Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Маховский
«26» 02 2020 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
по учебной дисциплине
ЕН.01 МАТЕМАТИКА
для студентов специальности
23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей

Магнитогорск, 2020

ОДОБРЕНО:

Предметной комиссией
Математических и естественнонаучных дисциплин
Председатель Е.С. Корытникова
Протокол №7 от 17.02.2020 г.

Методической комиссией

Протокол №3 от 26.02.2020 г.

Составитель:

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК
Антропова Наталья Владимировна

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике, в том числе прикладного характера), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен ***уметь***:

- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- решать системы линейных уравнений различными методами.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 5.2 Организовывать материально-техническое обеспечение процесса по техническому обслуживанию и ремонту автотранспортных средств;

А также формированию общих компетенций:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Разделы/темы	Темы практических занятий	Кол-во часов	Требования ФГОС СПО (уметь)
РАЗДЕЛ 1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА		**20**	
Тема 1.1 Дифференциальное исчисление	Практическая работа №1. Дифференцирование сложных функций	2	$У_4$ $У_{01.2}$
	Практическая работа №2. Применение производной к исследованию функций	2	$У_4$ $У_{01.2}$ $У_{01.3}$ $У_{01.9}$
	Практическая работа №3. Применение производной к решению практических задач	2	$У_4$
Тема 1.2 Интегральное исчисление	Практическая работа №4. Методы вычисления неопределенных интегралов. Метод замены	2	$У_4$
	Практическая работа №5. Применение формулы Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла	2	$У_4$ $У_{01.3}$
	Практическая работа №6. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла	2	$У_4$ $У_{01.2}$ $У_{01.3}$ $У_{02.4}$
	Практическая работа №7. Физические приложения определенного интеграла	2	$У_4$
	Практическая работа №8. Решение прикладных задач с использованием дифференциального и интегрального вычисления.	2	$У_4$
Тема 1.3 Дифференциальные уравнения	Практическая работа №9. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными	2	$У_4$
	Практическая работа №10. Решение дифференциальных уравнений первого порядка	2	$У_4$ $У_{01.2}$
РАЗДЕЛ 2 ПОНЯТИЕ О ЧИСЛЕ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА		**6**	
Тема 2.1 Алгебраическая форма комплексного числа	Практическая работа №11. Действия над комплексными числами в алгебраической форме	2	$У_1$ $У_{01.3}$
Тема 2.2 Тригонометрическая форма комплексного числа	Практическая работа №12. Переход от одной формы комплексного числа к другой	2	$У_1$ $У_{01.3}$
	Практическая работа №13. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме	2	У1 $У_{01.3}$
РАЗДЕЛ 3 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА		**4**	
Тема 3.2 Системы линейных уравнений	Практическая работа №14. Решение систем линейных уравнений методом Крамера	2	$У_5$ $У_{01.3}$
	Практическая работа №15. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы	2	$У_5$ $У_{01.3}$

РАЗДЕЛ 4 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА		**4**	
Тема 4.1 Элементы комбинаторики	Практическая работа №16. Решение задач на основные понятия комбинаторики	2	$У_3$
Тема 4.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики	Практическая работа №17. Числовые характеристики выборки	2	$У_3$ $У_{01.2}$ $У_{02.7}$
	ИТОГО	34	

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 1
Дифференцирование сложных функций.

Цель работы: научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– определять этапы решения задачи

– находить производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;

– находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Форма представления результата:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x)$$
$$= -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'.$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x)$$
$$\cdot (2x)' = \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV\prime}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(a^u)' = a^u lna \cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})\prime \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))\prime}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)\prime \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)\,ln2}(3+10x)\prime}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x)\log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)\,ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

/

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(arcsinu)' = \frac{u\prime}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u\prime}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5.$f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент
$u = 1 - e^{2x}$
Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})'$$
$$= -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x)$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 2
Применение производной к исследованию функций.

Цель работы: научиться исследовать функции с помощью производной и строить графики.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
– определять промежутки монотонности функций с помощью производной;
– находить экстремумы функции;
– проводить исследование функции по общей схеме;
– строить графики функций, используя проведенное исследование.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:
Исследовать функцию и построить ее график:
1) $f(x) = x^3 - 12x$;
2) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$.

Краткие теоретические сведения:
Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:
1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки.
3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
4) Записать интервалы, на которых функция возрастает $f'(x) > 0$ и убывает $f'(x) < 0$.
5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:
1) Найти вторую производную.
2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
4) Если $f''(x) > 0$, то график выпуклый вниз. Если $f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх.
5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.
Если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.
Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите функцию.
2. Используя общую схему, исследуйте функцию.
3. По результатам исследования постройте график функции

Ход работы:
1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это не вызывает затруднения) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции .
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.
9. Построить график функции.

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 3
Применение производной к решению практических задач

Цель работы: научиться применять производную функции при решении задач.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
– определять этапы решения задачи
– реализовывать составленный план
– находить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.;
– решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке :а)$[-1; 1]$;б) $[0; 3]$.

2. Имеется проволока длиной *a* метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

Краткие теоретические сведения:

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.

4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее .

Ход работы:

3. 1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на промежутке :а)$[-2; -0,5]$;б) $[1; 3]$.

Решение. Находим критические точки функции.

$$f^{/}(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 4)^{|} = -x^2 - 6x = -6x(x+1);$$

$f^{/}(x) = 0$; $-6x(x+1)$=0; $x = 0$ и $x = -1$. получили две критические точки: $x = 0$ и $x = -1$.

a) В промежутке $[-2; -0,5]$ лежит одна из критических точек:*x*= -1.

Так как $f(-2) = 8, f(-1) = 3. f(-0,5) = 3,5,$ то наименьшее значение функция $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ достигает в точке $x = -1$ и равно 3, а наибольшее - в точке $x = -2$ и равно 8.. Кратко это можно записать так: $\min_{[-2;-0,5]} f(x) = f(-1) = 3. \max_{[-2;-0,5]} f(x) = f(-2) = 8.$

б) Отрезку $[1; 3]$ не принадлежит ни одна из критических точек, поэтому найдём значения функции на концах отрезка:

$f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = -1. [1;3]; f(3) = -2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = -77.$. Кратко это можно записать так: $\min_{[\ \ 1;3]} f(x) = f(3) = -7;. \max_{[1;3]} f(x) = f(1) = -1.$

2 Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найдите эти слагаемые.

Решение. Пусть заданное число представлено в виде суммы двух слагаемых x и *y*,т.е.86= $x + y$. Выразим второе слагаемое через *x:*

y=86-x.Запишем произведение этих чисел в виде функции от *x*:$f(x) = x \cdot (86 - x)$ Найдём значение x, при котором функция

$f(x) = x \cdot (86 - x)$ достигает максимума..Найдём производную$f^{/}(x)$ и приравняем её нулю. $f^{/}(x) = (x \cdot (86 - x))^{/} = (86x - x^2)^{/} = 86 - 2x = 2(43 - x),$

$2(43 - x) = 0, x = 43.$

Определим второе слагаемое: $y = 86 - x = 86 - 43 = 43.$

Ответ: $x = 43\ ; y = 43.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 4
Методы вычисления неопределенных интегралов. Метод замены.

Цель работы:
Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
– вычислять неопределенный интеграл различными методами
Материальное обеспечение:
– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
– комплект дидактического раздаточного материала.
Задание:
Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.
Краткие теоретические сведения:
$\int f(x)dx = F(x) + C$, *где* $C = const$
$\int$ – значок интеграла.
$f(x)$ – подынтегральная функция.
dx – знак дифференциала.
$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.
$F(x)$ – первообразная функции.
$F(x)+C$ – множество первообразных функций.
C - константа.
Решить интеграл – это значит найти определенную функцию $F(x)+C$, пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей.
Непосредственное интегрирование – это нахождение неопределенных интегралов с использованием таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла.

1) $\int dx = x + C;$
2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1);$
3) $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C;$
4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C;$
5) $\int e^x dx = e^x + C; \int e^{kx+b}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx+b} + C$
6) $\int sin\,x\,dx = -cos\,x + C; \int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b)$
7) $\int cos\,x\,dx = sin\,x + C; \int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b)$
8) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C;$
9) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C;$

Метод подстановки (интегрирование заменой переменной)

Алгоритм вычисления неопределенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверять дифференцированием.

Пример типового расчета:

$\int(2x^3+1)^4 xdx$

Введем подстановку:

$t = 2x^3 + 1.$

Дифференцируя это равенство, имеем: $dt = 6x^2dx.$

Выразив отсюда x^2dx, получим: $x^2dx = \frac{dt}{6}$. Подставив в данный интеграл вместо $2x^3+1$ и x^2dx их выражения, получим:

$$x^2dx = \int t^4 \cdot \frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int t^4\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5} +$$

$$\int(2x^3+1)^4 C = \frac{t^5}{30} + C = \frac{(2x^3+1)^5}{30} + C$$

1. Метод интегрирования по частям

$\int udu = uv - \int vdu$

Если подынтегральная функция представляет собой произведение либо тригонометрической функции на алгебраическую, либо показательной на алгебраическую, то за u следует принимать алгебраическую функцию.

Пример 1.

Вычислить интеграл:

$$\int x^2 \ln x\, dx$$

Решение:

Здесь подынтегральное выражение содержит логарифм. Тогда

$$du = \frac{d\ln x}{dx}\,dx = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x},$$

$$v = \int x^2 dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1} = \frac{1}{3}x^3.$$

$$I = \int x^2\ln x\,dx = \int \ln x\cdot x^2\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \ln x\cdot\frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{3}x^3\frac{dx}{x} =$$

$$\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx.$$

Вычисляем оставшийся интеграл:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1} = \frac{1}{3}x^3.$$

Тогда

$$I = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

Пример 2. $\int x\cos x dx = \left|\begin{matrix} u=x \\ dv=\cos x dx\end{matrix}\quad \begin{matrix} du=u'(x)\cdot dx=x'dx=dx \\ v=\int\cos x dx=\sin x\end{matrix}\right| = x\cdot\sin x - \int\sin x dx =$

$= x\cdot\sin x - (-\cos x) + C.$

Пример 3.

$$\int(3x-2)e^{2x-5}dx = \left|\begin{matrix} u=3x-2 & du=u'(x)\cdot dx=3dx \\ dv=e^{2x-5} & v=\int e^{2x-5}dx=\frac{1}{2}e^{2x-5}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}(3x-2)e^{2x-5}-\frac{3}{2}\int e^{2x-5}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(3x-2)e^{2x-5}-\frac{3e^{2x-5}}{4}+C.$$

Пример 4.

$$\int \ln x dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x & du=u'(x)\cdot dx=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx & v=\int dx=x\end{matrix}\right| = x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x-\int 1dx = x\ln x - x + C.$$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Найти неопределённый интеграл, использую таблицу интегралов.

2.1 $\int(4\cos x+2\sin x)dx$	**2.6** $\int\left(\frac{1}{x}+3e^x\right)dx$	**2.11** $\int(\frac{4}{\cos^2 x}-2e^x)dx$
2.2 $\int(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{\sin^2 x})dx$	**2.7** $\int(\frac{2}{x^5}-3\cos x)dx$	**2.12** $\int\left(2e^x-\frac{8}{x}\right)dx$
$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$ **2.3**	**2.8** $\int\sqrt{(1-\cos 2x)}\ dx$	**2.13** $\int tg^2 x dx$
2.4 $\int\frac{x^2-4}{x+2}dx$	**2.9** $\int\frac{2x^2+3x-2}{x+2}dx$	$\int\frac{x^2+2x-15}{x-3}dx$ **2.14**
2.5 $\int\frac{3x^2+x^7}{x^2}dx$	**2.10** $\int\frac{x^2+7x+12}{x(x+3)}dx$	**2.15** $\int\frac{x-1}{x^2-x}dx$

2. Найти неопределённый интеграл методом подстановки.

3.1 $\int(4x-2)^3dx$	**3.6** $\int(8x+1)^5dx$	$\int(3-5x)^6dx$ **3.11**
3.2 $\int\frac{5}{2x-7}dx$	**3.7** $\int\frac{4}{2+7x}dx$	$\int\frac{2}{4x-8}dx$ **3.12**
3.3 $\int\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)dx$	**3.8** $\int 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$	**3.13** $\int 4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$
3.4 $\int e^{6x-9}dx$	**3.9** $\int 2e^{4-2x}dx$	**3.14** $\int 5e^{10x+2}dx$
3.5 $\int\frac{2}{\cos^2(4x+1)}dx$	**3.10** $\int\frac{6}{\sin^2(2x-1)}dx$	**3.15** $\int\frac{3}{\cos^2(9x-2)}dx$

3. Найти неопределённый интеграл методом подстановки.

4.1 $\int \frac{2x dx}{6+x^2}$ $z = 6 + x^2$	**4.4** $\int \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$ $z = lnx$	**4.7** $\int tgx dx$
4.2 $\int \frac{e^x dx}{2+3e^x}$ $z = 2 + 3e^x$	**4.5** $\int \frac{x^2 - x}{(x-3)^2} dx$ $z = x - 3$	**4.8** $\int x\sqrt{2-x}\, dx$ $z^2 = 2 - x$
4.3 $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}$ $z = e^x - 1$	**4.6** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ $x = \frac{1}{z}$	**4.9** $\int \frac{cosx dx}{\sqrt{1 - cos2x}}$

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 5

Применение формулы Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона – Лейбница
- структурировать получаемую информацию

Материальное обеспечение:

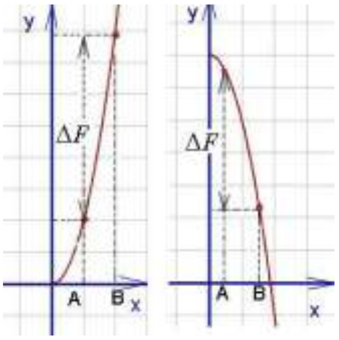
- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Определённым интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись



$$\int_a^b f(x)dx.$$

Как видно на графиках внизу (приращение первообразной функции обозначено ΔF), **определённый интеграл может быть как положительным, так и отрицательным числом** (Вычисляется как разность между значением первообразной в верхнем пределе и её же значением в нижнем пределе, т. е. как $F(b) - F(a)$).

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования.

Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница.

Разность $F(b) – F(a)$ кратко записывают так:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Поэтому формулу Ньютона-Лейбница будем записывать и так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Докажем, что определённый интеграл не зависит от того, какая первообразная подынтегральной функции взята при его вычислении. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ – произвольные первообразные подынтегральной функции. Так как это первообразные одной и той же функции, то они отличаются на постоянное слагаемое: $\Phi(x) = F(x) + C$. Поэтому

$$\Phi(b) - \Phi(a) =$$
$$= \left[F(b) + C\right] - \left[F(a) + C\right] = F(b) - F(a).$$

Тем самым установлено, что на отрезке $[a, b]$ приращения всех первообразных функции $f(x)$ совпадают.

Таким образом, для вычисления определённого интеграла необходимо найти любую первообразную подынтегральной функции, т.е. сначала следует найти неопределённый интеграл. Постоянная C из последующих вычислений исключается. Затем применяется формула Ньютона-Лейбница: в первообразную функцию подставляется значение верхнего предела b, далее - значение нижнего предела a и вычисляется разность $F(b) - F(a)$. Полученное число и будет определённым интегралом..

При $a = b$ по определению принимается

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Пример 1**.** Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\ dx.$$

<u>Решение</u>: сначала найдём неопределённый интеграл:

$$\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + C.$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к первообразной

$$\frac{3}{4} x\sqrt[3]{x}$$

(при $C = 0$), получим

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\ dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}\bullet 8\sqrt[3]{8} - 0 = 12.$$

Однако при вычислении определённого интеграла лучше не находить отдельно первообразную, а сразу записывать интеграл в виде (39).

Пример 2. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 e^{2x}dx.$$

Решение: используя формулу

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,$$

получим

$$\int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1).$$

Свойства определённого интеграла

1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю*, т.е.

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0.$$

2. *Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования*, т.е.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

4. *Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\,dx \right] =$$

$$= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b \varphi(x)\ dx - \int_a^b \psi(x)\ dx.$$

5. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям*, т.е. если

$c \in [a,b]$,

то

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

6. *При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак*, т.е.

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Пример 3. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx.$$

Решение : используя теоремы 4 и 3, а при нахождении первообразных – табличные интегралы (7) и (6), получим

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx =$$

$$= 4\int_1^2 \frac{dx}{x} - 5\int_1^2 x^4 dx + 2\int_1^2 \sqrt{x}\, dx =$$

$$= 4\ln|x|\Big|_1^2 - 5\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + 2\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2 =$$

$$= 4(\ln 2 - \ln 1) - (2^5 - 1^5) + \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}\right) =$$

$$= 4\ln 2 + \frac{8}{3}\sqrt{2} - 32\frac{1}{3}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. **Вычислить определённый интеграл.**

1.1 $\int_{-1}^{2} 25x^4 dx$	**1.6** $\int_{-1}^{2} 8x^3 dx$	**1.11** $\int_{-1}^{2} 64x^7 dx$
1.2 $\int_{0}^{1} (2x^2 + x - 1) dx$	**1.7** $\int_{0}^{2} (x^3 - 1) dx$	**1.12** $\int_{0}^{4} (3 + x^3) dx$
1.3 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2cosx dx$	**1.8** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$	**1.13** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} sinx dx$
1.4 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$	**1.9** $\int_{0}^{4} \frac{dx}{16 + x^2}$	**1.14** $\int_{1}^{2} \frac{2dx}{x}$
1.5 $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$	**1.10** $\int_{0}^{\pi} cos\frac{x}{2} dx$	**1.15** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin2x dx$

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл	вербальный аналог

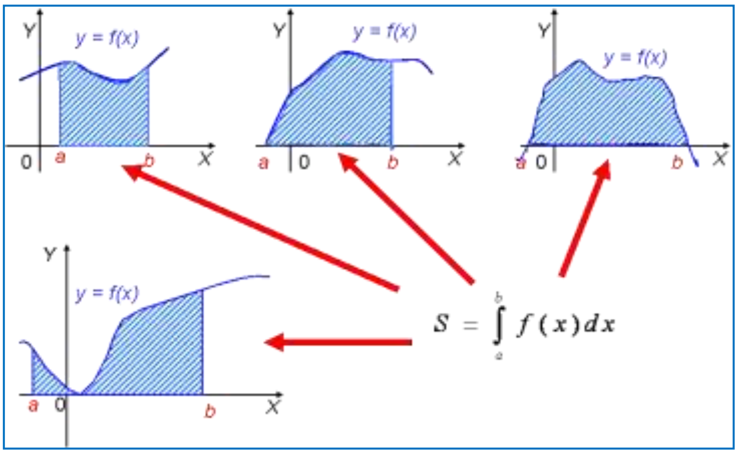
	(отметка)	
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.2 Интегральное исчисление

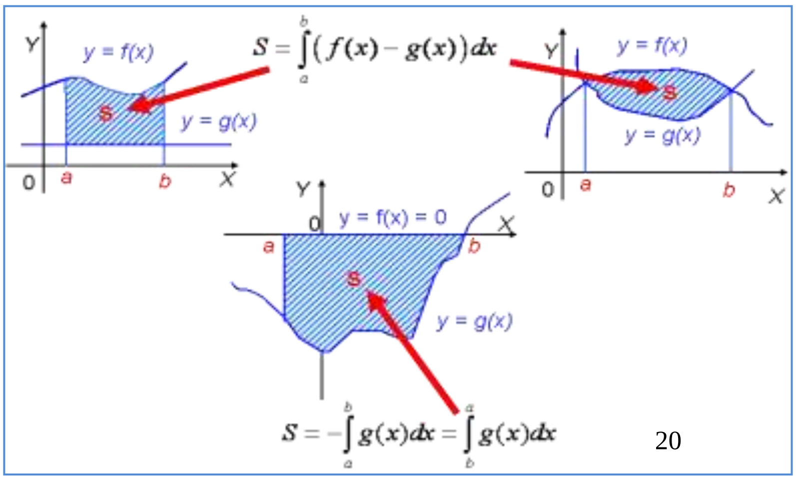
Практическое занятие № 6

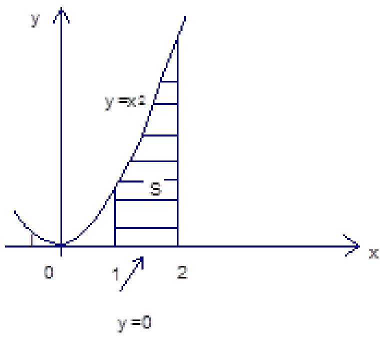
Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Цель работы:
Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– определять этапы решения задачи
– вычислять значения геометрических величин
– выполнять точные расчеты площадей фигур неправильной формы
Материальное обеспечение:
– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
– комплект дидактического раздаточного материала.
Задание:
Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.
Краткие теоретические сведения:



Пример 1.
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2.$
Решение. Построим фигуру на координатной плоскости. Вот искомая площадь:





$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)$

Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:

Пределы интегрирования $a = 1, b = 2, f(x) = x^2$.

$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$.

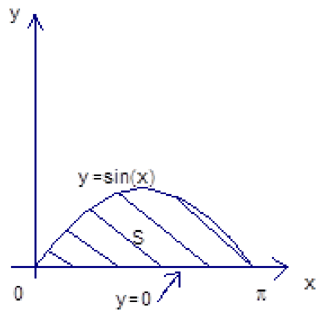
Ответ: $\frac{7}{3}$

Пример 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$.

Решение: Построим фигуру на координатной плоскости.

Фигура, ограниченная линиями $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$



Формула та же самая: $S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

В нашем случае $a = 0, b = \pi, f(x) = \sin x$. Итак, надо найти определенный интеграл

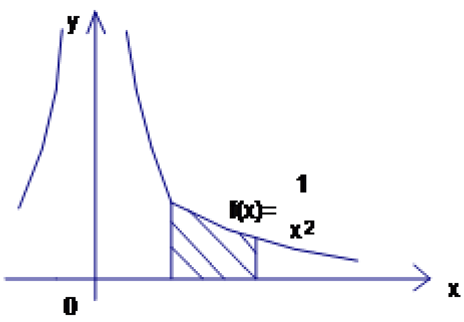
$S = \int_0^\pi \sin x\, dx = (-\cos x)|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0)$=-(-1)+1=1+1=2.

Искомая площадь найдена, и ответ получен.

Ответ: 2

Пример 3. ***Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2.$

Решение. Построим фигуру на координатной плоскости.



Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2$

Формула для площади та же самая:

$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

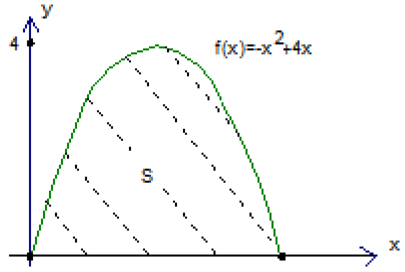
В нашем случае $a = 1, b = 2, f(x) = \frac{1}{x^2}$

$S = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{(-1)}|_1^2 = -\frac{1}{x}|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$

Пример 4. ***Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y = -x^2 + 4x, y = 0.$

Решение. Схематически изобразим параболу $y = -x^2 + 4x$. Корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.



Парабола $y = -x^2 + 4x$

Применим известную формулу $S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

И применим ее для данной функции $y = -x^2 + 4x$ и пределов интегрирования

$a = 0, b = 4.$

$S = \int_0^4(-x^2 + 4x)dx = (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2)|_0^4 = (-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2)|_0^4 = (-\frac{4^3}{3} + 2 * 4^3) - 0 = \quad = \frac{-64+96}{3}$

$\frac{32}{3}$.Искомая площадь найдена. $S=\frac{32}{3}$.

Ответ: $\frac{32}{3}$

В предыдущих задачах площадь образовывалась с помощью разных кривых, но эта площадь находилась над осью x. В следующей задаче наоборот.

Пример 5. ***Случай, если фигура находится под осью: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y=\sin x, y=0, x\epsilon[\pi, 2\pi]$.

<u>Решение.</u> Посмотрим, что это за фигура. График $y=\sin x$ в пределах от π до 2π расположен под осью *Ox* .

1. Сначала вычисляем определенный интеграл от π до 2π от подынтегральной функции $y=\sin x$.

Надо найти первообразную.

По таблице первообразных: $\int \sin x dx = -\cos x + c$.

$S=\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = (-\cos x)|_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi)$=-1-1=-2.

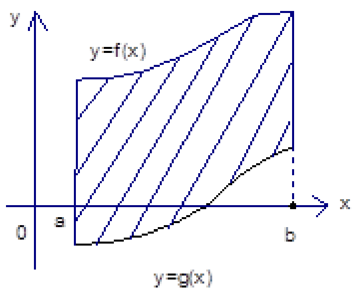
2. Для того чтобы найти площадь, надо взять модуль $S=|-2|$=2.

Ответ: 2.

Пример 6**.** *Общий случай для нахождения площади плоской фигуры, ограниченной двумя кривыми***.**

Следующее усложнение – искомая площадь расположена между двумя кривыми. А именно: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=f(x), y=g(x), x=a, x=b, g(x)\le f(x)$.

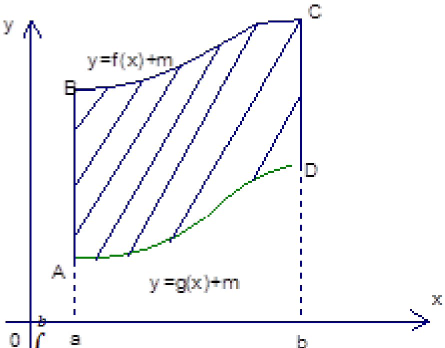


Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x), y=g(x), x=a, x=b, g(x)\le f(x)$

<u>Решение.</u> Итак, площадь образуют 2 кривые, одна из них может находиться под осью *Ox*.

Каким образом мы будем решать эту задачу?

Во-первых, мы можем сдвинуть фигуру на такое положительное m, что площадь находится над осью x.



Сдвиг фигуры, затем мы возьмем соответствующий определенный интеграл и найдем площадь. Искомая площадь равна разности двух площадей.

Площадь под верхней кривой $y=f(x)$ минус площадь под нижней кривой $y=g(x)$.

Каждую из площадей мы умеем находить.

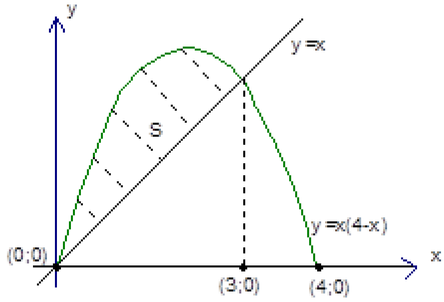
$$S=\int_a^b (f(x)+m)dx - \int_a^b (g(x)+m)\,dx = \int_a^b (f(x)+m-g(x)-m)dx$$

$$=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Пример 6. ***Найти площадь фигуры, ограниченную линиями*** $y=-x^2+4x$ и $y=x$.

<u>Решение</u>. Для начала построим графики этих линий и поймем, где та площадь, которую нам надо искать. График квадратичной функции – парабола. Корни – 0, 4, ветви вниз. График прямой *y* = *x* – биссектриса первого координатного угла. Вот площадь, которую надо найти:

Но для этого сначала надо найти точки пересечения и решить стандартную задачу.



1. Находим точки пересечения. Для этого решаем систему:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = x \end{cases}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно *x*:

$$-x^2 + 4x = x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 0, x = 3$$

Мы нашли *x*, то есть, пределы интегрирования. Это первое важное действие. Теперь стандартное действие:

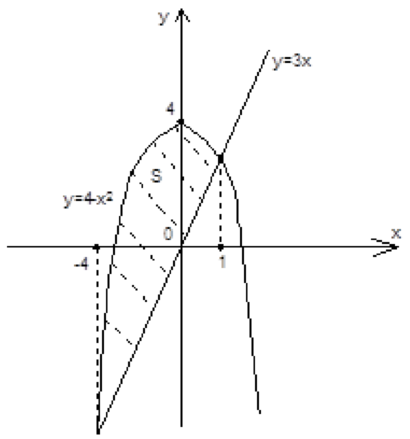
2. $S = \int_0^3(-x^2 + 4x - x)dx = \int_0^3(-x^2 + 3x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}|_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3*3}{2}\right) - 0 == 27\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 27\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{9}{2}$

Ответ: 4,5

Пример 7. *Случай, когда часть площади плоской фигуры лежит под осью.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2, y = 3x$$

<u>Решение.</u> Сначала построим графики, посмотрим, какую площадь нам нужно найти. Первая функция – парабола, ветви вниз. График второй функции – прямая линия. Есть две точки пересечения, их придется найти, а именно взять пределы интегрирования, и тогда будем решать задачу по знакомому нам плану.



Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2, y = 3x$

Первое действие – найти пределы интегрирования и второе – найти площадь.

Пределы интегрирования найдем из системы $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x \end{cases}$.

$$3x = 4 - x^2$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = -4, x = 1$$

То есть, пределы интегрирования найдены.

$S = \int_{-4}^1(4 - x^2 - 3x)dx = 4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}|_{-4}^1 = \left(4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(-16 + \frac{64}{3} - \frac{3*16}{2}\right) =$

$= (4 + 16 + 24) - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{44*6 - 65*2 - 3*3}{6} = \frac{164 - 139}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$

Ответ: $20\frac{5}{6}$

Порядок выполнения работы:

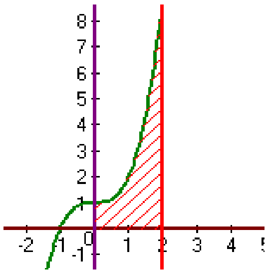
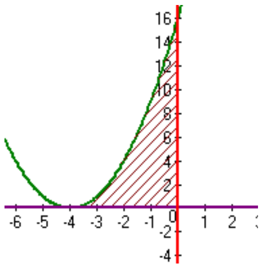
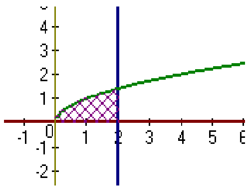
1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

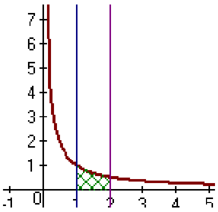
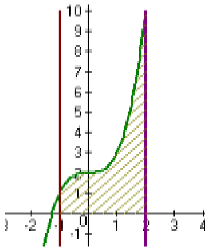
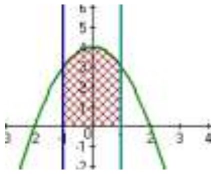
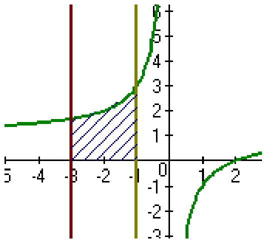
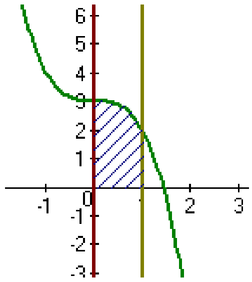
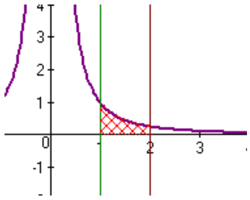
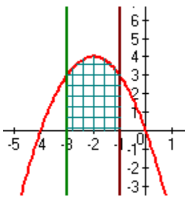
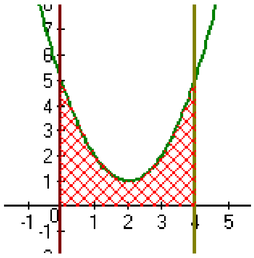
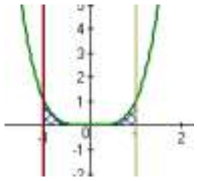
Ход работы:

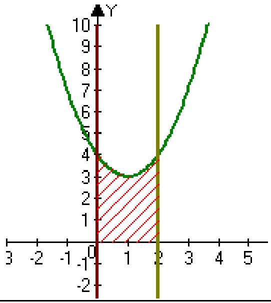
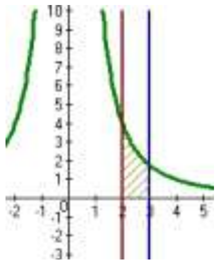
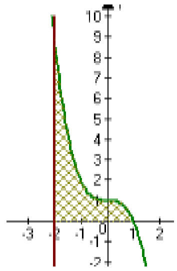
1. **Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями. Результат округлить до 10^{-2}.**

2.1 $y = 0$ $x = 0$ $y = x^2 - 4x + 4$	**2.6** $y = x^2 - 4x + 3$ $y = 0$ $x = 0$	**2.11** $y = x^2 + 5x + 6$ $y = 0$ $x = 0$
2.2 $y = x^2 - 4x + 3$ $x = -1$ $y = 0$	**2.7** $y = x^2 + 5x + 6$ $x = -4$ $y = 0$	**2.12** $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 0$ $y = 0$
2.3 $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 1$ $y = 0$	**2.8** $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -1$ $x = 0$	**2.13** $y = -2x^2 + 4$ $x = 1$ $x = -1$
2.4 $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -2$ $x = -1$	**2.9** $y = 2\sqrt{x}$ $x = 4$ $x = 1$	**2.14** $y = x^4$ $x = 1$ $x = 0$
2.5 $y = \frac{4}{x}$ $x = 2$ $x = 3$	**2.10** $x = 2$ $x = 0$ $y = 2x + 3$	**2.15** $y = -4x + 1$ $x = 0$ $x = -2$

2. **Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке.**

3.1 $y = x^3 + 1$ $y = 0, x = 0, x = 2$ 	**3.6** $y = x^2 + 8x + 16$ $y = 0, x = 0$ 	**3.11** $y = \sqrt{x}$ $y = 0$ $x = 2$ 

3.2 $x = 2$ $y = 0 \quad y = \dfrac{1}{x^2}$ 	**3.7** $y = x^3 + 2$ $x = -1$ $x = 2$ 	**3.12** $y = 4 - x^2$ $x = -1$ $x = 1$ 
3.3 $x = -1$ $x = -3$ $y = \dfrac{-2}{x} + 1$ 	**3.8** $y = -x^3$ $x = 0$ $x = 1$ 	$y = \dfrac{1}{x^2}$ **3.13** $x = 1$ $x = 2$ 
3.4 $y = -x^2 - 4x$ $x = -3$ $x = -1$ 	**3.9** $y = x^2 - 4x + 5$ $x = 0$ $x = 4$ 	**3.14** $y = x^4$ $x = -1$ $x = 1$ 

3.5	3.10	3.15
$y = x^2 - 2x + 4$ $x = 0 \quad x = 2$ 	$y = \frac{16}{x^2} \quad x = 2$ $x = 3$ 	$y = 1 - x^3$ $x = -2$ 

Форма представления результата:
Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 7
Физические приложения определенного интеграла.

Цель работы: научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

Задание:
1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.
2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.

3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?

4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.

5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Краткие теоретические сведения:

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е $v(t)=\frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что dS = v(t)dt. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$

Пусть материальная точка перемещается вдоль оси ох под действием переменной силы $F=F(x)$, направленной параллельно оси. Тогда работа, произведённая силой F при перемещении точки из положения $x=a$ в положение $x=b\,(a<b)$ вычисляется по формуле:

$$A=\int_a^b F(x)dx$$

Вычисление работы с помощью определённого интеграла.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка М движется по прямой в направлении оси OX. Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки М из положения $x=x_1$ в положение $x=x_2$.

1) Если сила постоянна $f(x)=C$, то работа выражается следующим образом $A=C(x_2-x_1)$.

2) Если сила переменная величина, то $A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила Р давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле:

$P=9{,}81\gamma hS$ (4), где γ – плотность жидкости.

$$P=9{,}81\gamma\int_a^b xy\,dx \ (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то а=0 и формула (5) примет вид

$$P=9{,}81\gamma\int_a^b xy\,dx \ (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины х погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P=9{,}81\gamma\int_a^b xy\,dx=9{,}81\gamma y\int_a^b x\,dx=9{,}81\gamma y\frac{x^2}{2}\int_a^b=9{,}81\gamma y\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Пример 1. Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела v(t) = 10t + 2 (м/с).

Решение: Если v(t)=10t+2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t+2)\,dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (м).$$

Ответ. S = 88 (м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно,F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12,5 \ (Дж).$$

Пример 3. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/$м^3$. Следовательно,

$$P = 9810\int_a^b xy\,dx = 9810\int_a^b x\,dx = 9810\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5} = 9810\,\frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430\ (H).$$

Выполнить задания:

1. Найти работу производимую при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия её на 0,005 м нужно приложить силу в 10 Н.

Ответ: 0,9 Дж.

2. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3 Н. Найти работу, которую надо произвести, чтобы растянуть эту пружину на 0,05 м

Ответ: 0,075 Дж.

3. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0;3]$, если плотность задается функцией $\rho(x) = x^4 - 3x$, равна …

4. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

Ответ: 125 Дж.

5. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины на 15 см, если известно, что для сжатия пружины на 1 см необходима сила в 30 Н.

Ответ: 33,75 Дж.

6. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины а 0,08 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна Сида в 25 Н.

Ответ: 8 Дж.

7. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t^2 - t + 1$ (м/с). Найти путь, пройденный за первые 3 с.

Ответ: 16,5 м.

8. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t + a$ (м/с). найти значение параметра a, если известно, что за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ (с) тело прошло путь длиной 40 м.

Ответ: $a = 18$.

9. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 12t - t^2$ (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала пути, до его остановки.

Указание: в моменты начала и остановки скорость тела равна нулю.

Ответ: 288 м.

10. Найти путь, пройденный точкой за третью секунду, зная скорость её прямолинейного движения $v(t)=3t^2-2t-3$ (м/с).

Ответ: 11 м.

11. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. одно тело двигалось со скоростью $v_1(t)=3t^2+2t$ (м/с), другое со скоростью $v_2(t)=2t$ (м/с). определить расстояние между телами через 2 секунды.

Ответ: 8м.

12. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0;2]$, если плотность задается функцией $\rho(x)=6x^2-3x$, равна …

13. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=(3t^2+8t)$. Тогда путь, пройденный телом за промежуток времени от $t=1$ до $t=4$, равен …

14. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой $v(t)=(12t-3t^2)$ (м/с). Тогда длина пути, пройденного телом от начала его движения до остановки, равна …

Пример 4.1. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

По закону Гука упругая сила F, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т.е. $F=kx$, где k – коэффициент пропорциональности. По условию сила $F=100$ Н растягивает пружину на $x=0{,}01$ м, т.е. $100=k\cdot 0{,}01 \Rightarrow k=10000$. Тогда $F=kx=10000x$.

Вычислим работу:

$$A=\int_0^{0{,}05} 10000x\,dx=10000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}05}=5000x^2\Big|_0^{0{,}05}=5000\cdot 0{,}05^2=12{,}5 \text{ (Дж)}$$

Определённый интеграл применяют для вычисления пути S прямолинейного движения.

Путь S, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t=a$ до $t=b$, равен определённому интегралу от скорости $v(t)$:

$$S=\int_a^b v(t)dt$$

Пример 4.2. Вычислить путь, пройденный точкой за 4 секунды от начала движения, если скорость точки $v=2t+4$ (м/с).

По условию: $v(t)=2t+4, a=0, b=4$.

Тогда $S=\int_0^4 (2t+4)dt=2\frac{t^2}{2}\Big|_0^4+4t\Big|_0^4=4^2+4\cdot 4=32$ (м/с).

Пример 4.3. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0;6]$, если плотность задается функцией $\rho(x)=2x^2+3$, равна …

В качестве модели стержня принимается отрезок $[a;b]$ на оси OX, длина которого совпадает с длиной стержня и в каждой точке которого задано значение плотности $\rho(x)$. Тогда массу стержня можно вычислить по формуле $m = \int_a^b \rho(x)dx$.

Используя условие задачи, получим $m = \int_0^6 \left(2x^2+3\right)dx = \left(\frac{2x^3}{3}+3x\right)\Big|_0^6 = \frac{2\cdot 6^3}{3}+18 = = 144+18 = 162.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 8

Решение прикладных задач с использованием дифференциального и интегрального вычисления

Цель: научиться решать прикладные задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
– определять этапы решения задачи
– решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание: решите задачи

1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon=9t^2-2t-8$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 3 секунды от начала движения.

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1=(2t^2+4t)$м/с м/с, второе – со скоростью $v_2=(3t+2)$м/м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 с?

3. Сила упругости F пружины, растянутой на $1_1=0{,}02$м, равна 2Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на $1_2=0{,}05$м?

4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для ее сжатия на 0,01 нужна сила 10 Н.

Краткие теоретические сведения:

п/п	Физическая величина	Формула	Единицы измерения
	Путь, пройденный точкой с переменной скоростью $\upsilon(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$	$S=\int_{t_1}^{t_2}\upsilon(t)dt$	t_1, t_2 - с; $\upsilon(t)$ – м/с; S – м.
	Работа переменной силы f(x) на пути от точки a до точки b	$A=\int_a^b f(x)dx$	f(x) – Н; a; b – м; A – Дж.
	Сила давления жидкости на вертикальную пластину	$P=g\int_a^b pxf(x)dx$	$g=9{,}8$ м/с^2; p – кг/м^3; a; b – м; p – Н.

Порядок выполнения работы

Образец решения:

1. Задача о вычислении пути

Пример 1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon=2t+3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\upsilon(t)dt, \qquad (1)$$

Формула(1)

Решение.

1. $t_1=0$с; $t_2=5$с.

2. По формуле (1) найдем путь, пройденный телом за 5 сек.

$$S=\int_0^5 (2t+3t^2)dt = (t^2+t^3)\Big|_0^5 = 150(м).$$

Ответ. S=150 м.

Пример 2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1=(6t^2+2t)$м/с, второе – со скоростью $v_2=(4t+5)$м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение. Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

$$S_1=\int_0^5 (6t^2+2t)dt = (2t^2+t^3)\Big|_0^5 = 275(м)$$

$$S_2=\int_0^5 (4t+2)dt = (2t^2+5t)\Big|_0^5 = 75(м)$$

Таким образом, $S= S_1 - S_2 = 275-75=200$(м).

2.Задача о вычислении работы переменной силы.

Работа A этой силы F вычисляется по формуле:

$$A=F*s, \qquad (2)$$

Где S – перемещение, м.

Если F – сила упругости, то по закону Гука

$$F=kx, \qquad (2^*)$$

где x- величина растяжения или сжатия,

k – коэффициент пропорциональности.

Работа переменной силы вычисляется по формуле (4)

$$A=\int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

Пример. Сила упругости F пружины, растянутой на $1_1=0{,}05$м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на $1_2=0{,}1$м?

Решение

1. Определим коэффициент пропорциональности k.

Подставим формулу (2*) F=3 Н, x = 0,05 м:

3=k*0,0,5, т.е. k=60, следовательно, F=60x=f(x).

2. Подставив F=60x в формулу (3), найдем значение работы переменной силы, полагая, что a=0; b=0,1:

$$A=\int_0^{0,1} 60x\,dx = 30x^2\Big|_0^{0,1} = 0{,}3 Дж$$

Ответ. А = 0,3Дж.

3. **Задача о силе давления жидкости.**

Согласно закону Паскаля величина P давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P=gphS, \tag{4}$$

Где g – ускорение свободного падения в м/с^2;

p – плотность жидкости в кг/м^3;

h– глубина погружения площадки в м;

S – площадь площадки в м^2;

Сила давления жидкости на вертикальную пластину вычисляется по формуле (5)

$$P=g\int_a^b pxf(x)dx. \tag{5}$$

Пример.

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4мх0,7м.

Решение

1. Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому f(x)=0.7x, где $x\in[0;0,4]$, поэтому пределы интегрирования a=0 и b=0,4.

2. Для нахождения силы давления воды на стену воспользуемся формулой (5).

$$P=g\int_0^{0,4} 1000*0,7*xdx=700\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,4}=56g\approx549H$$

g=9,8 м/с^2 ускорение свободного падения.

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент	Качественная оценка индивидуальных

результативности (правильных ответов)	образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 9
Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения I порядка с разделяющими переменными. Научиться находить общие и частные решения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– структурировать получаемую информацию

– разделять переменные для решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными;

– находить общее решение дифференциального уравнения;

– выделять из общего решения частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решать задачу Коши).

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$

б) $(y-1)^2dx + (1-x^3)dy = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$dy = (3x^2 - 2x)dx$ *, если y=4 при x=*

Порядок выполнения работы:

1) Привести данное уравнение к уравнению с разделяющими переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:

а) Производные функции заменить её дифференциалами;

б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;

в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих" дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$

2) Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

3) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0 : y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постояннойС ,а затем С подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

1) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6xdx + 3xy^2dx) - (6ydy + 2x^2ydy) = 0$$

Сгруппируем члены с *dx* и *dy*

$$3x(2 + y^2)dx - 2y(3 + x^2)dy = 0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3 + x^2} = \frac{2ydy}{2 + y^2}$$

-Интегрируем

$$3\int \frac{xdx}{3 + x^2} = 2\int \frac{ydy}{2 + y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2}\ln(3 + x^2) = \ln(2 + y^2) + \ln c$$

$$\ln(3 + x^2)^{\frac{3}{2}} = \ln(2 + y^2) \cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3 + x^2)^3} = (2 + y^2) \cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3 + x^2)\sqrt{3 + x^2}}{2 + y^2} = c$$

2) Найти частные решение дифференциальных уравнений

$2(y - 3)dx - dy = 0$ *при x=0 , y=4*

-Разделим переменные

$$dy = 2(y - 3)dx$$

$$\frac{dy}{y - 3} = 2dx$$

-Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y - 3} = \int 2dx$$

$$\ln(y - 3) = 2x + \ln c$$

-По определению логарифма $2x = \ln e^{2x}$

$$\ln(y - 3) = \ln(e^{2x} \cdot c)$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{2x} \cdot c + 3$$

-Подставим в это уравнение начальные условия *x=0 , y=4*

$4 = e^0 \cdot c + 3$=>*c=1*

-Запишем частное решение

$$y = e^{2x} + 3$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 10
Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы:
Научиться определять вид дифференциальных уравнений, находить общее и частное решение линейных дифференциальных уравнений I порядка.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- структурировать получаемую информацию
- определять вид дифференциального уравнения первого порядка;
- находить общее и частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:
1. Найти частное решение дифференциального уравнения
   a) $y^2 + x^2y' = xy \cdot y'$ *при* $y(1) = 1$
   b) $y' \sin x - y \cos x = 1$ *при* $x \frac{\Pi}{2}$, *y=1*

Порядок выполнения работы:
1. Линейное дифференциальное уравнение I порядка решается путем подстановки

$$y = u \cdot \vartheta; \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$$

Дифференциальное уравнение сводится к решению двух дифференциальных уравнений, с разделяющими переменными, сначала относительно u , потом-ϑ, где uиϑ неизвестные функции от *x*.

Ход работы:
1) Найти частное решение линейного дифференциального уравнения I порядка
$xy' + y = 3$, если *y=0, при x=1*

-Приведем уравнение к виду по определению

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$$

-Сделаем замену

$y = u\vartheta$; $\frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$

-Сгруппируем члены сϑ, получим

$\vartheta\left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right) = 0$, т.к. $\vartheta \neq 0$ =>$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$

-Разделим переменные

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

-Проинтегрируем

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\ln|x|$$

-Пропотенцируем

$$u = \frac{1}{x}$$

-Подставим u в оставшееся уравнение

$$\frac{1}{x}\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{3}{x}$$

$$d\vartheta = 3dx$$

-Проинтегрируем

$$\vartheta = 3x + c$$

-Подставим $y = u\vartheta$

$y = \frac{1}{x}(3x + c)$- общее решение

-Подставим начальные условия

$0 = 3 + c$ =>c=-3

$y = \frac{3}{x}(x - 1)$- частное решение

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 2.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 11

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять этапы решения задачи
- выполнять действия над комплексными числами

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

1. Даны комплексные числа : z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6).

Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_2 - z_3$;

3) z_1 / z_3;

4) $z_2 * z_3$;

5) z_1^5.

3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$

2. Выполните действия н

Ход работы:

Форма представления результата:

1**.**Даны комплексные числа : z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).

Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$z_1 = 7 + i$; $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$; $z_3 = 4 - 3i$

2**.**Выполнить действия в алгебраической форме:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_2 - z_3$;

3) z_1 / z_3;

4) $z_2 \cdot z_3$;

5) z_1^5.

Решение:

1) $z_1 + z_2 = (7-1,5)+(1+1,5)i = 5,5+2,5i$;)
2) $z_1 - z_3 = (7-4)+(1+3)i = 3+4i$;
3) $\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+21i+4i+3i^2}{16-(3i)^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1+i$
4) $z_2 \cdot z_3 = (-1{,}5+1{,}5i)(4-3i) = -6+4{,}5i+6i-4{,}5i^2 = -6+10{,}5i+4{,}5 = -2{,}5+10{,}5i$;
5) $z_1^5 = (7+i)^5 = ((7+i)^2)^2(7+i) = (49+14i+i^2)^2(7+i) = (48+14i)^2(7+i) =$
$(2304+1344i+196i^2)(7+i) =$

ад комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

$= (2108+1344i)(7+i) = 14756+2108i+9408i+1344i^2 = 13412+11516i$

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$$

Решение:

$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$=-2,1-2,8i

1) $\frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2-i^2} = \frac{-10i}{10} = -i$;

2) $\frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$

4) $-i+(-1{,}1-1{,}7i)-1 = -i-1{,}1-1{,}7i-1 = -2{,}1-2{,}8i$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 2.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 12
Переход от одной формы комплексных чисел к другой

Цель работы: иаучиться переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую и обратно**.**

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- определять этапы решения задачи
- выполнять действия над комплексными числами

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, четырехзначные математические таблицы Брадиса, калькуляторы.

Задание:
Даны комплексные числа : $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7{,}2;7{,}2)$, $z_3=(2;6)$.

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.
2. Вычислить:
   a. $\frac{z_1}{z_3}$;
   b. $z_2 * z_3$;
   c. z_1^5.
3. Извлечь квадратный корень из числа z_2.

4. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

а) $(3\cdot(cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}))^2$b) $\frac{24(cos75^0+isin\ 75^0)}{3(cos\,30^0+isin\,30^0)}$

Краткие теоретические сведения:
Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:
Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z=a+bi$.

1) Модуль$r=|z|$ однозначно определяется по формуле $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить , в какой четверти находится точка (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z=a+bi$
- Решив уравнение $tg\varphi=\frac{b}{a}$, получаем, что
  $\arg z=\varphi=arctg\frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z=\varphi=arctg\frac{b}{a}$ для внутренних точек 2 четверти,
$\arg z=\varphi=arctg\frac{b}{a}-\pi$ для внутренних точек 3 четверти.
Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме$z=r(cos\varphi+i\ sin\varphi)$или $z=re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:
1. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм.
2. Выполните действия в тригонометрической форме, используя правила:
$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+isin(\varphi_1+\varphi_2))$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа $z=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ используется формула :

$\omega_k=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Форма представления результата:

Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Число находится в первой четверти, значит $\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{1}{7} = arctg\,0,1429$.

Находим значение арктангенса по таблице Брадиса $\varphi=8°8'$.

$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + i\sin 8°8')$

2) $z_2 = -1,5 + 1,5i$

$|z_2| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{2,25+2,25} = \sqrt{4,5} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,1$

Число находится во второй четверти, значит $\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x} + \pi$

$\varphi = arctg(\frac{1,5}{-1,5}) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$z_2 = -1,5 + 1,5i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$;

3) $z_3 = 4 - 3i$

$|z_3| = \sqrt{16+9} = 5$

Число находится в четвертой четверти, значит $\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x}$

$\varphi = arctg(\frac{-3}{4}) = -arctg\,0,75 = -36°52'$

$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52') + i\sin(-36°52'))$

4.Извлечь квадратный корень из числа z_2.

Решение:

$z_2 = -1,5 + 1,5i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

Воспользуемся формулой:

$\omega_k=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$

В нашем примере n=2.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{2}) \approx \sqrt{2{,}1}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{2}) \approx \sqrt{2{,}1}(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}).$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 2.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 13
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической и показательной формах.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
–определять этапы решения задачи
– выполнять действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций
Задание:
4. Даны комплексные числа в тригонометрической форме:
$z_1 = 5\left(cos\frac{\pi}{9} + isin\frac{\pi}{9}\right)$ и $z_2 = 8\left(cos\frac{3\pi}{5} + i\ sin\frac{3\pi}{5}\right)$. Вычислите: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$; z_1^3; $\sqrt[5]{z_2}$
5. Выполните действия и запишите результат в показательной форме:

а) $(3 \cdot (cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}))^2$b) $\frac{24(cos75^0 + isin\ 75^0)}{3(cos\,30^0 + isin\ 30^0)}$

Краткие теоретические сведения:
Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде: $z = r \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$.
При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме z=r·(cos φ+isinφ) используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные в тригонометрической форме числа.
2. Используя конспект, выясните, как выполняются действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
3. Выполните заданные действия.

Форма представления результата :выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 14
Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;

– решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

– определять этапы решения задачи

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

.

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера:$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$;$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Порядок выполнения работы:

1.Запишите систему уравнений.

2.Запишите и вычислите определитель системы.

3.Вычислите определители каждой неизвестной.

4.Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 3.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 15
Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений матричным методом.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– определять этапы решения задачи
– составлять по данной системе линейных уравнений матричное уравнение;
– находить обратную матрицу;
– находить решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание: Решите системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 7x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 13 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:
Пусть задана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим матричное уравнение: $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$.

$X = A^{-1} \cdot B$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:
а) вычислить определитель матрицы А ($\Delta A \neq 0$);
б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицыА;
в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;
г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots & A_{m1} \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицуA^{-1}на матрицу B, состоящую из свободных членов.

Порядок выполнения работы:
1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим пример:
Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 12) = 14$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

$$A_{21} = -1;\quad A_{22} = 8;\quad A_{23} = 5;\quad A_{31} = 5;\ A_{32} = -10;\ A_{33} = -5.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 4.1. Элементы комбинаторики.

Практическое занятие № 16
Решение задач на основные понятия комбинаторики

Цель работы: осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:
1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Краткие теоретические сведения:

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1.Правило сложения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами, а другой элемент $B-n$ способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов(либо A, либо B) можно осуществить $m+n$ способами.

2.Правило умножения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача1. При формировании экипажа космического корабля имеется:10 претендентов на пост командира,20 претендентов на пост бортинженера,25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Решение. По правилу суммы существует 10+20+25=55способов выбора одной из кандидатур.

Задача2.В столовой предлагают два различных первых : a_1 и a_2 ;три различных вторых блюда: b_1, b_2, b_3 и два различных десерта: c_1 и c_2. Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

Решение. Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует $2 \times 3 \times 2$ =12 способов выбрать обед из трех блюд.

3. Подмножества n- множеств(соединения).

Для нахождения $k-$подмножеств некоторого $n-$множества нужно выбрать k из n его элементов (поэтому часто говорят о *выборке* k элементов из $n-$элементов). Про выбранные k из n различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из n элементов по k .*Соединение*-собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений: ***перестановки, размещения, сочетания.***

Перестановки.

Перестановками из $n-$элементов называются такие соединения из $n-$элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n!$

Размещения.

Размещениями из $n-$элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных $n-$элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем , и другим.

Обозначение $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из $n-$элементов по $n-$элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

Сочетания.

Сочетаниями из n- элементов по mназываются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение:$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Краткие теоретические сведения:

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1.Правило сложения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами, а другой элемент $B-n$ способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов(либо A, либо B) можно осуществить $m+n$ способами.

2.Правило умножения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача1. При формировании экипажа космического корабля имеется:10 претендентов на пост командира,20 претендентов на пост бортинженера,25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Решение. По правилу суммы существует 10+20+25=55способов выбора одной из кандидатур.

Задача2.В столовой предлагают два различных первых : a_1 и a_2 ;три различных вторых блюда: b_1, b_2, b_3 и два различных десерта: c_1 и c_2. Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

Решение. Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует $2\times3\times2=12$ способов выбрать обед из трех блюд.

3. Подмножества n- множеств(соединения).

Для нахождения $k-$подмножеств некоторого $n-$множества нужно выбрать k из n его элементов (поэтому часто говорят о *выборке* k элементов из $n-$элементов). Про выбранные k из n различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из n элементов по k .*Соединение*-собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений: ***перестановки, размещения, сочетания.***

Перестановки.

Перестановками из $n-$элементов называются такие соединения из $n-$элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n\,!$

Размещения.

Размещениями из $n-$элементов называются такие соединения , каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных $n-$элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем , и другим.

Обозначение $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из $n-$элементов по $n-$элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

Сочетания.

Сочетаниями из n- элементов по mназываются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение:$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1.Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2.Формула размещений имеет вид:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4\,, m = 10.$

3. Производим расчёт :$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

3 . Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!}$ =120.

3.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

1.По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2.Формула перестановок из п –элементов имеет вид: $P_n = n!$ В нашем случае n =4.

3.Произведём расчёт: P_4 =4!=4$\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$=24.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 4.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 17
Числовые характеристики выборки

Цель работы: рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– находить статистические характеристики выборки
– оформлять результаты поиска
Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.
Задание:
1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

.

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p$	p_2	$2p$	p	$2p$	$2p$

.

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4.Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x	2	4	6	8	10	12	14
n	p_2	$2p$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p

.

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2 = числу букв в Вашей фамилии; p_3 = числу букв в имени Вашего отца.

Краткие теоретические сведения в полном объёме имеются в лекции.
Порядок выполнения работы:
1 Прочитав условие предложенной задачи , по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2.Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик.выборки.

Ход работы:1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12;\ w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40;\ w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28;\ w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20.$$

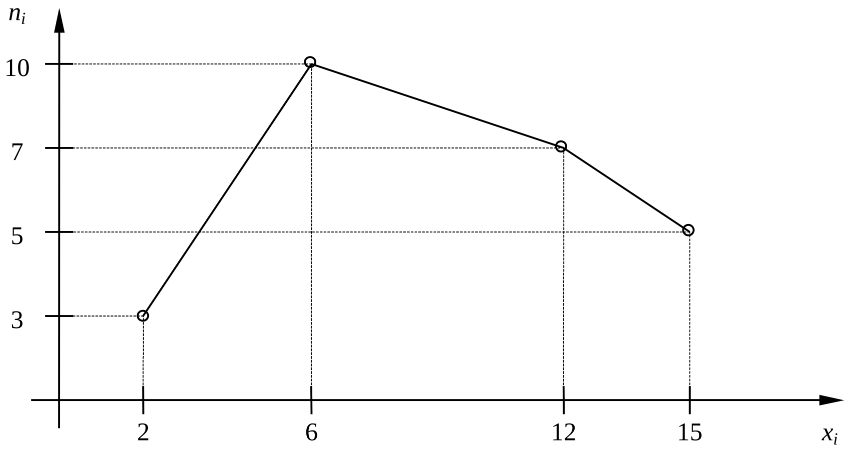
Следовательно,

x_i	2	6	12	15
w_i	0,1	0,4	0,2	0,2

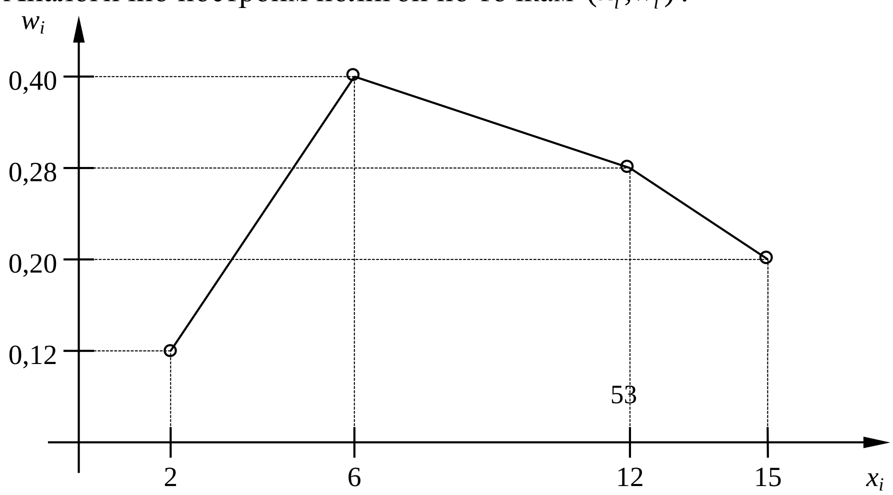
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

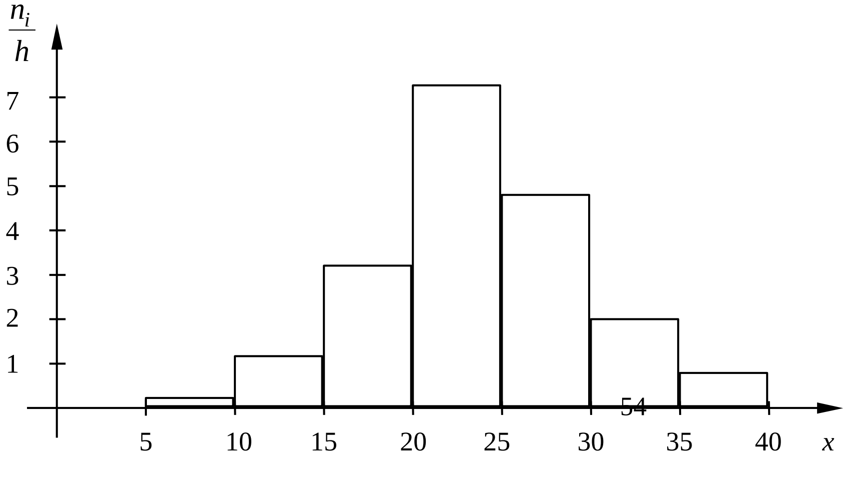
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$		№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2		5	4,8
2	1,2		6	2,0
3	3,2		7	0,8
4	7,2			

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

вариант x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_Г = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_Г = \frac{8\cdot 2 + 9\cdot 4 + 10\cdot 5 + 3\cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_Г = \overline{X_г^2} - \left(\overline{X}_Г\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_Г^2} = \frac{8\cdot 2^2 + 9\cdot 4^2 + 10\cdot 5^2 + 3\cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_Г = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_Г = \sqrt{D_Г} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4{,}5.$$

Размах вариации R: в примере $x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$, поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n	92	94	103	10	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92\cdot 1 + 94\cdot 2 + 103\cdot 3 + 105\cdot 4 + 106\cdot 5}{500} = 1{,}82\,.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92\cdot 1^2 + 94\cdot 2^2 + 103\cdot 3^2 + 105\cdot 4^2 + 106\cdot 5^2}{500} = 11{,}45\,.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14\,.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85\,.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно