Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для студентов специальности
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Магнитогорск, 2021

ОДОБРЕНО:
Предметной комиссией Математических и естественонаучных дисциплин

Председатель Е.С.Корытникова

Протокол № 6 от 17 февраля 2021

Составитель :
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» МпК Ю.М.Котельникова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на формирование общих и профессиональных компетенций по программе подготовки специалистов среднего звена по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Содержание практических ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 4.6 Анализировать финансово-хозяйственную деятельность, осуществлять анализ информации, полученной в ходе проведения контрольных процедур, выявление и оценку рисков;

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Разделы/темы	**Темы практических/лабораторных занятий**	**Количество часов**	**Требования ФГОС СПО (уметь)**
Раздел 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА		**1**	
Тема 1.1. Алгебраическая форма комплексного числа	Практическая работа №1 «Действия над комплексными числами в алгебраической форме	1	У01.2 У01.3 У01.9
Тема 1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа	Практическая работа № 2 «Действия над комплексными числами в тригонометрической форме»	Изучается самостоятельно	У01.2 У01.3 У01.9
Раздел 2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА		**2**	
Тема 2.1. Матрицы и определители	Практическая работа №3 «Действия с матрицами»	1	У01.2 У01.3 У01.9
	Практическая работа № 4 «Вычисление определителей»	Изучается самостоятельно	У01.2 У01.3 У01.9
Тема 2.2. Системы линейных уравнений	Практическая работа № 5 «Решение систем линейных уравнений методом Крамера»	1	У01.2 У01.3 У01.9
	Практическая работа № 6 «Решение систем линейных уравнений матричным методом»	Изучается самостоятельно	У01.2 У01.3 У01.9
	Практическая работа № 7 «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»	Изучается самостоятельно	У01.2 У01.3 У01.9
	Практическая работа № 8 «Решение систем линейных уравнений различными методами»	Изучается самостоятельно	У01.2 У01.3 У01.9
Раздел 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ		**2**	
Тема 3.1 Теория пределов	Практическая работа № 9 « Вычисление пределов функций»	Изучается самостоятельно	У01.2 У01.3 У01.9
	Практическая работа № 10 «Вычисление пределов. Избавление от неопределенностей»	Изучается самостоятельно	У01.2 У01.3 У01.9
Тема 3.2. Производная функции и ее	Практическая работа№ 11 «Дифференцирование сложных	1	У1 У 01.2

применение	функций»		У 01.3 У 01.9
	Практическая работа № 12 «Исследование функций на монотонность, экстремумы, выпуклость - вогнутость, перегиб»	Изучается самостоятельно	У1 У 01.2 У 01.3 У 01.9
	Практическая работа № 13 «Решение физических задач.»	Изучается самостоятельно	У1 У 01.2 У 01.3 У 01.9
Тема 3.3. Интеграл и его приложения	Практическая работа 14 «Вычисление неопределенных интегралов»	1	У1 У 01.2 У 01.3 У 01.9
	Практическая работа 15 «Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел»	Изучается самостоятельно	У1 У 01.2 У 01.3 У 01.9
	Практическая работа 16 «Решение физических и технических задач»	Изучается самостоятельно	У1 У 01.2 У 01.3 У 01.9
Раздел 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ		1	
Тема 4.1 Элементы комбинаторики, теории вероятности и математической статистики	Практическая работа №17 « Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики»	1	У 1 У 01.2 У 01.3 У 01.9
ИТОГО		**6**	

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 1

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель: научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: z1=(-3;-5), z2=(-7,2;7,2), z3=(2;6).
   Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:
   1) z1+ z2;
   2) z2 - z3;
   3) z1 ⁄ z3;
   4) z2 * z3;
   5) z15.
3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

Краткие теоретические сведения:

Комплексные числа в алгебраической форме записываются:

$z = a + bi$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме выполняются, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1.Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$z_1 = 7 + i$; $z_2 = -1,5 + 1,5i$; $z_3 = 4 - 3i$

2.Выполнить действия в алгебраической форме:

1) z_1+z_2;
2) z_2-z_3;
3) z_1/z_3;
4) $z_2 \cdot z_3$;
5) z_1^5.

Решение:

1) $z_1+z_2=(7-1,5)+(1+1,5)i=5,5+2,5i$;

2) $z_1-z_3=(7-4)+(1+3)i=3+4i$;

3) $\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+21i+4i+3i^2}{16-(3i)^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1+i$

4) $z_2 \cdot z_3 = (-1,5+1,5i)(4-3i) = -6+4,5i+6i-4,5i^2 = -6+10,5i+4,5 = -2,5+10,5i$;

5) $z_1^5 = (7+i)^5 = ((7+i)^2)^2(7+i) = (49+14i+i^2)^2(7+i) = (48+14i)^2(7+i) =$
$(2304+1344i+196i^2)(7+i) =$
$= (2108+1344i)(7+i) = 14756+2108i+9408i+1344i^2 = 13412+11516i$

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$$

Решение:

$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2,1-2,8i$

1) $\frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2-i^2} = \frac{-10i}{10} = -i$;

2) $\frac{4-5i}{1+3i}=\frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2}=\frac{-11-17i}{10}=-1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1$

4) $-i+(-1{,}1-1{,}7i)-1=-i-1{,}1-1{,}7i-1=-2{,}1-2{,}8i$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 2
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Цель: научиться записывать комплексные числа в тригонометрической форме, выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. 1 Даны комплексные числа: z1=(-3;-5), z2=(-7,2;7,2), z3=(2;6).
   Записать эти числа в тригонометрической форме.

2.Вычислите:
1) $z_2 \cdot z_3$;
2) $\frac{z_1}{z_3}$;

3) z_1^5;

4) $\sqrt{z_2}$;

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

а) $(3 \cdot (cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}))^2$ б) $\frac{24(cos75^0 + isin\ 75^0)}{3(cos\ 30^0 + isin\ 30^0)}$.

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$z = r \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$.

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$$
$$z^n = r^n(cosn\varphi + isin\ n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot (cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:
Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.

1) Модуль r =|z| однозначно определяется по формуле
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.
Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить , в какой четверти находится точка (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z = a + bi$
- Решив уравнение $tg\varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(cos\varphi + i\,sin\varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2. Выполните заданные действия.

Ход работы:
1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

Даны комплексные числа: z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).
1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.
Решение:
1) $z_1 = 7 + i$
$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,
Число находится в первой четверти, значит
$\varphi = arctg\frac{1}{7} = arctg\,0{,}1429$.
$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + isin8°8')$.
2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$
$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25+2{,}25} = \sqrt{4{,}5}$=2,1
Число находится во второй четверти, значит $\varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg\,(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;
$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = 2{,}1(\cos\frac{3\pi}{4} + isin\ \frac{3\pi}{4})$.
3) $z_3 = 4 - 3i$
$|z_3| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
Число находится в четвертой четверти, значит
$\varphi = arctg\frac{-3}{4} = arctg\,(-0{,}75) = -36°°52'$.
$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52^{'} + isin(-36°52^{'})$.
2. Вычислите:
1) $z_2 \cdot z_3$;
2) $\frac{z_1}{z_3}$;
3) z_1^5;
4) $\sqrt{z_2}$;
Решение:
$z_2 \cdot z_3 = 2{,}1 \cdot 5(\cos(135° - 36°52') + isin\,(135° - 36°52')) = 10{,}5(\cos 98°8' + isin\ 98°8')$;
$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}\left(\cos(8°8' - (-36°52')) + isin\,(8°8' + 36°52')\right) = \sqrt{2}(\cos 45° + isin45°)$;
$z_1^5 = (5\sqrt{2})^5(\cos 5 \cdot 8°8' + isin5 \cdot 8°8') = 12500\sqrt{2}(cos40°40' + isin40°40')$;
Воспользуемся формулой:
$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$
В нашем примере n=2.
$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(cos\,\frac{135° + 360°k}{2} + isin\,\frac{135° + 360°k}{2})$;
$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\,\frac{135° + 360° \cdot 0}{2} + isin\,\frac{135° + 360° \cdot 0}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 67°30' + isin\ 67°30')$;

$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\,\frac{135°+360°\cdot 1}{2} + isin\,\frac{135°+360°\cdot 1}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 247°30' + isin\, 247°30')$.

1. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$(2\cdot(cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24}))^6 = 2^6\left(cos\frac{5\pi}{24}\cdot 6 + isin\frac{5\pi}{24}\cdot 6\right) = 64\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right) = 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$$

$$\frac{24(cos75^0 + isin\,75^0)}{3(\cos 15^0 + isin\,15^0)} = \frac{24}{3}(\cos(75° - 15°) + isin(75° - 15°) = 8(cos60° + isin60°) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 4 + 4\sqrt{3}i$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.1 Матрицы и определители

Практическое занятие № 3

Действия над матрицами.

Цель: научиться выполнять действия над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны матрицы

$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,

найти $2A - B =$.

2.Даны матрицы

$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

Найти матрицу $A\times B-B\times A$.

3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1.Повторите правила и формулы.

2.Определите порядок действия в задании.

3.Для каждого действия примените соответствующую формулу.

4.Оформите решение.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1. Дано уравнение $A+X=B$. Здесь $A=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -5\end{pmatrix}$. Найти X.

Если $A + X=B$, то $X=B - A$. Каждый элемент разности двух матриц B и A равен разности соответствующих элементов данных матриц B и A. Тогда

$$X=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 7\\ -2 & -6\end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $B\times A-A\times B$.

Пусть $C=A\times B$. Тогда элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B

$$(c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}).$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot(-3)+2\cdot 1\\ 0\cdot 2+1\cdot(-1) & 0\cdot(-3)+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Аналогично имеем:

$$A\times B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-3)\cdot 0 & 2\cdot 2+(-3)\cdot 1\\ -1\cdot 1+1\cdot 0 & -1\cdot 2+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица

$$B\times A - A\times B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0-2 & -1-1 \\ -1-(-1) & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Выполним задание по действиям:

1) $2\text{x}C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

2) 2CB=

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4\cdot 2 + 2(-1) & 4\cdot(-1) + 2\cdot 2 & 4\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot 2 + (-6)\cdot(-1) & 0\cdot(-1) + (-6)\cdot 2 & 0\cdot 2 + (-6)\cdot 0 \\ 6\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 6\cdot(-1) + 4\cdot 2 & 6\cdot 2 + 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу, транспонированную к A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $3A^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2) $2CB + 3A^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 6 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.1 Матрицы и определители

Практическое занятие № 4

Вычисление определителей.

Цель: научиться вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Известно, что определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 4 & -3x \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$ равен шести. Найти значение x.

2. Найти значение определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}$.

Краткие теоретические сведения:

С каждой квадратной матрицей связывают число.

Это число называется определителем матрицы. Определитель вычисляется по особым правилам и обозначается |A|, *det A*, ΔA.

Число строк (столбцов) определителя называется его порядком.

Определитель первого порядка матрицы $A = (a_{11})_{1\times 1}$ равен элементу a_{11}: $|A| = a_{11}$

Определитель второго порядка обозначается символом

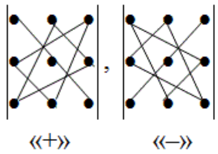
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и равен $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Для вычисления определителей третьего порядка существует такие правила.

Правило треугольника

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



«+» «–»

Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Определите порядок определителя.
3. Для вычисления определителя примените соответствующую формулу.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1.Вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Определитель равен

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 7 - 5\cdot(-4) = -14 + 20 = 6.$$

2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot 8 + 8\cdot(-1)\cdot(-5) + 4\cdot(-2)\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 7\cdot(-5) - (-1)\cdot(-2)\cdot 3 - 8\cdot 4\cdot 8 = 168 + 40 - 16 + 70 - 6 - 256 = 0.$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 5

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель: научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Систему $\begin{cases} 9x+2y=8, \\ 4x+y=3 \end{cases}$

решить по правилу Крамера.

2. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1+2x_2=7 \\ 2x_1+x_2=9 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Краткие теоретические сведения:

Теорема Крамера. Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы системы, Δ_i - определитель матрицы системы, где вместо i -го столбца стоит столбец правых частей.

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 5x + 6y = 9 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Основной определитель равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - (-15) = 27.$$

Если $\Delta = 0$, то правило Крамера для решения системы не применяют.

Δx - это определитель, который получается из главного определителя системы путем замены столбца, состоящего из коэффициентов при х

на столбец, состоящий из соответствующих свободных членов,

Имеем

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}.$$

Аналогично,

Δy - это определитель, который получается из главного определителя системы путем замены столбца, состоящего из коэффициентов при у на столбец, состоящий из соответствующих свободных членов,

Тогда

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Верным ответом будет:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}}{27} \text{ и } y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}}{27}.$$

2. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Решение. Вычисляем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители. Определитель Δ_1 получим из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом свободных коэффициентов. Будем иметь:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 18 = -11$$

Аналогично, определитель Δ_2 получается из определителя матрицы системы Δ заменой второго столбца столбцом свободных коэффициентов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 14 = 31$$

Тогда получаем, что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{1} = 31.$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 6

Решение систем линейных уравнений матричным способом.

Цель: научиться приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений матричным способом.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ матричным методом.

2. Решить систему : $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$ матричным методом.

Краткие теоретические сведения:

С помощью данного метода можно находить решение только для квадратных СЛАУ.

Запишем заданную систему в матричном виде: $AX = B$

Если матрица A невырождена, то тогда с помощью операций над матрицами выразим неизвестную матрицу X. Операция деления на множестве матриц заменена умножением на обратную матрицу, поэтому домножим последнее равенство на матрицу A^{-1} слева:

$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \; EX = A^{-1}B \Rightarrow$

$X = A^{-1}B$

Поэтому, чтобы найти неизвестную матрицу X надо найти обратную матрицу к матрице системы и умножить ее справа на вектор-столбец свободных коэффициентов.

Алгоритм решения системы линейных уравнений матричным методом:

1. Составить матрицу А из коэффициентов при неизвестных, матрицу В из свободных членов и матрицу Х из неизвестных.
2. Найти обратную матрицу A^{-1}.
3. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов В.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Решить с помощью обратной матрицы систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Решение:

Запишем данную систему в матричной форме:

$AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ - столбец правых частей. Тогда

$X = A^{-1}B$

Найдем обратную матрицу A^{-1} к матрице A с помощью союзной матрицы:

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \widetilde{A}^T$

Здесь $\Delta = |A|$ - определитель матрицы A; матрица $\widetilde{A}$ - союзная матрица, она получена из исходной матрицы A заменой ее элементов их алгебраическими дополнениями. Найдем $\widetilde{A}$, для этого вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Таким образом,

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Определитель матрицы A

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 3 -$

$-3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \neq 0$

А тогда

$\widetilde{A} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Отсюда искомая матрица

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 7

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: научиться приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений методом Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ методом Гаусса.

2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Краткие теоретические сведения:
Метод Гаусса заключается в последовательном исключении переменных и преобразовании системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

к треугольному виду

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n,\ c_{kk} = 1,\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{cases}$$

Переход от первой системы уравнений до последней называется прямым ходом метода Гаусса. Обратный ход метода Гаусса начинается с последней системы уравнений. Ее решают с конца до начала. Из последнего уравнения находят x_n. Подставив это значение в предпоследнее - находят x_{n-1} и т.д. Из первого уравнения находят x_1.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1) Решить систему : $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$

методом Гаусса.

Для заданной системы уравнений запишем расширенную матрицу и, выполняя элементарные преобразования, приведем ее к диагональному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ 3 & 14 & 12 & 11 \\ 5 & 25 & 16 & 3 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ую строку на (-2)и прибавим полученную строку ко 2-ой и 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ -1 & 0 & -14 & -43 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \end{array}\right)$$

Поменяем местами 1-ую строку со 2-ой, 2-ую с 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -14 & -48 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \\ 2 & 7 & 13 & 27 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ую строку на (1) и прибавим полученную ко 2-ой, затем 1-ую умножим на (2) и

прибавим полученную к 3-ей, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 7 & -15 & -59 \end{array}\right)$

Умножим 2-ую строку на (-7),а 3-ью на (11) и прибавим полученную 2-ую строку к 3-ьей, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$

Умножим 3-ью строку на(8) и полученную прибавим ко 2-ой, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Разделим 3-ью строку на 3, затем умножим полученную на (-14) и прибавим к 1-ой, получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$E , которая соответствует системе уравнений $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Ответ: X = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему четырех линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу для данной системы

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Сведем ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований.

1.Поменяем местами первый и второй строки.

2. Добавим к элементам второго, третьего и четвертого строк элементы первой строки, умноженные соответственно на $-5; -3; -4.$

3. Поменяем местами второй и третий строки. Добавим к элементам третьего и четвертого строк элементы второй строки, умноженные соответственно на $4;1.$

4. От четвертого уравнения умноженного на 11 вычитаем третье уравнение умноженное на $-3.$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -13 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right] \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right] \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 30 \end{array}\right].$$

Такой расширенной матрицы соответствует следующая система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ \quad\quad -11x_3 - 9x_4 = 1; \\ \quad\quad\quad\quad 5x_4 = 30. \end{cases}$$

С четвертого уравнения находим $x_4 = 30/5 = 6$ и подставляем в третье уравнение

$-11x_3 = 1 + 9x_4 = 1 + 9 \cdot 6 = 55 \to x_3 = -55/11 = -5.$

Найденные значения подставляем во второе уравнение

$2x_2 = 2x_3 - x_4 = 2 \cdot (-5) - 6 = -16 \to x_2 = -16/2 = 8.$

Из первого уравнения находим первую неизвестную

$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = 8 + 5 - 6 = 7.$

Система полностью решена и $x_1 = 7; x_2 = -8; x_3 = -5; x_4 = 6$ – ее решение.

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 8

Решение систем линейных уравнений различными методами

Цель: научиться решать системы линейных уравнений, используя различные методы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений методом Крамера и Гаусса:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

.

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;

-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;

-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.

2.Запишите и вычислите определитель системы.
3.Вычислите определители каждой неизвестной.
4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.
5. решить систему уравнений методом Гаусса

Ход работы:
1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.
Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_3 = 0 \end{cases};$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 + 2\cdot(-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.1 Теория пределов

Практическое занятие № 9
Вычисление пределов.

Цель: научиться вычислять пределы функций с помощью раскрытия неопределённостей.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Найти предел функции:

1.) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$; 7) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$; 9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-25}$; 10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$

Краткие теоретические сведения:

Функция *y=f(x) стремится к пределу b при x → a*, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех x ≠ a из области определения функции, удовлетворяющих неравенству |*x* - *a*| < δ, имеет место неравенство |*f(x)* - *b*| < ε. Если *b* есть предел функции *f(x)* при *x* → *a*, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ или *f(x)* → *b* при *x* → *a*.

Определение непрерывной функции. Функция *f(x)* непрерывна в точке *a*, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Вычисление пределов функций основано на применении следующих основных теорем:

ТЕОРЕМА 1. Предел суммы двух функций при *x* стремящемся к *a* равен сумме пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 2. Предел произведения двух функций при *x* стремящемся к *a* равен произведению пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Предел частного двух функций при *x* стремящемся к *a* равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\quad,\quad \text{если}\quad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

и равен плюс (минус) бесконечности, если предел знаменателя 0, а предел числителя конечен и отличен от нуля.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Повторите правила и формулы.

3.Вычислите предел.

Ход работы:
1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3)=\lim_{x\to 7}x+\lim_{x\to 7}3=7+3=10.$$

Комментарий. Здесь была использована теорема о пределе суммы.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x)+\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}(-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3\cdot\lim\limits_{x\to 1}x+2}{\lim\limits_{x\to 1}2\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-7}= =\frac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7}=5/(-5)=-1.$$

Комментарий. На первом шаге была применена теорема о пределе частного, так как предел знаменателя не равен нулю. На втором шаге использовалась теорема о пределе суммы для числителя и знаменателя дроби. После была применена теорема о пределе произведения.

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Знаменатель и числитель дроби при x стремящемся к 2 стремятся к нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь неприменима. В таких случаях нужно попытаться упростить дробь. Имеем

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

Это преобразование справедливо при всех значениях x, отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=$$
$$=2+2=4.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ПЕРВОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=$$
$$=1\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.1 Теория пределов
Практическое занятие № 10

Вычисление пределов. Избавление от неопределенностей.

Цель: научиться вычислять пределы функций с помощью раскрытия неопределённостей.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2-1}{4x^5+2x-9}$.
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{3x^3-75x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{\sin 30x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{6x}$.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Определите вид неопределенности.
3. Преобразуйте выражение, стоящее под знаком предела, с целью избавления от неопределенности.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

Функция $f(x)=\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в предельной точке $x=3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию. Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1 и x_2 –корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2-11x+6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$3x^2-11x+6=3(x-\frac{2}{3})(x-3)$.

А корни квадратного трехчлена $2x^2-5x-3$ равны $-\frac{1}{2}$ и 3,

следовательно $2x^2-5x-3=2(x+\frac{1}{2})(x-3)$.

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})(x-3)}{2(x+\frac{1}{2})(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1}.$$

Подставим предельное значение аргумента в оставшееся выражение, получим:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1}=\frac{9-2}{6+1}=\frac{7}{7}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{150x-1000}{2x^2-3x+4}$

Так как

$\lim\limits_{x\to\infty}(150x-1000)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-3x+4)=\infty$,

то здесь имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2 (наивысшую степень x в данной дроби).

Тогда, зная, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{150x-1000}{2x^2-3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{150x}{x^2}-\frac{1000}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{150}{x}-\frac{1000}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{2}=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}$.

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться первым замечательным пределом

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и соотношением

$$\lim_{x\to a}k\cdot f(x)=k\cdot\lim_{x\to a}f(x).$$

Для этого необходимо выполнить замену переменной: $\frac{x}{2}=t$, откуда $x=2t$. Учитывая, что $t\to 0$ при $x\to 0$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$.

Преобразуем функцию $f(x)$ так, чтобы можно было применить второй замечательный предел, формулу

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Для этого числитель и знаменатель дроби разделим на число -3, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/(-3)}\right)^{5x}.$$

Далее выполним замену переменной, полагая $-\frac{x}{3}=t$. Тогда если $x\to\infty$, то $t\to\infty$, $x=-3t$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/(-3)}\right)^{5x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5\cdot(-3t)}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-15}=e^{-15}.$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 11
Дифференцирование сложных функций.

Цель: научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Найти производные функций
1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1-4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1-4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$

$y' = 10(1-4x^2)^9 \cdot (1-4x^2)' = 10\,(1-4x^2)^9(-8x) = -80x(1-4x^2)^9$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U\cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:

$(\sin u)' = cosu\cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)'\cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x\cdot(-sin2x)\cdot(2x)'$$
$$= \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x\cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x\cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})'\cdot\log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2}\cdot(\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x+5x^2$, для второй функции $u = 3+10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:

$(a^u)' = a^u lna\cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{ulna}\cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

$$= \frac{2^{3x+5x^2} ln2 (3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

$$= \frac{2^{3x+5x^2} ln2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:

$$(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\ (arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$u = 1 - e^{2x}$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' =$$

$$-\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

.

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.2 Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 12

Исследование функций на монотонность, экстремумы, выпуклость - вогнутость, перегиб.

Цель: научиться исследовать функции на монотонность, экстремумы, выпуклость-вогнутость, перегиб и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D\ (y)$.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную .
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = y_0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ равно y_0 .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y=\frac{x^2}{2(x-1)}.$$

1. Область определения функции $D(y):(-\infty;1)\cup(1;+\infty).$

2. При подстановке значения $x=0$ получим $y(0)=\frac{0}{2(0-1)}=0.$

Такую же точку получим если приравняем функцию к нулю. Точка $x=0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\frac{x^2}{2(x+1)};$$

$$y(-x)\neq y(x),\quad y(-x)\neq -y(x).$$

Итак функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции $y'=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$

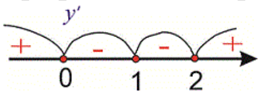
Приравнивая ее к нулю получим точки подозрительные на экстремум $x=0, x=2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty).$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения

$$y'(-1)=\frac{-1(-1-2)}{2(-1-1)^2}=\frac{1}{4}>0;\ y'(0,5)=\frac{0,5(0,5-2)}{2(0,5-1)^2}=-1,5<0;$$

$$y'(1,5)=\frac{1,5(1,5-2)}{2(1,5-1)^2}=-1,5<0;\ y'(3)=\frac{3(3-2)}{2(3-1)^2}=\frac{3}{8}>0.$$

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty;0),(2;+\infty)$ и убывает $(0;1),(1;2)$.

Точка $x=0$ – точка локального максимума, $x=2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{\max}=0,\ y_{\min}=\frac{2^2}{2(2-1)}=2.$

5. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

6. Точка $x=1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$.

Находим нужные границы

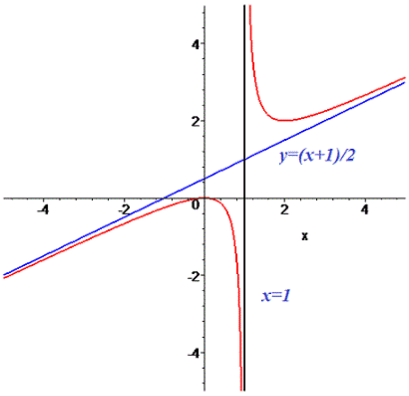
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}==\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

Конечный вид прямой следующий

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

7. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.2 Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 13

Решение физических задач.

Цель: научиться решать физические задачи с применением дифференциального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:

-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равна скорость в момент времени $t = 1$?

2. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $s(t) = -0,5t^3 + t + 2$ (м). Найти ускорение $a(t)$точки в момент времени $t = 2$ с.

3. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T = 0{,}2t^2$. Скакой скоростью нагревается тело в момент времени 10 с?

4. Маховик, задерживаемый тормозом, за t с поворачивается на угол $\varphi = 5t - 0{,}4t^2$ (рад). Определить угловую скорость ω маховика в момент времени t = 2 си найти момент остановки вращения.

Краткие теоретические сведения:
Путь, пройденный телом

Пусть задан путь $s = f(t)$ движения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t:$v(t) = s'(t)$.

Вторая производная – скорость изменения первой производной, т.е.*ускорение* изменения исходной функции: $a = s''(t) = v'(t)$.

Если твердое тело вращается вокруг оси, то угол поворота φ есть функция от времени t. Угловая скорость вращения в данный момент t численно равна производной $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$.

Порядок выполнения работы:
1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу дифференциального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1. Задание. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (м). Определить скорость его движения в момент $t = 10$ с.

Решение. Искомая скорость - это производная от пути, то есть

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = \left(\frac{2}{3}t^3\right)' - (2t^2)' + (4t)' =$$
$$= \frac{2}{3}(t^3)' - 2(t^2)' + 4(t)' = \frac{2}{3} \cdot 3t^2 - 2 \cdot 2t + 4 \cdot 1 = 2t^2 - 4t + 4$$

В заданный момент времени

$v(10) = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 4 = 200 - 40 + 4 = 164$ (м/с).

Ответ. $v(10) = 164$ (м/с).

2. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T = 0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается тело в момент времени 10 с?

Скорость нагревания тела есть производная температуры T по времени t: $\frac{dT}{dt} = (0{,}2t^2)' = 0{,}4t$.

Скорость нагревания тела при t =10 с:

$(\frac{dT}{dt})_{t=10} = 0{,}4 \cdot 10 = 4$ (град/с).

3. Маховик за время ворачивается на угол $\varphi = 8t - 0{,}5t^2$. Определить угловую скорость ω в конце 3-й секунды. Найти момент, когда прекратится вращение.

Имеем $\varphi' = 8 - t$. Так как $\omega = (8 - t)$ рад/с, то при t = 3 получим $\omega = 5$ (рад/с). Вращение прекратится в момент, когда $\omega = 8 - t = 0$, т.е. при t = 8 с.

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.3 Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 14

Нахождение неопределенных интегралов различными методами интегрирования.

Цель: научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти неопределенные интегралы, используя метод замены переменной: а) $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$; б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; г) $\int \sqrt[5]{3x+2}dx$.
2. Найти неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям: а) $\int xe^{5x}dx$; б) $\int \ln(1-x)dx$; в) $\int x\sin 3x dx$.

Краткие теоретические сведения:

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *y = f (x)* в промежутке *[a ; b]*, если в любой точке этого промежутка её производная равна *f (x)*.

Отыскание первообразной функции по заданной её производной *f (x)* или по дифференциалу *f (x) dx*есть действие, обратное дифференцированию - интегрирование.

При нахождении неопределенных интегралов используют свойства интегралов и таблицу.

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ гдеC – произвольное число;
4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;
5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
6. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;
11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$ $-a < x < a,\ a > 0;$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0$;
14. $\int e^x dx = e^x + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$;

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула: $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *U*и *dV*. Затем, после нахождения *dU*и *V*,использовать формулу интегрирования по частям.

- \- Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)sinkxdx,\ \int P(x)coskxdx,$ где *P*(*x*)- многочлен, *k*- число. Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за *dV*.
- Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx,\ \int P(x)arccosxdx,\ \int P(x)lnxdx,\ \int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$. Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за *U*.
- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx, \int e^{ax}cosbxdx$, где *a*и *b*числа. За *U* можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным.

3. Если интеграл нельзя найти вышеуказанным способом, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример. Найти интегралы:

1)$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1-x^3=t \\ d(1-x^3)=dt \\ -3x^2dx=dt \\ x^2dx=-\dfrac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

2. $\int (x^3-4x)lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx,\ dV = (x^3-4x)dx$.

$dU = \frac{1}{x}dx, \quad V = \int (x^3-4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3-4x)lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right)dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.3 Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 15

Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел.

Цель: формирование умений применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:
   a) $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 1, x = 4$;
   b) $y = \ln x, y = 0,\ x = 1, x = e$;
   c) $y^2 = x^3; x = 4$.

2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}; y = 0; x = 4$ (ось вращения ось Ох).

Краткие теоретические сведения:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

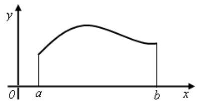


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

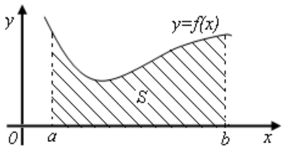


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

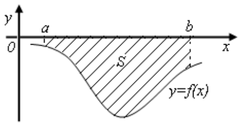


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \ge f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь Sфигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

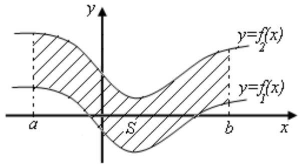


Рис. 4

Вычисление объемов тел вращения.

При помощи определенного интеграла можно вычислить объем того или иного тела, в частности, тела вращения.

Телом вращения называется тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг ее основания (рис. 1, 2)

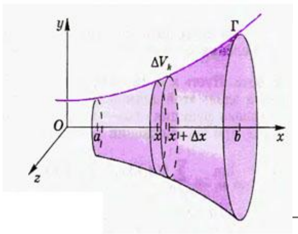


Рис.1

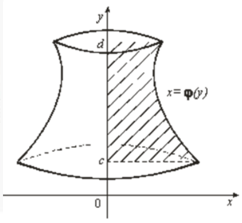


рис.2

Объем тела вращения вычисляется по одной из формул:

1. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$, если вращение криволинейной трапеции**вокруг оси ОХ.**

2. $V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 dy$, если вращение криволинейной трапеции**вокруг оси ОУ.**

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

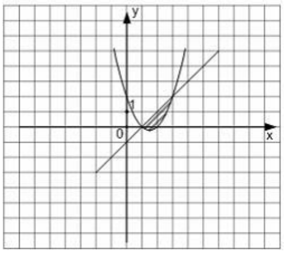
Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \ge f_2(x)$ на данном отрезке,находится по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.



Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2-3x+2=x-1$. Корнями этого уравнения являются числа $x=1$ и $x=3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования. Значит, площадь фигуры равна:

$$S=\int_1^3((x-1)-(x^2-3x+2))dx=\int_1^3(4x-x^2-3)dx=$$

$$=(2x^2-\frac{x^3}{3}-3x)\Big|_1^3=18-9-9-(2-\frac{1}{3}-3)=$$

$$=-2+\frac{1}{3}+3=1\frac{1}{3}.$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Пример 2. Найти объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x^2+y^2=64$, $y=-5$, $y=5$, $x=0$.

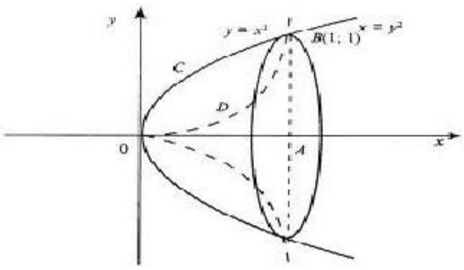
Решение.

$$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(64-y^2\right)dy=\pi\left(64y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{5}=556\frac{2}{3}\pi\approx1163см^3$$

Ответ : 1163 cm^3.

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением лепестка, вокруг оси абсцисс $y=x^2$, $y^2=x$.

Решение .



Построим графики функции. $y=x^2$, $y^2=x$. График $y^2=x$ преобразуем к виду $y=\sqrt{x}$.

Имеем $V=V_1-V_2$ Вычислим объем каждой функции

$$V_1=\pi\int_0^1 xdx=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

$$V_2=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{5}$$

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=0,3\pi$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.3 Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 16
Решение физических и технических задач.

Цель: научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.

2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.

3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?

4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.

5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Краткие теоретические сведения:

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е. $v(t) = \frac{dS}{dt}$.

Отсюда следует, что dS = v(t)dt. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$

Вычисление работы с помощью определённого интеграла.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка М движется по прямой в направлении оси OX. Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки М из положения $x = x_1$ в положение $x = x_2$.

1) Если сила постоянна $f(x) = C$, то работа выражается следующим образом $A = C(x_2 - x_1)$.
2) Если сила переменная величина, то $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила Р давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле:

$P = 9{,}81\gamma hS$ (4), где γ – плотность жидкости.

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx \ (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то a=0 и формула (5) примет вид

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx \ (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx = 9{,}81\gamma y \int_a^b x\,dx = 9{,}81\gamma y \frac{x^2}{2}\int_a^b = 9{,}81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1**.**Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела v(t) = 10t + 2 (м/с).

Решение: Если v(t)=10t+2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен

$$S=\int_0^4 (10t+2)\,dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80+8=88 \quad (\text{м}).$$

Ответ. S = 88(м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно,F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A=\int_0^{0{,}05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0{,}05} = 12{,}5 \ (\text{Дж}).$$

Пример 3**.** В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/м^3. Следовательно,

$$P = 9810\int_a^b xy\,dx = 9810\int_a^b x\,dx = 9810\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0{,}5}^{2{,}5} = 9810\,\frac{2{,}5^2-0{,}5^2}{2} = 29430\ (H).$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но

допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 4.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 17

Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель: научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?
2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?
3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается Р(А) и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \le P(A) \le 1$

Порядок выполнения работы:

1.Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.

2.Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3.Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4.Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:
1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.
Решение.
1. Событие А-«номер набран верно».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле $A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!}$=$\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}$=720. Итак, n=720
3. Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?
Решение.
1. Событие А-«оба шара окажутся чёрными».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!}$=$\frac{20!}{2!\cdot 18!}$=$\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!}$=190.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}$=$\frac{8!}{2!\cdot 6!}$=$\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 6!}$=28
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

2.На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК ?
Решение.
1. Событие А-«получится слово ЗАМОК».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов (букв): n=$P_5 = 5!$=5·4· $3\cdot 2\cdot 1$=120.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов