Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
______________ / С.А. Махновский
«27» февраля 2019 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

**по учебной дисциплине
ЕН.01 Математика**

**для студентов специальности
13.02.11 Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и
электромеханического оборудования (по отраслям)**

Магнитогорск, 2019

ОДОБРЕНО Предметной комиссией «Математических и естественнонаучных дисциплин» Председатель Е. С. Корытникова Протокол №6 от 20.02.2019 г.	Методической комиссией МпК Протокол №5 от 21.02.2019 г

Составители:

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» МпК Е. В. Форыкина
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» МпК Ю.Н. Садчикова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 13.02.11 Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям) и овладению общими компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике) необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

У1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

У01.2 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

У01.3 определять этапы решения задачи;

У01.9 реализовать составленный план;

У02.4 структурировать получаемую информацию;

У02.7 оформлять результаты поиска.

Содержание практических ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 1.1. Выполнять наладку, регулировку и проверку электрического и электромеханического оборудования.

А также формированию ***общих компетенций*:**

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Разделы/темы	**Темы практических/лабораторных занятий**	**Количество часов**	**Требования ФГОС СПО (уметь)**
Раздел 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА		**4**	
Тема 1.1. Алгебраическая форма комплексного числа	Практическая работа №1 «Действия над комплексными числами в алгебраической форме»	**2**	У01.2, У01.3, У02.4, У02.7
Тема 1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа	Практическая работа № 2 «Действия над комплексными числами в тригонометрической форме»	**2**	У1, У01.2, У01.3, У01.9, У02.7
Раздел 2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА		**12**	
Тема 2.1. Матрицы и определители	Практическая работа №3 «Действия с матрицами»	**2**	У01.3, У01.9
	Практическая работа № 4 «Вычисление определителей»	**2**	У01.3, У01.9
Тема 2.2. Системы линейных уравнений	Практическая работа № 5 «Решение систем линейных уравнений методом Крамера»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.7
	Практическая работа № 6 «Решение систем линейных уравнений матричным методом»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.7
	Практическая работа № 7 «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.7
	Практическая работа № 8 «Решение систем линейных уравнений различными методами»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.7
Раздел 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ		**16**	
Тема 3.1 Теория пределов	Практическая работа № 9 « Вычисление пределов функций»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.4
	Практическая работа № 10 « Исследование функций на непрерывность и точки разрыва»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.4
Тема 3.2. Производная функции и ее применение	Практическая работа № 11 «Дифференцирование сложных функций»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.4, У02.7
	Практическая работа № 12 «Исследование функций на монотонность, экстремумы,	**2**	У1, У01.2, У01.3, У01.9, У02.4, У02.7

	выпуклость, вогнутость, перегиб»		
	Практическая работа № 13 « Исследование функций и построение графиков»	**2**	У1, У01.2, У01.3, У01.9, У02.4, У02.7
Тема 3.3. Интеграл и его приложения	Практическая работа 14 «Вычисление неопределенных интегралов»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.4, У02.7
	Практическая работа 15 « Интегрирование по частям»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.4, У02.7
	Практическая работа 16 «Вычисление определенных интегралов»	**2**	У01.2, У01.3, У01.9, У02.4, У02.7
	Практическая работа 17 « Применение определенного интеграла»	**2**	У1, У01.2, У01.3, У01.9, У02.4, У02.7
Раздел 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ		**2**	
	Практическая работа №18 « Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики»	**2**	У1, У01.2, У02.4
ИТОГО		**36**	

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Алгебраическая форма комплексного числа
Практическое занятие № 1
Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- записывать комплексные числа в алгебраической форме;
- выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.
Задание:

1. Даны комплексные числа: z_1= (7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).
   Записать эти числа в алгебраической форме.
2. Вычислить:
   1) $z_1 + z_2$;
   2) $z_2 - z_3$;
   3) $\frac{z_1}{z_3}$;
   4) $z_2 \cdot z_3$;
   5) z_1^5;
3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Ход работы:
1. Даны комплексные числа: z_1= (7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).
   Записать эти числа в алгебраической форме.

   Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид: $z = a + bi$, то числа в алгебраической форме будут записаны в виде:

$z_1 = 7 + i;\ z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i;\ z_3 = 4 - 3i.$

2. Вычислить:

$z_1 + z_2 = (7 - 1{,}5) + (1 + 1{,}5)i = 5{,}5 + 2{,}5i;$

$z_2 - z_3 = (-1{,}5 - 4) + (1{,}5 + 3)i = -5{,}5 + 4{,}5i;$

$\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+4i+21i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1 + i;$

$z_2 \cdot z_3 = (-1{,}5 + 1{,}5i)(4 - 3i) = -6 + 4{,}5i + 6i - 4{,}5i^2 = -6 + 10{,}5i + 4{,}5 = -1{,}5 + 10{,}5i;$

$z_1^5 = (7 + i)^5 = ((7 + i)^2)^2(7 + i) = (49 + 14i + i^2)^2(7 + i) = (48 + 14i)^2(7 + i) = (2304 + 1344i + 196i^2)(7 + i) = (2304 + 1344i - 196)(7 + i) = (2108 + 1344i)(7 + i) = 13412 + 11516i$

;

3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Решение:

$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2{,}1 - 2{,}7i;$

1) $\frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{-i-3-3i^2-9i}{-i^2+9} = \frac{-10i}{10} = -i$
2) $\frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-9i^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1{,}1 - 1{,}7i$
3) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$
4) $-i - 1{,}1 - 1{,}7i - 1 = -2{,}1 - 2{,}7i$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 2

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в тригонометрической форме;
- выполнять действия в тригонометрической форме;
- переходить от одной формы комплексных чисел к другой форме.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6).
   Записать эти числа в тригонометрической форме.

2. Вычислите: $z_2 \cdot z_3$; $\frac{z_1}{z_3}$; z_1^5; $\sqrt{z_2}$.

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

a) $\left(3 \cdot \left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^2$ b) $\frac{24(cos75^0+isin\,75^0)}{3(\cos 30^0+isin\,30^0)}$

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$$
$$z^n = r^n(cosn\varphi + isin\,n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot (cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.

1) Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить, в какой четверти находится вектор (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z = a + bi$
- Решив уравнение $tg\varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z = \varphi = arctg\,\frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = arctg\,\frac{b}{a} + \pi$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = arctg\,\frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(cos\varphi + i\,sin\varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

1.Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2.Выполните необходимые действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,

Число находится в первой четверти, значит

$\varphi = arctg\,\frac{1}{7} = arctg\,0{,}1429$.

$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + isin8°8')$.

2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$

$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}1$

Число находится во второй четверти, значит $\varphi = arctg\,\frac{b}{a} + \pi = arctg\,(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;

$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = 2{,}1(\cos\frac{3\pi}{4} + isin\ \frac{3\pi}{4})$.

3) $z_3 = 4 - 3i$

$|z_3| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Число находится в четвертой четверти, значит

$\varphi = arctg\,\frac{-3}{4} = arctg\,(-0{,}75) = -36^{\circ\circ}52'$.

$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52' + isin(-36°52')$.

2. Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;
2) $\frac{z_1}{z_3}$;
3) z_1^5;
4) $\sqrt{z_2}$;

Решение:

$$z_2 \cdot z_3 = 2{,}1 \cdot 5\left(\cos\left(135° - 36°52'\right) + i\sin\left(135° - 36°52'\right)\right) = 10{,}5(\cos 98°8' + i\sin 98°8');$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}\left(\cos\left(8°8' - \left(-36°52'\right)\right) + i\sin\left(8°8' + 36°52'\right)\right) = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°);$$

$$z_1^5 = \left(5\sqrt{2}\right)^5\left(\cos 5 \cdot 8°8' + i\sin 5 \cdot 8°8'\right) = 12500\sqrt{2}(\cos 40°40' + i\sin 40°40');$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

В нашем примере n=2.

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{135° + 360°k}{2} + i\sin\frac{135° + 360°k}{2}\right);$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{135° + 360° \cdot 0}{2} + i\sin\frac{135° + 360° \cdot 0}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 67°30' + i\sin 67°30');$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{135° + 360° \cdot 1}{2} + i\sin\frac{135° + 360° \cdot 1}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 247°30' + i\sin 247°30')$$

2. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$\left(2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right)\right)^6 = 2^6\left(\cos\frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i\sin\frac{5\pi}{24} \cdot 6\right) = 64\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$$

$$\frac{24(\cos 75^0 + i\sin 75^0)}{3(\cos 15^0 + i\sin 15^0)} = \frac{24}{3}(\cos(75° - 15°) + i\sin(75° - 15°)) = 8(\cos 60° + i\sin 60°) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1. Матрицы и определители
Практическое занятие №3
Действия с матрицами

Цель работы: Научиться выполнять действия над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции над матрицами;

- находить обратную матрицу.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Действия над матрицами:

1.Сложение.
Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \cdots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в *i*-той строке в *k*-том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов *i*-той строки первой матрицы на соответствующие элементы *k*-того столбца второй.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы:

1.Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдем A^2, умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б) Найдем матрицу *3A*, умножив все элементы матрицы *A* на 3.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в) Найдем произведение 3AB

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу C, складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2.Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимообратными.

3.Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 16 & -16 & -4 \\ 14 & -14 & -8 \end{pmatrix};$$

$c_{11} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 3;$
$c_{12} = -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2;$
$c_{13} = -3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 11;$
$c_{21} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 16;$
$c_{22} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) = -16;$
$c_{23} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -4;$
$c_{31} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 14;$
$c_{32} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) = -14;$
$c_{33} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -8.$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 & 2 \\ -11 & -10 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1. Матрицы и определители
Практическое занятие №4
Вычисление определителей

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определители второго порядка;

- вычислять определители третьего порядка;

-вычислять определители четвертого порядка.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

Краткие теоретические сведения:

Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Порядок выполнения работы:

1 Запишите определитель, определите какого он порядка.
2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Ход работы:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$

$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3A_{11} + (-1)A_{21} + 0A_{31} + 1A_{41} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot$
$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 122$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2 Системы линейных уравнений
Практическое занятие №5
Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;

- решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+3y-5z=-2 \\ x+y+2z=3 \\ 2x-y+7z=27 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.

2.Запишите и вычислите определитель системы.

3.Вычислите определители каждой неизвестной.

4.Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2 Системы линейных уравнений
Практическое занятие №6
Решение систем линейных уравнений матричным методом

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить обратную матрицу;

- решать систему линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$.

Краткие теоретические сведения:

Пусть задана система линейных уравнений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

Составим матричное уравнение: AX = B, где $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots\ a_{2n} \\ a_{n1}\, a_{n2\dots}\, a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно $A^{-1} \cdot B$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы A ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A и составить из них союзную матрицу A^*.

в) транспонировать матрицу A^* из алгебраических дополнений

$A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11}\, A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}\, A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{1n}\, A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11}\, A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}\, A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{1n}\, A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B, состоящую из свободных членов.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.

2. Составьте матричное уравнение.

3. Вычислите обратную матрицу.

4. Найдите значения неизвестных.

5. Запишите ответ.

Ход работы:

Решить систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$.

Найдем

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19 \neq 0 \Rightarrow$обратная матрица есть.

$A^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решим уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-20-18\\ -12+12\end{pmatrix} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-38\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: (2; 0).

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & -2 & -2\\ 8 & -1 & 5\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & 5\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}3 & -2\\ 8 & 5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & -2\\ 8 & -1\end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & 5\end{vmatrix} = -12;$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix} = -16;$

$A_{31} = \begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix} = -4;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix}3 & -2\\ 8 & 5\end{vmatrix} = -31;$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 8 & 5\end{vmatrix} = 2;$

$A_{32} = -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix} = 7;$

$A_{13} = \begin{vmatrix}3 & -2\\ 8 & -1\end{vmatrix} = 13;$ $A_{23} = -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & -1\end{vmatrix} = 26;$ $A_{33} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix} = -13.$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix}-12 & -16 & -4\\ -31 & 2 & 7\\ 13 & 26 & -13\end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix}-12 & -16 & -4\\ -31 & 2 & 7\\ 13 & 26 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ -4\\ -14\end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix}-120+64+56\\ -310-8-98\\ 130-104+182\end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix}0\\ -416\\ 208\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 4\\ -2\end{pmatrix}.$$

Ответ: (0;4;-2).

Сделаем проверку:

$\begin{cases} 0 + 12 - 2 = 10 \\ 0 - 8 + 4 = -4 \\ 0 - 4 - 10 = -14 \end{cases}$. (верно)

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2 Системы линейных уравнений
Практическое занятие №7
Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса;

- решать системы четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Гаусса;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10 \\ x + 5y - 2z = -15 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - \quad x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \quad = 6 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;

-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;

-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.

5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 2x_3 = -1\,; \\ \quad\quad -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

2) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ \quad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - \quad x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \quad = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ \quad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ \quad\quad x_3 + x_4 = 6, \\ \quad\quad -2x_4 = -4 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 2 \end{cases};$$

Ответ : (8;6;4;2).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2 Системы линейных уравнений
Практическое занятие №8
Решение систем линейных уравнений различными методами.

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений различными методами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-решать системы линейных уравнений методом Крамера;

- решать системы уравнений методом Гаусса;

- решать системы линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$.

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Чтобы решить систему методом Крамера, составим определитель из коэффициентов при неизвестных.

Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Для решения системы методом Гаусса используйте алгоритм:

1) Запишите систему линейных уравнений.
2) Составьте расширенную матрицу.
3) Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4) По ступенчатой матрице составьте систему.
5) Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6) Запишите ответ.

Для решения системы матричным методом:

1. Запишите систему линейных уравнений.

2. Составьте матричное уравнение.

3. Вычислите обратную матрицу.

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы А ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы А;

в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{1n}\ A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$

4. Найдите значения неизвестных.

Чтобы найти неизвестную матрицу Х, нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу В, состоящую из свободных членов.

5. Запишите ответ.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Решите каждую систему всеми тремя способами.
3. Запишите ответ.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1 Теория пределов
Практическое занятие № 9
Вычисление пределов функций

Цель: Научиться вычислять пределы функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;

- раскрывать неопределенности;

- находить пределы функций, используя формулы замечательных пределов.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3-10x^2-4x+5)$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}$
5. $\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

1) $\lim_{\mathrm{x}\to 2}(2\mathrm{x}^3-10\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5) = 2\left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 - 10\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - 4\lim_{x\to 2} x + 5 = 2\cdot 8 - 10\cdot 4 - 4\cdot 2 + 5 = -27$$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке x = 3. Поэтому сначала преобразуем данную функцию.
Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2корни квадратного трехчлена.
Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 11x + 6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3(x-3)(x-\tfrac{2}{3})$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x - 3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)(x+\tfrac{1}{2})$$

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)(x-\frac{2}{3})}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})}{2(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{3\lim_{x\to 3}x-2}{2\lim_{x\to 3}x+1} = \frac{3\cdot 3-2}{2\cdot 3+1} = 77{=}1$$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞, то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} - \frac{6x}{x^4} + \frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} - \frac{8x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{6 - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6} = 0$$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$. Введем новую переменную: $x = -3y;\ x \to \infty;\ y \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{5\cdot(-3y)} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15} = \frac{1}{e^{15}}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1 Теория пределов
Практическое занятие № 10
Исследование функций на непрерывность и точки разрыва

Цель: Научиться находить точки разрыва функций, определять их род, находить асимптоты графиков функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- исследовать функции на непрерывность;
- находить точки разрыва, определять их род;
- находить асимптоты.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Исследовать функции на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род. Найти асимптоты функций.

1) $y = \frac{2x^2+3}{x^2-9}$;
2) $y = \frac{2x^2-4x-30}{x^2-25}$.

Краткие теоретические сведения:

Точками разрыва функции называются точки, в которых нарушается условие непрерывности функции.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т е

$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$. При этом: если $A_1 = A_2$,то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва; если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim_{x \to a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \to \infty} f(x)$ или $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ равно b.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции , если $\lim_{x \to \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Ход работы:

Исследовать функцию на непрерывность. Найти асимптоты функции.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Точка $x = 1$ является точкой разрыва 2 рода, т.к.

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = -\infty \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$$

Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2}-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.2 Производная функции и ее применение
Практическое занятие № 11
Дифференцирование сложных функций

Цель: Научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять правила дифференцирования;
- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид функции. Если функция является сложной, то введите промежуточный аргумент.
2. Определите, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Примените соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найдите производные функций.
4. Раскройте скобки и приведите подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1-4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1-4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$

$$y' = 10(1-4x^2)^9\cdot(1-4x^2)' = 10\,(1-4x^2)^9(-8x) = -80x(1-4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U\cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x\right)' = \left(sin\,\frac{1}{2}x\right)'cos2x + sin\,\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu\cdot u'$, $(cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x\right)' = \left(sin\,\frac{1}{2}x\right)'cos2x + sin\,\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\,\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)'\cdot cos2x + sin\,\frac{1}{2}x\cdot(-sin2x)\cdot(2x)' = \frac{1}{2}cos\,\frac{1}{2}x\cdot cos2x - 2sin\,\frac{1}{2}x\cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})'\cdot\log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2}\cdot(\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x+5x^2$, для второй функции $u = 3+10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{1}{(3+10x)\ln 2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{10}{(3+10x)\ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

/

4. $f(x) = \arcsin\frac{3}{5}x + \arccos 5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = \arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(\arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'.$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(\arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' =$$
$$-\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.2 Производная функции и ее применение
Практическое занятие № 12
Исследование функций на монотонность, экстремумы, выпуклость, вогнутость, перегиб.

Цель работы: Научиться применять производную для исследования функции.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять промежутки монотонности,

- находить экстремумы функции,

- определять направление выпуклости функции, точки перегиба.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1. Исследуйте функцию на монотонность:
   $f(x) = x^5 - x^3 - 2x$
2. Найдите экстремумы функции: $f(x) = x^4 - 4x^3$
3. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы: $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$
4. Найдите промежутки выпуклости функции:
   $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 100$

Краткие теоретические сведения:

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Порядок выполнения работы:

1) Запишите функцию.
2) Определите, каким алгоритмом нужно воспользоваться для выполнения задания.
3) Примените соответствующий алгоритм.
4) Запишите ответ.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.2 Производная функции и ее применение
Практическое занятие № 13
Исследование функций и построение графиков

Цель работы: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- проводить исследование функций с помощью производной;

- строить графики функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.

2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).

3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.

4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.

5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.

6. Найти асимптоты графика функции.

7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

8. Найти область значений.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim_{x \to a+0} f(x)$ равно $-\infty$или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \to \infty} f(x)$ или $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ равно b.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции y = f(x),

если $\lim_{x \to \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.

2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$.

$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$.

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

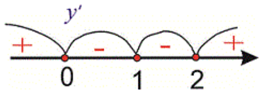
4.Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5.Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max} = 0$; $y_{min} = 2$.

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2-(2x^2-4x)\cdot 2(2x-2)\cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

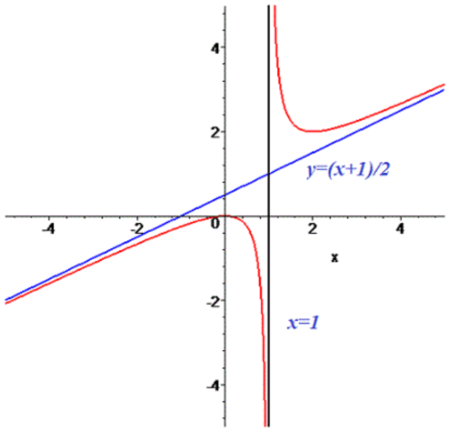
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2}-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

8.На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.3 Интеграл и его приложения
Практическое занятие № 14
Вычисление неопределенных интегралов

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования, методом подстановки;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int(8x^4 - 6x^2 + 2x - 3)dx$

2) $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$

3) $\int \cos(10x-5)\,dx$

4) $\int 3^{4x^2}x dx$

5) $\int \frac{5dx}{25+16x^2}$

6) $\int \frac{x^2dx}{(1-2x^3)^2}$

7) $\int \frac{2x^4-4x^2-3x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, приведите интеграл к табличным формулам. Проинтегрируйте.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то введите новую переменную, найдите ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл

приводится к новому интегралу, который является табличным. Найдите полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернитесь к старой переменной.

4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то примените формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dV. Затем, после нахождения dU и V, используйте формулу интегрирования по частям.
   -Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где $P(x)$- многочлен, k- число. Удобно положить $U = P(x)$,а все остальные множители принять за dV.
   -Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$.

Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U.

- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx, \int e^{ax}cosbxdx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1) $\int \frac{6x^4-5x^2+3x+4}{x^2}dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2}dx$$
$$= \int \left(\frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right)dx$$
$$= \int \left(6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2}\right)dx$$
$$= 6\int x^2dx - 5\int dx$$
$$+ 3\int \frac{dx}{x} + 4\int x^{-2}dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3\ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 - 5x + 3\ln|x| - \frac{4}{x} + C$$

2) $\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1 - x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

3) $\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx, \; dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right)dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

4) $\int (x^2 - 2x) cos4xdx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x, \; dV = cos4xdx$.

$$dU = (2x - 2)dx, \qquad V = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x$$

$$\int (x^2 - 2x)\cos 4x\, dx = (x^2 - 2x)\frac{1}{4}sin4x - \int \frac{1}{4}sin4x(2x - 2)dx =$$

$$(x^2 - 2x)\frac{1}{4}sin4x - \frac{1}{4}\int sin4x(2x - 2)dx = \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}\int sin4x(x - 1)dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x - 1, \; dV = sin4xdx$.

$$dU = dx, \qquad V = \int sin4xdx = -\frac{1}{4}cos4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}((x - 1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int -\frac{1}{4}cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}((x - 1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) + \frac{1}{4}\int cos4xdx =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x + \frac{1}{8}((x - 1)(cos4x) - \frac{1}{8}\int cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x + \frac{1}{8}((x - 1)(cos4x) - \frac{1}{32}sin4x + C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.3 Интеграл и его приложения
Практическое занятие № 15
Интегрирование по частям

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1) $\int (x^2+5x+7)\cdot lnxdx;$

2) $\int e^{2x}cos3xdx;$

3) $\int (x^2+4x+3)e^{2x}\,dx.$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл нельзя найти другими способами, то примените формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *U* и *dV*. Затем, после нахождения *dU* и *V*, используйте формулу интегрирования по частям.
   Виды интегралов, берущихся по частям:
   -Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где *P*(*x*)- многочлен, *k*- число.

Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за dV.

-Интегралы вида $\int P(x) arcsinx dx$, $\int P(x) arccosx dx$, $\int P(x) lnx dx$, $\int P(x) arctgx dx$ $\int P(x) arcctgx dx$.

Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U.

- Интегралы вида $\int e^{ax} sinbx dx$, $\int e^{ax} cosbx dx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1) $\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx$, $dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \quad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right)dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

2) $\int (x^2 - 2x) cos4x dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x$, $dV = cos4x dx$.

$$dU = (2x - 2)dx, \quad V = \int cos4x dx = \frac{1}{4}sin4x$$

$$\int (x^2 - 2x)\cos 4x\, dx = (x^2 - 2x)\frac{1}{4}sin4x - \int \frac{1}{4}sin4x(2x - 2)dx =$$

$$(x^2 - 2x)\frac{1}{4}sin4x - \frac{1}{4}\int sin4x(2x - 2)dx = \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}\int sin4x(x - 1)dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x - 1$, $dV = sin4x dx$.

$$dU = dx, \quad V = \int sin4x dx = -\frac{1}{4}cos4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}((x - 1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int -\frac{1}{4}cos4x dx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x-\frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right)+\frac{1}{4}\int cos4xdx=$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x+\frac{1}{8}((x-1)(cos4x)-\frac{1}{8}\int cos4xdx=$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x+\frac{1}{8}((x-1)(cos4x)-\frac{1}{32}sin4x+C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.3 Интеграл и его приложения
Практическое занятие № 16
Вычисление определенных интегралов

Цель работы: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенные интегралы различными методами;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_{-2}^{3}(4x^3+3x^2+2x+1)dx$

1. $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

2. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$
3. $\int_{-2}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{sinx} cosxdx$
5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{sin^2\frac{x}{3}}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то необходимо вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

Ход работы:

1) $\int_{-1}^{3}(4\,x^3 - 3x^2 + 2x + 5)dx$

$$\int_{-1}^{3}(4x^3 - 3x^2 + 2x + 5)dx = 4\int_{-1}^{3} x^3dx - 3\int_{-1}^{3} x^2dx + 2\int_{-1}^{3} xdx + 5\int_{-1}^{3} dx = x^4 - x^3 + x^2 + 5x|_{-1}^{3} =$$
$$3^4 - 3^3 + 3^2 + 5\cdot 3 - (1 + 1 + 1 - 5) = 81 - 27 + 9 + 15 + 2 = 80$$

2) $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} == \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \;\; t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \;\; t_B = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt|_0^1 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^4 x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^3 x} = \begin{bmatrix} cosx = t \\ dcosx = dt \\ -sinxdx = dt \\ sinxdx = -dt \\ x_H = 0 \ \ t_H = cos0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2}\Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2}\Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2 \cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.3 Интеграл и его приложения
Практическое занятие № 17
Применение определенного интеграла

Цель работы: научиться применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 + 1, \ y = 0, \ x = 1, x = 4$;

б) $y = \ln x, y = 0, \ x = 1, x = e$;

в) $y^2 = x^3; x = 4$.

Краткие теоретические сведения:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

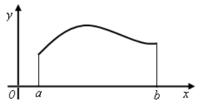


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

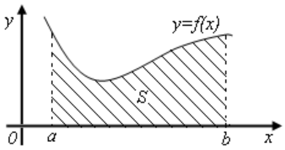


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительная на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

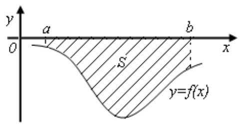


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

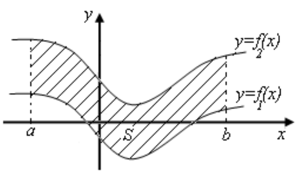


Рис. 4

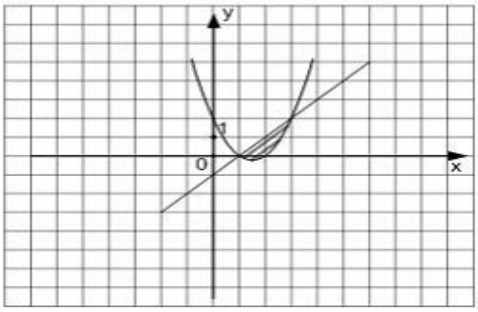
Порядок выполнения работы:

1. Изобразите фигуру на координатной плоскости;
2. Определите, является ли фигура криволинейной трапецией.
3. Вычислите площадь фигуры.

Ход работы:

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования.



Значит, площадь фигуры равна: $S = \int_1^3 (x-1)dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{x^2}{2} - x - (\frac{x^3}{3} -$ *3x22+2x)=4,5−3−0,5+1−273−3·4,5+6−13+1,5−2=113 (кв. ед.)*

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Раздел 4 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие №18
Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель работы: Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-вычислять число исходов, благоприятствующих наступлению рассматриваемого события, используя формулы комбинаторики;

- вычислять вероятность события по классическому определению вероятности.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?
2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?
3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?
4. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.

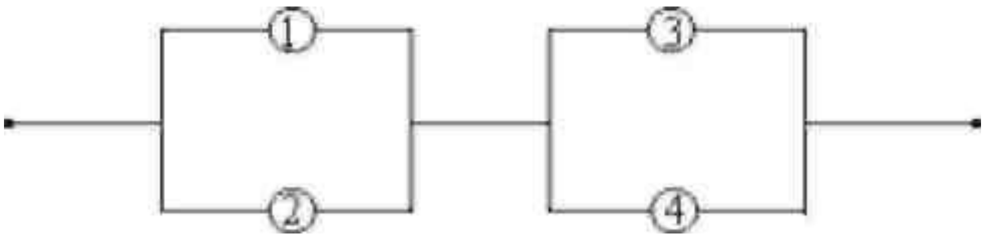


рис. 1

Выход из строя за время T различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $q_1=0,1;\ q_2=0,2;\ q_3=0,3;\ q_4=0,4$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы/

Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий.

Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается P(A) и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \le P(A) \le 1$

При решении задач на вычисление вероятности применяются формулы для подсчета числа комбинаций из данных элементов:

- число перестановок вычисляется по формуле: $P_n = n!$

- число размещений из n элементов по m элементов в каждом вычисляется по формуле:
$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

- число сочетаний из n элементов по m элементов в каждом вычисляется по формуле:
$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$

Надежность каждого элемента системы электроснабжения можно характеризовать вероятностью рабочего состояния p и вероятностью отказа q. Если не учитывать плановые простои (ремонты), то можно считать, что элементы в любой момент времени находятся в одном из этих состояний. Тогда сумма вероятностей этих состояний равна 1: $p + q = 1$.

Для группы из двух элементов возможны следующие сочетания:
1. оба элемента в рабочем состоянии;
2. первый элемент в вынужденном простое, второй в рабочем состоянии;
3. первый элемент в рабочем состоянии, второй в вынужденном простое;
4. оба элемента в вынужденном простое.

Вероятности этих состояний можно найти, воспользовавшись теоремой умножения вероятностей.
Так при **последовательном соединении двух элементов** с надежностью каждого p_1 и p_2 надежность всей схемы определяется как $P = p_1 \cdot p_2$
Другими словами ***схема работает, если работают оба элемента. При отказе одного (любого) из них схема работать не будет (ток через цепь не пойдет).***
Вероятность отказа **для последовательного соединения**
$P = 1 - q_1 q_2$ (для двух элементов).
$P = 1 - q_1 q_2 \cdot \ldots q_n$ (для n –элементов).

При **параллельном соединении двух элементов** с надежностью каждого p_1 и p_2 надежность всей схемы определяется как $P = p_1 . p_2 + p_1 \cdot q_2 + p_2 q_1$
Пользуясь формулой для вероятности появления хотя бы одного события, надежность схемы параллельного соединения записывают в виде $P = 1 - q_1 q_2$.

Другими словами ***схема работает, если работают оба элемента, но также она работает, если выйдет из строя и какой либо один из элементов.***

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число (n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов (m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение:

Событие А- «номер набран верно».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр (элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле:

$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7!\cdot8\cdot9\cdot10}{7!} = 720$. Итак, n=720

Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным. Значит, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение:

Событие А- «оба шара окажутся чёрными».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов

(12+8) по два: n= $C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot18!} = \frac{20\cdot19\cdot18!}{1\cdot2\cdot18!} = 190$.

Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!\cdot6!} = \frac{8\cdot7\cdot6!}{1\cdot2\cdot16!} = 28$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

3.На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О, М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК?

Решение: Событие А - «получится слово ЗАМОК».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов (букв): n=$P_5 = 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$.

Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

4. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.

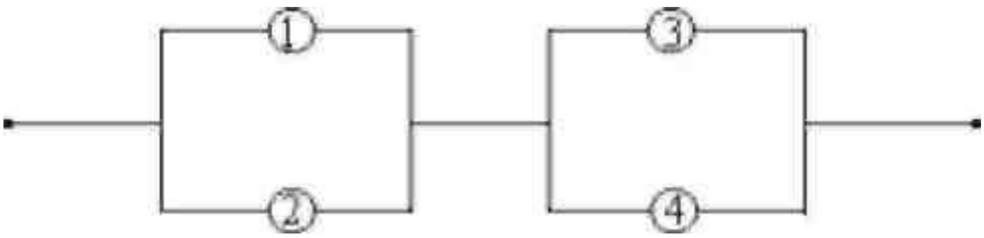


рис. 1

Выход из строя за время Т различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $q_1 = 0{,}1;\ q_2 = 0{,}2;\ q_3 = 0{,}3;\ q_4 = 0{,}4$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы.

Решение:

Событие A – система надежна.

Событие A_i – i-й блок работает безотказно.

Элементы 1 и 2 соединены параллельно, и элементы 3 и 4 соединены параллельно, а между собой они соединены последовательно, тогда используя формулы, получим

$$P(A)=(1-q_1 q_2)\cdot(1-q_3 q_4)=(1-0{,}1\cdot 0{,}2)\cdot(1-0{,}3\cdot 0{,}4)=(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}12)=0{,}98\cdot 0{,}88=0{,}8624.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.