Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/ С.А. Махновский
«27» февраля 2019 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ЕН.01 МАТЕМАТИКА
программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности СПО
15.02.03 Техническая эксплуатация гидравлических машин, гидроприводов и гидропневмоавтоматики

Магнитогорск, 2019

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией Математических и естественнонаучных дисциплин
Председатель: Е.С. Корытникова
Протокол №6 от 20 февраля 2019 г.

Методической комиссией

Протокол №5 от 21 февраля 2019 г.

Разработчик
Н.В. Антропова,
преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующего федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности по математическим и общепрофессиональным дисциплинам.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен ***уметь***:

У1 анализировать сложные функции и строить их графики;

У2 выполнять действия над комплексными числами;

У3 вычислять значения геометрических величин;

У4 производить операции над матрицами и определителями;

У5 решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

У6 решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

У7 решать системы линейных уравнений различными методами.

У02.1 распознавать и анализировать профессиональную задачу и/или проблему;

У06.1 работать в коллективе и команде.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

Содержание дисциплины ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей ППССЗ по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 2.1. Участвовать в проектировании гидравлических и пневматических приводов по заданным условиям и разрабатывать принципиальные схемы;

А также формированию общих компетенций:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Алгебраическая форма комплексного числа
Практическое занятие № 1
Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- записывать комплексные числа в алгебраической форме;
-выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

1. Даны комплексные числа : $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7{,}2;7{,}2)$, $z_3=(2;6)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:
1) z_1+z_2;
2) z_2-z_3;
3) z_1/z_3;
4) z_2*z_3;
5) z_1^5.
3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z=a+bi$
2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i;$$

$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

Ход работы:

1. Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.
Решение:
Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$$z_1 = 7 + i; \quad z_2 = -1,5 + 1,5i; \quad z_3 = 4 - 3i$$

2. Выполнить действия в алгебраической форме:
1) $z_1 + z_2$;
2) $z_2 - z_3$;
3) z_1 / z_3;
4) $z_2 \cdot z_3$;
5) z_1^5.

Решение:

$$z_1 + z_2 = (7 - 1,5) + (1 + 1,5)i = 5,5 + 2,5i;$$
$$z_2 - z_3 = (-1,5 - 4) + (1,5 + 3)i = -5,5 + 4,5i;$$
$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+4i+21i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1 + i;$$
$$z_2 \cdot z_3 = (-1,5 + 1,5i)(4 - 3i) = -6 + 4,5i + 6i - 4,5i^2 = -6 + 10,5i + 4,5 = -1,5 + 10,5i$$
$$z_1^5 = (7 + i)^5 = ((7 + i)^2)^2(7 + i) = (49 + 14i + i^2)^2(7 + i) = (48 + 14i)^2(7 + i) = (2304 + 1344i + 196i^2)(7 + i) = (2304 + 1344i - 196)(7 + i) = (2108 + 1344i)(7 + i) = 13412 + 11516i$$

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2,1-2,8i$$

1) $\frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2 - i^2} = \frac{-10i}{10} = -i$;

2) $\frac{4-5i}{1+3i}=\frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2}=\frac{-11-17i}{10}=-1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1$

4) $-i+(-1{,}1-1{,}7i)-1=-i-1{,}1-1{,}7i-1=-2{,}1-2{,}8i$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа
Практическое занятие № 2
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
уметь:
- выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме;
- переходить из тригонометрической формы в алгебраическую.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

1. Даны комплексные числа в тригонометрической форме:

$z_1 = 5\left(cos\frac{\pi}{9} + isin\frac{\pi}{9}\right)$ и $z_2 = 8\left(cos\frac{3\pi}{5} + i\,sin\frac{3\pi}{5}\right)$.

Вычислите: $z_1 \cdot z_2;\ \frac{z_2}{z_1};\ z_1^3;\ \sqrt[3]{z_2}$

2. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

a) $\left(3 \cdot \left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^2$ b) $\frac{24(cos\,75^0 + isin\,75^0)}{3(cos\,30^0 + isin\,30^0)}$

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде: $z = r \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$.

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n(cosn\varphi + isin\,n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $z=r\cdot(\cos\varphi+isin\varphi)$ используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные в тригонометрической форме числа.
2. Используя конспект, выясните, как выполняются действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
3. Выполните заданные действия.

Ход работы:

Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

1) $$\left(2 \cdot \left(cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24}\right)\right)^6 = 2^6\left(cos\frac{5\pi}{24}\cdot 6 + isin\frac{5\pi}{24}\cdot 6\right) =$$
$$64\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right) = 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$$

2)

$$\frac{24(\cos 75^0+i\sin 75^0)}{3(\cos 15^0+i\sin 15^0)}=\frac{24}{3}(\cos(75°-15°)+i\sin(75°-15°)=$$
$$8(\cos 60°+i\sin 60°)=8\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4+4\sqrt{3}i$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 2.1. Матрицы и определители
Практическое занятие № 3
Действия с матрицами

Цель работы: научиться выполнять действия над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции над матрицами;
- находить обратную матрицу.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание:

1.Даны матрицы :$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Вычислите:A^2-3AB.

2. Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Действия над матрицами:

1.Сложение.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$\mathrm{A} + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \cdots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в *i*-той строке в *k*-том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов *i*-той строки первой матрицы на соответствующие элементы *k*-того столбца второй.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а**)** Найдем A^2, умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б**)** Найдем матрицу *3A*, умножив все элементы матрицы *A* на 3.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в**)** Найдем произведение 3АВ

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу С, складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимообратными.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 2.1. Матрицы и определители
Практическое занятие № 4
Вычисление определителей

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определители второго порядка;
- вычислять определители третьего порядка.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

Краткие теоретические сведения:

Определителем квадратной матрицы второго порядка(определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка(определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Порядок выполнения работы:

1 Запишите определитель, определите какого он порядка.

2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Ход работы:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$
$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7)$
$= 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 2.2. Системы линейных уравнений
Практическое занятие № 5
Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание:
Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x+3y-5z=-2 \\ x+y+2z=3 \\ 2x-y+7z=27 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:
Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$
Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$
Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Порядок выполнения работы:

1.Запишите систему уравнений.
2.Запишите и вычислите определитель системы.
3.Вычислите определители каждой неизвестной.
4.Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 2. 2 Системы линейных уравнений
Практическое занятие № 6
Решение систем линейных уравнений матричным методом

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- -находить обратную матрицу;
- решать систему линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание: Решите системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 7x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 13 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Пусть задана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим матричное уравнение: $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы А $(\Delta A \neq 0)$;

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицыА;

в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots & A_{m1} \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицуA^{-1}на матрицу B, состоящую из свободных членов.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 12) = 14$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

$A_{21} = -1$; $A_{22} = 8$; $A_{23} = 5$; $A_{31} = 5$; $A_{32} = -10$; $A_{33} = -5$.

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (2; -1; 0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 2. 2 Системы линейных уравнений
Практическое занятие № 7
Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Гаусса;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;

-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;

-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_3 = 0 \end{cases};$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 2. 2 Системы линейных уравнений
Практическое занятие № 8
Решение систем линейных уравнений различными методами

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений различными методами.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-решать систему линейных уравнений методом Крамера;
- решать систему уравнений методом Гаусса;
- решать систему линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:
Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$.

Краткие теоретические сведения:
Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Чтобы решить систему методом Крамера, составим определитель из коэффициентов при неизвестных.
Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Для решения системы <u>методом Гаусса</u> используйте алгоритм:

1) Запишите систему линейных уравнений.
2) Составьте расширенную матрицу.
3) Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4) По ступенчатой матрице составьте систему.
5) Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6) Запишите ответ.

Для решения системы <u>матричным методом</u>:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы А $(\Delta A \neq 0)$;

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы А;

в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots & A_{m1} \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу Х, нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу В, состоящую из свободных членов.

4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.
За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.1 Теория пределов
Практическая работа № 9
Вычисление пределов функций

Цель: Научиться вычислять пределы функций.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;
- раскрывать неопределенности;
- находить пределы функций, используя формулы замечательных пределов.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x\to -2}(-x^3 + 2x^2 - 4x - 1)$
2. $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{3x^3+24}$
3. $\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{2}{x^2+3x}$
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^3+5x^2+10}{3x^3+4x^2-1}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{x}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
8. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{x}$

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3-10x^2-4x+5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to 2}(2x^3-10x^2-4x+5)=2(\lim_{x\to 2}x)^3-10(\lim_{x\to 2}x)^2-4\lim_{x\to 2}x+5=16-40-8+5=-27$$
;

2. $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке $x=3$.Поэтому сначала преобразуем данную функцию.

Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2-11x+6$ являются числа $\frac{2}{3}$и 3; значит $3x^2-11x+6=3(x-\frac{2}{3})(x-3)$

А корни квадратного трехчлена $2x^2-5x-3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2-5x-3=2(x+\frac{1}{2})(x-3)\ .$$

Возвращаясь к пределу, имеем: $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})(x-3)}{2(x+\frac{1}{2})(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{9-2}{6+1} = \frac{7}{7} = 1.$$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞, то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x^3}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}-\frac{6x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4}-\frac{8x^2}{x^4}+\frac{2}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}+\frac{10}{x^4}}{6-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6} = 0$$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

.4. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел, формулу $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ Введем новую переменную: $x = -3y, x \to \infty; y \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{-15y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.
За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.1 Теория пределов
Практическая работа № 10
Исследование функций на непрерывность и точки разрыва

Цель: Научиться находить точки разрыва функций, определять их род, находить асимптоты графиков функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- исследовать функции на непрерывность;
- находит точки разрыва;
- находить асимптоты.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Исследовать функции на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род. Найти асимптоты функций.

1) $y = \frac{2x^2+3}{x^2-9}$;
2) $y = \frac{2x^2-4x-30}{x^2-25}$.

Краткие теоретические сведения:

Асимптотой графика функции $y = f(x)$называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim_{x \to a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \to \infty} f(x)$ или $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ равно b.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \to \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Ход работы:

Исследовать функцию на непрерывность. Найти асимптоты функции.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Точка $x = 1$ является точкой разрыва 2 рода, т.к.

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = -\infty \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$$

Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2}-\frac{1}{2}x\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.
За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.2 Производная функции и ее применение
Практическое занятие № 11
Дифференцирование сложных функций

Цель работы: Научиться находить производные сложных функций.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;

- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Форма представления результата:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x)$$
$$\cdot (2x)' = \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} \ln 2\, (3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)\ln 2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)\ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

/

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1 - e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1 - e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент
$u = 1 - e^{2x}$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1 - e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1 - e^{2x}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - 1 + e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})'$$
$$= -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}}(-2e^x)$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.2 Производная функции и ее применение
Практическая работа № 12
Исследование функций на монотонность, экстремумы, выпуклость - вогнутость, перегиб

Цель работы: Научиться исследовать функции с помощью производной на монотонность, экстремумы, выпуклость - вогнутость, перегиб

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-определять промежутки монотонности функций с помощью производной;

- находить экстремумы функции;

-определять промежутки выпуклости и вогнутости;

-находить точки перегиба.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1) Исследовать функцию на точки экстремума и промежутки монотонности: $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$.

2) Исследовать функцию на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба: $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1$.

Краткие теоретические сведения:

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки.
3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
4) Записать интервалы, на которых функция возрастает $f'(x) > 0$ и убывает $f'(x) < 0$.
5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1) Найти вторую производную.
2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
4) Если $f''(x) > 0$, то график выпуклый вниз. Если $f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх.
5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Порядок выполнения работы:

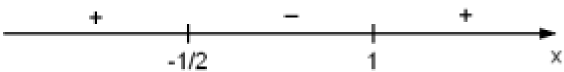
1. Запишите функцию.
2. Используя алгоритмы, исследовать функции.

Ход работы:

1) Для функции $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12 \;\; D(y) = R$.

Значит, для отыскания точек экстремума нужно найти точки, в которых производная равна нулю или не существует. $y' = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x^2 - x - 1)$.

Если $y' = 0$, то $2x^2 - x - 1 = 0$. Тогда $x = -\frac{1}{2}$ и x = 1. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка. Найдем знак производной $y' = 6(2x^2 - x - 1)$ на каждом, из получившихся промежутков.



Точки $x = -\frac{1}{2}$ и x = 1 являются экстремальными, так как при переходе через эти точки производная меняет знак. $x = -\frac{1}{2}$ – точка максимума, так как производная меняет знак с «+» на «–», а точка x = 1 – точка минимума.

Функция возрастает на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$ и убывает на $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

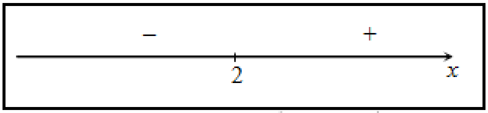
2) Найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1\right)'' = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 3\right)' = x - 2$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю, для этого решаем уравнение $y''(x) = 0$:

$$y''(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Исследуем знак второй производной слева и справа от полученной точки:



Так как на промежутке $(-\infty; 2)$ вторая производная $y''(x) < 0$, то на этом промежутке функция $y(x)$ выпукла; в силу того, что на промежутке $(2; +\infty)$ вторая производная $y''(x) > 0$ - функция вогнута. Так как при переходе через точку $x = 2$ вторая производная сменила знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

Ответ. Точка $x = 2$ - точка перегиба графика функции.
На промежутке $(-\infty; 2)$ функция выпукла, на промежутке $(2; +\infty)$ функция вогнута.

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.2 Производная функции и ее применение
Практическая работа № 13
Исследование функций и построение графиков

Цель работы: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- проводить исследование функций с помощью производной;
- строить графики функций;

- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ равно $-\infty$или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ равно b.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)y = f(x)$, если $\lim_{x\to\infty}|f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$.

$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$.

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

4.Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид

Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5.Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max} = 0$; $y_{min} = 2$.

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2-(2x^2-4x)\cdot 2(2x-2)\cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3}$$
$$= \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

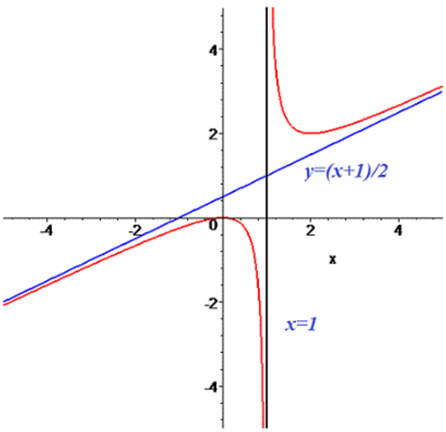
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2}-\frac{1}{2}x\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

8.На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.3 Интеграл и его приложения
Практическая работа 14
Вычисление неопределенных интегралов

Цель работы: Научиться находить неопределённые интегралы различными методами

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить неопределённые интегралы непосредственно, используя формулы табличных интегралов;

- находить неопределённые интегралы путём введения новой переменной;

- находить неопределённые интегралы по частям..

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица интегралов и конспекты лекций.

Задание

1. $\int(2x^2-\sqrt{x})dx$;
2. $\int\frac{cos^3x-1}{cos^2x}dx$;
3. $\int e^{5x-1}dx;$
4. $\int cos\frac{x}{3}dx$;
5. $\int\frac{3x}{\sqrt{x^2+3}}dx$;
6. $\int x\cdot cosxdx.$

Краткие теоретические сведения: Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для заданной функции $y = f(x)$ на отрезке $a \geq x \geq b$, если в каждой точке этого отрезка ее производная равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Каждая непрерывная функция имеет бесконечное множество первообразных функций, отличающихся друг от друга на постоянную величину.

Общее выражение $F(x) + C$ для всех первообразных функций от данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается:

$$\int f(x)dx,$$

где $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

При вычислении неопределенных интегралов необходимо использовать как стандартную таблицу, так и различные приемы упрощения подынтегральных выражений, позволяющих свести задачу к табличным интегралам привести к такому виду, который позволит воспользоваться справочными таблицами.

Порядок выполнения работы:

Внимательно изучите подынтегральную функцию и .используя конспекты лекций, определите способ интегрирования.

Ход работы:

1. Вычислить $\int (5\sqrt{x} - 4x)\, dx$.

В данном случае – приводим к табличному виду

$$\left(\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\right):$$

$$\int (5\sqrt{x} - 4x)dx = 5\int x^{1/2} dx - 4\int x dx =$$

$$= 5\frac{x^{0,5+1}}{0,5+1} - 4\frac{x^2}{2} + C = \frac{10}{3} x^{1,5} - 2x^2 + C.$$

2. Вычислить $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$.

Здесь для приведения к табличному виду

$$\left(\int \sin x dx = -\cos x + C; \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C\right)$$

преобразуем подынтегральное выражение к сумме двух слагаемых:

$$\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx = \int \left(\sin x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = -\cos x - \operatorname{ctg} x + C \cdot$$

Во многих случаях для приведения к табличному виду можно использовать замену переменной (подстановку).

3. Вычислить интеграл $\int 4^{2x-1} dx$.

Здесь для применения табличной формулы $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ необходимо преобразовать показатель степени $2x - 1$. Введем подстановку: $u = 2x - 1$, откуда $du = 2dx$ и $dx = \frac{1}{2} du$. Тогда:

$$\int 4^{2x-1} dx = \left\rangle \begin{array}{l} u = 2x - 1 \\ du = 2dx \\ dx = 0{,}5du \end{array} \right\langle = \int 4^u \cdot 0{,}5du = 0{,}5 \int 4^u \, du = 0{,}5 \frac{4^u}{\ln 4} =$$

$$= 0{,}5 \frac{4^{2x-1}}{\ln 4} + C \cdot$$

4. Вычислить интеграл $\int \sin 5x dx$.

$$\int \sin 5x dx = \left\rangle \begin{array}{l} u = 5x \\ du = 5dx \\ dx = \frac{1}{5} du \end{array} \right\langle = \frac{1}{5} \int \sin u du = -\frac{1}{5} \cos u = -\frac{1}{5} \cos 5x + C$$

5. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{x^2 - 8}$.

$$\int \frac{xdx}{x^2 - 8} = \left\rangle \begin{array}{l} u = x^2 - 8 \\ du = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2} du \end{array} \right\langle = \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 8) + C \cdot$$

(Интеграл $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ – табличный.)

6. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}} = \left\rangle \begin{array}{l} u = 5-x^2 \\ du = -2xdx \\ xdx = -\frac{1}{2}du \end{array} \right\langle = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{3}\int u^{-1/2}du =$$

$$= -u^{1/2} = \sqrt{5-x^2} + C.$$

7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(8-3x)^2}$.

$$\int \frac{dx}{(8-3x)^2} = \left\rangle \begin{array}{l} u = 8-3x \\ du = -3dx \\ dx = -\frac{1}{3}du \end{array} \right\langle = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3}\int u^{-2}du =$$

$$= \frac{1}{3u} = \frac{1}{3(8-3x)} + C\cdot$$

8. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx\cdot$

Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left\rangle \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{array} \right\langle = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3} + C\cdot$$

9. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{8x^2+3}$.

Приведем интеграл к табличной формуле

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C\cdot$$

$$\int \frac{dx}{8x^2+3} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2+\frac{3}{8}} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{8}}} + C = 1{,}63\operatorname{arctg}1{,}63x + C\cdot$$

10. Вычислить интеграл $\int x\cos x dx\cdot$

Интегралы такого типа вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu\cdot$

$$\int x\cos x dx = \left\rangle \begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = \cos x dx & \to & v = \sin x \end{matrix} \right\langle = x\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

11. Вычислить интеграл $\int x^2 \ln x dx\cdot$

$$\int x^2 \ln x dx = \left\rangle \begin{matrix} u = \ln x & \to & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx & \to & v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right\langle = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C\cdot$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.3 Интеграл и его приложения
Практическое занятие № 15
Вычисление определённых интегралов

Цель работы: Повторить определение определённого интеграла, его свойства , методы нахождения определённого интеграла.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить определённый интеграл непосредственно;

- находить определённый интеграл методом подстановки.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. 1. $\int_2^4 (x^3 - 3x)dx$.

2. $\int_0^1 (2x + e^x)dx$

.

3. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

Порядок выполнения работы:

1. Найти первообразную подынтегральной функции.
2. Воспользоваться формулой Ньютона- Лейбница.
3. В случае непосредственного интегрирования найти приращение первообразной.

4. В случае введения новой переменной величины найти значения верхнего и нижнего пределов интегрирования и после этого найти интеграл.

Ход работы:

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{2}^{4}(x^2+3x)dx$.

Первообразная: $\int(x^2+3x)dx=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2$.

Отметим, что произвольную константу C можно здесь не записывать, так как она в следующей операции уничтожается.

По формуле Ньютона–Лейбница:

$$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4=\left(\frac{4^3}{3}+\frac{3}{2}4^2\right)-\left(\frac{2^3}{3}+\frac{3}{2}2^2\right)=\frac{110}{3}\approx 36{,}67\,.$$

Вычисление значения интеграла обычно принято записывать цепочкой, без выделения первообразной и формулы Ньютона–Лейбница.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{1}(x+e^x)dx$.

$$\int\limits_0^1(x+e^x)dx=\left(\frac{x^2}{2}+e^x\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{1^2}{2}+e^1\right)-(0+e^0)=$$

$$=0{,}5+e-1=0{,}5+e\approx-0{,}5+2{,}718=2{,}218\,.$$

3. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{7}\dfrac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

$$\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}=\left\rangle\begin{array}{l}u=3x+4\\ du=3dx\\ dx=\dfrac{1}{3}du\end{array}\right\langle=\left(\frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt{u}}\right)\Bigg|_{-1}^{7}=\left(\frac{2}{3}u^{1/2}\right)\Bigg|_{-1}^{7}=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\right)\Bigg|_{-1}^{7}=\frac{2}{3}\sqrt{3\cdot 7+4}-\frac{2}{3}\sqrt{3\cdot(-1)+4}=\frac{8}{3}.$$

Для сокращения преобразований при замене переменной удобно вновь вычислять верхний и нижний пределы. Это позволяет избежать обратной замены на исходную переменную в полученной первообразной и упрощает вычисления. Так, для данного примера можно записать:

$$\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}=\left\rangle\begin{array}{l}u=3x+4\\ du=3dx\\ dx=\frac{1}{3}du\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}\alpha=3\cdot(-1)+4=1\\ \text{(нижний предел)}\\ \beta=3\cdot 7+4=25\\ \text{(верхний предел)}\end{array}\right\langle=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{3}\int_{1}^{25}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{2}{3}u^{1/2}\Bigg|_{1}^{25}=\frac{2}{3}(\sqrt{25}-\sqrt{1})=\frac{2}{3}(5-1)=\frac{8}{3}.$$

Мы получили тот же результат, без обратного перехода к радикалу $\sqrt{3x+4}$.

4. Вычислить интеграл $\int_{0}^{3}x\sqrt{1+x}dx$.

$$\int_{0}^{3}x\sqrt{1+x}dx=\left\langle\begin{array}{l}u=\sqrt{1+x}\\ u^2=1+x\\ x=u^2-1\\ dx=2udu\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}\alpha=\sqrt{1+0}=1\\ \beta=\sqrt{1+3}=2\end{array}\right\rangle=\int_{1}^{2}(u^2-1)u\cdot 2udu=$$

$$=2\int_{1}^{2}(u^4-u^2)du=2\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{2}=2\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}\right)-2\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}\right)=7\frac{11}{15}.$$

5. Вычислить интеграл $\int_{0}^{\pi/2}x\sin xdx$.

При интегрировании по частям рекомендуется сначала полностью определить первообразную, а затем применить формулу Ньютона–Лейбница.

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x dx = \left\rangle \begin{matrix} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \sin x dx & \Rightarrow & v = -\cos x \end{matrix} \right\langle =$$

$$= (-x\cos x + \int \cos x dx)\Big|_0^{\pi/2} = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - (0 + \sin 0) = 1 \cdot$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.3 Интеграл и его приложения
Практическое занятие № 16
Интегрирование различными методами

Цель работы: Рассмотреть различные способы интегрирования функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные и определенные интегралы методом подстановки;
- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите интегралы

1) $\int 3^{4x^2} x dx$

2) $\int_2^4 \frac{3x dx}{(x^2-1)^3}$

3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x \cdot cosx dx$

4) $\int (x^2+5x+7) lnx \cdot dx$

5) $\int (x^2+4x+3) e^{2x} dx$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернуться к старой переменной.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух

сомножителей Uи dV. Затем, после нахождения dUи V,использовать формулу интегрирования по частям.

- - Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где $P(x)$- многочлен, k- число. Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за dV.
- Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$. Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U.
- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx$, $\int e^{ax}cosbxdx$, где aи bчисла. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1)$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1 - x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\frac{dt}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{15dt}{-3t^4}$$

$$= -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C$$

$$= \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

2) $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2}=\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2}==\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2}=\left[\begin{matrix}\frac{5}{2}x=t\\ \frac{5}{2}dx=dt\\ dx=\frac{2}{5}dt\\ x_H=0\quad t_H=0\\ x_B=0,4\quad t_B=1\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt|_0^1=\frac{1}{2}(arctg1-arctg0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^3x}=\left[\begin{matrix}cosx=t\\ dcosx=dt\\ -sinxdx=dt\\ sinxdx=-dt\\ x_H=0\quad t_H=cos0=1\\ x_B=\frac{\pi}{3}\,t_B=cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{matrix}\right]=\int\limits_1^{0,5}\frac{-dt}{t^3}=-\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5}$$

$$=\frac{1}{2t^2}|_1^{0,5}=\frac{1}{2\cdot 0,25}-\frac{1}{2}=2-0,5=1,5$$

4) $\int(x^3-4x)lnx\cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U=lnx,\ dV=(x^3-4x)dx$.

$$dU=\frac{1}{x}dx,\qquad V=\int(x^3-4x)dx=\frac{x^4}{4}-2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int(x^3-4x)lnx\cdot dx=lnx\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)-\int\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\frac{1}{x}dx=$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)-\int\left(\frac{x^3}{4}-2x\right)dx=lnx\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)-\frac{x^4}{16}+x^2+C$$

5) $\int (x^2 - 2x)\cos 4x\, dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x,\ dV = cos4xdx$.

$$dU = (2x-2)dx, \qquad V = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x$$

$$\int (x^2 - 2x)\cos 4x\, dx$$
$$= (x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x - \int \frac{1}{4}sin4x(2x-2)dx =$$
$$(x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x - \frac{1}{4}\int sin4x(2x-2)dx = \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x$$
$$-\frac{1}{2}\int sin4x(x-1)dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x - 1,\ dV = sin4xdx$.

$$dU = dx, \qquad V = \int sin4xdx = -\frac{1}{4}cos4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right)$$
$$-\int -\frac{1}{4}cos4xdx =$$
$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) + \frac{1}{4}\int cos4xdx =$$
$$= \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{8}\int cos4xdx =$$
$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{32}sin4x + C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.3 Интеграл и его приложения
Практическое занятие № 17
Применение определённых интегралов к решению прикладных задач

Цель работы: Повторить геометрический смысл определённого интеграла.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- изображать криволинейные трапеции в координатной плоскости;
- находить площади соответствующих криволинейных трапеций.
- вычислять значения геометрических величин;
- решать прикладные задачи с использованием элементов интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

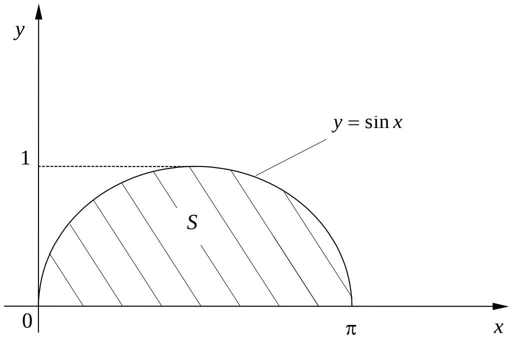
Задание:
Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:
1. .$y=9-x^2, y=0.$
2. $y=\cos x$, $x=\pi$, $x=0$, $y=0$.
3. $y=1/x$, $x=2$, $x=4$, $y=0$

Порядок выполнения работы:
1. изобразить криволинейную трапецию координатной плоскости;
2. вычислить площадь полученной криволинейной трапеции.

Краткие теоретические сведения : в конспекте лекций.

Ход работы:
Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:
1. $y=\sin x$, $x=\pi$, $x=0$, $y=0$.

Решение. Изобразим в координатной плоскости криволинейную трапецию.



Отсюда:

$$S = \left| \int_0^{\pi} \sin x dx \right| \cdot$$

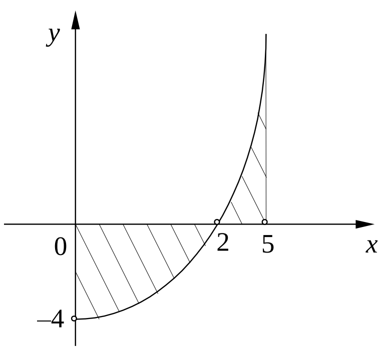
$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) = 2 .$$

Следовательно, $S = |2| = 2$ кв. ед.

2 *.y=x²-4; x=0; x=5; y-=0.*

Решение . Изобразим в координатной плоскости криволинейную трапецию.



Эскиз показывает, что линия $y = x^2 - 4$ пересекает ось $0x$. При вычислении площади разобьем интеграл на два слагаемых, для того чтобы не допустить алгебраического сложения величин различных знаков. Найдем сначала точку пересечения функции с осью $0x$:

$x^2 - 4 = 0$. $x_1=2$;$x_2=-2$.

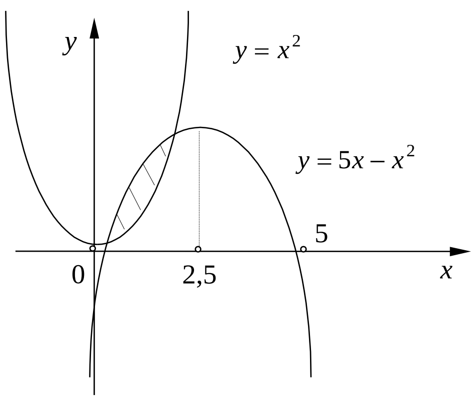
Значение $x_2=-2$. (отбрасываем, так как оно не входит в интервал $0 \le x \le 5$).

Таким образом,

$$S = \left|\int_0^2 (x^2-4)dx\right| + \left|\int_2^5 (x^2-4)dx\right| = \ldots = \left|-\frac{16}{3}\right| + \left|\frac{81}{3}\right| = \frac{97}{3} \text{ кв. ед.}$$

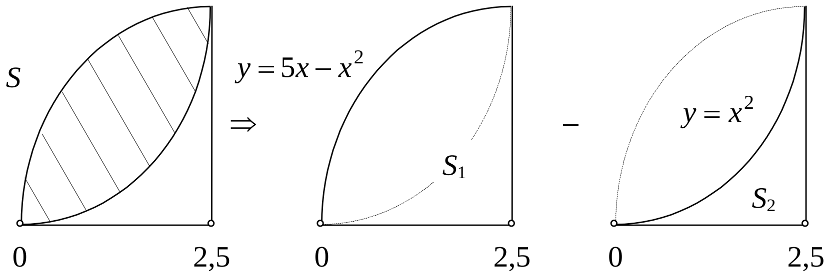
3 Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = 5x - x^2$ и $y = x^2$.....

.



Точки пересечения линий определятся из уравнения $x^2 = 5x - x^2$, т.е. $x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}5$.

Для решения задач со сложным очертанием области удобно использовать графическое разложение на сумму простейших фигур. Так, в нашем случае:



Следовательно, чтобы получить искомую площадь S, достаточно определить площадь S_1 для функции $y = 5x - x^2$ и вычесть из нее площадь S_2 для функции $y = x^2$, т.е.

$$S = S_1 - S_2 = \left| \int_0^{2,5} (5x - x^2)dx \right| - \left| \int_0^{2,5} x^2 dx \right| = \ldots = |10{,}42| - |5{,}21| = 5{,}21$$

кв.ед.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.4 Дифференциальные уравнения
Практическое занятие № 18
Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения I порядка с разделяющими переменными. Научиться находить общие и частные решения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разделять переменные для решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными;
- находить общее решение дифференциального уравнения;
- выделять из общего решения частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решать задачу Коши).

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$

б) $(y-1)^2dx + (1-x^3)dy = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$dy = (3x^2 - 2x)dx$, *если y=4 при x=*

Порядок выполнения работы:

1) Привести данное уравнение к уравнению с разделяющими переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:

а) Производные функции заменить её дифференциалами;

б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;

в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих” дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$

2) Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

3) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0; y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постояннойС ,а затем С подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

1) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6xdx + 3xy^2dx) - (6ydy + 2x^2ydy) = 0$$

Сгруппируем члены с *dx* и *dy*

$$3x(2 + y^2)dx - 2y(3 + x^2)dy = 0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3 + x^2} = \frac{2ydy}{2 + y^2}$$

-Интегрируем

$$3\int \frac{xdx}{3 + x^2} = 2\int \frac{ydy}{2 + y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2}\ln(3 + x^2) = \ln(2 + y^2) + \ln c$$

$$\ln(3 + x^2)^{\frac{3}{2}} = \ln(2 + y^2) \cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3 + x^2)^3} = (2 + y^2) \cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3 + x^2)\sqrt{3 + x^2}}{2 + y^2} = c$$

2) Найти частные решение дифференциальных уравнений

$2(y - 3)dx - dy = 0$ *при x=0 , y=4*

-Разделим переменные

$$dy = 2(y - 3)dx$$

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx$$

-Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$$

$$\ln(y-3) = 2x + \ln c$$

-По определению логарифма $2x = \ln e^{2x}$

$$\ln(y-3) = \ln(e^{2x} \cdot c)$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{2x} \cdot c + 3$$

-Подставим в это уравнение начальные условия *x=0 , y=4*

$4 = e^{0} \cdot c + 3$=>*c=1*

-Запишем частное решение

$$y = e^{2x} + 3$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.4 Дифференциальные уравнения
Практическое занятие № 19
Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы:

Научиться определять вид дифференциальных уравнений, находить общее и частное решение линейных дифференциальных уравнений I порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять вид дифференциального уравнения первого порядка;
- находить общее и частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти частное решение дифференциального уравнения

   a) $y^2 + x^2y' = xy \cdot y'$ *при* $y(1) = 1$

   b) $y'\sin x - y\cos x = 1$ *при* $x\,\frac{\Pi}{2}$, *y=1*

Порядок выполнения работы:

1. Линейное дифференциальное уравнение I порядка решается путем подстановки

$$y = u \cdot \vartheta; \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$$

Дифференциальное уравнение сводится к решению двух дифференциальных уравнений, с разделяющими переменными, сначала относительно u , потом-ϑ, где $u и \vartheta$ неизвестные функции от *x*.

Ход работы:

1) Найти частное решение линейного дифференциального уравнения I порядка

$xy' + y = 3$, если *y=0, при x=1*

-Приведем уравнение к виду по определению

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$$

-Сделаем замену

$$y = u\vartheta; \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$$

-Сгруппируем члены сϑ, получим

$\vartheta\left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right) = 0$, т.к. $\vartheta \neq 0$ =>$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$

-Разделим переменные

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

-Проинтегрируем

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\ln|x|$$

-Пропотенцируем

$$u = \frac{1}{x}$$

-Подставим *u* в оставшееся уравнение

$$\frac{1}{x}\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{3}{x}$$

$$d\vartheta = 3dx$$

-Проинтегрируем

$$\vartheta = 3x + c$$

-Подставим $y = u\vartheta$

$y = \frac{1}{x}(3x + c)$- общее решение

-Подставим начальные условия

$0 = 3 + c$ =>c=-3

$y = \frac{3}{x}(x - 1)$- частное решение

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно

менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.4 Дифференциальные уравнения
Практическое занятие № 20
Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы: научиться решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-определять вид дифференциального уравнения;

- находить общее и частное решения дифференциальных уравнений.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Решите дифференциальные уравнения:

1. $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$
2. $(y^2 - 2x^2)dy + 2xydx = 0$.

Порядок выполнения работы:

1) Определите вид дифференциального уравнения.
2) Если уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка, то путем введения новой переменной нужно привести заданное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Заменим $y = z \cdot x$, $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$, где Z-новая неизвестная функция от *x*.
   Получилось уравнение с разделяющими переменными относительно Z.
3) Решить получившееся уравнение относительно Z. После этого надо Z заменить на $\frac{y}{x}$ и выразить *y*.

Ход работы:

Найти частное решение однородного дифференциального уравнение I порядка

$y' = \frac{2x+y}{2x}$, если *y=0 при x=1*

-Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{2x}$

-Произведем подстановку $y = zx$; $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$

$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{2x+zx}{2x}$; $x\frac{dz}{dx} + z = \frac{x(2+z)}{2x}$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{2+z}{2}-z$$
$$x\frac{dz}{dx}=\frac{2-z}{2}$$
-Разделим переменные $\frac{2}{2-z}dz=\frac{dx}{x}$

-Проинтегрируем выражение: $2\int\frac{dz}{2-z}=\int\frac{dx}{x}$

-Решаем данное уравнение $-2\ln|2-z|=\ln|x|+\ln c$
$$\ln\frac{1}{(2-z)^2}=\ln(xc)$$
-Пропотенцируем выражение $\frac{1}{(2-z)^2}=xc$

-Выразим z: $(2-z)^2=\frac{1}{xc}$
$$2-z=\frac{1}{\sqrt{xc}}$$
$$z=2-\frac{1}{\sqrt{xc}}$$
-Заменим $z=\frac{y}{x}$ и выразим $y$$y=\frac{2x\sqrt{xc}-x}{\sqrt{xc}}$– общее решение

-Подставим начальные условия *y=0 , x=1*

$0=\frac{2\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}}$; $2\sqrt{c}-1=0, 2\sqrt{c}=1, \sqrt{c}=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}$

-Подставим *c*в общее решение $y=2(x-\sqrt{x})$ частное решение.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.4 Дифференциальные уравнения
Практическое занятие № 21
Решение дифференциальных уравнений второго порядка

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения II порядка и линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка;

- находить общее и частное решение простейших дифференциальных уравнений второго порядка;

- находить общее и частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания , таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения II порядка:

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$

c) $y'' = x, A(1;0); B(1;1)$

2. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения II порядка.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ при } x = 0;\ y = 0;\ \frac{dy}{dx} = 0$$

Порядок выполнения работы:

1) Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $p = \frac{dy}{dx}$

Приводим к уравнению с разделяющими переменными и решаем относительно р.

Подставляем р и решаем уравнение разделением переменных относительно у.

Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно C_1 иC_2. Подставляя C_1 иC_2 в общее решение, находим частные решения.

2) Однородное дифференциальное уравнение II порядка.

Путем замены $y = e^{kx}$

$y' = ke^{kx}$

$y'' = k^2e^{kx}$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = o$ из которого находим k_1иk_2.

Общее решение при D>0 будет:

$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$

При D=0 будет:$y = e^{kx}(c_1 + c_2x)$

При D<0 будет: $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

При заданных начальных условиях составляем систему линейных уравнений и решаем её относительно C_1 иC_2.

Ход работы:

II. Решить дифференциальное уравнение порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$$

-Заменим $p = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}; \frac{dp}{dx} = 1 - 2x$$

-Разделим переменные

$$dp = (1 - 2x)dx$$

-Проинтегрируем

$$\int dp = \int (1 - 2x)dx$$

$$p = x - x^2 + c_1$$

-Заменим pна$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + c_1$$

-Разделим переменные

$$dy = (x - x^2 + c_1)dx$$

-Проинтегрируем и получим общее решение

$$\int dy = \int (x - x^2 + c_1)dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

III. Решить однородное дифференциальное уравнение II порядка

a) $y'' - 5y' + 6 = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 5k + 6 = 0$, решаем квадратное уравнение, получим $k_1 = 2, k_2 = 3$

-Общее решение будет:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

b) $y'' + 4y' + 4y = o$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k+2)^2 = 0 \qquad k = -2$

-Запишем общее решение для D=0

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$$

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 6k + 12 = 0; D = 36 - 4 \cdot 13 = -16$

D<0 =>$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16 i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i a = 3; b = 2$

-Запишем общее решение

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно

менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 4 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 22

Решение задач на основные понятия комбинаторики

Цель работы: Осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-Находить отличия одной выборки от другой;
-Применять формулы для подсчёта выборок без повторений.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Краткие теоретические сведения:

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1.Правило сложения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами, а другой элемент $B - n$ способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов(либо A, либо B) можно осуществить $m + n$ способами.

2.Правило умножения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача1. При формировании экипажа космического корабля имеется:10 претендентов на пост командира,20 претендентов на пост бортинженера,25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Решение. По правилу суммы существует 10+20+25=55способов выбора одной из кандидатур.

Задача2.В столовой предлагают два различных первых : a_1 и a_2 ;три различных вторых блюда: b_1, b_2, b_3 и два различных десерта: c_1 и c_2. Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

Решение. Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует $2 \times 3 \times 2 = 12$ способов выбрать обед из трех блюд.

3. Подмножества n- множеств(соединения).

Для нахождения $k-$подмножеств некоторого $n-$множества нужно выбрать k из n его элементов (поэтому часто говорят о *выборк*е k элементов из $n-$элементов). Про выбранные k из n различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из n элементов по k .*Соединение*-собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений: ***перестановки, размещения, сочетания.***

Перестановки.

Перестановками из $n-$элементов называются такие соединения из $n-$элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n\,!$

Размещения.

Размещениями из $n-$элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных $n-$элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем , и другим.

Обозначение $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из $n-$элементов по $n-$элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

Сочетания.

Сочетаниями из n- элементов по mназываются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1.Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2.Формула размещений имеет вид: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4\,, m = 10$.

3. Производим расчёт: $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

3 . Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!} = 120$.

3.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

1.По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2.Формула перестановок из п –элементов имеет вид: $P_n = n!$ В нашем случае n =4.

3.Произведём расчёт: $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 4 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 23

Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель работы: Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

- вычислять вероятность события по классическому определению вероятности **.**

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того.что выбранные детали оказались окрашенными?

3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того.при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается Р(А) и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы: 1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие А-«номер набран верно».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!}$=$\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}$=720. Итак, n=720
3. Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие А-«оба шара окажутся чёрными».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!}$=$\frac{20!}{2!\cdot 18!}$=$\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!}$=190.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}$=$\frac{8!}{2!\cdot 6!}$=$\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!}$=28
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

2.На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК ?

Решение.

1. Событие А-«получится слово ЗАМОК».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов(букв): n=$P_5 = 5!$=5·4·$3 \cdot 2 \cdot 1$=120.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 4 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 24

Числовые характеристики выборки

Цель работы: Рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

1. Составлять распределение относительных частот.
2. Строить полигоны частот и относительных частот.
3. Строить гистограмму по заданному статистическому распределению:
4. Находить статистические оценки генеральной совокупности, заданной вариационным рядом:
5. Находить статистические характеристики выборки.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1**.** Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

.

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

.

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

.

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2= числу букв в Вашей фамилии; p_3 = числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

1 Прочитав условие предложенной задачи , по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2.Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.
3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик. выборки.
Ход работы: 1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

.

Составить распределение относительных частот.
Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12;$$

$$w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40; w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28; w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20.$$

Следовательно,

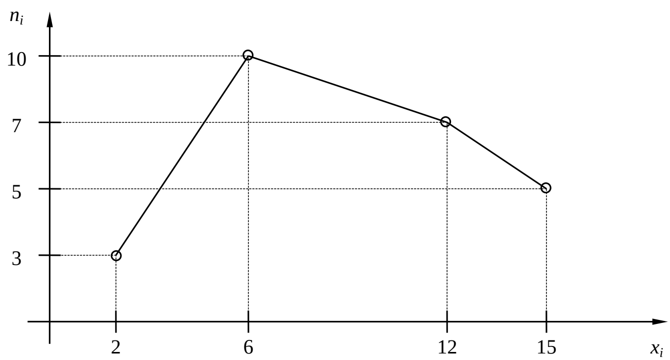
x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

.

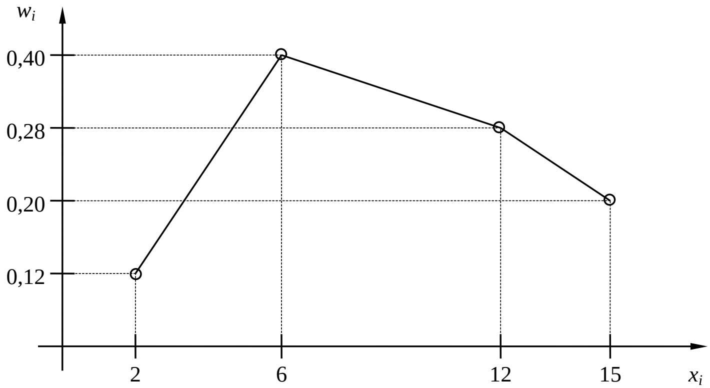
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

2. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

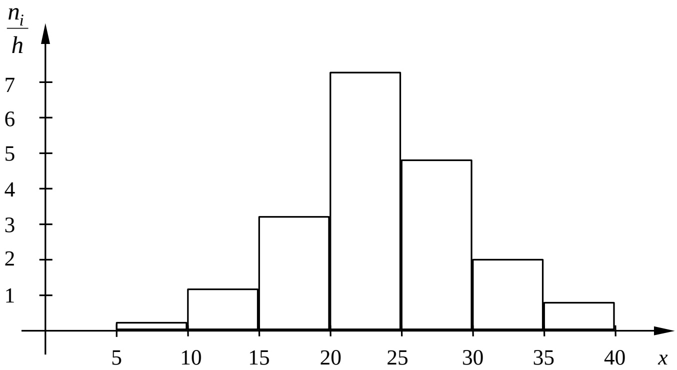
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30\,.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_{\Gamma} = \frac{8\cdot 2 + 9\cdot 4 + 10\cdot 5 + 3\cdot 6}{30} = 4\,.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_{\Gamma} = \overline{X^{2}_{\Gamma}} - \left(\overline{X}_{\Gamma}\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^{2}_{\Gamma}} = \frac{8\cdot 2^2 + 9\cdot 4^2 + 10\cdot 5^2 + 3\cdot 6^2}{30} = 17{,}8\,.$$

Таким образом, $D_{\Gamma} = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8\,.$

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34\,.$

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10\,.$$

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4{,}5\,.$$

Размах вариации R: в примере

$x_{max} = 6; x_{min} = 2$,

поэтому

$$R = 6 - 2 = 4 .$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500 .$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1{,}82 .$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11{,}45 \cdot$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14 .$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85 .$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно