Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
__________ /С.А. Маховский
«24» февраля 2021 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ЕН.01 Математика

для студентов специальности

21.02.05 Земельно-имущественные отношения
базовой подготовки

Магнитогорск, 2021

ОДОБРЕНО

Предметно-цикловой комиссией «Математических и естественнонаучных дисциплин»
Председатель ________/Е.С. Корытникова
Протокол №7 от 17.02.2021 г.

Методической комиссией

Протокол №3 от 26.02.2021 г.

Разработчик
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК Ю.Н.Садчикова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на формирование общих и профессиональных компетенций по программе подготовки специалистов среднего звена по специальности 21.02.05 Земельно-имущественные отношения базовой подготовки.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующего федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике, физике, химии, информатике и др.), необходимых в последующей учебной деятельности по общим гуманитарным и социально-экономическим дисциплинам, математическим и естественно-научным, общепрофессиональным дисциплинам.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен уметь:

У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

У02.1 анализировать социально-экономические и политические проблемы и процессы;

У03.1 распознавать и анализировать профессиональную задачу и/или проблему;

У05.2 выделять наиболее значимое в изучаемом материале и структурировать получаемую информацию;

У06.2 работать в коллективе и команде;

У08.1 находить и анализировать информацию в области инноваций в профессиональной деятельности.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 1.1. - Составлять земельный баланс района;

ПК 1.3. - Готовить предложения по определению экономической эффективности использования имеющегося недвижимого имущества;

ПК 2.1. - Выполнять комплекс кадастровых процедур;

ПК 2.2. - Определять кадастровую стоимость земель;

ПК 3.1. - Выполнять работы по картографо-геодезическому обеспечению территорий, создавать графические материалы;

ПК 4.1. - Осуществлять сбор и обработку необходимой и достаточной информации об объекте оценки и аналогичных объектах;

ПК 4.2. - Производить расчеты по оценке объекта оценки на основе применимых подходов и методов оценки;

ПК 4.3. - Обобщать результаты, полученные подходами, и давать обоснованное заключение об итоговой величине стоимости объекта оценки;

ПК 4.4. - Рассчитывать сметную стоимость зданий и сооружений в соответствии с действующими нормативами и применяемыми методиками;

ПК 4.5. - Классифицировать здания и сооружения в соответствии с принятой типологией.

В процессе освоения дисциплины у студентов должны формироваться общие компетенции:

ОК 1 - Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес;

ОК 2 - Анализировать социально-экономические и политические проблемы и процессы, использовать методы гуманитарно-социологических наук в различных видах профессиональной и социальной деятельности;

ОК 3 - Организовывать свою собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;

ОК 4 - Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях;

ОК 5 - Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития;

ОК 6 - Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями;

ОК 7 - Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации;

ОК 8 - Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности;

ОК 9 - Уважительно и бережно относиться к историческому наследию и культурным традициям, толерантно воспринимать социальные и культурные традиции**.**

Выполнение обучающимися практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;
- приобретение навыков работы с различными приборами, аппаратурой, установками и другими техническими средствами для проведения опытов;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Предел функции. Непрерывность функции

Практическая работа 1
Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей

Цель работы: Проверка усвоения знаний по вычислению пределов функций с помощью раскрытия неопределённостей. Повторить и систематизировать знания по данной теме **.**

Выполнив работу, Вы будете уметь:
решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:
Теоретический материал методической рекомендации к практической работе;
Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Задание: Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x-4}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$;

5) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x^2-25}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+n^2-3n^3+2}{4n^3+n+5}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{16n^6+1}-\sqrt[3]{8n^2+5}+\sqrt{n+4}}{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt{25n^3+7}}$,

8) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

12) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-5n^2+4}{n^3+3}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n^3+1}}}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^2+5}}$

Порядок выполнения работы:
1. Повторение правил и формул.
2. Объяснение преподавателя.
3. Выполнение задания.
4. Оценка выполненных заданий.
5. Подведение итогов.

Ход работы

Определение предела.

Функция *y=f(x) стремится к пределу b при x → a*, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех x ≠ a из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Определение непрерывной функции. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Вычисление пределов функций основано на применении следующих основных теорем:

ТЕОРЕМА 1. Предел суммы двух функций при x стремящемся к a равен сумме пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 2. Предел произведения двух функций при x стремящемся к a равен произведению пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Предел частного двух функций при x стремящемся к a равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad , \quad \text{если} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

и равен плюс (минус) бесконечности, если предел знаменателя 0, а предел числителя конечен и отличен от нуля.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3) = \lim_{x\to 7} x + \lim_{x\to 7} 3 = 7 + 3 = 10.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x) + \lim\limits_{x\to 1} 2}{\lim\limits_{x\to 1}(2x) + \lim\limits_{x\to 1}(-7)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 3 \cdot \lim\limits_{x\to 1} x + 2}{\lim\limits_{x\to 1} 2 \cdot \lim\limits_{x\to 1} x - 7} = \; = \frac{3\cdot 1 + 2}{2\cdot 1 - 7} = 5/(-5) = -1.$$

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Знаменатель и числитель дроби при x стремящемся к 2 стремятся к нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь неприменима. В таких случаях нужно попытаться упростить дробь. Имеем

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

Это преобразование справедливо при всех значениях x, отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 =$$
$$= 2 + 2 = 4.$$

Вычисление пределов с помощью теоремы о первом замечательном пределе

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} =$$
$$= 1\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

Форма предоставления результата - выполненные задания.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическая работа 2
Вычисление пределов. Исследование функций на непрерывность

Цель работы: формирование умений вычислять пределы с помощью замечательных пределов, раскрывать неопределенности, исследовать функцию на непрерывность

Выполнив работу, Вы будете уметь:
решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями).
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание 1:

1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to3}(x^3+x-5)$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3}{2x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3-x^2}{5x^3-4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2+x+1}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+3x}$; з) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.
2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to8}\frac{2x-7}{x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{5x-2x^2-2}{2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Задание 2:

Исследовать на непрерывность и построить график функции: а) $y=\frac{x^3+1}{x+1}$; б) $y=3^{\frac{1}{x+1}}+1$; в)

$$y(x)=\begin{cases}x, & x\le0,\\ 1-x, & 0<x\le1,\\ \frac{1}{1-x}, & x>1.\end{cases}$$

Порядок выполнения работы:
1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Краткие теоретические сведения:
Замечательные пределы.
Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел (число e): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

Непрерывность функции определяется в точках, принадлежащих области определения функции. Пусть функция *f(x)* определена в окрестности точки x_0. Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0, если:
1) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ функции *f(x)* в точке x_0;
2) этот предел равен значению функции в точке x_0.

Иначе говоря, *f* непрерывна в точке $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. (1)

Непрерывность функции *f(x)* в точке x_0 означает, что в этой точке существуют односторонние пределы, равные значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0), \qquad (2)$$

где $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ – правосторонний предел функции *f* в точке x_0; $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ – левосторонний предел функции *f* в точке x_0; $f(x_0)$ – значение функции *f* в точке x_0.

Если условия (1) или (2) в точке x_0 не выполняются, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции *f(x)*.

Если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, причем не все три числа $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0)$ равны между собой, то x_0 называют *точкой разрыва первого рода*.

Если в точке разрыва x_0 хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ не существует или бесконечен, то x_0 называют *точкой разрыва второго рода*.

Ход работы

Для того чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения этой функции, нужно в выражение функции вместо аргумента подставить его предельное значение.

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^∞), (∞^0), (0^0). Рассмотрим несколько типов примеров, классифицируя их по виду неопределенности и предельному значению *x*.

1-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ в общем случае – сложные степенные или показательные функции. В случае степенных функций необходимо выносить за скобку в числителе и в знаменателе дроби *x* с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; в случае показательных функций за скобку выносится наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

Полезно запомнить правило:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}0,\ \text{если } n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0},\ \text{если } n=m,\\ \infty,\ \text{если } n>m.\end{cases}$$

2-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

3-й тип. Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $(\infty-\infty)$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится ко 2-му типу после приведения дробей к общему знаменателю. Если упомянутая функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность устраняется или приводится к 1-му типу путем домножения и деления функции на одно и то же (сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

К пределам ***4-го типа*** отнесем примеры с неопределенностью вида (1^∞). В этом случае выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой степенно-показательную функцию, в основании которой необходимо выделить целую часть дроби (которая должна быть равна 1). Неопределенность устраняется при помощи выделения второго замечательного предела.

5-й тип. К этому типу отнесем функции, сводящиеся к первому замечательному пределу.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Дифференциальное исчисление

Практическая работа 3
Правила дифференцирования. Техника дифференцирования

Цель работы: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение :
Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.
Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Задание:

Найти значение производной данной функции в данной точке.

1) $y = 2x^2 - 3x + 5$, $x = 0$
2) $y = 7x^3 - 6 + 3x^2$, $x = 0$;
3) $y = 12 - 3x^3 + 2x^2$, $x = 0$;
4) $y = x^3 - 4x^2 + x$, $x = 0$;
5) $y = 21x + 3x^5 + 7x^2 - 5$, $x = 0$;
6) $y = x^3 \cdot 3x^{0,5}$, $x = 1$;
7) $y = (x + 1) \cdot 2x^3$, $x = 1$;
8) $y = 4x \cdot (7x^2 + 5)$, $x = 1$;
9) $y = (2x^2 + 3x) \cdot (x - 1)$, $x = 1$;
10) $y = (6x - 3x^2) \cdot (x^2 + 2)$, $x = 1$;
11) $y = \dfrac{x+1}{x^2}$, $x = 1$;
12) $y = \dfrac{x}{x-1}$, $x = 0$;
13) $y = \dfrac{2x^2}{3x+5}$, $x = 0$;
14) $y = \dfrac{7-2x}{x^3}$, $x = 1$;
15) $y = \dfrac{7x}{3-2x^2}$, $x = 0$;
16) $y = (x - 3x^2 + 5)^3$, $x = 0$;
17) $y = (7x - 1 + 4x^3)^5$, $x = 0$;
18) $y = (x^3 + 1)^2$, $x = 0$;
19) $y = (1 - 2x)^7$, $x = 0$;
20) $y = (4x + 5x^2 - 7)^2$, $x = 0$;
21) $y = \sqrt{x+1}$, $x = 0$;
22) $y = \sqrt{2x^2+3}$, $x = 0$;
23) $y = \sqrt{4-7x^2}$, $x = 0$;
24) $y = \sqrt{3x^3}$, $x = 1$;
25) $y = \sqrt{2x^5}$, $x = 1$;
26) $y = \dfrac{1}{x+1}$, $x = 0$;
27) $y = \dfrac{1}{3-2x}$, $x = 0$;
28) $y = \dfrac{1}{4x-3x^2}$, $x = 1$;
29) $y = \dfrac{1}{5x^3+3}$, $x = 0$;
30) $y = \dfrac{1}{6-7x^2}$, $x = 0$.

Найти производные сложных функций:

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$

4.$f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$

5.$f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Краткие теоретические сведения

Определение: Производной функции f(x) ($f'(x_0)$) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций.

f(x)	f'(x)
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

1)$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2)$(cf(x))' = c \cdot f'(x)$, где $c - const$

3)$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4)$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u'$, $(cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)'$$
$$= \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}.$$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования$(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5.$f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$$u = 1 - e^{2x}$$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' = -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x)$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическая работа 4
Приложения производной

Цель работы: Научиться применять производную функции при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать социально-экономические и политические проблемы и процессы.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $а)[-1;1]$;$б)$ $[0;3]$.
2. Имеется проволока длиной a метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.
3. Исследуйте функции по общей схеме и постройте ее график.
   1) $f(x) = 2x^3 – 3x^2 – 12x + 1$;
   2) $f(x) = 2x^3 – 15x^2 + 24x +3$;
   3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 – 12x – 1$;
   4) $f(x) = – x^3 – 3x^2 + 9x – 2$;
   5) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2$.

Краткие теоретические сведения:

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки.
3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
4) Записать интервалы, на которых функция возрастает $f'(x) > 0$ и убывает $f'(x) < 0$.
5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1) Найти вторую производную.
2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
4) Если $f''(x) > 0$, то график выпуклый вниз. Если $f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх.
5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.

3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.
5. Запишите функцию.
6. Используя общую схему, исследуйте функцию.
7. По результатам исследования постройте график функци

Ход работы

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на промежутке :$a)[-2; -0{,}5]$;$б)$ $[1; 3]$.

Решение. Находим критические точки функции.

$f^{/}(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 4)^{|} = -x^2 - 6x = -6x(x + 1);$

$f^{/}(x) = 0; -6x(x + 1) = 0;\ x = 0\ и\ x = -1.$ получили две критические точки: $x = 0\ и\ x = -1.$

a) *В промежутке* $[-2; -0{,}5]$ лежит одна из критических точек:*x*= -1.

Так как $f(-2) = 8, f(-1) = 3. f(-0{,}5) = 3{,}5,$ то наименьшее значение функция $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ достигает в точке $x = -1$ и равно 3, а наибольшее - в точке $x = -2$ и равно 8. Кратко это можно записать так: $\min\limits_{[-2;-0{,}5]} f(x) = f(-1) = 3.\ \max\limits_{[-2;-0{,}5]} f(x) = f(-2) = 8.$

б) Отрезку $[1; 3]$ не принадлежит ни одна из критических точек, поэтому найдём значения функции на концах отрезка: $f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = -1. [1; 3]; f(3) = -2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = -77.$. Кратко это можно записать так: $\min\limits_{[\ |1;3]} f(x) = f(3) = -7;.\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(1) = -1.$

2 Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найдите эти слагаемые.

Решение. Пусть заданное число представлено в виде суммы двух слагаемых $x\ и\ y$,т.е.86= $x + y$. Выразим второе слагаемое через *x:* *y=86-x.*Запишем произведение этих чисел в виде функции от *x*:$f(x) = x \cdot (86 - x)$ Найдём значение x, при котором функция $f\ (x) = x \cdot (86 - x)$ достигает максимума..Найдём производную$f^{/}(x)$ и приравняем её нулю. $f^{/}(x)$ =$(x \cdot (86 - x))^{/} = (86x - x^2)^{/} = 86 - 2x = 2(43 - x),$

$$2(43 - x) = 0, x = 43.$$

Определим второе слагаемое: $y = 86 - x = 86 - 43 = 43.$

Ответ: $x = 43\ ; y = 43.$

2. Исследуем функцию $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ и построим её график.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это не вызывает затруднения) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции .
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.
9. Построить график функции

1). Поскольку знаменатель положителен при всех x, область определения функции -- вся ось Ox.

2). Функция $f(x)$ -- нечётная, поскольку при смене знака x числитель меняет знак, а знаменатель остаётся без изменения, откуда $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

Периодической функция не является.

3). Поскольку область определения этой элементарной функции -- вся вещественная ось, вертикальных асимптот график не имеет.

4). Найдём наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ в виде $y = kx + b$. Имеем:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{x^3}{x^2+1} - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Таким образом, асимптотой как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$ служит прямая $y = 1x + 0 = x$.

5). Найдём точки пересечения с осями координат. Имеем: $f(0) = 0$, причём $x = 0$ -- единственное решение уравнения $f(x) = 0$. Значит, график $y = f(x)$ пересекает сразу и ось Ox, и ось Oy в начале координат.

Очевидно, что $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$.

6). Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

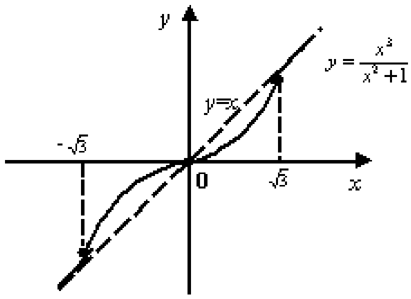
Очевидно, что $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$; единственная точка, в которой $f'(x) = 0$ -- это $x = 0$. Значит, функция $f(x)$ возрастает на всей оси Ox, а в стационарной точке $x = 0$ имеет горизонтальную касательную.

7). Найдём вторую производную:

$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Знаменатель этой дроби положителен при всех x. Числитель имеет корни $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$, при этом $f''(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$ -- на этих интервалах функция выпукла. На интервалах $(-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ выполняется обратное неравенство $f''(x) < 0$, здесь функция вогнута. Все три точки, в которых $f''(x) = 0$, то есть точки $-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$, являются точками перегиба.

8). Теперь мы можем построить график с учётом всех предыдущих пунктов исследования функции. График имеет такой вид:



Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Интегральное исчисление

Практическая работа 5
Нахождение неопределенных интегралов различными методами

Цель работы: Повторить определение **не**определённого интеграла, его свойства , методы нахождения определённого интеграла.

Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- распознавать и анализировать профессиональную задачу и/или проблему.

Материальное обеспечение:
Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.
Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Задание:
Вычислите неопределенный интеграл.

1) $\int(5+7x)^3dx$; 6) $\int\sqrt{5+7x}dx$; 11) $\int\sin(2x-3)dx$;

2) $\int(2x-3)^4dx$; 7) $\int\sqrt{2x-3}dx$; 12) $\int\cos(1+3x)dx$;

3) $\int(1+3x)^2dx$; 8) $\int\sqrt{1+3x}dx$; 13) $\int\frac{dx}{5+7x}$;

4) $\int(5x+3)^5dx$; 9) $\int\sqrt{5x+3}dx$; 14) $\int\frac{dx}{\sin^2(5x+3)}$;

5) $\int(4x-1)^6dx$; 10) $\int\sqrt{4x-1}dx$; 15) $\int\frac{dx}{\cos^2(4x-1)}$.

Порядок выполнения работы:
Внимательно изучите подынтегральную функцию и ,используя конспекты лекций, определите способ интегрирования.

Ход работы:

1. Вычислить $\int(5\sqrt{x}-4x)\,dx$.

В данном случае – приводим к табличному виду

$\left(\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\right)$:

$$\int(5\sqrt{x}-4x)dx=5\int x^{1/2}dx-4\int xdx=$$

$$=5\frac{x^{0,5+1}}{0,5+1}-4\frac{x^2}{2}+C=\frac{10}{3}x^{1,5}-2x^2+C.$$

2. Вычислить $\int\frac{\sin^3x+1}{\sin^2x}dx$.

Здесь для приведения к табличному виду

$$\left(\int\sin xdx=-\cos x+C;\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-\operatorname{ctg}x+C\right)$$

преобразуем подынтегральное выражение к сумме двух слагаемых:

$$\int \frac{\sin^3 x+1}{\sin^2 x}dx=\int\left(\sin x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=-\cos x-\operatorname{ctg} x+C\cdot$$

Во многих случаях для приведения к табличному виду можно использовать замену переменной (подстановку).

3. Вычислить интеграл $\int 4^{2x-1}dx$.

Здесь для применения табличной формулы $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ необходимо преобразовать показатель степени $2x-1$. Введем подстановку: $u=2x-1$, откуда $du=2dx$ и $dx=\dfrac{1}{2}du$. Тогда:

$$\int 4^{2x-1}dx=\left\rangle\begin{matrix}u=2x-1\\ du=2dx\\ dx=0{,}5du\end{matrix}\right\langle=\int 4^u\cdot 0{,}5du=0{,}5\int 4^u du=0{,}5\frac{4^u}{\ln 4}=$$

$$=0{,}5\frac{4^{2x-1}}{\ln 4}+C\cdot$$

4. Вычислить интеграл $\int \sin 5xdx$.

$$\int \sin 5xdx=\left\rangle\begin{matrix}u=5x\\ du=5dx\\ dx=\dfrac{1}{5}du\end{matrix}\right\langle=\frac{1}{5}\int \sin udu=-\frac{1}{5}\cos u=-\frac{1}{5}\cos 5x+C$$

5. Вычислить интеграл $\int \dfrac{xdx}{x^2-8}$.

$$\int \frac{xdx}{x^2-8}=\left\rangle\begin{matrix}u=x^2-8\\ du=2xdx\\ xdx=\dfrac{1}{2}du\end{matrix}\right\langle=\int\frac{\frac{1}{2}du}{u}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln u=\frac{1}{2}\ln(x^2-8)+C\cdot$$

(Интеграл $\int\dfrac{du}{u}=\ln u+C$ – табличный.)

6. Вычислить интеграл $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}=\left\rangle\begin{matrix}u=5-x^2\\ du=-2xdx\\ xdx=-\dfrac{1}{2}du\end{matrix}\right\langle=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{3}\int u^{-1/2}du=$$

$$=-u^{1/2}=\sqrt{5-x^2}+C.$$

7. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{(8-3x)^2}$.

$$\int \frac{dx}{(8-3x)^2}=\left\rangle\begin{matrix}u=8-3x\\ du=-3dx\\ dx=-\dfrac{1}{3}du\end{matrix}\right\langle=-\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{3}\int u^{-2}du=$$

$$=\frac{1}{3u}=\frac{1}{3(8-3x)}+C\cdot$$

8. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left\rangle \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{matrix} \right\langle = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

9. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{8x^2 + 3}$.

Приведем интеграл к табличной формуле

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 3} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{8}} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{8}}} + C = 1{,}63\operatorname{arctg}1{,}63x + C.$$

Форма предоставления результата - выполненные упражнения.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическая работа 6
Вычисление определенных интегралов различными методами

Цель работы:
формирование умений вычислять определенные интегралы.

Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями).
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:
Найти определенный интеграл.

1. $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx$;
2. $\int_1^e x\ln xdx$;
3. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$;
4. $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx$;
5. $\int_1^e x\ln xdx$;
6. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Порядок выполнения работы:
1. Найти первообразную подынтегральной функции.
2. Воспользоваться формулой Ньютона- Лейбница.
3. В случае непосредственного интегрирования найти приращение первообразной.
4. В случае введения новой переменной величины найти значения верхнего и нижнего пределов интегрирования и после этого найти интеграл.

Ход работы:

1. Вычислить интеграл $\int_2^4 (x^2+3x)dx$.

Первообразная: $\int (x^2+3x)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2$.

Отметим, что произвольную константу *C* можно здесь не записывать, так как она в следующей операции уничтожается.

По формуле Ньютона–Лейбница:

$$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 = \left(\frac{4^3}{3}+\frac{3}{2}4^2\right)-\left(\frac{2^3}{3}+\frac{3}{2}2^2\right)=\frac{110}{3}\approx 36{,}67.$$

Вычисление значения интеграла обычно принято записывать цепочкой, без выделения первообразной и формулы Ньютона–Лейбница.

2 Вычислить интеграл $\int_0^1 (x+e^x)dx$.

$$\int_0^1 (x+e^x)dx = \left(\frac{x^2}{2}+e^x\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2}+e^1\right)-(0+e^0) =$$

$= 0{,}5+e-1 = 0{,}5+e \approx -0{,}5+2{,}718 = 2{,}218$.

3. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\; dt.$$

Для этого сделаем замену $x=\varphi(t)=\sin t$, откуда $dx=\varphi'(t)dt=\cos t\; dt$. Кроме того, при $t=0$ имеем $x=\sin 0=0$, а при $t=\frac{\pi}{2}$ имеем $x=\sin\frac{\pi}{2}=1$. Получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\; dt = \left|\begin{array}{l} \sin t = x \\ \cos t\; dt = dx \\ t=0 \Rightarrow x=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=1 \end{array}\right| = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла.

Теорема . *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют на отрезке* $[a;b]$ *непрерывные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$. *Тогда имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\; dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(x)f'(x)\; dx.$$

Замечание. Заметим, что эту формулу можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)g'(x)\; dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\; dx,$$

где выражение

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

называется *внеинтегральным членом*. Введя обозначения $u=f(x)$ и $v=g(x)$, мы можем переписать формулу интегрирования по частям в более коротком виде:

$$\int_a^b u\; dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\; du.$$

1. Вычислим интеграл $\int_0^1 x\; e^{2x}dx.$

Выгодно взять $u=x$ и $dv=e^{2x}dx$, так что получаем:

$$\int_0^1 x\ e^{2x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{2x}dx \\ du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

При этом возникший по дороге неинтегральный член $x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1$ мы вычислили так:

$$x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2 \cdot 1} - 0 \cdot \frac{1}{2}e^{2 \cdot 0} = \frac{e^2}{2}.$$

Особенно ясно проявляется указанное в замечании преимущество в том случае, если формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз

Форма предоставления результата - выполненные упражнения.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическая работа 7

Приложения определённых интегралов

Цель работы: научиться вычислять площади фигур и объемы тел, используя определенные интегралы

Выполнив работу, Вы будете уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- находить и анализировать информацию в области инноваций в профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$a)\quad y = -x^2 + 4,\ y = 0$

$b)\quad y = x^2,\ y = x^3$

$c)\quad y = e^x,\ y = e^{-x},\ y = 4$

1. **2.**Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры

$y = x^2,\ y = 1,\ вокруг\, оси\, OY$

Порядок выполнения работы:

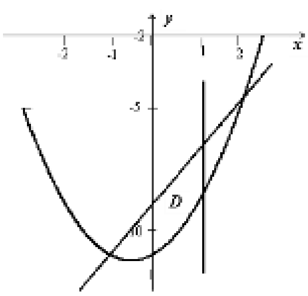
1. Построить графики функций
2. Найти область, ограниченную этими графиками
3. Составит определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

Ход работы:

Пример1: Найти площадь области **D**, ограниченной кривыми $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2 + \mathbf{x} + 11$, $\mathbf{y} = 2\,\mathbf{x} - 9$, при условии,

x<=1

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение $x^2 + x + 11 = 2x - 9$ имеет два корня: x = -1 и x = 2. Подходящий корень - x = -1. Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой x = 1, крайняя левая точка - x = -1 , поэтому



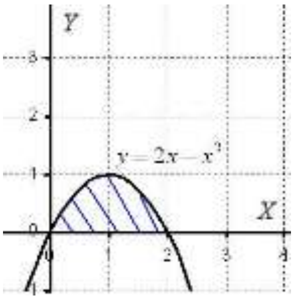
$$S(D) = \int_{-1}^{1}\left[(2x-9)-(x^2+x-11)\right]dx = \int_{-1}^{1}(2-x^2+x)dx = \left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{3}.$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части.

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, решение начинается с чертежа плоской фигуры**.** То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX. В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}\,ед^3. \approx 3{,}35\,ед^3.$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Матрицы

Практическая работа 8
Действия с матрицами

Цель работы: Научиться выполнять операции над матрицами, находить обратную матрицу, вычислять ранг матрицы, приводить матрицу к ступенчатому виду.

Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание: 1. Вычислить матрицу *X.*
Задание: 2. Для данной матрицы А найти обратную.
Задание: 3. Найти ранг матрицы А

Порядок выполнения работы:

1) Повторение правил и формул
2) Объяснение преподавателя
3) Выполнение индивидуальных заданий
4) Оценка выполненных заданий
5) Подведение итогов.

Ход работы:

1) Повторение правил и формул

1. Что называется матрицей, элементами матрицы, размером матрицы? Какие матрицы называются равными?
2. По какому правилу складываются матрицы?
3. Можно ли сложить матрицы размерами 2х3 и3х1?
4. Можно ли из одной матрицы вычесть другую? Как это сделать? Каким условиям должны удовлетворять при этом матрицы? Какие размеры имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
5. Как умножить матрицу на число?
6. Как перемножаются матрицы? Какие матрицы можно перемножать? Какие размеры имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
7. Можно ли умножить матрицу с размерами 2х3 на матрицу с такими же размерами?
8. Какими свойствами обладает операция умножения матриц?
9. Что такое транспонирование матриц?

1) Объяснение преподавателя

<u>Задание 1</u>: Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Выполним задание по действиям:

1) $2xC = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

2) 2CB= $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 2(-1) & 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-6) \cdot 0 \\ 6 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу, транспонированную к А:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1) $3A^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2) $2CB + 3A^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 6 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$

Задание 2: Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите матрицу, обратную данной A.

Решение:

Обратную матрицу найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

1. Вычислим определитель матрицы А: $|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

2. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы А

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$; $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

3. Найдем матрицу, обратную данной $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Правильность вычислений можно проверить, используя равенство $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 3: Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Решение:

Чтобы найти ранг матрицы А надо привести ее к ступенчатому виду и подсчитать у последней число ненулевых строк. Это число и будет рангом матрицы А.

Выполним последовательно следующие элементарные преобразования, которые приводят матрицу А к ступенчатому виду: 1) ко 2-ой строке прибавим соответствующие элементы 1-ой строки, предварительно умноженной на -2; к 3-ей строке прибавим соответствующие элементы 1-ой строки, предварительно умноженной на -5; 2) к 3-ей строке прибавим соответствующие элементы 2-ой строки, предварительно умноженной на -2. Получаем $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ ранг матрицы равен 2

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Системы линейных уравнений

Практическая работа 9
Вычисление определителей второго и третьего порядка

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядков.
Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать социально-экономические и политические проблемы и процессы;
- распознавать и анализировать профессиональную задачу и/или проблему.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.
Задание:
Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

Краткие теоретические сведения:
Определителем квадратной матрицы второго порядка(определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка(определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Порядок выполнения работы:
1 Запишите определитель, определите какого он порядка.
2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Ход работы:

Вычислить определители:

2) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

3) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

-$6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

4) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$
$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическая работа 10
Решение систем уравнений методом Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать социально-экономические и политические проблемы и процессы;
- работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+3y-5z=-2 \\ x+y+2z=3 \\ 2x-y+7z=27 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите систему уравнений.
2.Запишите и вычислите определитель системы.
3.Вычислите определители каждой неизвестной.
4.Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:
Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1 Элементы теории комплексных чисел

Практическая работа 11
Действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах

Цель работы: Проверить на практике знание понятия комплексного числа, Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме. Научиться переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую и обратно.

Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- работать в коллективе и команде;
- находить и анализировать информацию в области инноваций в профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:
1. Даны комплексные числа : z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6).
Записать эти числа в алгебраической форме.
2. Вычислить:
   1) $z_1 + z_2$;
   2) $z_2 - z_3$;
   3) z_1 / z_3;
   4) $z_2 * z_3$;
   5) z_1^5.
3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

4. Даны комплексные числа : z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6). Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.
5. Вычислить:
   a. $\frac{z_1}{z_3}$;
   b. $z_2 * z_3$;
   c. z_1^5.
6. Извлечь квадратный корень из числа z_2.
7. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

a) $(3\cdot(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}))^2$ b) $\frac{24(\cos 75^0+i\sin 75^0)}{3(\cos 30^0+i\sin 30^0)}$

Краткие теоретические сведения:
Комплексные числа записываются в виде: $a+bi$. Здесь a и b – *действительные числа*, а i – *мнимая единица, т.е.* $i^2=-1$. Число a называется *абсциссой*, а b – *ординатой* комплексного числа $a+bi$. Два комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряжёнными* комплексными числами.

Основные договорённости:
1. Действительное число a может быть также записано в форме комплексного числа: $a+0i$ или $a-0i$. Например, записи $5+0i$ и $5-0i$ означают одно и то же число 5.

2. Комплексное число $0+bi$ называется *чисто мнимым числом*. Запись bi означает то же самое, что и $0+bi$.

3. Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ считаются равными, если $a=c$ и $b=d$. В противном случае комплексные числа не равны.

Сложение. Суммой комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)i$. Таким образом, *при сложении комплексных чисел отдельно складываются их абсциссы и ординаты.*
Это определение соответствует правилам действий с обычными многочленами.

Вычитание. Разностью двух комплексных чисел $a+bi$ (уменьшаемое) и $c+di$ (вычитаемое) называется комплексное число $(a-c)+(b-d)i$.
Таким образом, *при вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их абсциссы и ординаты.*

Умножение. Произведением комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число: $(ac-bd)+(ad+bc)i$. Это определение вытекает из двух требований:

1) числа $a+bi$ и $c+di$ должны перемножаться, как алгебраические двучлены,
2) число i обладает основным свойством: $i^2=-1$.

Деление. Разделить комплексное число $a+bi$ (делимое) на другое $c+di$ (делитель) - значит найти третье число $e+fi$ (чатное), которое будучи умноженным на делитель $c+di$, даёт в результате делимое $a+bi$.
Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.
Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:
Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z=a+bi$.
1) Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле $r=\sqrt{a^2+b^2}$.
2) Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi=\dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}$.
Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:
Определить , в какой четверти находится точка (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z=a+bi$
Решив уравнение $tg\varphi=\frac{b}{a}$, получаем, что
$\arg z=\varphi=arctg\frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,
$\arg z=\varphi=arctg\frac{b}{a}$ для внутренних точек 2 четверти,
$\arg z=\varphi=arctg\frac{b}{a}-\pi$ для внутренних точек 3 четверти.
Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z=r(cos\varphi+i\,sin\varphi)$ или $z=re^{i\varphi}$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z=a+bi$
2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$
$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$$
$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

3. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм.
4. Выполните действия в тригонометрической форме, используя правила:
$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+isin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

5. Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа z=r·(cos φ+i sinφ) используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Ход работы:

1.Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1{,}5;1{,}5)$, $z_3=(4;-3)$.

Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$z_1 = 7 + i$; $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$; $z_3 = 4 - 3i$

2.Выполнить действия в алгебраической форме:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_2 - z_3$;

Решение:

1) $z_1 + z_2 = (7-1{,}5)+(1+1{,}5)i = 5{,}5+2{,}5i$;)
2) $z_1 - z_3 = (7-4)+(1+3)i = 3+4i$;

3. $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Следовательно, *произведение двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному положительному числу.*

4. Найти $(8 + i) : (2 - 3i)$.

Р е ш е н и е . Перепишем это отношение в виде дроби: $\frac{8+i}{2-3i}$.
Умножив её числитель и знаменатель на $2 + 3i$ и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1 + 2i.$$

5.Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$$

Решение:

$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$ =-2,1-2,8i

1) $\frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2-i^2} = \frac{-10i}{10} = -i$;

2) $\frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$

4) $-i + (-1{,}1 - 1{,}7i) - 1 = -i - 1{,}1 - 1{,}7i - 1 = -2{,}1 - 2{,}8i$

Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1{,}5;1{,}5)$, $z_3=(4;-3)$.

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Число находится в первой четверти, значит φ= $arctg\,\frac{y}{x} = arctg\,\frac{1}{7} = arctg\,0{,}1429$.

Находим значение арктангенса по таблице Брадиса φ=8º8′.

$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + i\sin 8°8')$

2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$

$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}1$

Число находится во второй четверти, значит φ = argz= $arctg\,\frac{y}{x} + \pi$ φ= $arctg(\frac{1{,}5}{-1{,}5}) + \pi =$

$-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$;

3) $z_3 = 4 - 3i$

$|z_3| = \sqrt{16+9} = 5$

Число находится в четвертой четверти, значит φ= argz= $arctg\,\frac{y}{x}$

$\varphi = arctg(\frac{-3}{4}) = -arctg\,0{,}75 = -36°52'$

$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52') + i\sin(-36°52'))$

2.Извлечь квадратный корень из числа z_2.

Решение:

$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

Воспользуемся формулой:

$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$

В нашем примере n=2.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{2}) \approx \sqrt{2{,}1}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1 Теория множеств

Практическая работа 12
Действия с множествами

Цель работы: Рассмотреть различные множества, определять мощность множеств. Научиться выполнять операции над множествами.

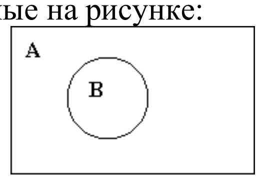
Выполнив работу, Вы будете уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- выделять наиболее значимое в изучаемом материале и структурировать получаемую информацию.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1)Пусть A и B – множества, изображенные на рисунке:



укажите объединение, пересечение и разность этих множеств.

2)Заданы множества A = {3, 7, 8, 9, 2}, B = {1, 5, 6, 7, 8, 9} и C = {1, 7, 18, 19, 12}. Какое из множеств имеет наибольшую мощность.

3)Заданы множества A = {-3, 2, 5, 9, 12} и B = {1, 5, 6, 7, 8, 9}. Задайте объединение, пересечение и разность множеств A и B.

4)На факультете филологии и журналистики учатся студенты, получающие стипендию, и студенты, не получающие стипендию. Пусть A – множество всех студентов факультета; B – множество студентов факультета, получающих стипендию. Укажите, что собой представляет объединение, пересечение и разность множеств A и B.

5)Пусть A – множество всех студентов-филологов университета; B – множество студентов первокурсников. Укажите, какие студенты содержатся во множестве A\B.

Краткие теоретические сведения:

Множество - это совокупность, набор элементов, объединенных общими свойствами. Множества обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C…, а элементы множества строчными латинскими буквами a, b, c… .

Мощностью конечного множества называется количество его элементов. Мощность множества A обозначается m (A).

Объединением множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих по крайней мере одному из данных множеств (т. е. либо A, либо B, либо одновременно и A и B). Обозначают $A \bigcup B$ и читают "объединение A и B".

Пересечением множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих одновременно и A и B. Обозначают $A \bigcap B$ и читают "пересечение A и B".

Разностью множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B. Обозначают A\B и читают "разность A и B".

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать лекцию
2. Разобрать примеры
3. Выполнить задания

Ход работы:

Пример 1. Определите мощность какого из множеств A = {1, 3, 5, 7, 9} или B = {2, 4, 6, 8} больше.

Решение. Понятие мощности конечных множеств позволяет сравнивать их по количеству элементов. Так, если А = {1, 3, 5, 7, 9}, а В = {2, 4, 6, 8}, то m (A) = 5, а m (B) = 4 и потому m (A) > m (B).

Пример 2. Пусть А есть отрезок [1, 3], В - отрезок [2, 4]; тогда объединением $A \bigcup B$ будет отрезок [1, 4], пересечением $A \bigcap B$ - отрезок [2, 3], разностью А\В - полуинтервал [1, 2), В\А - полуинтервал (3, 4].

Пример 3. Пусть А есть множество прямоугольников, В - множество всех ромбов на плоскости. Тогда $A \bigcap B$ есть множество всех квадратов, А\В - множество прямоугольников с неравными сторонами, В\А - множество всех ромбов с неравными углами.

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2 Комбинаторика

Практическая работа 13
Решение комбинаторных задач

Цель работы: научится решать задачи с использованием перестановок, размещений и сочетаний.

Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями).
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.
Задание:
Решите следующие задачи:
1. Имеется множество цифр {3,5,7}. Сколькими способами можно расставить цифры, чтобы получить различные числа? Запиши полученные числа.
2.В газете Аргументы и факты 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты разместить четыре фотографии. Сколькими способами это можно сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?
3.Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке в магазине, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?
4.Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся книг. Сколькими способами можно это сделать?
5.Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?
6.10 человек решили поменяться фотографиями. Сколько нужно фотографий?
7.На прямой 5 точек: А,В,С,Д,Е. Сколько получится отрезков?
8.Из вершины прямого угла проведены внутри 5 лучей. Сколько острых углов при этом образовались?
9.Задано число 12345. Сколько чисел начинается с 12?
10.Монета бросается 2 раза. Какова вероятность:
А) выпадет герб хотя бы один раз?
Б) двукратное выпадение герба.
11.Набирая телефонный номер, абонент забыл одну цифру, и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.
12.В партии из 10 дискет 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу дискет 4 стандартные.
13.Даны 4 карточки с буквами а, б, й, т. Найти вероятность того, что после перестановки карточек получится слово байт.
14.Сколько можно составить пятизначных чисел из цифр: 1,4,5,6,9.
15.В корзине из 12 яблок 5 порченных. Найти вероятность того, что среди 3 взятых наудачу яблок все будут неиспорченные.
16.В ящике с инструментами 4 отвертки и 7 ключей. Найти вероятность того, что среди 2 взятых наудачу инструментов окажется 1 ключ.

Краткие теоретические сведения

Определение: Размещения называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

Определение: Сочетания называют комбинации, составленные из n-различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(nn-m)!}; \qquad (3)$$

Необходимо отметить, что: $C_n^0 = C_n^{n-n} = 1 = C_n^n$; $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Порядок выполнения работы:

1.Прочитать лекцию
2.Разобрать примеры
3.Выполнить задания

Ход работы

Пример №1: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз.

Решение.

Подсчитаем вручную: (123) (132) (213) (231) (312) (321)

Или с помощью формулы (1): $P = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6;$

Если в последовательности $a_1, a_2, ..., a_n$ не только менять местами элементы, но и заменять последовательно элементы на другие $b_1, b_2, ..., b_n$, то полученные новые комбинации можно подсчитать с помощью формулы размещения.

Пример №2: Сколькими способами можно выбрать из группы, насчитывающего 40 студентов, старосту, зам. старосты, физорга.

Решение.

Любой такой выбор является размещением без повторений из 40 элементов по 3. Значит, число способов выбора равно $A_{40}^3 = 40 \cdot (40-1) \cdot (40-2) = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$.

Пример №3: Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение.

Используя формулу (2), получим: $A_6^2 = 6 \cdot (6-1) = 6 \cdot 5 = 30$ сигналов.

Если при замене элемента a_i на b_i порядок расположения b_i не важен, то количество полученных комбинаций подсчитывается по формуле сочетания.

Пример №4:В аудитории имеется 10 лампочек. Сколько существует разных способов ее освещения, при которых горит ровно 2 лампочки?

Решение.

Способов освещения столько, сколько существует сочетаний из 10 лампочек по 2, то есть $C_{10}^2 = \frac{10!}{(2! \cdot 8!)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2! \cdot 8!} = \frac{90}{2 \cdot 1} = 45;$

Пример №5: Из множества $\{a, b, c, d, e\}$ можно составить 10 сочетаний по 3 элемента в каждом:

$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{a,c,d\}, \{a,c,e\}, \{a,d,e\},$

$\{b,c,d\}, \{b,c,e\}, \{b,d,e\}, \{c,d,e\}$

Из каждого такого сочетания путем различного упорядочивания элементов получается 6 размещений из 5 элементов по 3. Например, из сочетания $\{a,b,c\}$ получаем следующие размещения $(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)$. Отсюда видно, что число размещений без повторений из 5 элементов по 3 равно 6*10=60, что согласуется с формулой $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Различные сочетания порождают различные размещения и каждое размещение может быть получено указанным способом. Иными словами $A_n^m = P_m \cdot C_n^m$.

Форма представления результата:
Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 Элементы теории вероятностей

Практическая работа 14
Вычисление вероятности событий

Цель работы: Проверить на практике знание понятия классического определения вероятности. Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Решить задачи:

Задача 1. В ящике в случайном порядке разложено двадцать деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. *Найти* вероятность того, что, по крайней мере, одна из этих деталей окажется стандартной.

Задача 2. Станция метрополитена оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для первого эскалатора равна 0,9, для второго – 0,95, для третьего – 0,85. *Найти* вероятность того, что в течение дня произойдет поломка не более одного эскалатора.

Задача 3. На складе имеются 8 изделий, 3 из них изготовлены заводом *N*. *Найти* вероятность того, что среди 4 наудачу взятых изделий окажется не более половины, изготовленных заводом *N*.

Задача 4. У распространителя имеется 20 билетов книжной лотереи, среди которых 7 выигрышных. Куплено 3 билета. *Найти* вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный.

Задача 5. Устройство секретного замка включает в себя 4 ячейки. В первой ячейке осуществляется набор одной из четырех букв ***A, B, C, D,*** в трех осталь-ных – одной из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться). *Чему* равна вероятность того, что замок будет открыт с первой попытки?

Задача 6. Имеются две урны. В первой находятся: один белый шар, 3 черных и 4 красных; во второй – 3 белых, 2 черных и 3 красных. Из каждой урны наугад извлекают по одному шару, после чего сравнивают их цвета. *Найти* вероятность того, что цвета извлеченных шаров совпадают.

Задача 7. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. *Найти* вероятность того, что два наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Задача 8. Два охотника по одному разу стреляют в волка. Для первого охотника вероятность попадания в волка 0,7, для второго – 0,8. *Определить* вероятность того, что в волка попадет хотя бы один охотник.

Задача 9. Ведется стрельба по самолету, уязвимым агрегатами которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того чтобы вывести из строя са-молет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. При дан-ных условиях стрельбы вероятность поражения первого двигателя равна P_1, второго двигателя - P_2, кабины пилота - P_3. Агрегаты самолета поражаются не-зависимо друг от друга. *Найти* вероятность того, что самолет будет поражен.

Задача 10. По мишени производятся три выстрела. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно $P_1 = 0{,}4$; $P_2 = 0{,}5$; $P_3 = 0{,}7$. *Какова* вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени окажется точно одна пробоина.

Краткие теоретические сведения:

В данном типовом расчете предлагается 28 задач по каждой из 6 тем, пере-численных ниже. Перед задачами даны методические указания и там, где необходимо – примеры. Темы заданий

1. Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схемы.
2. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается Р(А) и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \le P(A) \le 1$

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

При решении задач иногда удобно найти вероятность противоположного события $\overline{A}$, *а затем найти вероятность события А по формуле* $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. *Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

События А и В называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. *Для независимых событий появление одного не меняет вероятности появления другого:* $P(A/B) = P(A)$ *и* $P(B/A) = P(B)$ (*см. с. 10-17 учебного пособия*).

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

1) Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие А-«номер набран верно».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!}$=$\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}$=720. Итак, n=720
3. Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

1) Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие А-«оба шара окажутся чёрными».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!}$=$\frac{20!}{2!\cdot 18!}$=$\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!}$=190.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}$=$\frac{8!}{2!\cdot 6!}$=$\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!}$=28
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

3)На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК ?

Решение.

1. Событие А-«получится слово ЗАМОК».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов(букв): n=$P_5 = 5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$$

Форма предоставления результата - выполненные упражнения.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическая работа 15
Алгебра событий

Цель работы: формирование умений решения задач теории вероятностей.

Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями).
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания
1. Из 10 изделий, среди которых 3 бракованные, извлекают 2. Найти вероятность того, что среди них одно бракованное.
2. В ящике находятся 2 белых, 3 красных и 8 синих одинаковых по размеру шаров. Какова вероятность того, что шар случайным образом извлеченный из урны будет не белым?
3. В круге с радиусом 10 см лежит квадрат со стороной 2 см. Определить вероятность того, что точка А попадет в квадрат.
4. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течении $\frac{1}{12}$ часа, после уходит. Найти вероятность того, что: а) встреча состоится; б) встреча не состоится.
5. Адвокат ведет в суде дела десяти клиентов. Вероятность выигрыша дела для каждого клиента одна и та же и равна 12/100. Какова вероятность того, что из десяти дел будут выиграны не более трех?

Порядок выполнения работы
1 Прочитав условие предложенной задачи, по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.
2 Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

Ход работы

***Пример*.** В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие А).

Решение. События "машина работает" и "машина не работает" (в данный момент) — противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

p + q = 1.

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна

q = l — p = l — 0,9 = 0,1.

Искомая вероятность

Р (А) = 1 — q4 = 1 — 0,14 = 0,9999.

Так как полученная вероятность весьма близка к единице, то на основании следствия из принципа практической невозможности маловероятных событий мы вправе заключить, что в данный момент работает хотя бы одна из машин.

Форма предоставления результата
Выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.2 Элементы математической статистики

Практическая работа 16
Составление статистического распределения выборки. Построение полигона и гистограммы

Цель работы: Рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.

Выполнив работу, Вы будете уметь:
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:
1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

1. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2 = числу букв в Вашей фамилии; p_3 = числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

1Прочитав условие предложенной задачи,по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик.выборки.

Ход работы:

1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

.

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25$.

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$w_1 = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$; $w_2 = \dfrac{10}{25} = 0{,}40$; $w_3 = \dfrac{7}{25} = 0{,}28$; $w_4 = \dfrac{5}{25} = 0{,}20$.

Следовательно,

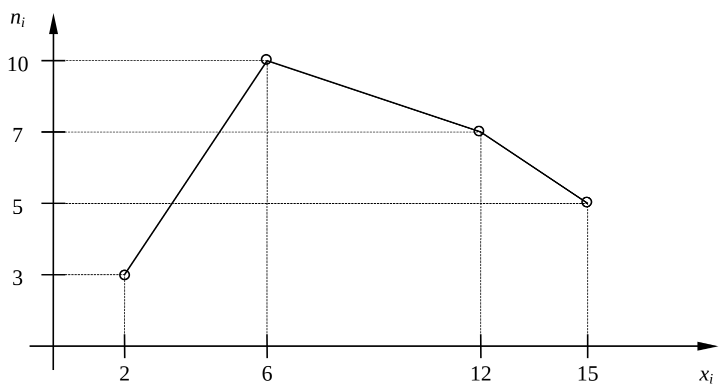
x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

.

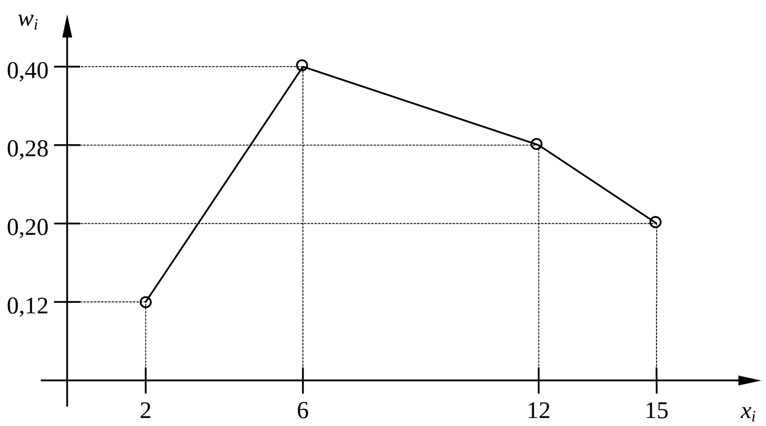
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

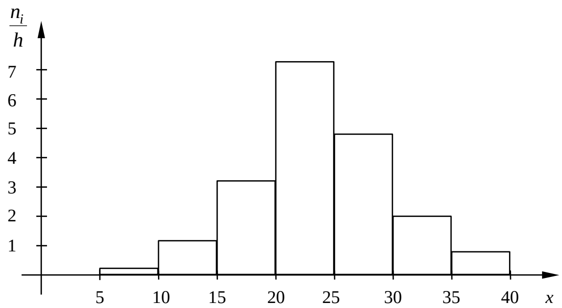
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$n = 4+6+16+36+24+10+4 = 100$.

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$N_Г = 8+9+10+3 = 30$.

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_Г = \frac{8\cdot 2+9\cdot 4+10\cdot 5+3\cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_Г = \overline{X^2_г} - \left(\overline{X}_Г\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_{Г}^2} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_Г = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_Г = \sqrt{D_Г} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$Mo = 10$.

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$Me = 4{,}5$.

Размах вариации R: в примере $x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$, поэтому

$R = 6 - 2 = 4$.

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500$.

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1{,}82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11{,}45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85$.

6. . Определите мощность какого из множеств A = {1, 3, 5, 7, 9} или B = {2, 4, 6, 8} больше.

Решение. Понятие мощности конечных множеств позволяет сравнивать их по количеству элементов. Так, если A = {1, 3, 5, 7, 9}, а B = {2, 4, 6, 8}, то m (A) = 5, а m (B) = 4 и потому m (A) > m (B).

7. Пусть A есть отрезок [1, 3], B - отрезок [2, 4]; тогда объединением $A \bigcup B$ будет отрезок [1, 4], пересечением $A \bigcap B$ - отрезок [2, 3], разностью A\B - полуинтервал [1, 2), B\A - полуинтервал (3, 4].

8. Пусть A есть множество прямоугольников, B - множество всех ромбов на плоскости. Тогда $A \bigcap B$ есть множество всех квадратов, A\B - множество прямоугольников с неравными сторонами, B\A - множество всех ромбов с неравными углами.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.