Рисунке 2 построена одна и та же поверхность разными способами, с разным форматированием, причем изображены поверхности и под ними те же поверхности в виде контурного графика. Такое построение способно

Возвращает вложенный массив трех векторов, представляющих x -, y - и z -координаты пространственной кривой, определенной функцией F . t_0 и t_1 – диапазон изменения переменной, $tgrid$ – размер сетки переменной, $fmap$ – функция отображения. Все параметры, за исключением F , - факультативные.

Построение пересекающихся фигур

Особый интерес представляет собой возможность построения на одном графике ряда разных фигур или поверхностей с автоматическим учетом их взаимного пересечения. Для этого надо отдельно задать матрицы соответствующих поверхностей и после вывода шаблона 3D-графика перечислить эти матрицы под ним с использованием в качестве разделителя запятой (Рисунок 4).



Чтобы создать график в полярных координатах, необходимо:

- Выбрать **Полярный график** из меню **Графика**. Mathcad показывает круг с четырьмя полями ввода.
- Выше области графика определить угол Q и функцию угла $R(Q)$.
- Поле ввода внизу предназначено для угловой переменной графика. Ввести туда дискретную переменную или любое выражение, включающее дискретную переменную.
- Поле ввода слева должно содержать выражение для радиуса.
- Два поля ввода справа предназначены для верхнего и нижнего граничных значений радиуса. Mathcad заполняет эти поля по умолчанию.

В Mathcad полярные графики рисуются путем замены R и Q на декартовы координаты x и y с использованием стандартных преобразований $x=R\cos(Q)$ и $y=R\sin(Q)$. Предполагается, что R и Q могут принимать и положительные, и отрицательные значения.

Помните! Mathcad не обрабатывает график, пока вы не нажмете [F9], или, в автоматическом режиме, не щелкните мышью вне области графика.

Задание 1.

Построить график поверхности $f(x,y)=\sin(x+y)$

Порядок выполнения задания 1.

1. Определить функцию двух переменных:

$$f(x,y) := \sin(x^2 + y^2)$$
2. Допустим, что по осям x и y необходимо 20 точек. Определим дискретные аргументы i и j , чтобы индексировать эти точки.

$$N := 20 \quad i := 0..N \quad j := 0..N$$
3. Определим x и y как равномерно располагаемые точки на осях X и Y .

$$x_i := -1.5 + 0.15 i \quad y_j := -1.5 + 0.15 j$$

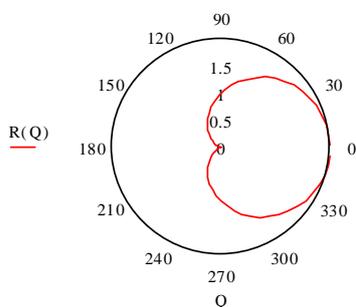
4. Заполнить матрицу M значениями $F(x, y)$
 $M_{i,j} := f(x_i, y_j)$
5. Выбрать **График поверхности** из меню **Графика**.
6. Напечатать M в поле ввода и щелкнуть вне графической области.

Задание 2.

Построить график функции $R(Q) = \cos(Q) + 1$

Порядок выполнения задания 2.

1. Определить приращение для Q :
 $N := 50$
2. Определить Q как дискретный аргумент с заданным приращением:
 $Q := 0.2 \frac{\pi}{N}, 0.2 \frac{\pi}{N} + 0.1 \dots 2 \cdot \pi$
3. Определить $R(Q)$ как функцию Q :
 $R(Q) := \cos(Q) + 1$
4. Отобразить график $R(Q)$ в полярных координатах.



Задание 3.

Построить график поверхности.

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$
2. $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = x^2 y + x$
4. $f(x, y) = y^2 - x^2$
5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
6. $f(x, y) = x\sqrt{y}$
7. $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
8. $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$
9. $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$
10. $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

Задание 4.

Построить график в полярных координатах.

1. $\rho = 2 \sin \varphi$
2. $\rho = \frac{\pi}{\varphi}$
3. $\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^\varphi$
4. $\rho = 3 \sin 3\varphi$
5. $\rho = 2(\cos \varphi - \sin \varphi)$
6. $\rho = \frac{15}{3 - 4 \sin \varphi}$
7. $\rho = 4 \sin 2\varphi$
8. $\rho = 3 + \cos 4\varphi$
9. $\rho = 2 - \sin 4\varphi$
10. $\rho = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3}$

Форма представления результата: файлы Mathcad: «Задание1.mcdx», «Задание2.mcdx», «Задание3.mcdx», «Задание4.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №8

Реализация метода половинного деления средствами MS Excel и Mathcad

Цель работы:

Сравнить результаты применения метода половинного деления в среде MS Excel и Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Задание1.

Уточнить корень уравнения $\cos(2x)+x-5=0$, отделенный на отрезке $[5;6]$ с точностью до 0,00001, используя электронные таблицы MS Excel

Порядок выполнения задания 1:

1. Заполнить ячейки A1:H1 последовательно следующим образом a, b, c $= (a+b)/2$, f(a), f(b), f(c), $|b-a| \leq 2 * e$, e.
2. Ввести в ячейку A2 число 5, в ячейку B2 – число 6.
3. В ячейку C2 ввести формулу: $=(A2+B2)/2$.
4. В ячейку D2 ввести формулу: $=\cos(2*A2)+A2-5$, скопировать эту формулу в ячейки E2:F2.
5. Ввести в ячейку G2 формулу: $=\text{ЕСЛИ}(\text{ABS}(B2-A2) \leq 2 * \$H\$2; C2; “-”)$.
6. Ввести в ячейку H2 число 0,00001.
7. В ячейку A3 ввести формулу: $=\text{ЕСЛИ}(D2 * F2 < 0; A2; C2)$.
8. В ячейку B3 ввести формулу: $=\text{ЕСЛИ}(D2 * F2 < 0; C2; B2)$.
9. Диапазон ячеек C2:G2 скопировать в диапазон ячеек C3:G3.

10. Выделить диапазон ячеек A3:G3 и с помощью маркера заполнения заполнить все нижестоящие ячейки до получения результата в одной из ячеек столбца G (это ячейки A3:G53).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	$c=(a+b)/2$	f(a)	f(b)	f(c)	$ b-a <=2*e$	e
2		5	6	5,5	-0,839072	1,843854	0,504426	0,00001
3		5	5,5	5,25	-0,839072	0,504426	-0,225537	
4		5,25	5,5	5,375	-0,225537	0,504426	0,131887	
5		5,25	5,375	5,3125	-0,225537	0,131887	-0,049651	
6		5,3125	5,375	5,34375	-0,049651	0,131887	0,040526	
7		5,3125	5,34375	5,328125	-0,049651	0,040526	-0,004725	
8		5,32813	5,34375	5,335938	-0,004725	0,040526	0,017862	
9		5,32813	5,33594	5,332031	-0,004725	0,017862	0,006558	
10		5,32813	5,33203	5,330078	-0,004725	0,006558	0,000914	
11		5,32813	5,33008	5,329102	-0,004725	0,000914	-0,001906	
12		5,3291	5,33008	5,32959	-0,001906	0,000914	-0,000496	
13		5,32959	5,33008	5,329834	-0,000496	0,000914	0,000209	
14		5,32959	5,32983	5,329712	-0,000496	0,000209	-0,000144	
15		5,32971	5,32983	5,329773	-0,000144	0,000209	0,000033	
16		5,32971	5,32977	5,329742	-0,000144	0,000033	-0,000055	
17		5,32974	5,32977	5,329758	-0,000055	0,000033	-0,000011	
18		5,32976	5,32977	5,329765	-0,000011	0,000033	0,000011	

Задание 2.

Уточнить корень уравнения, отделенный на отрезке $[-3;-1]$ с точностью до 0,00001, используя Mathcad

Порядок выполнения задания 2.

1. Определить функцию уравнения $f(x)=0$ как функцию пользователя, интервал поиска решения зададим переменными a и b. Найти этот интервал можно, например, табличным или графическим методом:

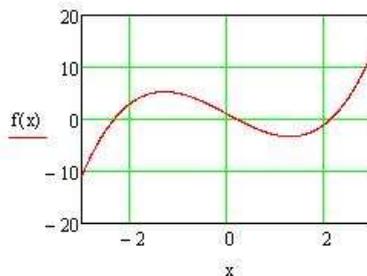
$$f(x) := x^3 - 5x + 1 \quad a := -3 \quad b := -1$$

Начальный интервал $[a,b]$ должен быть таким, чтобы значения $f(a)$ и $f(b)$ имели противоположные знаки. Если искомый корень уравнения окажется единственным на интервале, то совсем хорошо :)

2. Логика **метода дихотомии** (возможно, более правильные названия - метод **бисекции**, метод **половинного деления**) довольно проста: если на концах выбранного интервала $[a,b]$ знаки функции совпадают (произведение $f(a)*f(b)>0$), то вернуть результат "недопустимый интервал" (вернём в этом случае ответ "бесконечность"), в противном случае до тех пор, пока длина интервала не станет меньше заданной погрешности ϵ , будем находить середину текущего интервала $c=(a+b)/2$, считать в ней значение функции и проверять, какую из половин отрезка $[a,c]$ или $[c,b]$ нужно отбросить для выполнения следующего шага - а именно, ту, в которой знак $f(c)$ совпадает со знаком функции на левой или правой границе интервала (в листинге - проверка $f(a)*f(c)>0$). Для большей точности вернём середину "последнего" интервала $[a,b]$, меньшего ϵ :

```
Dichotomy(f, a, b, ε) :=
  return ∞ if f(a)·f(b) > 0
  while |b - a| > ε
    c ← (a + b) / 2
    a ← c if f(a)·f(c) > 0
    b ← c otherwise
  (a + b) / 2
```

$$f(a) = -11 \quad f(b) = 5 \quad x := \text{Dichotomy}(f, a, b, 10^{-6}) \quad x = -2.33 \quad f(x) = 1.861 \times 10^{-6}$$



Форма представления результата: файл MS Excel «Задание1.xlsx» и файл Mathcad «Задание2.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка «**отлично**» выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка «**хорошо**» выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Практическое занятие №9

Реализация метода наименьших квадратов средствами MS Excel и Mathcad

Цель работы:

Научиться реализовывать метод наименьших квадратов в среде Mathcad

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

Материальное обеспечение: персональный компьютер, Mathcad, методические указания по выполнению практической работы.

Краткие теоретические сведения.

Наиболее распространенным методом аппроксимации экспериментальных данных является метод наименьших квадратов. Метод позволяет использовать аппроксимирующие функции произвольного вида и относится к группе глобальных методов. Простейшим вариантом метода наименьших квадратов является аппроксимация прямой линией (полиномом первой степени). Этот вариант метода наименьших квадратов носит также название линейной регрессии.

Критерием близости в методе наименьших квадратов является требование минимальности суммы квадратов отклонений от аппроксимирующей функции до экспериментальных точек:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min$$

Таким образом, не требуется, чтобы аппроксимирующая функция проходила через все заданные точки, что особенно важно при аппроксимации данных, заведомо содержащих погрешности.

Важной особенностью метода является то, что аппроксимирующая функция может быть произвольной. Ее вид определяется особенностями решаемой задачи, например, физическими соображениями, если проводится аппроксимация результатов физического эксперимента. Наиболее часто встречаются аппроксимация прямой линией (линейная регрессия), аппроксимация полиномом (полиномиальная регрессия), аппроксимация

линейной комбинацией произвольных функций. Кроме того, часто бывает возможно путем замены переменных свести задачу к линейной (провести линеаризацию). Например, пусть аппроксимирующая функция ищется в виде $y = A \exp(kx)$. Прологарифмируем это выражение и введем обозначения $z = \ln(y)$, $a = \ln(A)$. Тогда в новых обозначениях задача сводится к отысканию коэффициентов линейной функции $z = a + kx$.

Задание1.

Применить метод наименьших квадратов для аппроксимации экспериментальных данных.

Порядок выполнения задания 1.

1. Считать данные из файлов datax и datay

$x := \text{READPRN}(\text{datax})$ $y := \text{READPRN}(\text{datay})$

При использовании MathCAD 2000 имя файла следует заключать в кавычки и записывать его по правилам MS DOS, например, $\text{READPRN}(\text{"c:\mylib\datax.prn"})$.

2. Определяем количество прочитанных данных (число экспериментальных точек).

$n := \text{last}(x)$ $i := 0..n$

3. Используем встроенные функции *slope* и *intercept* для определения коэффициентов линейной регрессии (аппроксимация данных прямой линией). Функция *slope* определяет угловой коэффициент прямой, а функция *intercept* – точку пересечения графика с вертикальной осью.

$A := \text{intercept}(x, y)$ $B := \text{slope}(x, y)$

4. Определяем аппроксимирующую функцию: $f1(z) := A + B \cdot z$

5. Коэффициенты линейной регрессии –

$A = -3.539$ $B = 1.81$

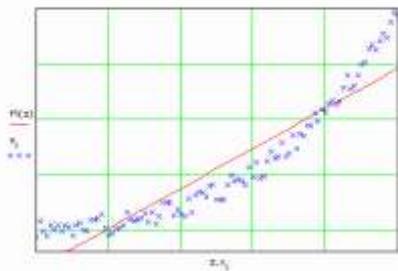
6. Mathcad 2000 предлагает для этих же целей использовать функцию *line*

$\text{line}(x, y) = \begin{pmatrix} -3.539 \\ 1.81 \end{pmatrix}$

7. Вычислить стандартное отклонение.

$S1 := \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \sum_i (f1(x_i) - y_i)^2}$ $S1 = 2.06$

$z := 0, 0.1 .. 10$



Задание2.

Подобрать полиномы второй и третьей степени, в качестве аппроксимирующей функции.

Порядок выполнения задания 2.

Для этих целей служат встроенные функции *regress* и уже знакомая нам функция *interp*. (Очевидно, что если в качестве аппроксимирующей функции брать полином степени на единицу меньше числа точек, то задача сведется к задаче глобальной интерполяции и полученный полином будет точно проходить через все заданные узлы.)

1. Вводим степени полиномов:

$k2 := 2$ $k3 := 3$

2. Функция **regress** является вспомогательной, она подготавливает данные, необходимые для работы функции **interp**. Вектор **vs** содержит, в том числе, и коэффициенты полинома

$$vs2 := regress(x, y, k2) \quad vs3 := regress(x, y, k3)$$

3. Функция **interp** возвращает значение полинома в точке **z**. Определив новые функции **f2**, **f3**, мы получили возможность находить значение полинома в любой заданной точке.

$$f2(z) := interp(vs2, x, y, z) \quad f3(z) := interp(vs3, x, y, z)$$

$$coeffs2 := submatrix(vs2, 3, length(vs2) - 1, 0, 0)$$

$$coeffs3 := submatrix(vs3, 3, length(vs3) - 1, 0, 0)$$

4. Коэффициенты:

$$(coeffs2)^T = (0.701 \quad -0.76 \quad 0.257)$$

$$(coeffs3)^T = (-0.122 \quad 0.253 \quad 2.377 \cdot 10^{-3} \quad 0.017)$$

$$s2 := \sqrt{\left[\frac{1}{(n-2)} \sum_i (f2(x_i) - y_i)^2 \right]} \quad s2 = 0.67$$

$$s3 := \sqrt{\left[\frac{1}{(n-2)} \sum_i (f3(x_i) - y_i)^2 \right]} \quad s3 = 0.58$$

Стандартные отклонения почти не отличаются друг от друга, коэффициент при четвертой степени **z** невелик, поэтому дальнейшее увеличение степени полинома нецелесообразно и достаточно ограничиться только второй степенью.

К сожалению, функция **regress** имеется далеко не во всех версиях **Matcad**'а. Однако, провести полиномиальную регрессию можно и без использования этой функции. Для этого нужно определить коэффициенты нормальной системы и решить полученную систему уравнений, например, матричным методом.

5. Теперь попытаемся аппроксимировать экспериментальные данные полиномами степени **m** и **m1**, не прибегая к помощи встроенной функции **regress**.

$$m := 2 \quad t := 0..m \quad j := 0..m$$

$$m1 := 3 \quad t1 := 0..m1 \quad j1 := 0..m1$$

6. Вычисляем элементы матрицы коэффициентов нормальной системы

$$p_{t,j} := \sum_i (x_i)^{t+j} \quad p1_{t1,j1} := \sum_i (x_i)^{t1+j1}$$

7. и столбец свободных членов

$$b_j := \sum_i y_i (x_i)^j \quad b1_{j1} := \sum_i y_i (x_i)^{j1}$$

8. Находим коэффициенты полинома, решая систему матричным методом,

$$a := p^{-1} \cdot b \quad a1 := p1^{-1} \cdot b1$$

9. Определяем аппроксимирующие функции

$$f2(z) := \sum_t a_t z^t \quad f3(z) := \sum_{t1} a1_{t1} z^{t1}$$

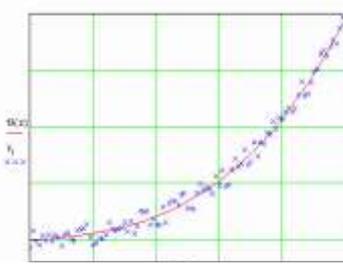
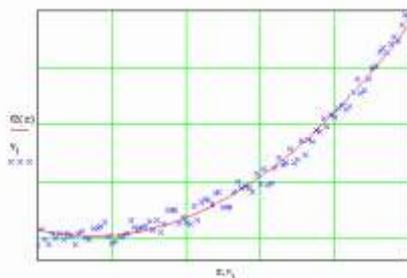
10. Коэффициенты полиномов следующие:

$$a = \begin{pmatrix} 0.701 \\ -0.76 \\ 0.257 \end{pmatrix} \quad a1 = \begin{pmatrix} -0.122 \\ 0.253 \\ 2.377 \cdot 10^{-3} \\ 0.017 \end{pmatrix}$$

11. Вычислим стандартное отклонение

$$S2 := \sqrt{\left[\frac{1}{(n-2)} \sum_i (Q(x_i) - y_i)^2 \right]} \quad S2 = 0.671$$

$$S3 := \sqrt{\left[\frac{1}{(n-2)} \sum_i (B(x_i) - y_i)^2 \right]} \quad S3 = 0.581$$



Форма представления результата: файл MS Excel «Задание1.xlsx» и файл Mathcad «Задание2.mcdx».

Критерии оценки:

Оценка **«отлично»** выставляется, если выполнены все задания практического занятия, допущены 1-2 недочеты, исправленные по требованию преподавателя.

Оценка **«хорошо»** выставляется, если работа выполнена в полном объеме, допущены одна ошибка или более двух недочетов при выполнении задания, исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если задания выполнены не в полном объеме, допущены 1-2 ошибки при выполнении заданий но продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если выполнено менее половины заданий, не продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала.