

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г. И. Носова»
Многопрофильный колледж



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
ЕН.01 Математика**

для обучающихся специальности

**15.02.12 Монтаж, техническое обслуживание и ремонт промышленного оборудования
(по отраслям)**

Магнитогорск, 2022

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией «Математических и
естественнонаучных дисциплин»
Председатель Е.С. Корытникова
Протокол № 10 от 22.06.2022 г.

Методической комиссией МпК
Протокол № от 29.06.2022 г.

Разработчик:

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» Многопрофильный колледж
И.А. Панфилова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 15.02.12 Монтаж, техническое обслуживание и ремонт промышленного оборудования (по отраслям).

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение	3
2 Методические указания	6
Практическая работа 1	6
Практическая работа 2	8
Практическая работа 3	10
Практическая работа 4	13
Практическая работа 5	15
Практическая работа 6	17
Практическая работа 7	19
Практическая работа 8	22
Практическая работа 9	25
Практическая работа 10	27
Практическая работа 11	31
Практическая работа 12	33
Практическая работа 13	35
Практическая работа 14	39
Практическая работа 15	41
Практическая работа 16	43

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решать системы линейных уравнений различными методами;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Содержание практических ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 1.2 Проводить монтаж промышленного оборудования в соответствии с технической документацией;

ПК 2.2 Осуществлять диагностирование состояния промышленного оборудования и дефектацию его узлов и элементов;

А также формированию **общих компетенций:**

ОК 01 - Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам;

ОК 02 - Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1 Комплексные числа

Практическое занятие № 1

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Цель: научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять действия над комплексными числами;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7,2;7,2)$, $z_3=(2;6)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_2 - z_3$;

3) z_1 / z_3 ;

4) $z_2 * z_3$;

5) z_1^5 .

3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2} + \frac{1+4i}{1+3i} + i^{13}$$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

Комплексные числа в алгебраической форме записываются:

$$z = a + bi$$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме выполняются, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

1. Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2. В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1. Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$$z_1 = 7 + i; \quad z_2 = -1,5 + 1,5i; \quad z_3 = 4 - 3i$$

2. Выполнить действия в алгебраической форме:

- 1) $z_1 + z_2$;
- 2) $z_2 - z_3$;
- 3) z_1 / z_3 ;
- 4) $z_2 \cdot z_3$;
- 5) z_1^5 .

Решение:

$$1) z_1 + z_2 = (7-1,5) + (1+1,5)i = 5,5 + 2,5i;$$

$$2) z_2 - z_3 = (7-4) + (1+3)i = 3 + 4i;$$

$$3) \frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+21i+4i+3i^2}{16-(3i)^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1+i$$

$$4) z_2 \cdot z_3 = (-1,5+1,5i)(4-3i) = -6+4,5i+6i-4,5i^2 = -6+10,5i+4,5 = -2,5+10,5i;$$

$$5) z_1^5 = (7+i)^5 = ((7+i)^2)^2 (7+i) = (49+14i+i^2)^2 (7+i) = (48+14i)^2 (7+i) = (2304+1344i+196i^2)(7+i) = (2108+1344i)(7+i) = 14756+2108i+9408i+1344i^2 = 13412+11516i$$

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2,1 - 2,8i$$

$$1) \frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2 - i^2} = \frac{-10i}{10} = -i;$$

$$2) \frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1,1 - 1,7i$$

$$3) i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$$

$$4) -i + (-1,1 - 1,7i) - 1 = -i - 1,1 - 1,7i - 1 = -2,1 - 2,8i$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1 Комплексные числа

Практическое занятие № 2

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Цель: научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять действия над комплексными числами;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Вычислите:

- 1) $z_2 \cdot z_3$;
- 2) $\frac{z_4}{z_3}$;
- 3) z_1^5 ;
- 4) $\sqrt{z_2}$;

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

a) $(3 \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}))^2$ б) $\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.
2. Выполните заданные действия.

Ход работы:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ используется формула :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } \sqrt[n]{r} - \text{ арифметический корень, } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

1. Записать числа z_1 , z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

- 1) $z_1 = 7 + i$

$$|z_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

Число находится в первой четверти, значит

$$\varphi = \arctg \frac{1}{7} = \arctg 0,1429.$$

$$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8^\circ 8' + i \sin 8^\circ 8').$$

- 2) $z_2 = -1,5 + 1,5i$

$$|z_2| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{2,25 + 2,25} = \sqrt{4,5} = 2,1$$

Число находится во второй четверти, значит $\varphi = \arctg \frac{b}{a} + \pi = \arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;

$$z_2 = -1,5 + 1,5i = 2,1(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).$$

- 3) $z_3 = 4 - 3i$

$$|z_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Число находится в четвертой четверти, значит

$$\varphi = \arctg \frac{-3}{4} = \arctg(-0,75) = -36^\circ 52'.$$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36^\circ 52') + i \sin(-36^\circ 52')).$$

2. Вычислите:

- 1) $z_2 \cdot z_3$;

- 2) $\frac{z_1}{z_3}$;

- 3) z_1^5 ;

- 4) $\sqrt{z_2}$;

Решение:

$$z_2 \cdot z_3 = 2,1 \cdot 5 (\cos(135^\circ - 36^\circ 52') + i \sin(135^\circ - 36^\circ 52')) = 10,5(\cos 98^\circ 8' + i \sin 98^\circ 8');$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5} (\cos(8^\circ 8' - (-36^\circ 52')) + i \sin(8^\circ 8' + 36^\circ 52')) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ);$$

$$z_1^5 = (5\sqrt{2})^5 (\cos 5 \cdot 8^\circ 8' + i \sin 5 \cdot 8^\circ 8') = 12500\sqrt{2}(\cos 40^\circ 40' + i \sin 40^\circ 40');$$

Вспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

В нашем примере $n=2$.

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} \right);$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} \right) = \sqrt{2,1} (\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30');$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} \right) = \sqrt{2,1} (\cos 247^\circ 30' + i \sin 247^\circ 30').$$

1. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} (2 \cdot (\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24}))^6 &= 2^6 \left(\cos \frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{24} \cdot 6 \right) = 64 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 64 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i \\ \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} &= \frac{24}{3} (\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) = 8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 8 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 4 + 4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2 Линейная алгебра

Практическое занятие № 3

Действия над матрицами

Цель: научиться выполнять действия над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовывать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

найти $2A - B =$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу $A \times B - B \times A$.3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1. Повторите правила и формулы.
2. Определите порядок действия в задании.
3. Для каждого действия примените соответствующую формулу.
4. Оформите решение.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1. Дано уравнение $A + X = B$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Найти X .

Если $A + X = B$, то $X = B - A$. Каждый элемент разности двух матриц B и A равен разности соответствующих элементов данных матриц B и A .

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B \times A - A \times B$.

Пусть $C = A \times B$. Тогда элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B

$$(c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}).$$

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Аналогично имеем:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица

$$B \times A - A \times B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0-2 & -1-1 \\ -1-(-1) & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Выполним задание по действиям:

$$1) 2 \times C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

2) $2CB =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-6) \cdot 0 \\ 6 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу, транспонированную к A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1) 3A^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) 2CB + 3A^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 6 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но

допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2 Линейная алгебра

Практическое занятие № 4 Вычисление определителей

Цель: научиться вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовывать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Известно, что определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} 4 & -3x \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \text{ равен шести. Найти значение } x.$$

2. Найти значение определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Определите порядок определителя.
3. Для вычисления определителя примените соответствующую формулу.

Ход работы:

С каждой квадратной матрицей связывают число.

Это число называется определителем матрицы. Определитель вычисляется по особым правилам и обозначается $|A|$, $\det A$, ΔA .

Число строк (столбцов) определителя называется его порядком.

Определитель первого порядка матрицы $A = (a_{11})_{1 \times 1}$ равен элементу a_{11} : $|A| = a_{11}$

Определитель второго порядка обозначается символом

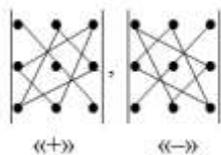
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и равен $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Для вычисления определителей третьего порядка существуют такие правила.

Правило треугольника

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1. Вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Определитель равен

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 7 - 5 \cdot (-4) = -14 + 20 = 6.$$

2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 8 + 8 \cdot (-1) \cdot (-5) + 4 \cdot (-2) \cdot 2 - \\ - 2 \cdot 7 \cdot (-5) - (-1) \cdot (-2) \cdot 3 - 8 \cdot 4 \cdot 8 = 168 + 40 - 16 + 70 - 6 - 256 = 0.$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2 Линейная алгебра

Практическое занятие № 5

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель: научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы линейных уравнений различными методами;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Систему $\begin{cases} 9x + 2y = 8, \\ 4x + y = 3 \end{cases}$ решить методом Крамера.

2. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 3 \\ x - y + 2z = 3 \\ 7x + y - 3z = 12 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

Теорема Крамера. Если определитель матрицы квадратной системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы системы, Δ_i - определитель матрицы системы, где вместо i -го столбца стоит столбец правых частей.

Рассмотрим примеры решения задач.

1. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 5x + 6y = 9 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Основной определитель равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - (-15) = 27.$$

Если $\Delta = 0$, то правило Крамера для решения системы не применяют.

Δ_x - это определитель, который получается из главного определителя системы путем замены столбца, состоящего из коэффициентов при x на столбец, состоящий из соответствующих свободных членов,
Имеем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}.$$

Аналогично,

Δ_y - это определитель, который получается из главного определителя системы путем замены столбца, состоящего из коэффициентов при y на столбец, состоящий из соответствующих свободных членов,

Тогда

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Верным ответом будет:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}}{27} \quad \text{и} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}}{27}.$$

2. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Решение. Вычисляем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители. Определитель Δ_1 получим из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом свободных коэффициентов. Будем иметь:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 18 = -11$$

Аналогично, определитель Δ_2 получается из определителя матрицы системы Δ заменой второго столбца столбцом свободных коэффициентов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 14 = 31$$

Тогда получаем, что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{1} = 31.$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2 Линейная алгебра

Практическое занятие № 6

Решение систем линейных уравнений матричным методом

Цель: научиться приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений матричным способом.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы линейных уравнений различными методами;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти решение СЛАУ
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$
 матричным методом.

2. Решить систему:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$$
 матричным методом.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

С помощью данного метода можно находить решение только для квадратных СЛАУ. Запишем заданную систему в матричном виде: $AX = B$

Если матрица A невырождена, то тогда с помощью операций над матрицами выразим неизвестную матрицу X . Операция деления на множестве матриц заменена умножением на обратную матрицу, поэтому домножим последнее равенство на матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$X = A^{-1}B$$

Поэтому, чтобы найти неизвестную матрицу X надо найти обратную матрицу к матрице системы и умножить ее справа на вектор-столбец свободных коэффициентов.

Алгоритм решения системы линейных уравнений матричным методом:

1. Составить матрицу A из коэффициентов при неизвестных, матрицу B из свободных членов и матрицу X из неизвестных.
2. Найти обратную матрицу A^{-1} .
3. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B .

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Решить с помощью обратной матрицы систему

Решение:

Запишем данную систему в матричной форме:

$$AX = B,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ - матрица системы, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ - столбец неизвестных, } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ -}$$

столбец правых частей. Тогда

$$X = A^{-1}B$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} к матрице A с помощью союзной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A}^T$$

Здесь $\Delta = |A|$ - определитель матрицы A ; матрица \tilde{A} - союзная матрица, она получена из исходной матрицы A заменой ее элементов их алгебраическими дополнениями. Найдем \tilde{A} , для этого вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Таким образом,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \neq 0$$

А тогда

$$\tilde{A} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Отсюда искомая матрица

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2 Линейная алгебра

Практическое занятие № 7

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель: научиться приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений методом Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы линейных уравнений различными методами;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ методом Гаусса.

2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении переменных и преобразовании системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

к треугольному виду

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \quad c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \quad \quad \quad \dots \dots \dots \\ \quad \quad \quad \quad c_{nn}x_n = d_n, \quad c_{kk} = 1, (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Переход от первой системы уравнений до последней называется прямым ходом метода Гаусса. Обратный ход метода Гаусса начинается с последней системы уравнений. Ее решают с конца до начала. Из последнего уравнения находят x_n . Подставив это значение в предпоследнее - находят x_{n-1} и т.д. Из первого уравнения находят x_1 .

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1) Решить систему : $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$

методом Гаусса.

Для заданной системы уравнений запишем расширенную матрицу и, выполняя элементарные преобразования, приведем ее к диагональному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ 3 & 14 & 12 & 11 \\ 5 & 25 & 16 & 3 \end{array} \right)$$

Умножим 1-ую строку на (-2) и прибавим полученную строку ко 2-ой и 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ -1 & 0 & -14 & -43 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \end{array} \right)$$

Поменяем местами 1-ую строку со 2-ой, 2-ую с 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -14 & -43 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \\ 2 & 7 & 13 & 27 \end{array} \right)$$

Умножим 1-ую строку на (1) и прибавим полученную ко 2-ой, затем 1-ую умножим на (2) и

прибавим полученную к 3-ей, получим
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 7 & -15 & -59 \end{array} \right)$$

Умножим 2-ую строку на (-7),а 3-ью на (11) и прибавим полученную 2-ую строку к 3-ей, получим
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

Умножим 3-ью строку на(8) и полученную прибавим ко 2-ой, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

Разделим 3-ью строку на 3, затем умножим полученную на (-14) и прибавим к 1-ой,

получим матрицу
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) E$$
, которая соответствует системе уравнений
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему четырех линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу для данной системы

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Сведем ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований.

1. Поменяем местами первый и второй строки.

2. Добавим к элементам второго, третьего и четвертого строк элементы первой строки, умноженные соответственно на $-5; -3; -4$.

3. Поменяем местами второй и третий строки. Добавим к элементам третьего и четвертого строк элементы второй строки, умноженные соответственно на $4; 1$.

4. От четвертого уравнения умноженного на 11 вычитаем третье уравнение умноженное на -3 .

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -13 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 30 \end{array} \right]$$

Такой расширенной матрицы соответствует следующая система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ -11x_3 - 9x_4 = 1; \\ 5x_4 = 30. \end{cases}$$

С четвертого уравнения находим $x_4 = 30/5 = 6$ и подставляем в третье уравнение $-11x_3 = 1 + 9x_4 = 1 + 9 \cdot 6 = 55 \rightarrow x_3 = -55/11 = -5$.

Найденные значения подставляем во второе уравнение

$$2x_2 = 2x_3 - x_4 = 2 \cdot (-5) - 6 = -16 \rightarrow x_2 = -16/2 = 8.$$

Из первого уравнения находим первую неизвестную

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = 8 + 5 - 6 = 7.$$

Система полностью решена и $x_1 = 7; x_2 = 8; x_3 = -5; x_4 = 6$ – ее решение.

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3 Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 8 Дифференцирование сложных функций

Цель: научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать сложные функции и строить их графики;

- вычислять значения геометрических величин;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовывать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = \arcsin 4x + \arccos^2 x$
4. $f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции

Рассмотрим примеры решения задач.

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
 $y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$

2. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u', (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' \\ &= \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

$$3. y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'.$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} \\ &= \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x + 5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x) \ln 2} (3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} \\ &= \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x) \ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2} \end{aligned}$$

$$4. f(x) = \arcsin \frac{3}{5}x + \arccos 5x$$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}} \left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} (5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$5. f(x) = \arccos \sqrt{1 - e^{2x}}$$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1 - e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$f'(x) = (\arccos\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$$u = 1 - e^{2x}$$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = (\arccos\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - 1 + e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' = -\frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot (-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3 Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 9

Исследование функций на монотонность, экстремумы, выпуклость, вогнутость, перегиб

Цель: научиться исследовать функции на монотонность, экстремумы, выпуклость-вогнутость, перегиб.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- вычислять значения геометрических величин;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовывать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1) Исследовать функцию на точки экстремума и промежутки монотонности:

$$y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12.$$

2) Исследовать функцию на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба:

$$y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1.$$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите функцию.
2. Используя алгоритмы, исследовать функции.

Ход работы:

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

- 1) Найти производную функции.
- 2) Найти критические точки.
- 3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
- 4) Записать интервалы, на которых функция возрастает $f'(x) > 0$ и убывает $f'(x) < 0$.
- 5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

- 1) Найти вторую производную.
- 2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
- 3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
- 4) Если $f''(x) > 0$, то график выпуклый вниз. Если $f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх.
- 5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

1) Для функции $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$ $D(y) = R$.

Значит, для отыскания точек экстремума нужно найти точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$y' = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x^2 - x - 1).$$

Если $y' = 0$, то $2x^2 - x - 1 = 0$. Тогда $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка.

Найдем знак производной $y' = 6(2x^2 - x - 1)$ на каждом из полученных промежутков.



Точки $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$ являются экстремальными, так как при переходе через эти точки производная меняет знак.

$x = -\frac{1}{2}$ – точка максимума, так как производная меняет знак с «+» на «-», а точка $x = 1$ – точка минимума.

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty)$ и убывает на $[-\frac{1}{2}; 1]$.

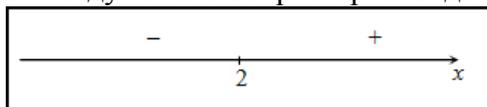
2) Найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1\right)'' = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 3\right)' = x - 2$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю, для этого решаем уравнение $y''(x) = 0$:

$$y''(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Исследуем знак второй производной слева и справа от полученной точки:



Так как на промежутке $(-\infty; 2)$ вторая производная $y''(x) < 0$, то на этом промежутке функция $y(x)$ выпукла; в силу того, что на промежутке $(2; +\infty)$ вторая производная $y''(x) > 0$ – функция вогнута. Так как при переходе через точку $x = 2$ вторая производная сменила знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

Ответ. Точка $x = 2$ – точка перегиба графика функции.

На промежутке $(-\infty; 2)$ функция выпукла, на промежутке $(2; +\infty)$ функция вогнута.

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3 Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 10

Исследование функций и построение графиков

Цель работы: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- проводить исследование функций с помощью производной;
- строить графики функций;

- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0 , знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.
7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную .
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = y_0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ равно y_0 .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow \infty$.

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

1. Область определения функции $D(y): (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = \frac{0}{2(0-1)} = 0$.

Такую же точку получим если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x-1)} = -\frac{x^2}{2(x+1)}$$

$$y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Итак функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную

функции
$$y' = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2}{2(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$$

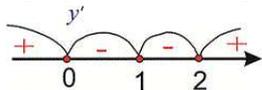
Приравнявая ее к нулю получим точки подозрительные на экстремум $x=0, x=2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения

$$y'(-1) = \frac{-1(-1-2)}{2(-1-1)^2} = \frac{1}{4} > 0; \quad y'(0,5) = \frac{0,5(0,5-2)}{2(0,5-1)^2} = -1,5 < 0;$$

$$y'(1,5) = \frac{1,5(1,5-2)}{2(1,5-1)^2} = -1,5 < 0; \quad y'(3) = \frac{3(3-2)}{2(3-1)^2} = \frac{3}{8} > 0.$$

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0), (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1), (1; 2)$.

Точка $x=0$ – точка локального максимума, $x=2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{\max} = 0, y_{\min} = \frac{2^2}{2(2-1)} = 2$.

5. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

6. Точка $x=1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

Находим нужные границы

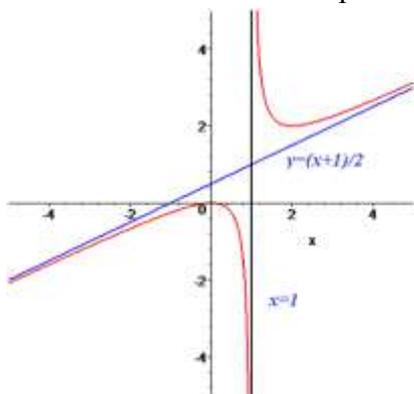
$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

7. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по ним проводим построение.



Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 4 Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 11 Вычисление неопределенных интегралов

Цель: научиться интегрировать функции, используя методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять значения геометрических величин;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Найти неопределенные интегралы, используя метод замены переменной:

а) $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$;

б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$;

г) $\int \sqrt[5]{3x+2} dx$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным.

Ход работы:

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $y = f(x)$ в промежутке $[a; b]$, если в любой точке этого промежутка её производная равна $f(x)$.

Отыскание первообразной функции по заданной её производной $f(x)$ или по дифференциалу $f(x)dx$ есть действие, обратное дифференцированию - интегрирование.

При нахождении неопределенных интегралов используют свойства интегралов и таблицу.

Свойства неопределенного интеграла:

- 1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
- 2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
- 3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ где C – произвольное число;
- 4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, где α – некоторое число;
- 5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

- | | |
|---|---|
| 1. $\int 0 dx = C$; | 9. $\int \cos x dx = \sin x + C$; |
| 2. $\int dx = x + C$; | 10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$; |
| 3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$; | 11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, a \neq 0$; |
| 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$; | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$
$-a < x < a, a > 0$; |
| 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$; | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a} \right + C, a \neq 0$; |
| 6. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln x+a + C$; | 14. $\int e^x dx = e^x + C$; |
| 7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; | 15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; |
| 8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$; | 16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$. |

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(t)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример. Найти интегралы:

1) $\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^2)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4} = \left[\begin{array}{l} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{dt}{3} \end{array} \right] = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5 \int t^{-4} dt = -5 \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

2) $\int (2x^3 + 1)^5 x^2 dx$

$$\int (2x^3 + 1)^5 x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x^3 + 1 \\ dt = 6x^2 dx \\ \frac{dt}{6} = x^2 dx \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int t^5 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{(2x^3 + 1)^6}{36} + C;$$

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 4 Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 12

Вычисление определённых интегралов

Цель работы: Повторить определение определённого интеграла, его свойства, методы нахождения определённого интеграла.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить определённый интеграл непосредственно;
- находить определённый интеграл методом подстановки.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. $\int_2^4 (x^3 - 3x) dx$.

2. $\int_0^1 (2x + e^x) dx$

3. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

Порядок выполнения работы:

1. Найти первообразную подынтегральной функции.
2. Воспользоваться формулой Ньютона- Лейбница.
3. В случае непосредственного интегрирования найти приращение первообразной.
4. В случае введения новой переменной величины найти значения верхнего и нижнего пределов интегрирования и после этого найти интеграл.

Ход работы:

1. Вычислить интеграл $\int_2^4 (x^2 + 3x) dx$.

Первообразная: $\int (x^2 + 3x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2$.

Отметим, что произвольную константу C можно здесь не записывать, так как она в следующей операции уничтожается.

По формуле Ньютона–Лейбница:

$$\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_2^4 = \left(\frac{4^3}{3} + \frac{3}{2} 4^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} + \frac{3}{2} 2^2 \right) = \frac{110}{3} \approx 36,67.$$

Вычисление значения интеграла обычно принято записывать цепочкой, без выделения первообразной и формулы Ньютона–Лейбница.

2. Вычислить интеграл $\int_0^1 (x + e^x) dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x + e^x) dx &= \left(\frac{x^2}{2} + e^x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} + e^1 \right) - (0 + e^0) = \\ &= 0,5 + e - 1 = 0,5 + e \approx -0,5 + 2,718 = 2,218. \end{aligned}$$

3. Вычислить интеграл $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

$$\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \left\langle \begin{array}{l} u = 3x+4 \\ du = 3dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right\rangle = \left(\frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u}} \right) \Big|_{-1}^7 = \left(\frac{2}{3} u^{1/2} \right) \Big|_{-1}^7 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \sqrt{3x+4} \right) \Big|_{-1}^7 = \frac{2}{3} \sqrt{3 \cdot 7 + 4} - \frac{2}{3} \sqrt{3 \cdot (-1) + 4} = \frac{8}{3}.$$

Для сокращения преобразований при замене переменной удобно вновь вычислять верхний и нижний пределы. Это позволяет избежать обратной замены на исходную переменную в полученной первообразной и упрощает вычисления. Так, для данного примера можно записать:

$$\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \left\langle \begin{array}{l} u = 3x+4 \\ du = 3dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 3 \cdot (-1) + 4 = 1 \\ \text{(нижний предел)} \\ \beta = 3 \cdot 7 + 4 = 25 \\ \text{(верхний предел)} \end{array} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3} \int_1^{25} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3} u^{1/2} \Big|_1^{25} = \frac{2}{3} (\sqrt{25} - \sqrt{1}) = \frac{2}{3} (5 - 1) = \frac{8}{3}.$$

Мы получили тот же результат, без обратного перехода к радикалу $\sqrt{3x+4}$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 4 Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 13 Применение определенного интеграла

Цель: формирование умений применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять значения геометрических величин;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

a) $y = x^2 + 1, y = 0, x = 1, x = 4$;

b) $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e$;

c) $y^2 = x^3; x = 4$.

2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}; y = 0; x = 4$ (ось вращения ось Oх).

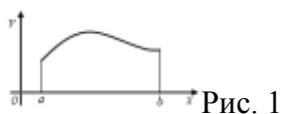
Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

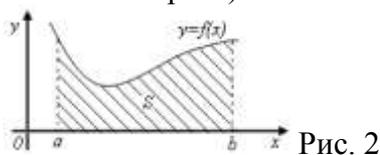
Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a; b]$. Фигура, образованная линиями $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.



Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x) dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).



2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»:

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

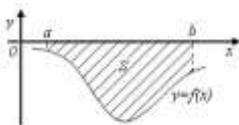


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

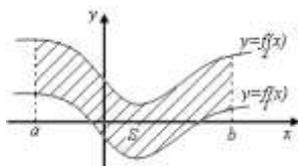


Рис. 4

Вычисление объемов тел вращения.

При помощи определенного интеграла можно вычислить объем того или иного тела, в частности, тела вращения.

Телом вращения называется тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг ее основания (рис. 1, 2)

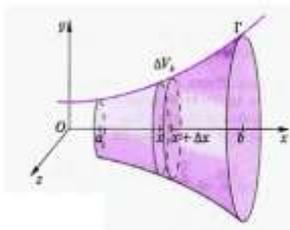


Рис.1

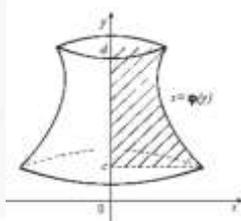


рис.2

Объем тела вращения вычисляется по одной из формул:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

1. , если вращение криволинейной трапеции вокруг **оси ОХ**.

$$V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 dy$$

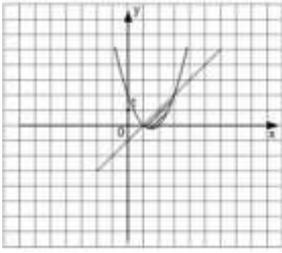
2. , если вращение криволинейной трапеции вокруг **оси ОУ**.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ и

прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \geq f_2(x)$ на данном отрезке, находится по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.



Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования. Значит, площадь фигуры равна:

$$S = \int_1^3 ((x-1) - (x^2 - 3x + 2)) dx = \int_1^3 (4x - x^2 - 3) dx =$$

$$= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x \right) \Big|_1^3 = 18 - 9 - 9 - \left(2 - \frac{1}{3} - 3 \right) =$$

$$= -2 + \frac{1}{3} + 3 = 1\frac{1}{3}.$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Пример 2. Найти объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 64$, $y = -5$, $y = 5$, $x = 0$.

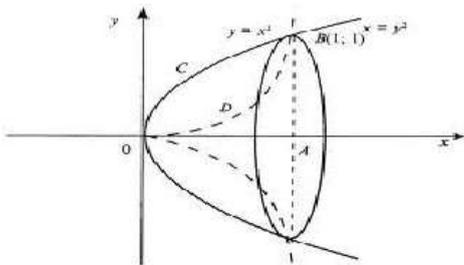
Решение.

$$V = \pi \int_{-5}^5 (64 - y^2) dy = \pi \left(64y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-5}^5 = 556\frac{2}{3}\pi \approx 1163 \text{ см}^3$$

Ответ : 1163 см^3 .

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением лепестка, вокруг оси абсцисс $y = x^2$, $y^2 = x$.

Решение .



Построим графики функции. $y = x^2$, $y^2 = x$. График $y^2 = x$ преобразуем к виду $y = \sqrt{x}$.

Имеем $V = V_1 - V_2$ Вычислим объем каждой функции

$$V_1 = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = 0,3\pi$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 5 Элементы теории вероятностей

Практическое занятие № 14 Решение комбинаторных задач

Цель: осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить отличия одной выборки от другой;
- применять формулы для подсчёта выборок без повторений. - анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1. Правило сложения. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а другой элемент B – n способами, исключаящими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо A , либо B) можно осуществить $m + n$ способами.

2. Правило умножения. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача 1. При формировании экипажа космического корабля имеется: 10 претендентов на пост командира, 20 претендентов на пост бортинженера, 25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Решение. По правилу суммы существует $10 + 20 + 25 = 55$ способов выбора одной из кандидатур.

Задача 2. В столовой предлагают два различных первых: a_1 и a_2 ; три различных вторых блюда: b_1, b_2, b_3 и два различных десерта: c_1 и c_2 . Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

Решение. Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует $2 \times 3 \times 2 = 12$ способов выбрать обед из трех блюд.

3. Подмножества n -множеств (соединения).

Для нахождения k -подмножеств некоторого n -множества нужно выбрать k из n его элементов (поэтому часто говорят о *выборке* k элементов из n -элементов). Про выбранные k из n различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из n элементов по k . *Соединение*-собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений: **перестановки, размещения, сочетания.**

Перестановки.

Перестановками из n -элементов называются такие соединения из n -элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n!$

Размещения.

Размещениями из n -элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных n -элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем, и другим.

Обозначение $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из n -элементов по n -элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

Сочетания.

Сочетаниями из n -элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1. Возможных цифр всего десять (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0). Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой (1,4,5,7 ≠ 2,4,5,7), либо порядком набора одинаковых цифр (1,4,5,7 ≠ 4,5,7,1), поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2. Формула размещений имеет вид: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4, m = 10$.

3. Производим расчёт: $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае $n=10, m=3$.

3. Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$.

3. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,9 (цифры не повторяются)?

Решение.

1. По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2. Формула перестановок из n -элементов имеет вид: $P_n = n!$. В нашем случае $n = 4$.

3. Произведём расчёт: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 5 Элементы теории вероятностей

Практическое занятие № 15

Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель: научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?
2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?
3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события А.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается $P(A)$ и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.
Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня, что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие А-«номер набран верно».
2. Число n -общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$. Итак, $n=720$

3. Число $m=1$, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.

$$4. P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$$

2. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие A – «оба шара окажутся чёрными».

2. Число n – общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20

$$\text{элементов (12+8) по два: } n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{1 \cdot 2 \cdot 18!} = 190.$$

3. Число случаев m , благоприятствующих событию A , равно числу сочетаний из 8

$$\text{элементов (8 черных шаров) по два: } n = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{1 \cdot 2 \cdot 6!} = 28$$

$$4. P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0,147$$

2. На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК ?

Решение.

1. Событие A – «получится слово ЗАМОК».

2. Число n – общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов (букв): $n = P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

3. Число случаев m , благоприятствующих событию A , равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.

$$4. P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 5 Элементы теории вероятностей

Практическое занятие № 16

Выборка. Числовые характеристики выборки. Генеральная совокупность и выборочная совокупность. Определение статистических распределений

Цель работы: Рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

1. Составлять распределение относительных частот.
2. Строить полигоны частот и относительных частот.
3. Строить гистограмму по заданному статистическому распределению:
4. Находить статистические оценки генеральной совокупности, заданной вариационным рядом:
5. Находить статистические характеристики выборки.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

Найти выборочную среднюю, выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2 = числу букв в Вашей фамилии; p_3 = числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

- 1 Прочитав условие предложенной задачи, по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.
2. Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.
- 3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик. выборки.

Ход работы: 1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \frac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0,12; w_2 = \frac{10}{25} = 0,40; w_3 = \frac{7}{25} = 0,28; w_4 = \frac{5}{25} = 0,20.$$

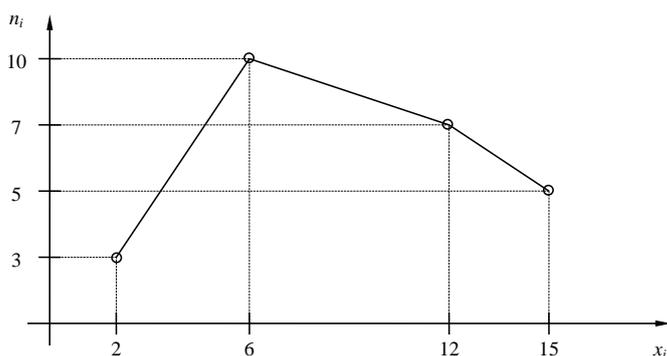
Следовательно,

x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

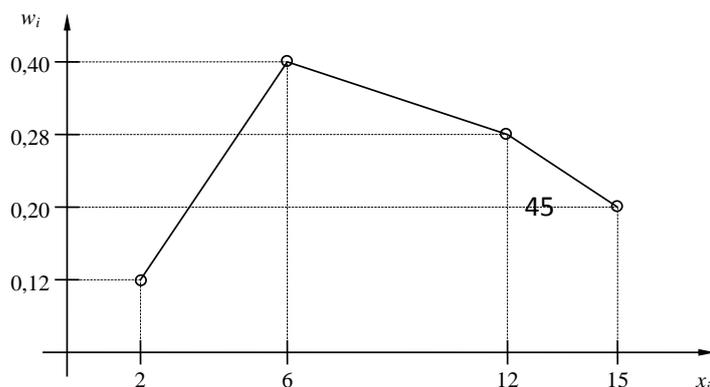
Контроль: $0,12 + 0,40 + 0,28 + 0,20 = 1$.

2. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i) :



3. Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной $h=5$	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

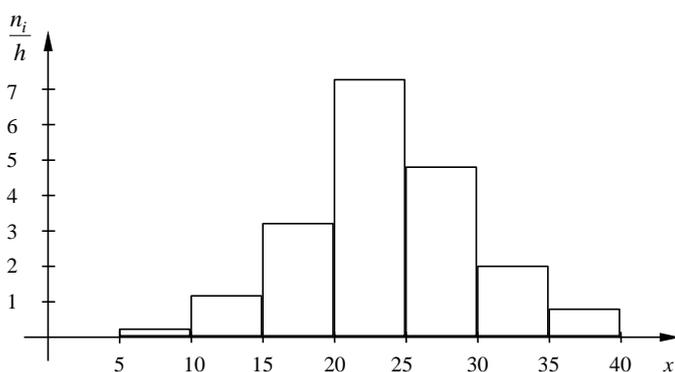
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\bar{X}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_{\Gamma} = \overline{X_{\Gamma}^2} - (\bar{X}_{\Gamma})^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_{\Gamma}^2} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17,8.$$

Таким образом, $D_{\Gamma} = 17,8 - 4^2 = 1,8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} = \sqrt{1,8} \cong 1,34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me : вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4,5.$$

Размах вариации R : в примере

$$x_{\max} = 6; x_{\min} = 2,$$

поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\bar{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1,82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11,45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - (\bar{X}_B)^2 = 11,45 - 1,82^2 \cong 8,14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8,14} \cong 2,85.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все

записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов