Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/С.А. Махновский
«01» марта 2018г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ЕН.03 Математика
для студентов специальности
43.02.15 Поварское и кондитерское дело

Магнитогорск, 2018

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
Математических и
естественнонаучных дисциплин
Председатель
Е.С. Корытникова
Протокол №6 от 21.02.2018 г

Методической комиссии 01.03.2018 г.,
протокол №4

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» МпК Ю.Н. Садчикова

Методические указания по выполнению практическихработ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины«Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 43.02.15 «Поварское и кондитерское дело» и овладению общими компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике)необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практическогозанятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
У01.2 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
У01.3 определять этапы решения задачи;
У01.9 реализовать составленный план;
У02.4 структурировать получаемую информацию;
У02.7 оформлять результаты поиска.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 1.4 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур полуфабрикатов с учетом потребностей различных категорий потребителей, видов и форм обслуживания;

ПК 2.8 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур горячих блюд, кулинарных изделий, закусок, в том числе авторских, брендовых, региональных с учетом потребностей различных категорий потребителей, видов и форм обслуживания;

ПК 3.7 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур холодных блюд, кулинарных изделий, закусок, в том числе авторских, брендовых, региональных с учетом потребностей различных категорий потребителей, видов и форм обслуживания;

ПК 4.6 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур холодных и горячих десертов, напитков, в том числе авторских, брендовых, региональных с учетом потребностей различных категорий потребителей, видов и форм обслуживания;

ПК 5.6 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур хлебобулочных, мучных кондитерских изделий, в том числе авторских, брендовых, региональных с учетом потребностей различных категорий потребителей;

ПК 6.2 - Осуществлять текущее планирование, координацию деятельности подчиненного персонала с учетом взаимодействия с другими подразделениями;

ПК 6.3 - Организовывать ресурсное обеспечение деятельности подчиненного персонала;

ПК 6.4 - Осуществлять организацию и контроль текущей деятельности подчиненного персонала.

А также формированию *общих компетенций*:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам;

ОК.02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Разделы/темы	**Темы практических/лабораторных занятий**	**Количество часов**	**Требования ФГОС СПО (уметь)**
Раздел 1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА		**14**	
1.1 Предел функции. Непрерывность функции	Практическая работа № 1 Вычисление пределов	2	У1
1.2 Основы дифференциального исчисления	Практическая работа № 2 Правила дифференцирования. Техника дифференцирования	2	У1, У01.2, У02.4, У02.7
	Практическая работа №3 Вычисление производных сложных функций	2	У1, У01.2, У02.4, У02.7
	Практическая работа №4 Исследование функций и построение графиков	2	У1, У01.2, У02.4, У02.7
1.3 Неопределённый и определённый интеграл	Практическая работа №5 Вычисление неопределённых интегралов	2	У1, У01.2, У01.3, У01.9
	Практическая работа №6 Вычисление определённых интегралов	2	У1, У01.2, У01.3, У01.9
1.4 Дифференциальные уравнения	Практическая работа №7 Решение дифференциальных уравнений	2	У1, У01.3, У01.9
Раздел 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ		**2**	
2.2 Основы математической статистики	Практическая работа №8 Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы	2	У01.3, У01.9
ИТОГО		**16**	

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Предел функции. Непрерывность функции

Практическая работа №1
Вычисление пределов

Цель: Научиться вычислять пределы функций.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;
- раскрывать неопределенности;
- находить пределы функций, используя формулы замечательных пределов.
Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.
Задание:
Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3-10x^2-4x+5)$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}$
5. $\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:
Найти предел функции:

1) $\lim_{x\to 2}(2x^3-10x^2-4x+5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to 2}(2x^3-10x^2-4x+5)$$
$$=2\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3-10\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-4\lim_{x\to 2}x+5=2\cdot 8-10\cdot 4-4\cdot 2+5=-27$$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке $x=3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию. Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2корни квадратного трехчлена. Корнями квадратного трехчлена $3x^2-11x+6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$$3x^2-11x+6=3(x-3)(x-\frac{2}{3})$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2-5x-3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$2x^2-5x-3=2(x-3)(x+\frac{1}{2})$

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)(x-\frac{2}{3})}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})}{2(x+\frac{1}{2})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1}=\frac{3\lim\limits_{x\to 3}x-2}{2\lim\limits_{x\to 3}x+1}=\frac{3\cdot 3-2}{2\cdot 3+1}=\frac{7}{7}=1$$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞, то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x^3}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}-\frac{6x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4}-\frac{8x^2}{x^4}+\frac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}+\frac{10}{x^4}}{6-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0}{6}=0$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Введем новую переменную: $x=-3y;\ x\to\infty;\ y\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{5\cdot(-3y)}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y}=e^{-15}=\frac{1}{e^{15}}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2 Основы дифференциального исчисления

Практическая работа №2

Правила дифференцирования. Техника дифференцирования

Цель работы: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение :
Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.
Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Задание:

Найти значение производной данной функции в данной точке.

1) $y = 2x^2 - 3x + 5,\ x = 0$
2) $y = 7x^3 - 6 + 3x^2,\ x = 0;$
3) $y = 12 - 3x^3 + 2x^2,\ x = 0;$
4) $y = x^3 - 4x^2 + x,\ x = 0;$
5) $y = 21x + 3x^5 + 7x^2 - 5,\ x = 0;$
6) $y = x^3 \cdot 3x^{0,5},\ x = 1;$
7) $y = (x + 1) \cdot 2x^3,\ x = 1;$
8) $y = 4x \cdot (7x^2 + 5),\ x = 1;$
9) $y = (2x^2 + 3x) \cdot (x - 1),\ x = 1;$
10) $y = (6x - 3x^2) \cdot (x^2 + 2),\ x = 1;$
11) $y = \dfrac{x+1}{x^2},\ x = 1;$
12) $y = \dfrac{x}{x-1},\ x = 0;$
13) $y = \dfrac{2x^2}{3x+5},\ x = 0;$
14) $y = \dfrac{7-2x}{x^3},\ x = 1;$
16) $y = (x - 3x^2 + 5)^3,\ x = 0;$
17) $y = (7x - 1 + 4x^3)^5,\ x = 0;$
18) $y = (x^3 + 1)^2,\ x = 0;$
19) $y = (1 - 2x)^7,\ x = 0;$
20) $y = (4x + 5x^2 - 7)^2,\ x = 0;$
21) $y = \sqrt{x+1},\ x = 0;$
22) $y = \sqrt{2x^2+3},\ x = 0;$
23) $y = \sqrt{4-7x^2},\ x = 0;$
24) $y = \sqrt{3x^3},\ x = 1;$
25) $y = \sqrt{2x^5},\ x = 1;$
26) $y = \dfrac{1}{x+1},\ x = 0;$
27) $y = \dfrac{1}{3-2x},\ x = 0;$
28) $y = \dfrac{1}{4x-3x^2},\ x = 1;$
29) $y = \dfrac{1}{5x^3+3},\ x = 0;$

15) $y = \dfrac{7x}{3-2x^2}$, $x = 0$;

30) $y = \dfrac{1}{6-7x^2}$, $x = 0$.

Найти производные сложных функций:

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2 x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Краткие теоретические сведения

Определение: Производной функции f(x) ($f'(x_0)$) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций.

f(x)	f'(x)
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$, где $c - const$

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1-4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1-4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1-4x^2)^9 \cdot (1-4x^2)' = 10\,(1-4x^2)^9(-8x) = -80x(1-4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u'$, $(cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)'$$
$$= \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x+5x^2$, для второй функции $u = 3+10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u'$, $(\log_a u)' =$ *1ulna·u'*.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x)\log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}.$$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

5.$f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$$u = 1 - e^{2x}$$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' = -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x)$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическая работа №3

Вычисление производных сложных функций

Цель: Научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять правила дифференцирования;
- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

5. Определите вид функции. Если функция является сложной, то введите промежуточный аргумент.
6. Определите, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Примените соответствующее правило.
7. Используя таблицу производных, найдите производные функций.
8. Раскройте скобки и приведите подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\ (1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u'$, $(cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(sin\,\frac{1}{2}x\right)' cos2x + sin\,\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

$$= cos\,\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\,\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2}cos\,\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\,\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{1}{(3+10x)\,ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x)\log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

/

4. $f(x) = arcsin\,\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\,\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(arcsin\,\frac{3}{5}x\right)' + (arccos\,5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1 - e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1 - e^{2x}}\right)'.$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1 - e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1 - e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' =$$
$$-\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическая работа №4
Исследование функций и построение графиков

Цель работы: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- проводить исследование функций с помощью производной;

- строить графики функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.

2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).

3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.

4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.

5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.

6. Найти асимптоты графика функции.

7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

8. Найти область значений.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ равно b.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции y = f(x),

если $\lim_{x\to\infty}|f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.

2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$.

$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$.

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

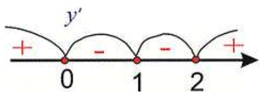
4.Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5.Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max} = 0$; $y_{min} = 2$.

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2(2x-2) \cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

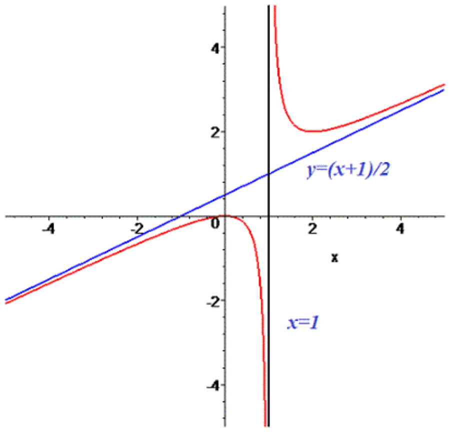
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

8.На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.3 неопределённый и определённый интеграл

Практическая работа №5
Вычисление неопределённых интегралов

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования, методом подстановки;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int(8x^4-6x^2+2x-3)dx$

2) $\int\frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$

3) $\int\cos(10x-5)\,dx$

4) $\int 3^{4x^2}xdx$

5) $\int\frac{5dx}{25+16x^2}$

6) $\int\frac{x^2dx}{(1-2x^3)^2}$

7) $\int\frac{2x^4-4x^2-3x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

8)

9)

10) .

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, приведите интеграл к табличным формулам. Проинтегрируйте.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то введите новую переменную, найдите ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Найдите полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернитесь к старой переменной.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то примените формулу интегрирования по частям $\int UdV=UV-\int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *U*и *dV*. Затем, после нахождения *dU*и *V*, используйте формулу интегрирования по частям.

-Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где $P(x)$- многочлен, k- число. Удобно положить $U = P(x)$,а все остальные множители принять за dV.

-Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$.

Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U.

- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx, \int e^{ax}cosbxdx$, где aи bчисла. За Uможно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1) $\int \frac{6x^4-5x^2+3x+4}{x^2}dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2}dx$$
$$= \int \left(\frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right)dx$$
$$= \int \left(6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2}\right)dx$$
$$= 6\int x^2dx - 5\int dx$$
$$+ 3\int \frac{dx}{x} + 4\int x^{-2}dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3\ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 - 5x + 3\ln|x| - \frac{4}{x} + C$$

2) $\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1 - x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

3) $\int (x^3 - 4x)lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx$, $dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3-4x)\ln x\cdot dx = \ln x\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)-\int\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$\ln x\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)-\int\left(\frac{x^3}{4}-2x\right)dx = \ln x\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)-\frac{x^4}{16}+x^2+C$$

4) $\int (x^2-2x)cos4xdx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2-2x,\ dV = cos4xdx$.

$$dU = (2x-2)dx, \qquad V = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x$$

$$\int (x^2-2x)\cos 4x\,dx = (x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x - \int \frac{1}{4}sin4x(2x-2)dx =$$

$$(x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x - \frac{1}{4}\int sin4x(2x-2)dx = \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}\int sin4x(x-1)dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x-1,\ dV = sin4xdx$.

$$dU = dx, \qquad V = \int sin4xdx = -\frac{1}{4}cos4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int -\frac{1}{4}cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) + \frac{1}{4}\int cos4xdx =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{8}\int cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{32}sin4x + C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическая работа №6

Вычисление определённых интегралов

Цель работы: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенные интегралы различными методами;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_{-2}^{3}(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)dx$

1. $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$
2. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$
3. $\int_{-2}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{sinx} cosxdx$
5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{sin^2\frac{x}{3}}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то необходимо вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

Ход работы:

1) $\int_{-1}^{3}(4\,x^3 - 3x^2 + 2x + 5)dx$

2) $\int_{-1}^{3}(4x^3-3x^2+2x+5)dx=4\int_{-1}^{3}x^3dx-3\int_{-1}^{3}x^2dx+2\int_{-1}^{3}xdx+5\int_{-1}^{3}dx=x^4-x^3+x^2+5x|_{-1}^{3}=$
$3^4-3^3+3^2+5\cdot 3-(1+1+1-5)=81-27+9+15+2=80$
$\int_0^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2}=\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2}==\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}x=t\\ \frac{5}{2}dx=dt\\ dx=\frac{2}{5}dt\\ x_H=0\ \ t_H=0\\ x_B=0,4\ \ t_B=1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt|_0^1=\frac{1}{2}(arctg1-arctg0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^3x}=\begin{bmatrix}cosx=t\\ dcosx=dt\\ -sinxdx=dt\\ sinxdx=-dt\\ x_H=0\ \ t_H=cos0=1\\ x_B=\frac{\pi}{3}\ \ t_B=cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\int_1^{0,5}\frac{-dt}{t^3}=-\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5}=\frac{1}{2t^2}|_1^{0,5}=\frac{1}{2\cdot 0,25}-\frac{1}{2}=2-0,5=1,5$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.4 Дифференциальные уравнения

Практическая работа №7

Решение дифференциальных уравнений

Цель: формирование умений решать дифференциальные уравнения первого и второго порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными;
- решать линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами;
- решать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Найти общие решения уравнений:

1. $(xy + x)\frac{dx}{dy} = 1.$
2. $(xy^2 + x)dx + (x^2 - y)dy = 0.$
3. $(y - x^2y)$dy+$(x + xy^2)$ dx= 0.
4. $(1 + x^2)$dy−$(xy + x)dx = 0.$
5. $y\,dx + (1 - y)x\,dy = 0.$
6. $x^{2\,dy} + (y - 1)$dx= 0.
7. $2(xy + e)$dx= $xdy.$
8. $(x^2 + 1)dy = ydx.$
9. $x^2y' - 2xy = 3y.$
10. $ds = (6t - 2)dt,$
11. $dx = (8t^2 - 5)dt$
12. $\frac{8\,dy}{y} - \frac{dx}{3x} = 0,$
13. $\frac{dy}{6y} - dx = 0,$
14. $5y' = 3y,$
15. $(1 + y)dx - (2 - x)dy = 0$

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальным уравнением называют уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции. Если независимая переменная одна, то уравнение называют обыкновенным; если же независимых переменных две или больше, то уравнение называют дифференциальным уравнением в частных производных.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называют порядком дифференциального уравнения. Например:

1) $\mathrm{x^2y' — 5xy = y^2}$обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка;

2) $\mathbf{\frac{d^2y}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} = x^2}$обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка;

3) $\mathrm{y'^2 + y'y''' =}$ хобыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка;

4) $F(\mathrm{x, y, y', y''}) = \mathbf{0}$ общий вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка;

5) $x^2\frac{dz}{dx} + y^2\frac{dz}{dy} = 0$ уравнение в частных производных первого порядка.

Будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, т.е. уравнения вида $F(\mathrm{x, y, y'}) = \mathbf{0}$ или (в разрешенном относительно y'виде) $\mathrm{y'} = f(\mathrm{x, y}).$

Решением дифференциального уравнения называют такую дифференцируемую функцию$\mathbf{y = \varphi(x)}$, которую при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество. Процесс нахождения решения Дифференциального уравнения называют интегрированием дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка

$y' = f(x, y)$в области D называют функцию $\mathbf{y = \varphi(x, C)}$, обладающую следующими свойствами:

1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C, принадлежащих некоторому множеству;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$такого, что$(x_0; y_0) \epsilon D$, существует единственное значение$C = C_0$, при котором решение $y = < p(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Всякое решение $\mathbf{y = \varphi(x, C_0)}$,, получающееся из общего решения

$\mathbf{y = \varphi(x, C)}$, при конкретном значении $C = C_0$, называют частным решением.

Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называют задачей Коши.

Построенный на плоскости (XOY)график всякого решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения называют интегральной кривой этого уравнения. Таким образом, общему решению $\mathbf{y = \varphi(x, C)}$на плоскости (XOY)соответствует семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра — произвольной постоянной C, а частному решению, удовлетворяющему начальному условию $y(x_0) = y_0$, — кривая этого семейства, проходящая через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$.

Теорема Коши Если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную$\frac{\partial f}{\partial y}$ в области Dто решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$ существует и единственно, т.е. через точку $(x_0;\ y_0)$ проходит единственная интегральная кривая данного уравнения.

Особым решением называют такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т.е. в любой окрестности каждой точки $(x; y)$особого решения существуют по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Особые решения не получаются из общего решения дифференциального уравнения ни при каких значениях произвольной постоянной C (в том числе и при C = ±∞).

Особым решением является огибающая семейства интегральных кривых (если она существует), т.е. линия, которая в каждой своей точке касается по меньшей мере одной интегральной кривой.

Например, общее решение уравнения $y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$записывается в виде $y = sin(x + C)$. Это семейство интегральных кривых имеет две огибающие: $y = \mathbf{1}$ и$y = -1$, которые и являются особыми решениями.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx - f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$$

относится к типу уравнений с разделяющимися переменными. Если ни одна из функций $f_1(x)$, $\mathbf{f_2(x)}$, $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$не равна тождественно нулю, то в результате деления исходного уравнения на $f_2(x) \cdot \varphi_1(y)$ оно приводится к виду: $\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} - \frac{\varphi_{2(y)}dy}{\varphi_1(y)} = 0.$

Разведём переменные в разные части равенства и проинтегрируем $\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} = \int \frac{\varphi_{2(y)}dy}{\varphi_1(y)}$. Решение дифференциального уравнения, выраженное в неявной форме, называют интегралом этого уравнения.

Порядок выполнения работы:

1.Решить уравнение $x(y^2 — 4)\ dx + ydy = 0$.

Разделив обе части уравнения на $y^2 - 4 \neq 0$, имеем

$$\boldsymbol{xdx + \frac{ydy}{y^2 - 4} = 0}$$

Интегрируя, находим

$x^2 + \ln|y^2 - 4| = \ln C$ или $y^2 - 4 = Ce^{-x2}$.

Это общее решение данного дифференциального уравнения.

Пусть теперь $y^2 — 4 = 0$, т.е. $y = \pm 2$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y = \pm 2$ — решение исходного уравнения. Однако оно не является особым, так как его можно получить из общего решения при $C = 0$.

2.Найти частный интеграл уравнения $y' cosx = \frac{y}{ln\, y}$удовлетворяющий начальному условию $y(0) = 1$.

Полагая$y' = \frac{dy}{dx}$— перепишем данное уравнение в виде

$$\cos x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}$$

Разделим переменные:

$$\frac{ln\, y}{y} dy = \frac{dx}{cos\, x}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$\int \frac{\ln y}{y} dy = \int \frac{dx}{cosx} + c$, или $\frac{1}{2} ln2\, y = ln\, tan\, (\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + C$

Используя начальное условие $y = 1$при $x = 0$, находим $C = 0$. Окончательно получим

$$\frac{1}{2} ln\, 2y = ln\, tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$$

3.Найти общий интеграл уравнения $y' = tg\, x + tg\, y$

Полагая$y' = \frac{dy}{dx}$ — и разделяя переменные, приходим к уравнению

$ctgydy = tdxdx$. Интегрируя, имеем

$\int ctgydy = \int tgxdx$, или $\ln|\sin y| = -\ln|cosx| + \ln C$.

Отсюда находим $\sin y = \frac{C}{\cos x}$, или $\sin y \cos x = C$(общий интеграл).

1. Найти частное решение дифференциального уравнения

$\boldsymbol{(1 + x^2)dy + ydx = 0}$**при начальном условии** $\boldsymbol{y(1) = 1.}$

Преобразуем данное уравнение к виду $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. Интегрируя, имеем

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2}$, или $\ln|y| = -arctgx + C$

Это общий интеграл данного уравнения.

Теперь, используя начальное условие, найдем произвольную постоянную:$\ln 1 = -arctg\ 1{+}C$, т.е.$C{=}\pi 4$. Следовательно,

$$\ln y = -arctgx + \frac{\pi}{4},$$

откуда получаем искомое частное решение $y = e^{\frac{\pi}{4} - arctgx}$.

2. Решить уравнение,$xdy = ydx$,если при $x = \boldsymbol{5}$; $y = \boldsymbol{10.}$

Для разделения переменных обе части уравнения поделим **на** произведение xy, получим:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, найдем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

или

$$\ln y = \ln x + \ln C.$$

В правой части прибавлено постоянное в виде $\ln C$для облегчения потенцирования. Освобождаясь от символа логарифма; т. е. потенцируя, получим общее решение:

$$y = Cx$$

Для определения постоянного C подставим в полученное решение начальные условия $\boldsymbol{x} = 5$ и $\mathrm{y} = 10$, что дает

$10 = 5\mathrm{C}$,

Откуда

$\mathrm{C} = 2.$

Следовательно, искомое частное решение будет:

$\mathrm{y} = 2\mathrm{x}.$

Таким образом, из всех прямых (семейства прямых), проходящих через начало координат, мы выделили одну, на которой лежит точка **с** координатами $(5;\ 10)$.

6. Решить уравнение$\frac{dy}{dx} = 2(y-3)$, если при $\boldsymbol{x} = 0;\ \mathrm{y}\ = 4.$

После разделения переменных получим:

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx,$$

отсюда

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$$

или

$$\ln(y-3) = 2x + C.$$

Находим значение Сиз условия $\mathrm{x} = 0$ и $\mathrm{y} = 4$; сделав подстановку, получим:

$$\ln(4-3) = 2 * 0 + C,$$

откуда

$$C = \ln 1 = 0$$

Итак,

$$\ln(y-3) = 2x.$$

Для потенцирования нужно **и** правую часть последнего равенства написать со знаком логарифма. Пользуясь определением логарифма, будем иметь:

$$2x = \ln e^{2x}$$

следовательно, решение можно переписать в виде

$$ln(y-3) = ln\, e^{2x}$$

отсюда, потенцируя, получаем $\mathrm{y} - 3 = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$, или

$y = e^{2x} + 3.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Основы математической статистики

Практическая работа №8

Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы

Цель работы: Формирование умения составлять статистическое распределение выборки.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

- составлять статистическое распределение выборки;
- выполнять построение полигона и гистограммы.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

.

1. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

.

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4.Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

.

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2= числу букв в Вашей фамилии; p_3= числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

1Прочитав условие предложенной задачи,по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик выборки.

Ход работы:

1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

.

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25$.

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \frac{n_i}{n}$:

$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12$; $w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40$; $w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28$; $w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20$.

Следовательно,

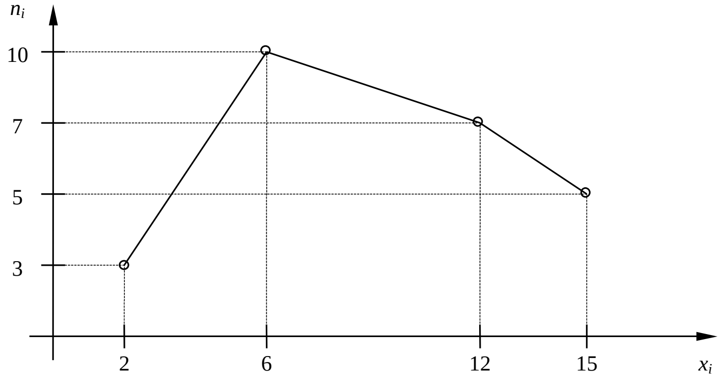
x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

.

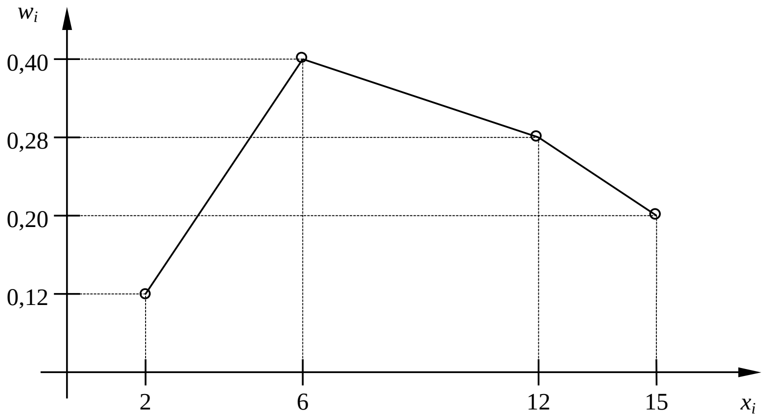
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

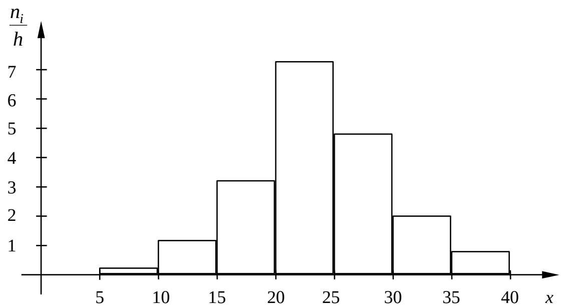
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100$.

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$N_Г = 8+9+10+3 = 30$.

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_Г = \frac{8\cdot 2+9\cdot 4+10\cdot 5+3\cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_Г = \overline{X^2_г} - \left(\overline{X}_Г\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2_Г} = \frac{8\cdot 2^2+9\cdot 4^2+10\cdot 5^2+3\cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_Г = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_Г = \sqrt{D_Г} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$Mo = 10$.

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$Me = 4{,}5$.

Размах вариации R: в примере $x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$, поэтому

$R = 6-2 = 4$.

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

.

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$n = 92+94+103+105+106 = 500$.

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_В = \frac{92\cdot 1+94\cdot 2+103\cdot 3+105\cdot 4+106\cdot 5}{500} = 1{,}82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11{,}45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85.$$

6. . Определите мощность какого из множеств A = {1, 3, 5, 7, 9} или B = {2, 4, 6, 8} больше. Решение. Понятие мощности конечных множеств позволяет сравнивать их по количеству элементов. Так, если A = {1, 3, 5, 7, 9}, а B = {2, 4, 6, 8}, то m (A) = 5, а m (B) = 4 и потому m (A) > m (B).

7. Пусть A есть отрезок [1, 3], B - отрезок [2, 4]; тогда объединением $A \bigcup B$ будет отрезок [1, 4], пересечением $A \bigcap B$ - отрезок [2, 3], разностью A\B - полуинтервал [1, 2), B\A - полуинтервал (3, 4].

8. Пусть A есть множество прямоугольников, B - множество всех ромбов на плоскости. Тогда $A \bigcap B$ есть множество всех квадратов, A\B - множество прямоугольников с неравными сторонами, B\A - множество всех ромбов с неравными углами.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.