Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
_______________ / С.А. Махновский
9.02.2022 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебному предмету
ЕН.01 Математика

для обучающихся специальности
46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

Магнитогорск, 2022

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
«Математических и естественнонаучных дисциплин»
Председатель Е.С.Корытникова
Протокол № 5 от 19.01.2022

Методической комиссией МпК

Протокол № 4 от 9.02.2022

.

Составитель:

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК Ю.Н.Садчикова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01«Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 46.02.01 «Документационное обеспечение управления и архивоведение» и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия. Являясь частью изучения учебной дисциплины, они призваны, экспериментально подтвердить теоретические положения и формировать общие и профессиональные компетенции, практические умения.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений - профессиональных (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности), необходимых в последующей учебной деятельности по общепрофессиональным дисциплинам.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующих федеральных государственных образовательных стандартов среднего профессионального образования.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков;
- применять основные методы интегрирования при решении задач;
- применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности. А также формированию общих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Производная и ее приложение

Практическое занятие № 1

Вычисление производных функций по правилам дифференцирования

Цель работы: научить вычислять производные элементарных и сложных функций, учить проводить исследование функции и строить ее график .
Выполнив работу, Вы будете:
Уметь: вычислять производные элементарных и сложных функций, используя правила и формулы дифференцирования, проводить исследование функции и строить ее график.
Материальное обеспечение:
Тетрадь с конспектом, таблица «Правила и формулы дифференцирования», таблица «Полное исследование функции и построение графика», карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.
Задание: 1. Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Задание2. Найти приближенные значения:

a. $ln1{,}01$;
b. $\sqrt[4]{15{,}8}$;
c. $arctg1{,}05$.

Порядок выполнения работы:
1. Повторение правил и формул
2. Объяснение преподавателя
3. Оценка выполненных заданий
4. Подведение итогов.

Ход работы:
1.Повторение правил и формул
Дайте определение производной функции.
Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
Какая связь существует между непрерывностью функции и ее производной?
Чему равна производная постоянной?
Чему равна производная аргумента?
Как вычисляется алгебраической суммы функций, произведения и частного функций?
Какая функция называется сложной?
Как вычисляется производная сложной функции?
1.Объяснение преподавателя
Задание . Найти производные функций

Задания		**Пояснения**
1.	$(x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9$	$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$
2.	$(\frac{5}{x^{11}})' = (5\cdot x^{-11})' = 5(x^{-11})' = 5(-11)x^{-11-1} = -55x^{-12}$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $(cx)' = c(x)'$;

		$(x^n)' = nx^{n-1}$
3.	$(2x^{10} - x^8 + 3x^3)' = (2x^{10})' - (x^8)' + (3x^3)' = 2(x^{10})' - (x^8)' + 3(x^3)' = 2 \cdot 10x^9 - 8x^7 + 9x^2$	$(u+v)' = u' + v'$ $(cx)' = c(x)'$
4.	$Y = (7x^4 - 2x + 3)^5$; $У = u^5$, где $u = 7x^4-2x+3$; $y' = 5u^4 \cdot u'$; $y' = 5(7x^4-2x+3)^4 \cdot (7x^4-2x+3)'$; $y' = 5(7x^4-2x+3)^4 \cdot (28x^3-2)$. Найти y'_x при $x = 0$; $y'_0 = 5 \cdot 3^4 \cdot (-2) = -810$	*Воспользуемся формулой* $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, *где* $n = 5$ $(cx^n)' = c(x^n)'$ $(c)' = 0$
5.	$((x+1) \cdot \sqrt{x}) = (x+1)' \cdot \sqrt{x} + (x+1)(\sqrt{x})' = \sqrt{x} + (x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $(u + v)' = u' + v'$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x)' = 1$
6.	$((2x-7)^{14})' = 14(2x-7)^{13}(2x-7)' = 28(2x-7)^{13}$	$y' = f'(u) \cdot u'(x)$, $(u^n) = nu^{n-1} \cdot u'$

1. **Оценка выполненных заданий**

   Форма предоставления результата: выполненные задания
2. **Подведение итогов**

Составление таблицы «Полное исследование функции и построение графиков»

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Производная и ее приложение

Практическое занятие № 2-3

Вычисление производных сложных функций

Цель работы: научить вычислять производные элементарных и сложных функций, учить проводить исследование функции и строить ее график .

Выполнив работу, Вы будете:

Уметь: вычислять производные элементарных и сложных функций, используя правила и формулы дифференцирования, проводить исследование функции и строить ее график.

Материальное обеспечение:
Тетрадь с конспектом, таблица «Правила и формулы дифференцирования», таблица «Полное исследование функции и построение графика», карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание: Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2 x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Повторение правил и формул

2. Объяснение преподавателя

3. Оценка выполненных заданий

4. Подведение итогов.

Ход работы:

1.Повторение правил и формул

Дайте определение производной функции.
Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
Какая связь существует между непрерывностью функции и ее производной?
Чему равна производная постоянной?
Чему равна производная аргумента?
Как вычисляется алгебраической суммы функций, произведения и частного функций?
Какая функция называется сложной?
Как вычисляется производная сложной функции?

1.Объяснение преподавателя

Задание:
1. Найти производные функций.

Краткие теоретические сведения:

Правила дифференцирования

Пусть *c* – постоянная, *u=u(x), v=v(x)* – дифференцируемые функции. Тогда

1. $c' = 0$;
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$;
4. $(cu)' = cu'$;
5. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$;
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v(x) \neq 0$;
7. $\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{cv'}{v^2},\ v(x) \neq 0$.

Пусть *y=f(u)* и *u=u(x)* – дифференцируемые функции и определена сложная функция *y=f(u(x))*. Тогда сложная функция дифференцируема и равна произведению производной функции *y=f(u)* в точке *u=u(x)* и производной функции *u=u(x)* в точке *x,* т.е. $y' = f'(u) \cdot u'$.

Если *y=f(x)* – дифференцируемая и строго монотонная функция на промежутке *X*, то функция, обратная к данной *x=φ(y),* также дифференцируема и ее производная определяется соотношением: $x'_y = \frac{1}{y'_x},\ y'_x \neq 0$.

Логарифмической производной функции *y=f(x)* называется производная от логарифма этой функции, т.е. $(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Дифференцирование функций, т.е. вычисление их производных, выполняется с использованием сформулированных правил дифференцирования и формул дифференцирования.

Формулы дифференцирования

Таблица 1

№	Основные элементарные ф-ии	Сложные функции
1	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
2	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u u'$
3	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a u'$
4	$(\ln x)' \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u' = \dfrac{u'}{u}$
5	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\ln a}u' = \dfrac{u'}{u\ln a}$
6	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u u'$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}u' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
9	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u' = -\dfrac{u'}{\ln^2 u}$
10	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

1. Найдите y''' от следующих функций

1) $y = (mx^k + 4)^p$	2) $y = m * \cos(px^k - m)$
3) $y = (e^{px^m} + kx)$	4) $y = ktg(mx^p)$
5) $y = 12^{px^m - mx}$	6) $y = ctg\,(px^k - mx)$
7) $y = \ln(x^k + px^m)$	8) $y = \sqrt{mp^x + kx}$
9) $y = \log_7(mx + k)$	10) $y = (e^{px+k}) * \sqrt{x^p + mx}$
11) $y = p * \sin(kx + m)$	12) $y = \dfrac{\ln(px^n)}{k * \cos mx}$

Где р – число букв в имени
м – число букв в фамилии
к – число букв отчества

2. Найти производные x'_y обратных функций: а) $y = x - \cos x$;

б) $y = 2x + x^3$;

в) $y = 2^x \ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$.

3. Найти производные функций: а) $y = e^{\sin 2x}$;

б) $y = \left(\frac{1+x^2}{x^2+x} \right)^3$;

в) $y = 5\log_{10}(4x-2)$.

4. Результат работы оформить в виде отчета.

3. **Оценка выполненных заданий**

Форма предоставления результата: выполненные задания

4. **Подведение итогов**

Составление таблицы «Полное исследование функции и построение графиков»

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Производная и ее приложение

Практическое занятие № 4

Вычисление производных высших порядков

Цель работы:

формирование умений вычислять производные и дифференциалы высших порядков; вычислять пределы по правилу Лопиталя.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Найти пределы, используя правило Лопиталя

$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Производной второго порядка, или второй производной, функции *f(x)* называется производная от ее первой производной. Обозначается вторая производная одним из символов y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Производная n-го порядка $y^{(n)}$ функции *y=f(x)* определяется по индукции: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$. Обозначается: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Пример. Найти производную 4-го порядка от функции $y=\sin 2x$.

Решение. Последовательно дифференцируя функцию, получим: $y'=2\cos 2x$; $y''=-4\sin 2x$; $y'''=-8\cos 2x$; $y^{(4)}=16\sin 2x$.

Правило Лопиталя состоит в следующем. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле: $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Таким образом, правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Понятие дифференциала функции

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x\in X$. Тогда существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)-$ бесконечно малая величина при $\Delta x\to 0$, откуда $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых: 1) линейного относительно Δx; 2) нелинейного (представляющего бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx).

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной: $dy=f'(x)\cdot\Delta x$.

Пример. Найти приращение и дифференциал функции $y=2x^2-3x$ при *x=10* и Δx *=0,1*.

Решение. Приращение функции

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left[2\cdot(x+\Delta x)^2-3\cdot(x+\Delta x)\right]=\Delta x\cdot(4x+2\Delta x-3)$.

Дифференциал функции $dy=f'(x)\cdot\Delta x=(4x-3)\cdot\Delta x$.

При *x=10* и Δx *=0,1* имеем $\Delta y=3{,}72$ и *dy*=3,70.

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx=\Delta x$.

Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде $dy=f'(x)\cdot dx$.

Свойства дифференциала в основном аналогичны свойствам производной.

1. *dc=0, где c=const.*
4. *d(uv)=v du+u dv.*

2. *d(cu)=c du.* 5. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$

3. $d(u\pm v)=du\pm dv$.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Из изложенного выше следует, что приращение функции Δy отличается от её дифференциала dy на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем $dy=f'(x)\cdot\Delta x.$ Поэтому при достаточно малых значениях Δx $\Delta y\approx dy$ или $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot\Delta x,$ откуда $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x.$

Чем меньше значение Δx, тем точнее формула.

Данную формулу можно использовать для вычисления приближенных значений некоторых выражений, например: а) вычисление корня *n-й* степени; б) возведение числа в *n-ю* степень; в) вычисление значения тригонометрической функции, и т.д.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{16{,}64}$.

Решение. Рассматривая выше записанную формулу $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$, в качестве x возьмём число, наиболее близкое к 16,64, но чтобы был известен $\sqrt[4]{x}$, при этом Δx должно быть достаточно малым. Очевидно, следует взять *x=16,* Δx =0,64.

Итак, $\sqrt[4]{16{,}64}\approx\sqrt[4]{16}+\frac{\sqrt[4]{16}}{4\cdot 16}\cdot 0{,}64=2{,}02$.

1. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\ln(1+x)}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln\left(e^{x^2}+1\right)}$.

2. Найти производные 2-го порядка функций:

а) $y=x^3-4x^2+5x-1$;

б) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$;

в) $y=x\ln(x+1)$.

3. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt{1{,}1}$;

б) $e^{-0{,}1}$.

3.Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Производная и ее приложение

Практическое занятие №5-6
«Вычисление производных различных функций по правилам дифференцирования»

Цель работы:
формирование умений вычислять производные различных функций по правилам дифференцирования

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1 Вычислить производные различных функций по правилам дифференцирования

1) $y = (mx^k + 4)^p$	2) $y = m * \cos(px^k - m)$
3) $y = (e^{px^m} + kx)$	4) $y = ktg(mx^p)$
5) $y = 12^{px^m - mx}$	6) $y = ctg\,(px^k - mx)$
7) $y = \ln(x^k + px^m)$	8) $y = \sqrt{mp^x + kx}$
9) $y = \log_7(mx + k)$	10) $y = (e^{px+k}) * \sqrt{x^p + mx}$
11) $y = p * \sin(kx + m)$	12) $y = \dfrac{\ln(px^n)}{k * \cos mx}$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Производной второго порядка, или второй производной, функции *f(x)* называется производная от ее первой производной. Обозначается вторая производная одним из символов y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная n-го порядка $y^{(n)}$ функции *y=f(x)* определяется по индукции: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$. Обозначается: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Пример. Найти производную 4-го порядка от функции $y = \sin 2x$.

Решение. Последовательно дифференцируя функцию, получим: $y' = 2\cos 2x$; $y'' = -4\sin 2x$; $y''' = -8\cos 2x$; $y^{(4)} = 16\sin 2x$.

Правило Лопиталя состоит в следующем. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле: $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Таким образом, правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Понятие дифференциала функции

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x\in X$. Тогда существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)-$ бесконечно малая величина при $\Delta x\to 0$, откуда $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых: 1) линейного относительно Δx; 2) нелинейного (представляющего бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx).

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной: $dy=f'(x)\cdot\Delta x$.

Пример. Найти приращение и дифференциал функции $y=2x^2-3x$ при $x=10$ и $\Delta x=0,1$.

Решение. Приращение функции

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left[2\cdot(x+\Delta x)^2-3\cdot(x+\Delta x)\right]=\Delta x\cdot(4x+2\Delta x-3)$.

Дифференциал функции $dy=f'(x)\cdot\Delta x=(4x-3)\cdot\Delta x$.

При $x=10$ и $\Delta x=0,1$ имеем $\Delta y=3,72$ и $dy=3,70$.

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx=\Delta x$.

Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде $dy=f'(x)\cdot dx$.

Свойства дифференциала в основном аналогичны свойствам производной.

4. *dc=0, где c=const.*
5. *d(cu)=c du.*
6. $d(u\pm v)=du\pm dv$.

4. *d(uv)=v du+u dv.*
5. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$

Форма представления результата:

Результат должен быть представлен в виде письменного отчета с указанием даты, номера занятия, темы и хода выполнения работы.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Производная и ее приложение

Практическое занятие № 7

Исследование функций и схематичное построение графиков

Цель работы:
научиться исследовать функции с помощью дифференциального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями).
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:
1.Исследовать функцию и построить схематичный график.

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;$	8. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1;$
2. $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 16;$	9. $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 3;$
3. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9;$	10. $f(x) = 3x^4 - 4x^3;$
4. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;$	11. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2;$
5. $f(x) = 6x^4 - 4x^6;$	12. $f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^2;$
6. $f(x) = 4x^5 - 5x^4;$	13. $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1;$
7. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5;$	14. $f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 1;$

Порядок выполнения работы:
1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:
Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:
1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки.
3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
4) Записать интервалы, на которых функция возрастает $f'(x) > 0$ и убывает $f'(x) < 0$.
5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:
1) Найти вторую производную.
2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
4) Если $f''(x) > 0$, то график выпуклый вниз. Если $f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх.
5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.
Если $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.
Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$

Форма представления результата:

Результат должен быть представлен в виде письменного отчета с указанием даты, номера занятия, темы и хода выполнения работы.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Производная и ее приложение

Практическое занятие №8

Исследование функций с учётом выпуклости и точек перегиба и схематичное построение их графиков. Использование графиков в профессиональной деятельности

Цель работы:
формирование умений исследовать функцию и строить ее график.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями).
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:
1. Исследовать функцию и построить график.

1) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$;	2) $y = \frac{x^2+1}{x}$;
3) $y = \frac{x^2-1}{x^2}$;	4) $y = \frac{x^2-1}{x}$;
5) $y = \frac{1-x^2}{x^2}$;	6) $y = \frac{x}{x^2+1}$;
7) $y = \frac{1}{1-x^2}$;	8) $y = \frac{x}{x^2-1}$;
9) $y = \frac{x-2.5}{x^2-4}$;	10) $y = \frac{x^2-1}{x^2-2x+2}$;
11) $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$;	12) $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;
13) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$;	14) $y = \frac{x^4+1}{x^2}$.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Схема исследования функции $y = f(x)$ *на экстремум:*

1) найти производную $y' = f'(x)$;

2) найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует;

3) исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции;

4) найти экстремальные значения функции.

Схема исследования функции $y = f(x)$ *на выпуклость и точки перегиба:*

1) найти вторую производную функции $f''(x)$;

2) найти точки, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует;

3) исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба;

4) найти значения функции в точках перегиба.

Общая схема исследования функций и построения графиков:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность – нечетность;

3) найти вертикальные асимптоты;

4) исследовать поведение функции в бесконечности; найти горизонтальные и наклонные асимптоты;

5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;

6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;

7) найти точки пересечения графика функции с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

1. Найти интервалы возрастания и убывания, а также точки экстремума следующих функций:

а) $y = (x-1)^2(x-4)$;

б) $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x^2+2x+2}$.

2. Исследовать функции и построить их график:

а) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

б) $y = x\ln x$.

3. Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие № 9

Вычисление неопределенных интегралов методом непосредственного интегрирования

Цель работы:

Научиться вычислять неопределенные интегралы непосредственным интегрированием и методом замены переменной.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найдите неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования:

а) $\int (x^2 - 8x + 2)dx$

б) $\int 7^x dx$

в) $\int (3^x - cosx)dx$

г) $\int \frac{x^2-1}{x+1} dx$

д) $\int (x+6)^2 dx$

2. Найдите неопределенный интеграл методом замены переменной:

а) $\int (x^2 - 8x + 2)dx$

б) $\int 7^x dx$

в) $\int (3^x - cosx)dx$

г) $\int \frac{x^2-1}{x+1} dx$

д) $\int (x+6)^2 dx$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ где C – произвольное число;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;

5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
6. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$;
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$ $-a < x < a,\ a > 0;$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0$;
14. $\int e^x dx = e^x + C$;
15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;
16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие № 10-11

Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной

Цель работы:

Научиться вычислять неопределенные интегралы непосредственным интегрированием и методом замены переменной.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

. Найдите неопределенный интеграл методом замены переменной:

а) $\int (x^2 - 8x + 2)dx$

б) $\int 7^x dx$

в) $\int (3^x - cosx)dx$

г) $\int \frac{x^2-1}{x+1}dx$

д) $\int (x+6)^2 dx$

.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ где C – произвольное число;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;

5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

9. $\int 0dx = C$;

10. $\int dx = x + C$;

11. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;

12. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

14. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;

15. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

16. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$;

17. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

18. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;

19. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$
$-a < x < a,\ a > 0;$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0$;

22. $\int e^x dx = e^x + C$;

23. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

24. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 1.2. Интегральное исчисление функций одной переменной

Практическое занятие № 12-13

Вычисление неопределенных интегралов по частям

Цель работы:

формирование умений находить неопределенные интегралы методами замены переменной и по частям.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти неопределенные интегралы, используя метод замены переменной:

а) $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$;

б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$;

г) $\int \sqrt[5]{3x+2}dx$.

2. Найти неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям:

а) $\int xe^{5x}dx$;

б) $\int \ln(1-x)dx$;

в) $\int x\sin 3xdx$.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ где C – произвольное число;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;

5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

17. $\int 0dx = C$;	25. $\int \cos xdx = \sin x + C$;
18. $\int dx = x + C$;	26. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;
19. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;	27. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C,\ a \neq 0$;

20. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

22. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;

23. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

24. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$;

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$
$-a < x < a,\ a > 0;$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0$;

30. $\int e^x dx = e^x + C$;

31. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

32. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула: $\int udv = uv - \int vdu$.

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Интегральное исчисление функций одной переменной

Практическое занятие № 14

Вычисление определенных интегралов методом непосредственного интегрирования

Цель работы:

формирование умений вычислять определенные интегралы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти определенные интегралы:

а) $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx$;

б) $\int_1^e x\ln xdx$;

в) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$, где α – некоторое число;

2) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) $\int_a^a \alpha f(x)dx = 0$;

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Формула Ньютона–Лейбница

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции *f(x)* равен приращению любой ее первообразной *F(x)* на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ и функция *f(x)* непрерывна в каждой точке $x=\varphi(t)$, где $t\in[\alpha;\beta]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Интегрирование по частям определенного интеграла

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие № 15-16

Вычисление определенных интегралов методом замены переменной

Цель работы:

формирование умений вычислять определенные интегралы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти определенный интеграл.

$\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx$;

б) $\int\limits_1^e x\ln x dx$;

в) $\int\limits_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, где α – некоторое число;

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) $\int_a^a \alpha f(x)dx = 0$;

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Формула Ньютона–Лейбница

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции *f(x)* равен приращению любой ее первообразной *F(x)* на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ и функция *f(x)* непрерывна в каждой точке $x = \varphi(t)$, где $t \in [\alpha;\beta]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Интегрирование по частям определенного интеграла

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

2. Найти определенные интегралы:

а) $\int_4^5 x\sqrt{x^2 - 16}dx$;

б) $\int_1^e x \ln x dx$;

в) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

3. Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Интегральное исчисление функций одной переменной

Практическое занятие № 17

Приложения определённого интеграла

Цель работы:
формирование умений вычислять определенные интегралы.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями).
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Вычислить интегралы используя метод подстановки	Вычислять интегралы используя метод интегрирования по частям
1) $\int (3+5x)^4 dx;$	1) $\int x \sin x dx;$
2) $\int \frac{dx}{(3x+1)^2};$	2) $\int \frac{\ln x dx}{x^2};$
3) $\int \sqrt{x+2} dx;$	3) $\int ln^2 x dx;$
4) $\int \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+5}};$	4) $\int (2x-1) \cdot e^{3x} dx;$
5) $\int \frac{dx}{cos^2(1-2x)};$	5) $\int x \cdot 2^x dx;$
6) $\int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx;$	6) $\int x\, arctg\, x dx;$
7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}};$	7) $\int x^5 e^{x^2} dx;$
8) $\int_0^3 \frac{2x dx}{\sqrt{16+x^2}};$	8) $\int (x+1) e^x dx;$
9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x};$	9) $\int (2x+3) \cos x dx;$
10) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x dx.$	10) $\int e^{2x} \cos x dx.$

Порядок выполнения работы:
1. Получить задание.
2. Выполнить задание.

3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$, где α – некоторое число;

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) $\int_a^a \alpha f(x)dx = 0$;

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Формула Ньютона–Лейбница

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции *f(x)* равен приращению любой ее первообразной *F(x)* на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ и функция *f(x)* непрерывна в каждой точке $x=\varphi(t)$, где $t\in[\alpha;\beta]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Интегрирование по частям определенного интеграла

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2. Интегральное исчисление функций одной переменной

Практическое занятие №18

Решение прикладных задач с использованием определенного интеграла.

Цель работы:

формирование умений находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти площади плоских фигур.

а) $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 3$, $y = 0$;

б) $y = 2x - x^2$, $x = 3$, $y = 0$.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

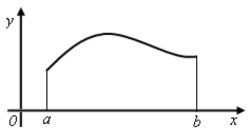

Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

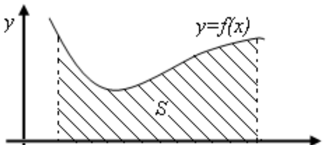

Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S=-\int_a^b f(x)dx$.

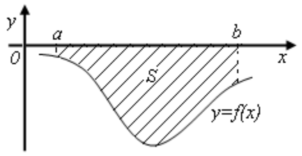

Рис. 3

3. Если функция $f_2(x)\geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$.

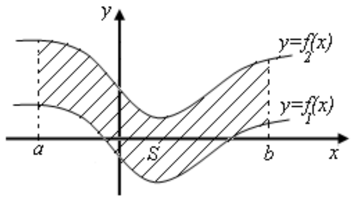

Рис. 4

1. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $x=3$, $y=0$;

б) $y=2x-x^2$, $x=3$, $y=0$.

2. Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие №19

Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы:

формирование умений решать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными; решать линейные дифференциальные уравнений 1-го порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения.

1. $ds = (4t-3)dt$, если при t=0 s=0.
2. $dx = (2t^2-5)dt$, если при t=1 x=-4.
3. $x\,dx = dy$, если при x=1 y=0.
4. $x\,dx = y\,dy$, если при x=2 y=1.
5. $x^2\,dx + y\,dy = 0$, если при x=0 y=1.
6. $(t-1)dt + s\,ds = 0$, если при t=2 s=0.
7. $\frac{2\,dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$, если при x=1 y= $\sqrt{2}$.
8. $\frac{dy}{2x} + \frac{dx}{y} = 0$, если при x=0 y=2.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения.

Ход работы:

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением *с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде: $f(x)dx = g(y)dy$.

Решается такое уравнение почленным интегрированием данного равенства.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может быть представлено в виде: $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Замена переменной $z = \frac{y}{x}$, где $z = z(x)$, сводит однородные дифференциальные уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид: $y' + f(x)y = g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые непрерывные функции переменной *x*. Если функция $g(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Один из способов решения такого уравнения, предложенный Даламбером, – представить неизвестную функцию в виде $y = u\cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и дифференциальное уравнение запишется в виде

$u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$ или $u'v + u[v' + f(x)v] = g(x)$.

Если функцию v выбрать так, что будет выполняться равенство $v' + f(x)v = 0$, то относительно другой функции u дифференциальное уравнение будет простым: $vu' = g(x)$. Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения (3) распадается на решение двух дифференциальных уравнений: сначала $v' + f(x)v = 0$, а затем $vu' = g(x)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением Бернулли*, если оно имеет вид: $y' + f(x)y = g(x)y^n$, где $n \neq 0,\ n \neq 1$.

Это уравнение приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-n}$ либо может быть непосредственно решено тем же методом, что и линейные уравнения.

1. Найти частное решение дифференциального уравнения:

а) $2s\,dt = t\,ds$, если при t=1 s=2.

б) $x^2\,dy - y^2\,dx = 0$, если при x=0,2 y=1

2. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения.

а) $y' = tg\,x\,tg\,y$

$$y\,dx + (1-y)x\,dy = 0.$$

б) $x^2y' - 2xy = 3y.$

4. Результат работы оформить в виде отчета.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 20-21

Однородные дифференциальные уравнения.

Цель работы:

формирование умений решать однородные дифференциальные уравнений 1-го порядка;

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить однородные дифференциальные уравнения.

26. $(xy+x)\frac{dx}{dy}=1.$
27. $(xy^2+x)dx+(x^2-y)dy=0.$
28. $(y-x^2y)dy+(x+xy^2)\ dx=0.$
29. $(1+x^2)dy-(xy+x)dx=0.$
30. $y\ dx+(1-y)x\ dy=0.$
31. $x^{2\,dy}+(y-1)dx=0.$
32. $2(xy+e)dx=xdy.$
33. $(x^2+1)dy=y\ dx.$
34. $x^2y'-2xy=3y.$

Порядок выполнения работы:

1) Привести данное уравнение к уравнению с разделяющими переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:

а) Производные функции заменить её дифференциалами;

б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;

в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих" дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy=\varphi(x)dx$

2) Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

3) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0;y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постояннойC ,а затем С подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

1) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6xdx+3xy^2dx)-(6ydy+2x^2ydy)=0$$

Сгруппируем члены с *dx* и *dy*

$$3x(2+y^2)dx-2y(3+x^2)dy=0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3+x^2}=\frac{2ydy}{2+y^2}$$

-Интегрируем

$$3\int\frac{xdx}{3+x^2}=2\int\frac{ydy}{2+y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2}\ln(3+x^2)=\ln(2+y^2)+\ln c$$

$$\ln(3+x^2)^{\frac{3}{2}}=\ln(2+y^2)\cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3+x^2)^3}=(2+y^2)\cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}{2+y^2}=c$$

2) Найти частные решение дифференциальных уравнений

$2(y-3)dx-dy=0$ *при x=0 , y=4*

-Разделим переменные

$$dy=2(y-3)dx$$

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx$$

-Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$$

$$\ln(y-3) = 2x + \ln c$$

-По определению логарифма $2x = \ln e^{2x}$

$$\ln(y-3) = \ln(e^{2x} \cdot c)$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{2x} \cdot c + 3$$

-Подставим в это уравнение начальные условия *x=0* , *y=4*

$4 = e^{0} \cdot c + 3$=>*c=1*

-Запишем частное решение

$$y = e^{2x} + 3$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 22-23

Решение прикладных задач с применением дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы:

формирование умений решать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными; решать однородные дифференциальные уравнений 1-го порядка; решать линейные дифференциальные уравнений 1-го порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить задачи с применением дифференциальных уравнений.
Найти уравнение движения тела.

36. Написать уравнение линии, проходящей через точку ***А*** (—1; 0) и всюду имеющей касательную с угловым коэффициентом, равным 2.
37. Найти уравнение кривой, проходящей через точку ***А*** (3; 1) и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен 2**х** — 1.
38. Найти уравнение кривой, проходящей через точку ***А*** (4; 4) и имеющей касательную с угловым коэффициентом ***к*** = **.**

39. Написать уравнение кривой, проходящей через точку А $(-1;0)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом k=y.

Порядок выполнения работы:

1) Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $p = \frac{dy}{dx}$
Приводим к уравнению с разделяющими переменными и решаем относительно p.
Подставляем p и решаем уравнение разделением переменных относительно y.
Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно C_1 и C_2. Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, находим частные решения.
2) Однородное дифференциальное уравнение II порядка.
Путем замены $y = e^{kx}$
$y' = ke^{kx}$
$y'' = k^2e^{kx}$
Составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = o$ из которого находим k_1 и k_2.
Общее решение при D>0 будет:
$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$
При D=0 будет: $y = e^{kx}(c_1 + c_2x)$
При D<0 будет: $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$
При заданных начальных условиях составляем систему линейных уравнений и решаем её относительно C_1 и C_2.

Ход работы:

Краткие теоретические сведения:

Дифференциальным уравнением называют уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции. Если независимая переменная одна, то уравнение называют *обыкновенным;* если же независимых переменных две или больше, то уравнение называют *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называют *порядком* дифференциального уравнения. Например:

1) $x^2y' - 5xy = y^2$ —обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка;
2) — $=x^2$ —обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка;

3) $y'^2 + y''y''' = x$ – обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка;

4) $F(x,y,y^1,y'') = 0$ – общий вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка;

5) $x^2 \quad +y^2 \quad \frac{\sigma z}{\cdot}$ – уравнение в частных производных первого порядка.

Будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, т.е. уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ или (в разрешенном относительно y' виде) $y' = f(x, y)$.

Решением дифференциального уравнения называют такую дифференцируемую функцию $y = \varphi$, которую при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество. Процесс нахождения решения Дифференциального уравнения называют *интегрированием* дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ в области D называют функцию $y = \ (x, C)$, **обладающую следую**щими свойствами: 1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной С, принадлежащих некоторому множеству; **2)** для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что $(x_0;y_0)$ D, существует единственное значение C = C_0, при котором решение y = <*p(x,* C_0) удовлетворяет заданному начальному условию.

Всякое решение $y = (x,C_0)$, получающееся из общего решения y = = (x,C) при конкретном значении C=C_0, называют *частным решением.*

Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называют *задачей Коши.*

Построенный на плоскости xOy график всякого решения $y = (x)$ дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* этого уравнения. Таким образом, общему решению $y = (x,C)$ на плоскости xOy соответствует семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра — произвольной постоянной С, **а** частному решению, удовлетворяющему начальному условию $y(x_0) = y_0$, — кривая этого семейства, проходящая через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$.

Если функция $f(x,y)$ *непрерывна и имеет непрерывную частную производную в области* D *то решение дифференциального уравнения* $y' = f(x,y)$ *при начальном условии* $y(x_0) = y_0$ *существует и единственно, т.е. через точку* $(x_0;\ y_0)$ *проходит единственная интегральная кривая данного уравнения* ***(теорема Коши).***

Особым решением называют такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т.е. в любой окрестности каждой точки $(x;y)$ особого решения существуют по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Особые решения не получаются из общего решения дифференциального уравнения ни при каких значениях произвольной постоянной C (в том числе и при $C = \pm$).

Особым решением является *огибающая* семейства интегральных кривых (если она существует), т.е. линия, которая в каждой своей точке касается по меньшей мере одной интегральной кривой.

Например, общее решение уравнения $y' = \pm\sqrt{1-}$ записывается в виде y = $sin(x +$Это семейство интегральных кривых имеет две огибающие: $y = \mathbf{1}$ и $y = -1$, которые и являются особыми решениями.

Эта теория дифференциальных уравнений применяется для решения прикладных задач.

I. Решить дифференциальное уравнение порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$$

-Заменим $p = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}; \frac{dp}{dx} = 1 - 2x$$

-Разделим переменные

$$dp = (1 - 2x)\,dx$$

-Проинтегрируем

$$\int dp = \int (1 - 2x)dx$$

$$p = x - x^2 + c_1$$

-Заменим pна$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + c_1$$

-Разделим переменные

$$dy = (x - x^2 + c_1)dx$$

-Проинтегрируем и получим общее решение

$$\int dy = \int (x - x^2 + c_1)dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

II. Решить однородное дифференциальное уравнение II порядка

a) $y'' - 5y' + 6 = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 5k + 6 = 0$, решаем квадратное уравнение, получим $k_1 = 2, k_2 = 3$

-Общее решение будет:

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

b) $y'' + 4y' + 4y = o$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k+2)^2 = 0 \qquad k = -2$

-Запишем общее решение для *D*=0

$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 6k + 12 = 0; D = 36 - 4 \cdot 13 = -16$D<0 =>$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16 i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i a = 3; b = 2$

-Запишем общее решение

$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическая работа №24

Решение дифференциальных уравнений второго порядка

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения II порядка и линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка;
- находить общее и частное решение простейших дифференциальных уравнений второго порядка;
- находить общее и частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения II порядка:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$

b) $y'' = x$, $A(1;0)$; $B(1;1)$

2. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения II порядка.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ при } x = 0;\ y = 0;\ \frac{dy}{dx} = 0$$

Порядок выполнения работы:

3) Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $p = \frac{dy}{dx}$

Приводим к уравнению с разделяющими переменными и решаем относительно p.

Подставляем p и решаем уравнение разделением переменных относительно y.

Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно C_1 и C_2. Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, находим частные решения.

4) Однородное дифференциальное уравнение II порядка.

Путем замены $y = e^{kx}$

$y' = ke^{kx}$

$y'' = k^2e^{kx}$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = o$ из которого находим k_1 и k_2.

Общее решение при D>0 будет:

$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$

При D=0 будет: $y = e^{kx}(c_1 + c_2x)$

При D<0 будет: $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

При заданных начальных условиях составляем систему линейных уравнений и решаем её относительно C_1 и C_2.

Ход работы:

III. Решить дифференциальное уравнение порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$$

-Заменим $p = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx};\ \frac{dp}{dx} = 1 - 2x$$

-Разделим переменные

$dp = (1 - 2x)\,dx$

-Проинтегрируем

$$\int dp = \int (1 - 2x)dx$$

$p = x - x^2 + c_1$

-Заменим p на $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + c_1$$

-Разделим переменные

$dy = (x - x^2 + c_1)dx$

-Проинтегрируем и получим общее решение

$$\int dy = \int (x - x^2 + c_1)dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$$

IV. Решить однородное дифференциальное уравнение II порядка

d) $y'' - 5y' + 6 = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 5k + 6 = 0$, решаем квадратное уравнение, получим $k_1 = 2, k_2 = 3$

-Общее решение будет:

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

e) $y'' + 4y' + 4y = o$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k+2)^2 = 0 \qquad k = -2$

-Запишем общее решение для D=0

$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$

f) $y'' - 6y' + 13y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 6k + 12 = 0$; $D = 36 - 4 \cdot 13 = -16$D<0 =>$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16 i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2ia = 3; b = 2$

-Запишем общее решение

$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическая работа №25

Решение дифференциальных уравнений

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения I порядка с разделяющими переменными. Научиться находить общие и частные решения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– структурировать получаемую информацию

– разделять переменные для решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными;

– находить общее решение дифференциального уравнения;

– выделять из общего решения частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решать задачу Коши).

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$

б) $(y-1)^2dx + (1-x^3)dy = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$dy = (3x^2 - 2x)dx$, *если y=4 при x=*

Порядок выполнения работы:

4) Привести данное уравнение к уравнению с разделяющими переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:

b) Производные функции заменить её дифференциалами;

б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;

в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих" дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$

5) Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

6) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0:y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постояннойС ,а затем С подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

3) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$(6xdx + 3xy^2dx) - (6ydy + 2x^2ydy) = 0$

Сгруппируем члены с *dx* и *dy*

$3x(2+y^2)dx - 2y(3+x^2)dy = 0$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3+x^2} = \frac{2ydy}{2+y^2}$$

-Интегрируем

$$3\int\frac{xdx}{3+x^2} = 2\int\frac{ydy}{2+y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2}\ln(3+x^2) = \ln(2+y^2) + \ln c$$

$$\ln(3+x^2)^{\frac{3}{2}} = \ln(2+y^2)\cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3+x^2)^3} = (2+y^2)\cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}{2+y^2} = c$$

4) Найти частные решение дифференциальных уравнений

$2(y-3)dx - dy = 0$ *при x=0 , y=4*

-Разделим переменные

$dy = 2(y-3)dx$

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx$$

-Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$$

$$\ln(y-3) = 2x + \ln c$$

-По определению логарифма $2x = \ln e^{2x}$

$$\ln(y-3) = \ln(e^{2x} \cdot c)$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{2x} \cdot c + 3$$

-Подставим в это уравнение начальные условия $x=0$, $y=4$

$4 = e^0 \cdot c + 3 => c=1$

-Запишем частное решение

$$y = e^{2x} + 3$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно