

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет  
им. Г.И. Носова»  
Многопрофильный колледж



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ  
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

**по учебной дисциплине**

**ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

**для студентов специальности**

**23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных,  
строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям)**

Магнитогорск, 2020

**ОДОБРЕНО:**

Предметной комиссией  
Математических и естественнонаучных дисциплин  
Председатель Е.С. Корытникова  
Протокол № 7 от 17.02.20120 г.

Методической комиссией  
Протокол №3 от 26.02.2020 г.

**Составитель:**

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК Антропова Наталья Владимировна

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на формирование общих и профессиональных компетенций по программе подготовки специалистов среднего звена по специальности 23.02.04 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей и овладению профессиональными компетенциями.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА .....	4
2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.....	5
3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ .....	6
Практическое занятие № 1 .....	6
Практическое занятие № 2 .....	9
Практическое занятие № 3 .....	10
Практическое занятие № 4 .....	14
Практическое занятие № 5 .....	17
Практическое занятие № 6 .....	24
Практическое занятие № 7 .....	28
Практическое занятие № 8 .....	31
4 ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b> 37

## 1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике, в том числе прикладного характера), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен *уметь*:

- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решать системы линейных уравнений различными методами.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 2.2. Контролировать качество выполнения работ по техническому обслуживанию и ремонту подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования.

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

## 2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Разделы/темы	Темы практических занятий	Кол-во часов	Требования ФГОС СПО (уметь)
<b>РАЗДЕЛ 1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА</b>		<b>12</b>	
Тема 1.1 Дифференциальное исчисление	Практическая работа №1. Дифференцирование сложных функций	2	У <sub>1</sub> У01.1
	Практическая работа №2. Применение производной к исследованию функций	2	У <sub>1</sub> У01.2 У01.3
Тема 1.2 Интегральное исчисление	Практическая работа №3. Методы вычисления неопределенных интегралов. Метод замены	2	У <sub>1</sub> У01.1 У01.2
	Практическая работа №4. Применение формулы Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла	2	У <sub>1</sub> У01.2
	Практическая работа №5. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла	2	У <sub>1</sub> У01.1 У01.2
	Практическая работа №6. Физические приложения определенного интеграла	2	У <sub>1</sub> У01.2
<b>РАЗДЕЛ 2 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА</b>		<b>4</b>	
Тема 4.1 Элементы комбинаторики	Практическая работа №7. Решение задач на основные понятия комбинаторики	2	У2
Тема 4.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики	Практическая работа №8. Числовые характеристики выборки	2	У2
<b>ИТОГО</b>		<b>16</b>	

### 3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

#### Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

#### Практическое занятие № 1

#### Дифференцирование сложных функций.

**Цель работы:** научиться находить производные сложных функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- определять этапы решения задачи
- находить производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;
- находить производные сложных функций.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

**Задание:**

**Найти производные функций**

1.  $y = (5x^3 - 2x)^6$
2.  $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3.  $f(x) = \arcsin 4x + \arccos^2 x$
4.  $f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

**Форма представления результата:**

Найти производные функций:

1.  $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент  $u = 1 - 4x^2$ .  
Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой  $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) \\ = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2.  $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций.  
Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции  $u = \frac{1}{2}x$ , для второй функции  $u = 2x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  
 $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ ,  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' \\ &= \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

$$3. y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции  $u = 3x + 5x^2$ , для второй функции  $u = 3 + 10x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  
 $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ ,  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \\ &= \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x+5x^2)' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x) \ln 2} (3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} = \\ &= \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x) \ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2} \end{aligned}$$

$$4. f(x) = \arcsin \frac{3}{5}x + \arccos 5x$$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $(U + V)' = U' + V'$ .

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции  $u = \frac{3}{5}x$ , для второй функции  $u = 5x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  
 $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ;  $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}} \left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} (5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$5. f(x) = \arccos\sqrt{1 - e^{2x}}$$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент  $u = \sqrt{1 - e^{2x}}$ . Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой  $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .

$$f'(x) = (\arccos\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$$u = 1 - e^{2x}$$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\arccos\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})' \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - 1 + e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' \\ &= -\frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot (-2e^x) \end{aligned}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно



## Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

### Практическое занятие № 2

#### Применение производной к исследованию функций.

**Цель работы:** научиться исследовать функции с помощью производной и строить графики.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
- определять промежутки монотонности функций с помощью производной;
- находить экстремумы функции;
- проводить исследование функции по общей схеме;
- строить графики функций, используя проведенное исследование.

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

**Задание:**

Исследовать функцию и построить ее график:

1)  $f(x) = x^3 - 12x$ ;

2)  $f(x) = \frac{x^3}{a-x^2}$ .

**Краткие теоретические сведения:**

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

- 1) Найти производную функции.
- 2) Найти критические точки.
- 3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
- 4) Записать интервалы, на которых функция возрастает  $f'(x) > 0$  и убывает  $f'(x) < 0$ .
- 5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

- 1) Найти вторую производную.
- 2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
- 3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
- 4) Если  $f''(x) > 0$ , то график выпуклый вниз. Если  $f''(x) < 0$ , то график выпуклый вверх.
- 5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то прямая  $x = a$  является вертикальной асимптотой.

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде  $y = kx + b$

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите функцию.
2. Используя общую схему, исследуйте функцию.
3. По результатам исследования постройте график функции

**Ход работы:**

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это не вызывает затруднения) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции .
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.
9. Построить график функции.

**Форма представления результата:** выполненная работа

**Критерии оценки:**

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

**Тема 1.2 Интегральное исчисление**

**Практическое занятие № 3**

**Методы вычисления неопределенных интегралов. Метод замены.**

**Цель работы:**

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

**Выполнив работу, Вы будете:**

*уметь:*

- анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
- вычислять неопределенный интеграл различными методами

**Материальное обеспечение:**

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

**Задание:**

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

**Краткие теоретические сведения:**

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } C = const$$

$\int$  – значок интеграла.

$f(x)$  – подынтегральная функция.

$dx$  – знак дифференциала.

$f(x)dx$  – подынтегральное выражение.

$F(x)$  – первообразная функции.

$F(x) + C$  – множество первообразных функций.

$C$  – константа.

Решить интеграл – это значит найти определенную функцию  $F(x) + C$ , пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей.

*Непосредственное интегрирование – это нахождение неопределенных интегралов с использованием таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла.*

- 1)  $\int dx = x + C;$
- 2)  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1);$
- 3)  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
- 4)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
- 5)  $\int e^x dx = e^x + C; \int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
- 6)  $\int \sin x dx = -\cos x + C; \int \sin(kx + b) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx + b)$
- 7)  $\int \cos x dx = \sin x + C; \int \cos(kx + b) dx = \frac{1}{k} \sin(kx + b)$
- 8)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
- 9)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

### Метод подстановки (интегрирование заменой переменной)

*Алгоритм вычисления неопределенного интеграла методом подстановки:*

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверять дифференцированием.

Пример типового расчета:

$$\int (2x^3 + 1)^4 dx$$

Введем подстановку:

$$t = 2x^3 + 1.$$

Дифференцируя это равенство, имеем:  $dt = 6x^2 dx$ .

Выразив отсюда  $x^2 dx$ , получим:  $x^2 dx = \frac{dt}{6}$ . Подставив в данный интеграл вместо  $2x^3 + 1$  и  $x^2 dx$  их выражения, получим:

$$x^2 dx = \int t^4 \cdot \frac{dt}{6} = \frac{1}{6} \int t^4 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^5}{5} + C$$

$$\int (2x^3 + 1)^4 dx = \frac{t^5}{30} + C = \frac{(2x^3 + 1)^5}{30} + C$$

### 1. Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Если подынтегральная функция представляет собой произведение либо тригонометрической функции на алгебраическую, либо показательной на алгебраическую, то за  $u$  следует принимать алгебраическую функцию.

#### Пример 1.

Вычислить интеграл:

$$\int x^2 \ln x dx$$

Решение:

Здесь подынтегральное выражение содержит логарифм. Тогда

$$du = \frac{d \ln x}{dx} dx = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x},$$

$$v = \int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} = \frac{1}{3} x^3.$$

$$I = \int x^2 \ln x dx = \int \ln x \cdot x^2 dx = \int u dv = uv - \int v du = \ln x \cdot \frac{1}{3} x^3 - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

Вычисляем оставшийся интеграл:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} = \frac{1}{3} x^3.$$

Тогда

$$I = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

**Пример 2.**  $\int x \cos x dx = \left. \begin{array}{l} u=x \\ dv=\cos x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du=u'(x) \cdot dx=x' dx=dx \\ v=\int \cos x dx=\sin x \end{array} \Big|_x \sin x - \int \sin x dx = \sin x - (-\cos x) + C.$

**Пример 3.**

$$\int (3x-2)e^{2x-5} dx = \left. \begin{array}{l} u=3x-2 \\ dv=e^{2x-5} \end{array} \right| \begin{array}{l} du=u'(x) \cdot dx=3 dx \\ v=\int e^{2x-5} dx=\frac{1}{2} e^{2x-5} \end{array} \Big|_{=2} \frac{1}{2} (3x-2)e^{2x-5} - \frac{3}{2} \int e^{2x-5} dx = \frac{1}{2} (3x-2)e^{2x-5} - \frac{3e^{2x-5}}{4} + C.$$

**Пример 4.**

$$\int \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u=\ln x \\ dv=dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du=u'(x) \cdot dx=\frac{1}{x} dx \\ v=\int dx=x \end{array} \Big| = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C.$$

**Порядок выполнения работы:**

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

**Ход работы:**

**1. Найти неопределённый интеграл, используя таблицу интегралов.**

<b>2.1</b> $\int (4\cos x + 2\sin x) dx$	<b>2.6</b> $\int \left(\frac{1}{x} + 3e^x\right) dx$	<b>2.11</b> $\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} - 2e^x\right) dx$
<b>2.2</b> $\int \left(\frac{5}{x^3} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$	<b>2.7</b> $\int \left(\frac{2}{x^5} - 3\cos x\right) dx$	<b>2.12</b> $\int \left(2e^x - \frac{8}{x}\right) dx$
<b>2.3</b> $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$	<b>2.8</b> $\int \sqrt{1 - \cos 2x} dx$	<b>2.13</b> $\int tg^2 x dx$
<b>2.4</b> $\int \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx$	<b>2.9</b> $\int \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2} dx$	<b>2.14</b> $\int \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} dx$
<b>2.5</b> $\int \frac{3x^2 + x^7}{x^2} dx$	<b>2.10</b> $\int \frac{x^2 + 7x + 12}{x(x + 3)} dx$	<b>2.15</b> $\int \frac{x - 1}{x^2 - x} dx$

**2. Найти неопределённый интеграл методом подстановки.**

<b>3.1</b> $\int (4x-2)^3 dx$	<b>3.6</b> $\int (8x+1)^5 dx$	$\int (3-5x)^6 dx$ <b>3.11</b>
<b>3.2</b> $\int \frac{5}{2x-7} dx$	<b>3.7</b> $\int \frac{4}{2+7x} dx$	$\int \frac{2}{4x-8} dx$ <b>3.12</b>
<b>3.3</b> $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right) dx$	<b>3.8</b> $\int 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx$	<b>3.13</b> $\int 4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) dx$
<b>3.4</b> $\int e^{6x-9} dx$	<b>3.9</b> $\int 2e^{4-2x} dx$	<b>3.14</b> $\int 5e^{10x+2} dx$
<b>3.5</b> $\int \frac{2}{\cos^2(4x+1)} dx$	<b>3.10</b> $\int \frac{6}{\sin^2(2x-1)} dx$	$\int \frac{3}{\cos^2(9x-2)} dx$ <b>3.15</b>

**3. Найти неопределённый интеграл методом подстановки.**

<b>4.1</b> $\int \frac{2x dx}{6+x^2}$ $z = 6+x^2$	<b>4.4</b> $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ $z = \ln x$	<b>4.7</b> $\int \operatorname{tg} x dx$
<b>4.2</b> $\int \frac{e^x dx}{2+3e^x}$ $z = 2+3e^x$	<b>4.5</b> $\int \frac{x^2-x}{(x-3)^2} dx$ $z = x-3$	<b>4.8</b> $\int x\sqrt{2-x} dx$ $z^2 = 2-x$
<b>4.3</b> $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x-1}$ $z = e^x-1$	<b>4.6</b> $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ $x = \frac{1}{z}$	<b>4.9</b> $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

**Форма представления результата:**

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

**Критерии оценки:**

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

## Тема 1.2 Интегральное исчисление

### Практическое занятие № 4

#### Применение формулы Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла

##### Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

##### Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона – Лейбница
- структурировать получаемую информацию

##### Материальное обеспечение:

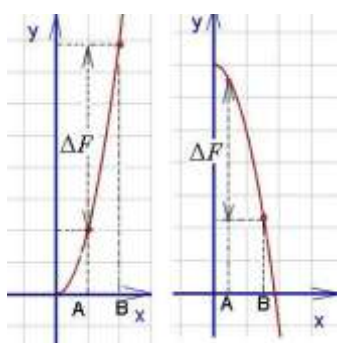
- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

##### Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

##### Краткие теоретические сведения:

Определённым интегралом от непрерывной функции  $f(x)$  на конечном отрезке  $[a, b]$  (где  $a \neq b$ ) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись



$$\int_a^b f(x) dx.$$

Как видно на графиках внизу (приращение первообразной функции обозначено  $\Delta F$ ), **определённый интеграл может быть как положительным, так и отрицательным числом** (Вычисляется как разность между значением первообразной в верхнем пределе и её же значением в нижнем пределе, т. е. как  $F(b) - F(a)$ ).

Числа  $a$  и  $b$  называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок  $[a, b]$  – отрезком интегрирования.

Таким образом, если  $F(x)$  – какая-нибудь первообразная функция для

$f(x)$ , то, согласно определению,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница.

Разность  $F(b) - F(a)$  кратко записывают так:

$$F(x) \Big|_a^b.$$

Поэтому формулу Ньютона-Лейбница будем записывать и так:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Докажем, что определённый интеграл не зависит от того, какая первообразная подынтегральной функции взята при его вычислении. Пусть  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  – произвольные первообразные подынтегральной функции. Так как это первообразные одной и той же функции, то они отличаются на постоянное слагаемое:  $\Phi(x) = F(x) + C$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi(b) - \Phi(a) &= \\ &= [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Тем самым установлено, что на отрезке  $[a, b]$  приращения всех первообразных функции  $f(x)$  совпадают.

Таким образом, для вычисления определённого интеграла необходимо найти любую первообразную подынтегральной функции, т.е. сначала следует найти неопределённый интеграл. Постоянная  $C$  из последующих вычислений исключается. Затем применяется формула Ньютона-Лейбница: в первообразную функцию подставляется значение верхнего предела  $b$ , далее - значение нижнего предела  $a$  и вычисляется разность  $F(b) - F(a)$ . Полученное число и будет определённым интегралом..

При  $a = b$  по определению принимается

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Пример 1. Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx.$$

Решение: сначала найдём неопределённый интеграл:

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C.$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к первообразной

$$\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}$$

(при  $C = 0$ ), получим

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \left. \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \right|_0^8 = \frac{3}{4} \cdot 8 \sqrt[3]{8} - 0 = 12.$$

Однако при вычислении определённого интеграла лучше не находить отдельно первообразную, а сразу записывать интеграл в виде (39).

Пример 2. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 e^{2x} dx.$$

Решение: используя формулу

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C,$$

получим

$$\int_1^2 e^{2x} dx = \left. \frac{1}{2} e^{2x} \right|_1^2 = \frac{1}{2} (e^4 - e^2) = \frac{1}{2} e^2 (e^2 - 1).$$

### Свойства определённого интеграла

1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, т.е.*

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

2. *Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т.е.*

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

4. Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций, т.е.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] dx &= \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx. \end{aligned}$$

5. Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям, т.е. если  $c \in [a, b]$ ,

то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

6. При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Пример 3. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 \left( \frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx.$$

Решение : используя теоремы 4 и 3, а при нахождении первообразных – табличные интегралы (7) и (6), получим

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left( \frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx &= \\ &= 4 \int_1^2 \frac{dx}{x} - 5 \int_1^2 x^4 dx + 2 \int_1^2 \sqrt{x} dx = \\ &= 4 \ln|x| \Big|_1^2 - 5 \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 + 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_1^2 = \\ &= 4(\ln 2 - \ln 1) - (2^5 - 1^5) + \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}) = \\ &= 4 \ln 2 + \frac{8}{3}\sqrt{2} - 32\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Порядок выполнения работы:**

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

**Ход работы:**

1. Вычислить определённый интеграл.

1.1 $\int_{-1}^2 25x^4 dx$	1.6 $\int_{-1}^2 8x^3 dx$	1.11 $\int_{-1}^2 64x^7 dx$
1.2 $\int_0^1 (2x^2 + x - 1) dx$	1.7 $\int_0^2 (x^3 - 1) dx$	1.12 $\int_0^4 (3 + x^3) dx$



<b>1.3</b> $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx$	<b>1.8</b> $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$	<b>1.13</b> $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$
<b>1.4</b> $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$	<b>1.9</b> $\int_0^4 \frac{dx}{16+x^2}$	<b>1.14</b> $\int_1^2 \frac{2dx}{x}$
<b>1.5</b> $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$	<b>1.10</b> $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx$	<b>1.15</b> $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

**Форма представления результата:**

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

**Критерии оценки:**

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

**Тема 1.2 Интегральное исчисление**

**Практическое занятие № 5**

**Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.**

**Цель работы:**

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

**Выполнив работу, Вы будете:**

*уметь:*

- определять этапы решения задачи
- вычислять значения геометрических величин
- выполнять точные расчеты площадей фигур неправильной формы

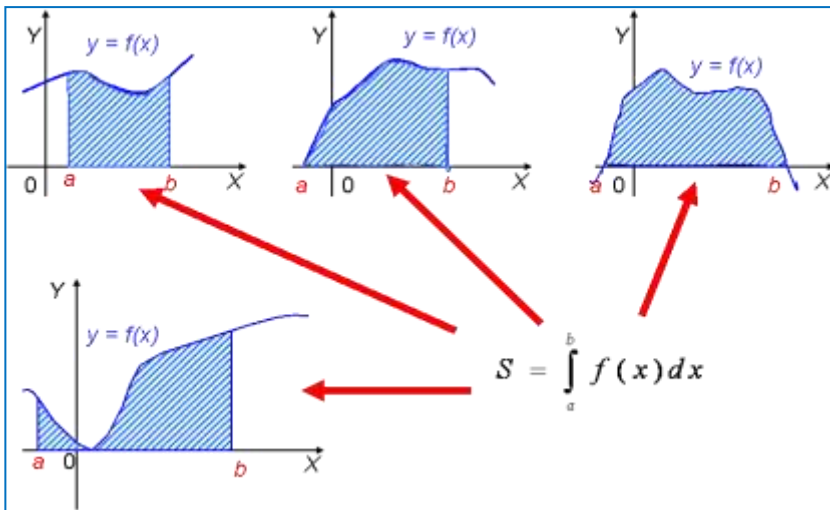
**Материальное обеспечение:**

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

**Задание:**

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

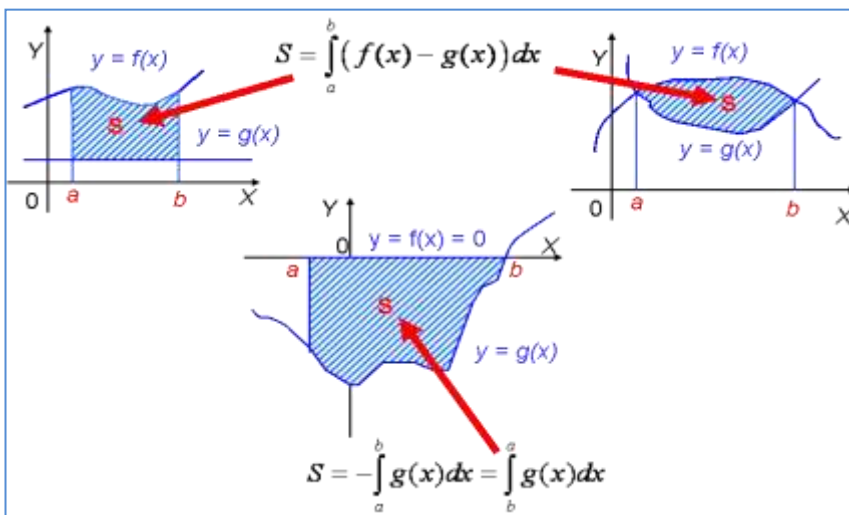
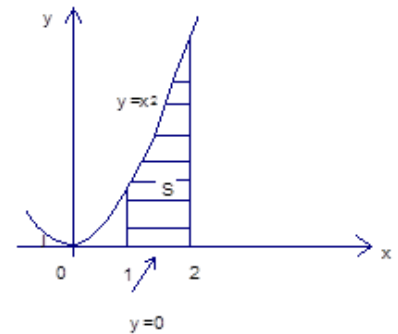
**Краткие теоретические сведения:**



Пример 1.  
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$ .

Решение. Построим фигуру на координатной плоскости. Вот искомая площадь:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$



Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:

Пределы интегрирования  $a = 1, b = 2, f(x) = x^2$ .

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 |_1^2 = \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$$

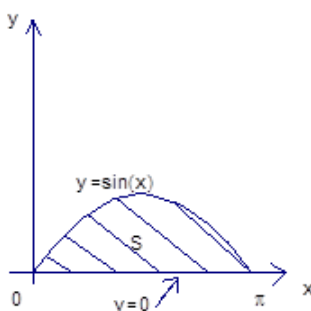
Ответ:  $\frac{7}{3}$

Пример 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$ .

Решение: Построим фигуру на координатной плоскости.

Фигура, ограниченная линиями  $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$



$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула та же самая:

В нашем случае  $a = 0, b = \pi, f(x) = \sin x$ . Итак, надо найти определенный интеграл

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

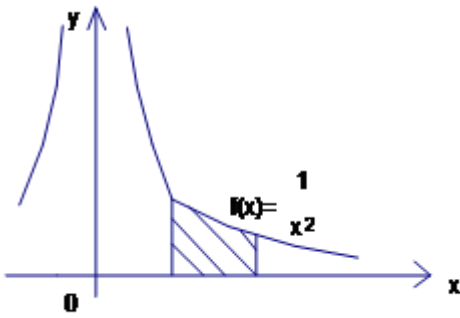
Искомая площадь найдена, и ответ получен.

Ответ: 2

$$y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2.$$

Пример 3. **Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**

**Решение.** Построим фигуру на координатной плоскости.



Площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2$

Формула для площади та же самая:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

В нашем случае

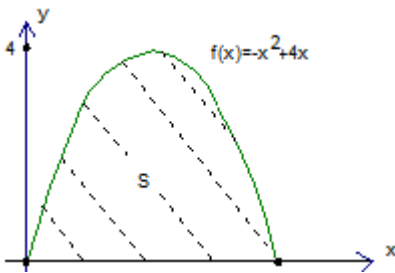
$$S = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{(-1)} \Big|_1^2 = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$

Пример 4. **Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**  $y = -x^2 + 4x, y = 0$ .

**Решение.** Схематически изобразим параболу  $y = -x^2 + 4x$ . Корни  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 4$ .

Парабола  $y = -x^2 + 4x$



Применим известную формулу  $S = \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

И применим ее для данной функции  $y = -x^2 + 4x$  и пределов интегрирования

$a = 0, b = 4$ .

$$S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2\right) \Big|_0^4 = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right) \Big|_0^4 = \left(-\frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2\right) - 0 = \frac{-64 + 96}{3} = \frac{32}{3}$$

$\frac{32}{3}$ . Искомая площадь найдена.

Ответ:  $\frac{32}{3}$

В предыдущих задачах площадь образовывалась с помощью разных кривых, но эта площадь находилась над осью  $x$ . В следующей задаче наоборот.

Пример 5. **Случай, если фигура находится под осью: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**  $y = \sin x, y = 0, x \in [\pi, 2\pi]$ .

**Решение.** Посмотрим, что это за фигура. График  $y = \sin x$  в пределах от  $\pi$  до  $2\pi$  расположен под осью  $Ox$ .

1. Сначала вычисляем определенный интеграл от  $\pi$  до  $2\pi$  от подынтегральной функции  $y = \sin x$ .

Надо найти первообразную.

По таблице первообразных:  $\int \sin x dx = -\cos x + c$ .

$$S = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) = -1 - 1 = -2.$$

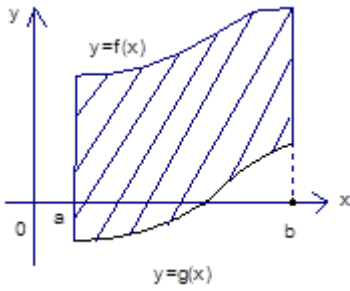
2. Для того чтобы найти площадь, надо взять модуль  $S = |-2| = 2$ .

Ответ: 2.

Пример 6. **Общий случай для нахождения площади плоской фигуры, ограниченной двумя кривыми.**

Следующее усложнение – искомая площадь расположена между двумя кривыми. А именно: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = f(x), y = g(x), x = a, x = b, g(x) \leq f(x)$$



Площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b, g(x) \leq f(x)$

**Решение.** Итак, площадь образуют 2 кривые, одна из них может находиться под осью  $Ox$ .

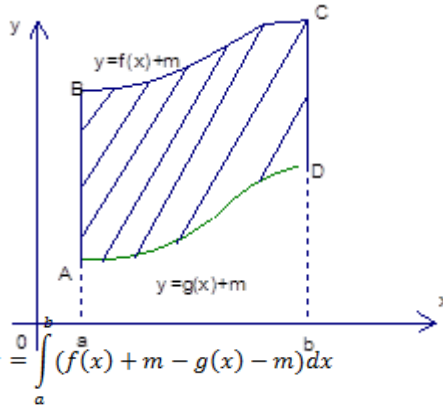
Каким образом мы будем решать эту задачу?

Во-первых, мы можем сдвинуть фигуру на такое положительное  $m$ , что площадь находится над осью  $x$ .

возьмем соответствующий найдем площадь. Искомая двух площадей.

Площадь под верхней площадь под нижней Каждую из площадей мы

$$s = \int_a^b (f(x) + m) dx - \int_a^b (g(x) + m) dx = \int_a^b (f(x) + m - g(x) - m) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Сдвиг фигуры, затем мы определенный интеграл и площадь равна разности

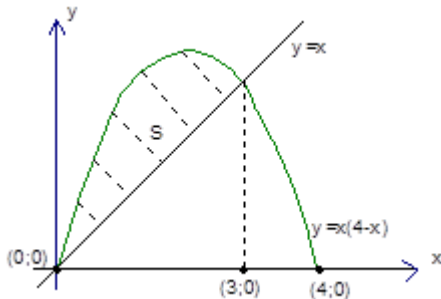
кривой  $y = f(x)$  минус кривой  $y = g(x)$ . умеем находить.

**Пример 6. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями**

$$y = -x^2 + 4x \text{ и } y = x$$

**Решение.** Для начала построим графики этих линий и поймем, где та площадь, которую нам надо искать. График квадратичной функции – парабола. Корни – 0, 4, ветви вниз. График прямой  $y = x$  – биссектриса первого координатного угла. Вот площадь, которую надо найти.

Но для этого сначала надо найти точки пересечения и решить стандартную задачу.



1. Находим точки пересечения. Для этого решаем систему:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = x \end{cases}$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно  $x$ :

$$-x^2 + 4x = x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 0, x = 3$$

Мы нашли  $x$ , то есть, пределы интегрирования. Это первое важное действие. Теперь стандартное действие:

$$2. S = \int_0^3 (-x^2 + 4x - x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left. -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right|_0^3 = \left( -\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3}{2} \right) - 0 = 27 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 27 \left( \frac{1}{6} \right) = \frac{9}{2}$$

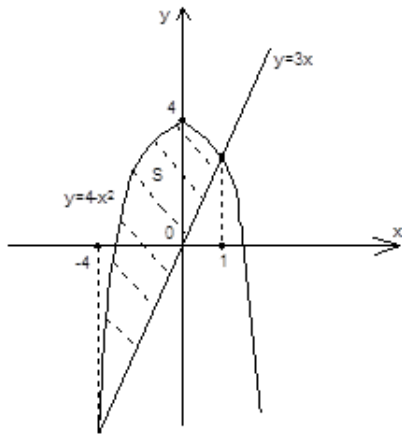
Ответ: 4,5

**Пример 7. Случай, когда часть площади плоской фигуры лежит под осью. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**

$$y = 4 - x^2, y = 3x$$

**Решение.** Сначала построим графики, посмотрим, какую площадь нам нужно найти. Первая функция – парабола, ветви вниз. График второй функции – прямая линия. Есть две точки

пересечения, их придется найти, а именно взять пределы интегрирования, и тогда будем решать задачу по знакомому нам плану.



Площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 4 - x^2, y = 3x$   
 Первое действие – найти пределы интегрирования и второе – найти площадь.

Пределы интегрирования найдем из системы  $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x \end{cases}$ .

$$3x = 4 - x^2$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = -4, x = 1$$

То есть, пределы интегрирования найдены.

$$S = \int_{-4}^1 (4 - x^2 - 3x) dx = 4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \Big|_{-4}^1 = \left(4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(-16 + \frac{64}{3} - \frac{3 \cdot 16}{2}\right) =$$

$$= (4 + 16 + 24) - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{44 \cdot 6 - 65 \cdot 2 - 3 \cdot 3}{6} = \frac{164 - 139}{6} = \frac{125}{6} = 20 \frac{5}{6}$$

Ответ:  $20 \frac{5}{6}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

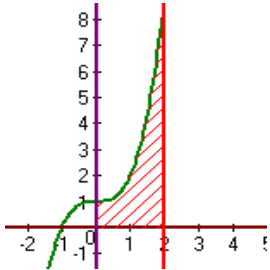
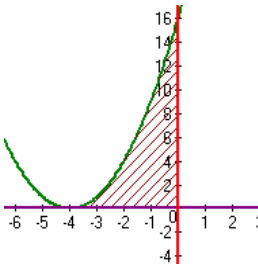
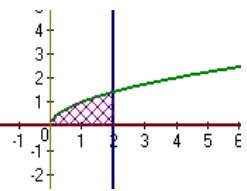
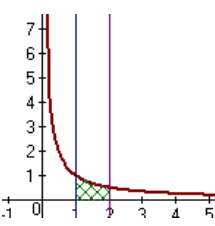
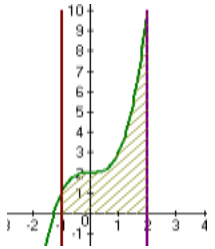
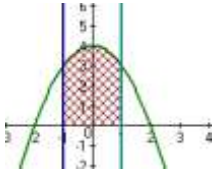
**Ход работы:**

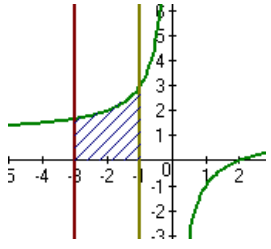
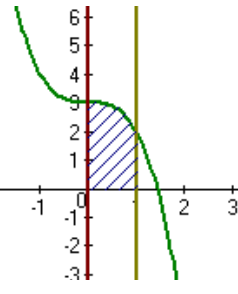
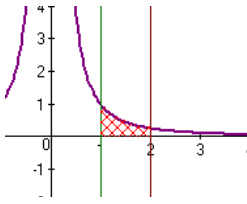
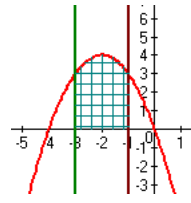
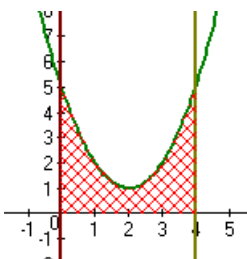
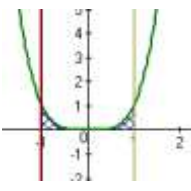
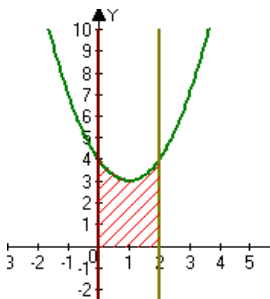
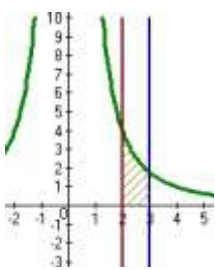
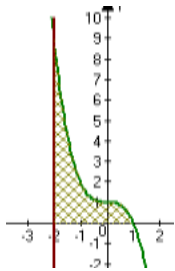
1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями. Результат округлить до  $10^{-2}$ .

<p><b>2.1</b></p> $y = 0$ $x = 0$ $y = x^2 - 4x + 4$	<p><b>2.6</b></p> $y = x^2 - 4x + 3$ $y = 0$ $x = 0$	<p><b>2.11</b></p> $y = x^2 + 5x + 6$ $y = 0$ $x = 0$
<p><b>2.2</b></p> $y = x^2 - 4x + 3$ $x = -1$ $y = 0$	<p><b>2.7</b></p> $y = x^2 + 5x + 6$ $x = -4$ $y = 0$	<p><b>2.12</b></p> $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 0$ $y = 0$
<p><b>2.3</b></p> $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 1$ $y = 0$	<p><b>2.8</b></p> $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -1$ $x = 0$	<p><b>2.13</b></p> $y = -1^2 x^2 + 4$ $x = -1$

<b>2.4</b> $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -2$ $x = -1$	<b>2.9</b> $y = 2\sqrt{x}$ $x = 4$ $x = 1$	$y = x^4$ <b>2.14</b> $x = 1$ $x = 0$
<b>2.5</b> $y = \frac{4}{x}$ $x = 2$ $x = 3$	$x = 2$ <b>2.10</b> $x = 0$ $y = 2x + 3$	$y = -4x + 1$ <b>2.15</b> $x = 0$ $x = -2$

2. Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке.

<b>3.1</b> $y = x^3 + 1$ $y = 0, x = 0, x = 2$ 	<b>3.6</b> $y = x^2 + 8x + 16$ $y = 0, x = 0$ 	<b>3.11</b> $y = \sqrt{x}$ $y = 0$ $x = 2$ 
<b>3.2</b> $x = 2$ $y = 0$ $y = \frac{1}{x^2}$ 	<b>3.7</b> $y = x^3 + 2$ $x = -1$ $x = 2$ 	<b>3.12</b> $y = 4 - x^2$ $x = -1$ $x = 1$ 

<p><b>3.3</b> <math>x = -1</math>  <math>x = -3</math>  <math>y = \frac{-2}{x} + 1</math></p> 	<p><b>3.8</b> <math>y = -x^3</math>  <math>x = 0</math>  <math>x = 1</math></p> 	<p><b>3.13</b> <math>y = \frac{1}{x^2}</math>  <math>x = 1</math>  <math>x = 2</math></p> 
<p><b>3.4</b> <math>y = -x^2 - 4x</math>  <math>x = -3</math>  <math>x = -1</math></p> 	<p><b>3.9</b> <math>y = x^2 - 4x + 5</math>  <math>x = 0</math>  <math>x = 4</math></p> 	<p><b>3.14</b> <math>y = x^4</math>  <math>x = -1</math>  <math>x = 1</math></p> 
<p><b>3.5</b> <math>y = x^2 - 2x + 4</math>  <math>x = 0</math> <math>x = 2</math></p> 	<p><b>3.10</b> <math>y = \frac{16}{x^2}</math> <math>x = 2</math>  <math>x = 3</math></p> 	<p><b>3.15</b> <math>y = 1 - x^3</math>  <math>x = -2</math></p> 

**Форма представления результата:**

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

**Критерии оценки:**

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

## Тема 1.2 Интегральное исчисление

### Практическое занятие № 6

#### Физические приложения определенного интеграла.

**Цель работы:** научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;

**Материальное обеспечение:**

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

**Задание:**

1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения  $v = 18t - 6t^2$ .
2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения  $v = 3t^2 - 2t - 3$ .
3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?
4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.
5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

**Краткие теоретические сведения:**

**Путь, пройденный телом**

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью  $v=v(t)$ . Найдем путь  $S$ , пройденный ею за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ .

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е.

$v(t) = \frac{dS}{dt}$ . Отсюда следует, что  $dS = v(t)dt$ . Интегрируя полученное равенство в пределах от

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

$t_1$  до  $t_2$ , получаем

Пусть материальная точка перемещается вдоль оси  $ox$  под действием переменной силы  $F = F(x)$ , направленной параллельно оси. Тогда работа, произведённая силой  $F$  при перемещении точки из положения  $x = a$  в положение  $x = b$  ( $a < b$ ) вычисляется по формуле:



$$A = \int_a^b F(x) dx$$

### Вычисление работы с помощью определённого интеграла.

Пусть под действием некоторой силы  $f(x)$  материальная точка М движется по прямой в направлении оси  $OX$ . Требуется найти работу, произведённую силой  $f(x)$  при перемещении точки М из положения  $x = x_1$  в положение  $x = x_2$ .

1) Если сила постоянна  $f(x) = C$ , то работа выражается следующим образом  $A = C(x_2 - x_1)$ .

2) Если сила переменная величина, то  $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ .

### Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила Р давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле:

$$P = 9,81\gamma h S \quad (4), \text{ где } \gamma - \text{плотность жидкости.}$$

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy dx \quad (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то  $a=0$  и формула (5) примет вид

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy dx \quad (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy dx = 9,81\gamma y \int_a^b x dx = 9,81\gamma y \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = 9,81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

### Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

### Ход работы:

**Пример 1.** Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела  $v(t) = 10t + 2$  (м/с).

Решение: Если  $v(t) = 10t + 2$  (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ( $t=0$ ) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2) dt = 5t^2 \Big|_0^4 + 2t \Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (\text{м}).$$

Ответ.  $S = 88$  (м).

**Пример 2.** Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению  $x$ , т. е.  $F = kx$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила  $F = 100$  Н растягивает пружину на  $x = 0,01$  м; следовательно,  $100 = k \cdot 0,01$ , откуда  $k = 10000$ ; следовательно,  $F = 10000x$ .

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12,5 \quad (\text{Дж}).$$

**Пример 3.** В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь  $y = 1$ ,  $a = 0,5$ ,  $b = 2 + 0,5 = 2,5$  (м),  $\gamma = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Следовательно,

$$P = 9810 \int_a^b xy \, dx = 9810 \int_a^b x \, dx = 9810 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,5}^{2,5} = 9810 \frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430 \text{ (Н)}.$$

**Выполнить задания:**

1. Найти работу производимую при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия её на 0,005 м нужно приложить силу в 10 Н.

Ответ: 0,9 Дж.

2. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3 Н. Найти работу, которую надо произвести, чтобы растянуть эту пружину на 0,05 м

Ответ: 0,075 Дж.

3. Масса стержня, расположенного на отрезке  $[0;3]$ , если плотность задается функцией  $\rho(x) = x^4 - 3x$ , равна ...

4. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

Ответ: 125 Дж.

5. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины на 15 см, если известно, что для сжатия пружины на 1 см необходима сила в 30 Н.

Ответ: 33,75 Дж.

6. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины а 0,08 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна Сида в 25 Н.

Ответ: 8 Дж.

7. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = 2t^2 - t + 1$  (м/с). Найти путь, пройденный за первые 3 с.

Ответ: 16,5 м.

8. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = 2t + a$  (м/с). найти значение параметра  $a$ , если известно, что за промежуток времени от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 2$  (с) тело прошло путь длиной 40 м.

Ответ:  $a = 18$ .

9. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = 12t - t^2$  (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала пути, до его остановки.

Указание: в моменты начала и остановки скорость тела равна нулю.

Ответ: 288 м.

10. Найти путь, пройденный точкой за третью секунду, зная скорость её прямолинейного движения  $v(t) = 3t^2 - 2t - 3$  (м/с).

Ответ: 11 м.

11. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. одно тело двигалось со скоростью  $v_1(t) = 3t^2 + 2t$  (м/с), другое со скоростью  $v_2(t) = 2t$  (м/с). определить расстояние между телами через 2 секунды.

Ответ: 8м.

12. Масса стержня, расположенного на отрезке  $[0;2]$ , если плотность задается функцией  $\rho(x) = 6x^2 - 3x$ , равна ...

13. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = (3t^2 + 8t)$ . Тогда путь, пройденный телом за промежуток времени от  $t = 1$  до  $t = 4$ , равен ...

14. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой  $v(t) = (12t - 3t^2)$  (м/с). Тогда длина пути, пройденного телом от начала его движения до остановки, равна ...

**Пример 4.1.** Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

По закону Гука упругая сила  $F$ , растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению  $x$ , т.е.  $F = kx$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности. По условию сила  $F = 100\text{Н}$  растягивает пружину на  $x = 0,01\text{ м}$ , т.е.  $100 = k \cdot 0,01 \Rightarrow k = 10000$ . Тогда  $F = kx = 10000x$ .

Вычислим работу:

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 10000 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 5000 \cdot 0,05^2 = 12,5 \text{ (Дж)}$$

Определённый интеграл применяют для вычисления пути  $S$  прямолинейного движения.

Путь  $S$ , пройденный материальной точкой за промежуток времени от  $t = a$  до  $t = b$ , равен определённому интегралу от скорости  $v(t)$ :

$$S = \int_a^b v(t) dt$$

**Пример 4.2.** Вычислить путь, пройденный точкой за 4 секунды от начала движения, если скорость точки  $v = 2t + 4$  (м/с).

По условию:  $v(t) = 2t + 4, a = 0, b = 4$ .

Тогда  $S = \int_0^4 (2t + 4) dt = 2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 + 4t \Big|_0^4 = 4^2 + 4 \cdot 4 = 32 \text{ (м/с)}$ .

**Пример 4.3.** Масса стержня, расположенного на отрезке  $[0; 6]$ , если плотность задается функцией  $\rho(x) = 2x^2 + 3$ , равна ...

В качестве модели стержня принимается отрезок  $[a; b]$  на оси  $Ox$ , длина которого совпадает с длиной стержня и в каждой точке которого задано значение плотности  $\rho(x)$ . Тогда массу

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

стержня можно вычислить по формуле

$$m = \int_0^6 (2x^2 + 3) dx = \left( \frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_0^6 = \frac{2 \cdot 6^3}{3} + 18 =$$

Используя условие задачи, получим  $= 144 + 18 = 162$ .

**Форма представления результата:** выполненная работа.

### Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

## Тема 2.1. Элементы комбинаторики.

### Практическое занятие № 7

#### Решение задач на основные понятия комбинаторики

**Цель работы:** осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

**Краткие теоретические сведения:**

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

**1.Правило сложения.** Если некоторый элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а другой элемент  $B$  –  $n$  способами, исключаящими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо  $A$ , либо  $B$ ) можно осуществить  $m + n$  способами.

**2.Правило умножения.** Если некоторый элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами и если после каждого такого выбора элемент  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор пары элементов  $(A, B)$  в указанном порядке можно осуществить  $m \cdot n$  способами.

**Задача1.** При формировании экипажа космического корабля имеется: 10 претендентов на пост командира, 20 претендентов на пост бортингенера, 25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортингенера, или космонавта-исследователя?

**Решение.** По правилу суммы существует  $10+20+25=55$  способов выбора одной из кандидатур.

**Задача2.** В столовой предлагают два различных первых :  $a_1$  и  $a_2$ ; три различных вторых блюда:  $b_1, b_2, b_3$  и два различных десерта:  $c_1$  и  $c_2$ . Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

**Решение.** Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует  $2 \times 3 \times 2 = 12$  способов выбрать обед из трех блюд.

**3. Подмножества  $n$ - множеств(соединения).**

Для нахождения  $k$  – подмножеств некоторого  $n$  – множества нужно выбрать  $k$  из  $n$  его элементов (поэтому часто говорят о *выборке*  $k$  элементов из  $n$  – элементов). Про выбранные  $k$  из  $n$  различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из  $n$  элементов по  $k$ . *Соединение*-собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все  $n$

элементов или только часть их, различают три вида соединений: **перестановки, размещения, сочетания.**

### **Перестановки.**

Перестановками из  $n$  – элементов называются такие соединения из  $n$  – элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение:  $P_n = n!$

### **Размещения.**

Размещениями из  $n$  – элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит  $m$  элементов, выбранных из числа данных  $n$  – элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем, и другим.

Обозначение  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из  $n$  – элементов по  $n$  – элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

### **Сочетания.**

Сочетаниями из  $n$ - элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

### **Порядок выполнения работы:**

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберите соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

### **Краткие теоретические сведения:**

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

**1.Правило сложения.** Если некоторый элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а другой элемент  $B$  –  $n$  способами, исключаящими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо  $A$ , либо  $B$ ) можно осуществить  $m + n$  способами.

**2.Правило умножения.** Если некоторый элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами и если после каждого такого выбора элемент  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор пары элементов ( $A, B$ ) в указанном порядке можно осуществить  $m \cdot n$  способами.

**Задача1.** При формировании экипажа космического корабля имеется: 10 претендентов на пост командира, 20 претендентов на пост бортинженера, 25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

**Решение.** По правилу суммы существует  $10+20+25=55$  способов выбора одной из кандидатур.

**Задача2.** В столовой предлагают два различных первых :  $a_1$  и  $a_2$ ; три различных вторых блюда:  $b_1, b_2, b_3$  и два различных десерта:  $c_1$  и  $c_2$ . Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

**Решение.** Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует  $2 \times 3 \times 2 = 12$  способов выбрать обед из трех блюд.

### 3. Подмножества $n$ - множеств(соединения).

Для нахождения  $k$  – подмножеств некоторого  $n$  – множества нужно выбрать  $k$  из  $n$  его элементов (поэтому часто говорят о *выборке*  $k$  элементов из  $n$  – элементов). Про выбранные  $k$  из  $n$  различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из  $n$  элементов по  $k$ . *Соединение*-собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все  $n$  элементов или только часть их, различают три вида соединений: **перестановки, размещения, сочетания**.

#### **Перестановки.**

Перестановками из  $n$  – элементов называются такие соединения из  $n$  – элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение:  $P_n = n!$

#### **Размещения.**

Размещениями из  $n$  – элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит  $m$  элементов, выбранных из числа данных  $n$  – элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем, и другим.

Обозначение  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из  $n$  – элементов по  $n$  – элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

#### **Сочетания.**

Сочетаниями из  $n$ - элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

#### **Порядок выполнения работы:**

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберите соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

#### **Ход работы:**

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1. Возможных цифр всего десять (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0). Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой (1,4,5,7  $\neq$  2,4,5,7), либо порядком набора одинаковых цифр (1,4,5,7  $\neq$  4,5,7,1), поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2. Формула размещений имеет вид:  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ . В нашем случае  $n = 4$ ,  $m = 10$ .

3. Производим расчёт:  $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . В нашем случае  $n=10, m=3$ .

3. Производим расчёт:  $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$ .

3. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 9 (цифры не повторяются)?

Решение.

1. По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2. Формула перестановок из  $n$ -элементов имеет вид:  $P_n = n!$  В нашем случае  $n=4$ .

3. Произведём расчёт:  $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

**Форма представления результата:** выполненная работа.

### Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

## Тема 2.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики

### Практическое занятие № 8

#### Числовые характеристики выборки

**Цель работы:** рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- находить статистические характеристики выборки
- оформлять результаты поиска

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

$x_i$	2	4	7	8	9	12
$n_i$	$p_1^2$	$2p_2$	$p_2$	$p_2^2$	$p_3$	$3p_3$

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№		Сумма частот
---	--	--------------

интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	вариант интервала, $n_i$
1	3 – 5	$p_1$
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	$p_1^2$
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	$p_1+p_2$

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

$x$	5	10	15	20	25	30	35
$f$							2
$i$	$p_1$	$3p_1$	$p_2$	$2p_1$	$p_1$	$2p_1$	

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

$x$	2	4	6	8	10	12	14
$f$	$p_1$	$2p_1$	$p_1$	$p_1^2$	$p_3$	$2p_3$	$p_2+p_1$

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание:  $p_1$  = числу букв в Вашем имени;  $p_2$  = числу букв в Вашей фамилии;  $p_3$  = числу букв в имени Вашего отца.

**Краткие теоретические сведения** в полном объеме имеются в лекции.

**Порядок выполнения работы:**

1 Прочитав условие предложенной задачи, по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2. Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик выборки.

**Ход работы: 1.** Задано распределение частот выборки:

$x_i$	2	6	11	15
$n_i$	3	1	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле  $w_i = \frac{n_i}{n}$ :

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0,12; w_2 = \frac{10}{25} = 0,40; w_3 = \frac{7}{25} = 0,28; w_4 = \frac{5}{25} = 0,20.$$

Следовательно,

$x_i$	2	6	12	15
-------	---	---	----	----

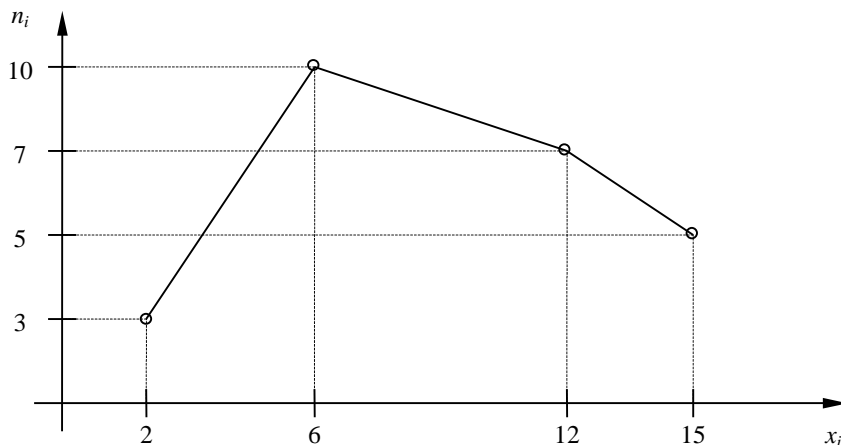


$w_i$	0,1	0,4	0,2	0,2
-------	-----	-----	-----	-----

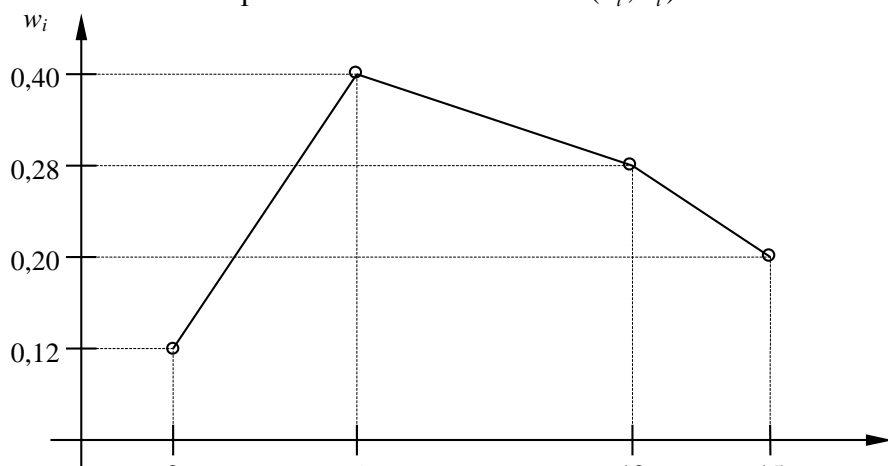
Контроль:  $0,12 + 0,40 + 0,28 + 0,20 = 1$ .

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами  $(x_i, n_i)$  и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам  $(x_i, w_i)$ :



3. Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной $h=5$	Сумма частот вариант $n_i$
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

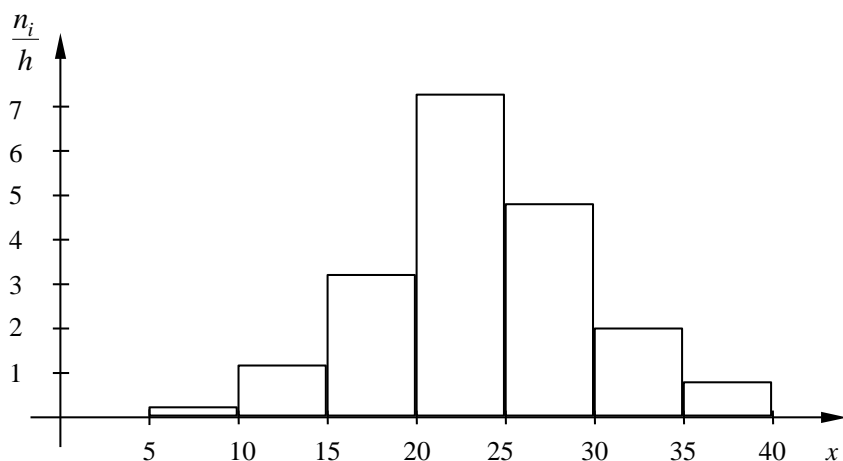
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта $x_i$	2	4	5	6
частота $N_i$	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\bar{X}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу  $D_{\Gamma} = \overline{X_{\Gamma}^2} - (\overline{X_{\Gamma}})^2$ .  
 Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_{\Gamma}^2} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17,8.$$

Таким образом,  $D_{\Gamma} = 17,8 - 4^2 = 1,8$ .

Генеральное стандартное отклонение:  $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} = \sqrt{1,8} \cong 1,34$ .

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода  $Mo$  : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана  $Me$  : вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4,5.$$

Размах вариации  $R$ : в примере  $x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$ , поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

**5.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	1	2	3	4	5
$n_i$	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X_B} = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1,82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11,45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - (\overline{X_B})^2 = 11,45 - 1,82^2 \cong 8,14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8,14} \cong 2,85.$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно