Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
_______________ / С.А. Махновский
9.02.2022 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебному предмету
ОУП.08 Математика

для обучающихся специальности
08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Магнитогорск, 2022

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
«Математических и естественнонаучных дисциплин»
Председатель Е.С.Корытникова
Протокол № 5 от 19.01.2022

Методической комиссией МпК

Протокол № 4 от 9.02.2022

.

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК Ю.Н.Садчикова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебного предмета ОУП.08«Математика».

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений, необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебного предмета «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, у обучающегося должны быть сформированы следующие результаты:

Личностных:

ЛР4 - сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире;

ЛР9 - готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

ЛР13 - осознанный выбор будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

Метапредметных:

МР1 - умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

МР3 - владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

МР4 - готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, владение навыками получения необходимой информации из словарей разных типов, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

МР5 - умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий (далее - ИКТ) в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности;

МР9 - владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

В результате их выполнения должны быть сформированы предметные результаты:

ПР1 - сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

ПР2 - сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

ПР3 - владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПР4 - владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;

ПР5 - сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

ПР6 - владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

ПР7 - сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

ПР8 - владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач;

ПР9 - сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

ПР10 - сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

ПР11 - сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

ПР12 - сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

ПР13 - владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

Выполнение практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для выполнения практических работ.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 1

«Арифметические действия над рациональными и комплексными числами»

Цель работы: Повторить действия с действительными и комплексными числами.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь выполнять действия над рациональными и комплексными числами.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Выполнить действия с рациональными числами:
   1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$;
   2) $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$;
   3) $3\frac{1}{5}+4\frac{1}{5}$;
   4) $3\frac{2}{7}-1\frac{1}{7}$;
   5) $\frac{7}{12}:\frac{3}{4}$;
   6) $2\frac{1}{5}:3\frac{2}{3}$;
   7) $3\frac{2}{5}+14\frac{1}{3}$
2. Выполнить действия с комплексными числами:
   $(8 + i) : (2 - 3i)$.

Порядок выполнения работы:
Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание.

Ход работы:
Задание №1

1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5}$;

2) $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{3+4}{7}=\frac{7}{7}=1$;

3) $3\frac{1}{5}+4\frac{1}{5}=(3+4)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)=7+\frac{2}{5}=7\frac{2}{5}$;

4) $3\frac{2}{7}-1\frac{1}{7}=(3-1)+\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\right)=2+\frac{1}{7}=2\frac{1}{7}$;

5) $\frac{7}{12}:\frac{3}{4}=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{3}=\frac{7\cdot4}{12\cdot3}=\frac{7\cdot1}{3\cdot3}=\frac{7}{9}$;

6) $2\frac{1}{5} : 3\frac{2}{3} = \frac{11}{5} : \frac{3}{11} = \frac{11 \cdot 3}{5 \cdot 11} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$;

7) $3\frac{2}{5} + 14\frac{1}{3} = (3 + 14) + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = 17 + \frac{6+5}{15} = 17\frac{11}{15}$.

Задание №2

Найти $(8 + i) : (2 - 3i)$.

Решение. Перепишем это отношение в виде дроби: $\frac{8+i}{2-3i}$.

Умножив, её числитель и знаменатель на $2 + 3i$ и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1 + 2i.$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 2

«Тождественные преобразования рациональных выражений»

Цель работы: Повторить формулы сокращённого умножения. Закрепить теоретические знания, Углубленное решение изученного материала, применение полученных знаний для решения задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь: решать задачи по алгебре.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: упростить выражения:

а) $(3p^2 - 2y^3)^3$.

б) $(1 - a)\cdot(1 + a)\cdot(1 + a^2)\cdot(1 + a^4)$.

в) $(x-m)^2\cdot(x+m)^2$.

г) $(2n - c)\cdot(8n^3 + c^3)\cdot(c^2 + 2cn + 4n^2)$.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), примените нужную формулу сокращённого умножения.

Ход работы:

Задание: Упростить выражения, применив формулы сокращённого умножения.

а) $(3p^2 – 2y^3)^3 = 27p^6 – 54p^4y^3 + 36p^2y^6 – 8y^9$.

б) $(1 – a)\cdot(1 + a)\cdot(1 + a^2)\cdot(1 + a^4)=(1 – a^2)(1 + a^2)\cdot(1 + a^4) = (1 - a^4)(1 + a^4)= 1 – a^8$.

в) $(x–m)^2\cdot(x+m)^2=(x^2-2xm+m^2)(x^2+2xm+m^2)=x^4+2x^3+x^2m^2-2x^3m-4x^2m^2-2xm^3+m^2x^2+2xm^3 + +m^4 = x^4 – 2x^2m^2 + m^4$.

г) $(2n – c)\cdot(8n^3 + c^3)\cdot(c^2 + 2cn + 4n^2)= (2n – c)\cdot(4n^2 + 2cn +c^2)(8n^3 + +c^3)=(8n^3- c^3)(8n^3 + c^3)= 64n^6 – c^6$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие №3

«Решение рациональных уравнений»

Цель работы: Закрепление теоретических знаний, повторение ранее изученного материала, формирование умений решения задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать рациональные уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным;
- использовать графический метод решения уравнений;
- изображать на координатной плоскости решения уравнений;
- составлять и решать уравнения, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: решить уравнения:

$a)\left(3x+1\right)^2+\left(4x-1\right)^2=\left(5x-2\right)^2$;

$$б)\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}.$$

Порядок выполнения работы:

При решении уравнений используются следующие правила преобразования уравнений в равносильные:

а) какой- либо член уравнения можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком;

б) обе части уравнения можно умножить или разделить на одно то же число, отличное от 0.

Решение уравнений I–II степени с одной переменной

$ax+b=0, \left(x=\frac{-b}{a}, a\neq 0\right)$ – линейное уравнение I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ – уравнение II степени с одной переменной.

1. Определить вид уравнения и способ его решения.
2. Если уравнение дробно-рациональное, то найти общий знаменатель всех дробей, которые входят в уравнение.
3. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
4. Решить полученное целое уравнение.
5. Произвести проверку корней, и исключить те из них, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Так как мы решаем дробные рациональные уравнения, то в знаменателях дробей будут переменные. Значит, будут они и в общем знаменателе. Во втором пункте алгоритма мы умножаем уравнение на общий знаменатель. При этом могут появиться посторонние корни, при которых общий знаменатель будет равен нулю, а значит и умножение на него будет бессмысленным. Поэтому в конце обязательно нужно сделать проверку полученных корней.

Ход работы:

Решим уравнения:

$а)\left(3x+1\right)^2+\left(4x-1\right)^2=\left(5x-2\right)^2$

Раскроем скобки, применяя формулы сокращенного умножения $\left(a+b\right)^2$ и $\left(a-b\right)^2$

$9x^2+6x+1+16x^2-8x+1=25x^2-20x+4.$ $9x^2+6x+1+16x^2-8x+1-25x^2+20x-4=0.$

Приведем подобные члены, получим

$18x-2=0 \qquad x=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

$18x=2$

Ответ: $x=\frac{1}{9}$ – корень уравнения.

$$б)\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$$

Разложим x^2-4 на множители и перенесем все члены уравнения в левую часть. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}-\frac{8}{(x-2)(x+2)}=0$$

$$\frac{x(x+2)-7(x-2)-8}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{x^2+2x-7x+14-8}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{x^2-5x+6}{(x+2)(x-2)}=0$$

дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т. е. $(x+2)(x-2)\neq 0, \quad \Rightarrow \quad x\neq 2;\ x\neq -2$

$x^2-5x+6=0.$

$D=25-24=1$

$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2};$

$x_1=3; x_2=2$

корни можно найти по теореме Виета, но так как $x\neq 2,$ то $x_2=2$ – посторонний корень, следовательно, решением уравнения будет $x=3$.

Ответ: $x=3$

$в)\ x^2-x+4=0$

$D=1-4\cdot 4=-15<0$

Ответ: действительных корней нет.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие №4

«Решение систем рациональных уравнений»

Цель работы: Повторить решение систем рациональных уравнений .

Выполнив работу, Вы будете

уметь:

- решать системы рациональных уравнений;
- использовать графический метод решения систем рациональных уравнений;
- изображать на координатной плоскости решение систем рациональных уравнений;
- составлять и решать системы рациональных уравнений, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах**.**

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: решить системы рациональных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x-15y=16, \\ 2x+y=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y+2x=6, \\ 3x^2-y^2=8 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}-1=0, \\ 2x+y-2=0 \end{cases}$.

Порядок выполнения работы:

решить системы уравнений используются способы сложения, подстановки, графический.

Ход работы:

Решим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$$

Решим систему всеми способами, т.е. убедимся, что результат получается одинаковый и определимся, какой из методов более рационально применим для данной системы.

1) <u>Способ подстановки</u>.

$$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+8y=31 \\ 10x+7y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x+\dfrac{8}{3}y=\dfrac{31}{3} \\ 10x+7y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{31}{3}-\dfrac{8}{3}y \\ 10\left(\dfrac{31}{3}-\dfrac{8}{3}y\right)+7y=5 \end{cases}$$

Решаем второе уравнение относительно «y»: $\dfrac{310}{3}-\dfrac{80}{3}y+7y=5$, приведем к общему знаменателю и так как $3\neq 0$, то

$310-80y+21y=15$

$-59y=15-310$

$-59y=-295;\quad y=\dfrac{-295}{-59}=5$

$y=5$, тогда $x=\dfrac{31}{3}-\dfrac{8}{3}\cdot 5=\dfrac{31}{3}-\dfrac{40}{3}=-\dfrac{9}{3}=-3$

Ответ: (–3;5).

2) <u>Способ алгебраического сложения</u>

$$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$$

уравняем по модулю коэффициенты при x, для этого умножим первое уравнение на 10, а второе – на 3.

$$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases} \left| \begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix} \right. \qquad \begin{cases} 30x+80y=310 \\ -30x-21y=-15 \end{cases}$$

почленно сложим и получим:

$59y=295$

$y=5$

подставим $y = 5$ в любое из уравнений системы, например в первое, затем найдем *x:*

$3x+8\cdot 5=31$

$3x+40=31$

$3x=-9$

$x=-3$

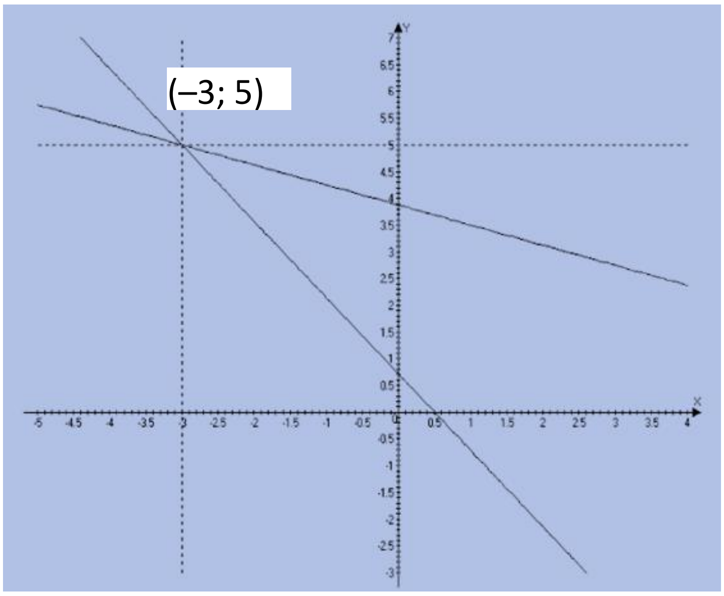
получаем $x = –3$; $y = 5$, как и в первом случае.

Ответ: (–3;5).

3) <u>Графический способ</u> (следует помнить, что результаты могут быть получены приближенно, что можно объяснить нашим зрением, умением проводить линии, выбором масштаба, неудобством записи числа и т.д.)

$$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$$

Графиком каждого уравнения является прямая (рис.1), а прямая определяется двумя точками.



$3x+8y=31$

$x=0; \quad y=\dfrac{31}{8}=3\dfrac{7}{8}$

$x=2; 6+8y=31;$

$y=\dfrac{31-6}{8}=\dfrac{25}{8}=3\dfrac{1}{8}$

$-10x-7y=-5$

$10x+7y=5$

$x=0; y=\dfrac{5}{7}$

$x=2; 20+7y=5;$

$7y=-15; y=-\dfrac{15}{7}=-2\dfrac{1}{7}$

Ответ: (–3; 5).

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Практическая работа №5

«Решение рациональных неравенств»

Цель работы: Цель работы: повторение ранее изученного материала, закрепление теоретических знаний, применение теоретических знаний к решению практических задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать рациональные неравенства;

использовать графический метод решения рациональных неравенств;

изображать на координатной плоскости решение рациональных неравенств;

составлять и решать рациональные неравенств, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: решить рациональные неравенства:

1. $5x-\frac{7x-1}{2}+\frac{2x-5}{5}>\frac{7}{10}$

2. $|5-2x|<3$,

3. $5x-2-3x^2>0$

Порядок выполнения работы:

При решении неравенств используются следующие правила преобразования неравенств в равносильные:

а) какой- либо член неравенства можно перенести из одной его

части в другую с противоположным знаком, оставив при этом без изменения знак неравенства;

б)обе части неравенства можно умножить или разделить на одно то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства;

в) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный

При решении систем неравенств нужно решить каждое из них и выбрать общее решение.

Ход работы:

Решим неравенства.

1. $5x-\frac{7x-1}{2}+\frac{2x-5}{5}>\frac{7}{10}$

Перенесем все члены в левую часть и приведем к общему знаменателю. общий знаменатель 10; так как знаменатель не содержит переменной, то в дальнейшем его можно не писать (опустить).

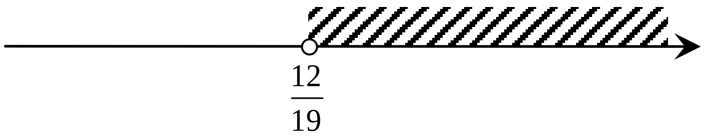
$50x-5(7x-1)+2(2x-5)-7>0$

$50x-35x+5+4x-10-7>0$

$19x-12>0$

$19x>12$

$x>\frac{12}{19}$



$$x\in\left(\frac{12}{19};+\infty\right)$$

2. $|5-2x|<3$ то есть

$-3<5-2x<3$

Используя свойства числовых неравенств, имеем

$-3-5<5-2x-5<3-5$

$-8<-2x<-2$; делим на (-2), знак неравенства меняется

$4>x>1 \quad \Leftrightarrow \quad 1<x<4$

Или можно записать в виде системы неравенств

$\begin{cases}5-2x<3\\5-2x>-3\end{cases}$ $\begin{cases}-2x<3-5\\-2x>-3-5\end{cases}$ $\begin{cases}-2x<-2\\-2x>-8\end{cases}$ $\begin{cases}x>1\\x<4\end{cases}$

Ответ: $x \in (1; 4)$

3. $5x - 2 - 3x^2 > 0$ - квадратное неравенство умножим на (–1)

$3x^2 - 5x + 2 < 0$

Найдем корни уравнения:

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{6}; \qquad x_1 = 1; x_2 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Графиком функции $y = 3x^2 - 5x + 2$ является парабола (рис.2), ветви которой направлены вверх, а точки пересечения параболы и оси OX $x_1 = 1; \quad x_2 = \dfrac{2}{3}$

Изобразим геометрически:

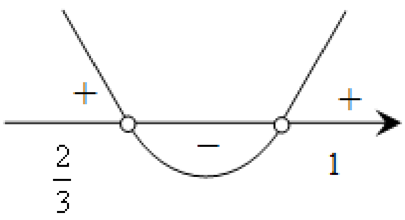


Рисунок 2. График функции

Так как мы решаем неравенство $3x^2 - 5x + 2 < 0$, то решением неравенства будет промежуток (интервал) $x \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$

Форма представления результата: выполненное задание**.**

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Функции, их свойства, графики

Практическая работа №6

«Исследование функций. Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций»

Цель работы: научиться определять четность нечетность функции, проводить исследование функции на монотонность, экстремумы, нули функции и промежутки знакопостоянства.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;

определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;

строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;

использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти область определения функции $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.
2. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{2(x+5)^2}$ на четность.
3. Исследовать функцию $y=6\sqrt{x}\cdot(2x-1)$ на монотонность и знакопостоянство.

Порядок выполнения работы:

1) Найдите область определения функции.

Для нахождения промежутков знакопостоянства найдите точки пересечения с осью абсцисс, решив уравнение y=0. Найденные корни расставьте на оси Ox в порядке возрастания и найдите знак функции на каждом из полученных интервалов. Запишите результат.

2) Найдите область определения функции. Убедитесь, что она симметрична.

1.Замените аргумент функции x на "-x". Подставьте этот аргумент в функциональное выражение.

2.Упростите выражение.

3.Таким образом, вы получили одну и ту же функцию, записанную для аргументов "x" и "-x". Посмотрите на две эти записи.

Если y(-x) = y(x), то это четная функция.

Если y(-x) =- y(x), то это нечетная функция.

Если же про функцию нельзя сказать, что y(-x)=y(x) или y(-x)=-y(x), то по свойству четности это функция общего вида. То есть, она не является ни четной, ни нечетной.

4.Запишите сделанные вами выводы.

3) Найдите область определения функции и нули функции, если они есть. Исследуйте функцию на монотонность на полученных интервалах.

Функция F(x) называется **возрастающей на отрезке [a,b]**, если для любых двух точек x_1 и x_2 из **[a,b]** справедливо неравенство $F(x_1) \prec F(x_2)$, когда $x_1 \prec x_2$.

Функция F(x) называется **убывающей на отрезке [a,b]**, если для любых двух точек x_1 и x_2 из **[a,b]** справедливо неравенство $F(x_1) \succ F(x_2)$, когда $x_1 \prec x_2$.

Ход работы:

1) Найти область определения функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$ и промежутки знакопостоянства.

Решение:

1. Область определения функции: $x^2 + x \succ 0, x(x+1) \succ 0, x_1 = 0, x_2 \neq -1.$ Рассмотрим три интервала $(-\infty;-1), (-1;0) u (0;+\infty)$. На интервалах $(-\infty;-1) u (0;+\infty)$ $x^2 + x \succ 0$, а на интервале (-1;0) $x^2 + x \prec 0$. Получаем, что D(y)= $\underline{(-\infty;-1) \cup (0;+\infty)}$.

2. Нулей функции нет, т.к. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}} \neq 0$, следовательно график не пересекает ось абсцисс.

3. Найдем знак функции на интервалах $(-\infty;-1) u (0;+\infty)$. На интервале $(-\infty;-1)$ $y \prec 0$, на интервале $(0;+\infty)$ $y \succ 0$.

2) Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{2(x+5)^2}$ на четность.

Решение: Область определения. Функция определена для всех x кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль: x=-5, то есть D(y)= $(-\infty;-5) \cup (-5;+\infty)$. Т.к. область определения не симметрична , то по свойству четности это функция общего вида. То есть, она не является ни четной, ни нечетной.

3) Исследовать функцию $y = 6\sqrt{x} \cdot (2x-1)$ на монотонность и промежутки знакопостоянства.

Решение: Область определения функции: $x \geq 0$, т.е. **D(y) =** $[0;+\infty)$**.**

Нули функции: x_1=0, x_2 = 0,5.

Промежутки знакопостоянства: на интервале (0;0,5) $y \prec 0$, на интервале $(0{,}5;+\infty)$ $y \succ 0$.

Промежутки монотонности: логично рассматривать интервал $(0{,}5;+\infty)$. С возрастанием аргумента от 0,5 до $+\infty$ функция возрастает.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но

объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Функции, их свойства, графики

Практическая работа №7

«Построение и чтение графиков функций»

Цель работы: повторение изученного материала; применение теоретических знаний к решению практических задач.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;

определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;

строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;

использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: построить графики функций:

$y = -3x^2 - 6x - 4$

Порядок выполнения работы

1)График функции $y=ax^2+вx+c$, где $a \neq 0$ строится по следующему **алгоритму:**

- Описать функцию, заданную формулой $y=ax^2+вx+c$, где $a \neq 0$;
- задать координаты вершины $x_в = -\dfrac{в}{2a}$; $y_в = ax^2 + вx + c$ и построить

точку на координатной плоскости;

- провести ось симметрии параболы;
- определить нули функции (если это возможно), построить точки по соответствующим координатам;
- найти координаты точки пересечения графика функции с осью ординат и постройте ее, а также постройте точку, ей симметричную, на координатной плоскости;
- найти, если необходимо, координаты дополнительных точек;

2)График функции $y=x^2+px+q$, где $a \neq 0$ строится по следующему **алгоритму:**

- В квадратном трехчлене x^2+px+q выделим полный квадрат: $x^2+px+q = (x-a)^2+в$
- Построим график функции $y=x^2$
- Делаем параллельный перенос графика функции $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на IaI единиц вправо, если $a> 0$ или влево, если $a< 0$.
- Делаем параллельный перенос вдоль оси ординат на IвI единиц вверх, если $в> 0$ или вниз, если $в< 0$.

3) Чтобы построить график функции $y=x^2+3$ построим график функции $y=x^2$ и сделаем параллельный перенос вдоль оси Оу на 3 единицы вверх.

Ход работы:

1)Построим график функции $y = -3x^2 - 6x - 4$.

Решение: $y = -3x^2 - 6x - 4$ – квадратичная, график – парабола, $a = -3, \quad -3 < 0,$ следовательно, ветви направлены вниз.

Координаты вершины: **(–1;–1).**

$$x_в = \frac{6}{2(-3)} = \frac{6}{-6} = -1;$$

$$y_в = -3(-1)^2 - 6(-1) - 4 = -3 + 6 - 4 = -1;$$

Нули функции:

$$-3x^2 - 6x - 4 = 0,$$
$$3x^2 + 6x + 4 = 0,$$
$$a = 3, \quad m = 3, \quad c = 4,$$
$$D = m^2 - ac,$$
$$D = 9 - 3 \cdot 4 = 9 - 12 = -3, \quad -3 < 0.$$

Действительных корней нет. То есть, нет точек пересечения с осью абсцисс.

Точка пересечения с ОУ: (**0; – 4).**

Если $x = 0,$ то $y = 0 + 0 - 4 = -4.$

Дополнительные точки: (**1; –13)** , так как $y(1) = -3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 4 = -3 - 6 - 4 = -13;$

Строим график.

2)Построим график функции $y=x^2-4x+3$ с помощью преобразований.$y=x^2-4x+3$– квадратичная, график – парабола, $a=1$, $1 \succ 0$ следовательно, ветви направлены вверх, т.к. $x^2-4x+3 = (x-2)^2 - 1$, то $y= (x-2)^2 - 1$. Строим график функции $y=x^2$ и делаем параллельный перенос вдоль оси абсцисс на 2 единицы вправо и вдоль оси ординат на 1 единицу вниз. 3) Построим график функции $y=x^2-5$ с помощью преобразований. Чтобы бы построить график функции $y=x^2-5$ построим график функции $y=x^2$ и сделаем параллельный перенос (рис. 3) вдоль оси Оу на 5 единиц вниз.

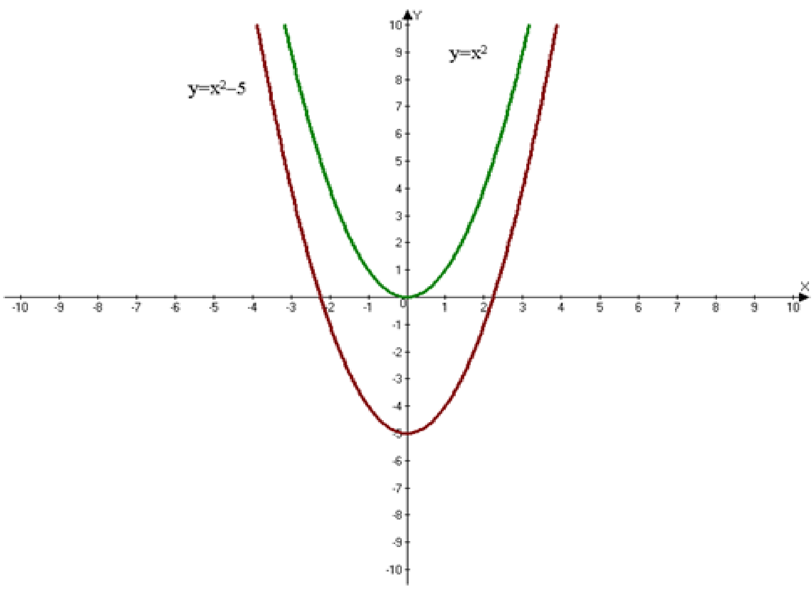


Рисунок 3. График функции

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 8

«Решение иррациональных уравнений»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении различных видов иррациональных уравнений.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
решать иррациональные уравнения.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1)Решите уравнение $\sqrt{5-4x}=2x+5$.
2)Решить уравнение $9+\sqrt{x-3}=x$.
3)Решить уравнение $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3-4x}$.
4)Решить уравнение $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$

Порядок выполнения работы

1)При возведении уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Поэтому возможно появление посторонних решений уравнения, но не возможна потеря корней. Причина приобретения корней состоит в том, что при возведении в четную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и тот же результат.

Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной только в первоначальное уравнение, а не в какие-то промежуточные.

2) При решении иррациональных уравнений полезно перед возведением обеих частей уравнения в некоторую степень "уединить радикал", то есть представить уравнение в

виде $C(x) = \sqrt[n]{D(x)}$.

Тогда после возведения обеих частей уравнения в *n*-ую степень радикал справа исчезнет.

3) Уравнение $\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)}$ равносильно каждой из двух систем

$$\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x), \\ A(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку после возведения в четную степень получаем уравнение-следствие $A(x) = B(x)$. Мы должны, решив его, выяснить, принадлежат ли найденные корни области определения исходного уравнения, то есть выполняется ли неравенство $A(x) \geq 0$ (или $B(x) \geq 0$). Из этих систем выбирают для решения ту, в которой неравенство проще.

4) Возведете обе части уравнения в квадрат и произведете приведение подобных членов, перенесите слагаемые из одной части равенства в другую. Уедините радикал. Снова возведите обе части уравнения в квадрат. Решите полученное уравнение. Сделайте проверку.

Ход работы:

1) Решить уравнение

$\sqrt{-3x+3} = x - 1$.

Аккуратное возведение в четную степень уравнения вида $\sqrt[2k]{A(x)} = B(x)$ состоит в переходе к равносильной ему системе

$$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^{2k}(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство $B(x) \geq 0$ в этой системе выражает условие, при котором уравнение можно возводить в четную степень, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

Уравнение $\sqrt{-3x+3} = x - 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} 3 - 3x = (x-1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, равносильное уравнению $x^2 + x - 2 = 0$, получим корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$.

Второй корень не удовлетворяет неравенству системы и, следовательно, является посторонним корнем исходного уравнения.

Ответ. $x = 1$.

2)Решить уравнение

$x + \sqrt{2x+3} = 6.$

Решение: Метод уединения радикала приводит к уравнению $\sqrt{2x+3} = 6 - x$.

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+3=(6-x)^2, \\ 6-x\geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, получим корни $x_1=11$ и $x_2=3$, но условие $6-x\geq 0$ выполняется только для $x=3$.

Ответ. $x=3$.

3) Решить уравнение $\sqrt{-9x^2+3x-6}=\sqrt{-6x-24}$.

Решение: Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -9x^2+3x-6=-6x-24, \\ -6x-24\geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, равносильное уравнению $-x^2+x+2=0$, получим корни $x_1=-1$ и $x_2=2$.

Однако при этих значениях *x* не выполняется неравенство $-6x-24\geq 0$, и потому данное уравнение не имеет корней.

Ответ. Корней нет.

4)Решить уравнение

$\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x}=7$.

Решение: Возведем обе части уравнения в квадрат и произведем приведение подобных членов, перенос слагаемых из одной части равенства в другую и умножение обеих частей на 1/2.

В результате получим уравнение

$\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{20-x}=12$, являющееся следствием исходного. Снова возведем обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение

$(x+5)(20-x)=144$

которое приводится к виду $x^2-15x+44=0$.

Это уравнение (также являющееся следствием исходного) имеет корни

$x_1=4$, $x_2=11$.

Оба корня, как показывает проверка, удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ.

$x_1=4$, $x_2=11$.

Форма представления результата: выполненные задания 1, 2.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа №9

«Преобразования выражений, содержащих степени и радикалы»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить значения корня, степени на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1) Провести упрощение степеней с рациональным показателем:

а) $\frac{3c^2d^3}{16x^2y^{-3}}(\frac{-cd}{4xy})^2$.

б) $(\frac{a^{-8}+a^{-2}}{a^{-3}+a^3})^{-2}$.

2) Выполнить действия: $(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

Порядок выполнения работы

1) а) Вынесите знак минус из произведения. Воспользуйтесь свойством степени с отрицательным показателем. Употребите свойство воспроизведения во вторую степень. Для окончательного упрощения этого примера воспользуйтесь правилом умножения дробей. В последнем шаге воспользуйтесь делением степеней с одинаковым показателем.

б) В этом случае надо применит свойство степеней с отрицательным показателем. Чтобы разгрузить полученную дробь, надо преобразовать эту дробь в деление. Привести дробь к общему знаменателю и произвести сложение дробей с общим знаменателем. Последним шагом сделать сокращение.

2) Определите порядок действия. Выражение в первой скобке приведите к общему знаменателю, в числителе сделайте группировку и вынесите общий множитель за скобку. Выполните деление, сократите на общий множитель. Последнее действие – сложение дробей с одинаковыми знаменателями. Приведите подобные слагаемые.

Ход работы

1) Упростить выражение: $\dfrac{((x^6)^{-3}(x^2)^4)y^6}{x^2y^3} - \dfrac{x^7y^5z^7}{x^{10}y^{10}z^{17}} =$

Вначале надо провести раскрытие скобок, для этого воспользуемся свойством степеней.

$= \dfrac{x^{((-3)6)}x^{(4\cdot 2)}y^{6-3}}{x^2} - x^{7-10}y^{5-10}z^{7-17} = x^{-12}y^3 - x^{-3}y^{-5}z^{-10} =$

Воспользуемся свойством степеней с отрицательным показателем.

$= \dfrac{y^3}{x^{12}} - \dfrac{1}{x^3y^5z^{10}}$.

Ответ: $\dfrac{y^3}{x^{12}} - \dfrac{1}{x^3y^5z^{10}}$

2) Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}} .$$

Решение. Введем обозначение $a = \sqrt{x}$, тогда $x = (\sqrt{x})^2 = a^2$, $x\sqrt{x} = a^2a = a^3$.

Формула из условия задачи после замены будет выглядеть так: $\dfrac{a+1}{a^3+a^2+a} : \dfrac{1}{a^4-a}$.

Заметим, что $a^4-a=a(a^3-1^3)=a(a-1)(a^2+a+1)$.

Тогда $\dfrac{a+1}{a^3+a^2+a} : \dfrac{1}{a^4-a} = \dfrac{a+1}{a(a^2+a+1)} \cdot \dfrac{a(a-1)(a^2+a+1)}{1} = (a+1)(a-1) = a^2-1.$

Вернемся к замене: $a^2-1=x-1$.

Ответ: x-1.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 10

«Решение показательных уравнений»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать показательные уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным;
- находить значения корня, степени на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Решить уравнение:
а) $3^{x^2-4,5}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{1}{27}$;
в) $0{,}1^{x^2-0,5}\cdot\sqrt{0{,}1}=0{,}001$;
с) $4\cdot\left(\dfrac{1}{16}\right)^x-17\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^x+4=0\cdot$

Порядок выполнения работы:
а-в) Обе части уравнения приводим к одному основанию: $a^{f(x)}=a^{\Phi(x)}$, где $(a\succ 0, a\neq 1)$.Затем используем следующее свойство: ($a^{f(x)}=a^{\Phi(x)}$)$\Leftrightarrow(f(x)=\Phi(x))$.
с) Решаем квадратное уравнение относительно переменной $(1/4)^x$.

Ход работы
Решите уравнение: $0{,}1^{x^2-0,5}\cdot\sqrt{0{,}1}=0{,}001$.
Решение: Преобразуем уравнение к виду: $a^{f(x)}=a^{\Phi(x)}$.
$0{,}1^{x^2-0,5}\cdot 0{,}1^{0,5}=0{,}1^3\Leftrightarrow 0{,}1^{x^2-0,5+0,5}=0{,}1^3\Leftrightarrow 0{,}1^{x^2}=0{,}1^3$. Затем решаем уравнение: $x^2=3\Rightarrow x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3}.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или

объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 11

«Решение показательных неравенств»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать показательные неравенства;
- находить значения корня, степени на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Решить неравенство:
а) $10^{4x-5} > -0{,}1$;
в) $\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-5{,}5} \le \left(\frac{27}{125}\right)^3$;
с) $3^{\frac{x-4}{x}-3} < \frac{1}{27}$

Порядок выполнения работы:
Обе части неравенства приведите к одному основанию: $a^{f(x)} \succ a^{\Phi(x)}$. При решении данного неравенства имеет место преобразование: $a^{f(x)} \succ a^{\Phi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \prec a \prec 1 \\ f(x) \prec \Phi(x) \end{cases} \text{или} \begin{cases} a \succ 1 \\ f(x) \succ \Phi(x) \end{cases}$.

Ход работы
Решите неравенство: $5^x \cdot 2^x \succ 0{,}1^{-3}$.

Решение: Преобразуем неравенство к виду: $a^{f(x)} \succ a^{\Phi(x)}$. Для левой части неравенства используем свойство степеней: $a^x*b^x=(a*b)^x$, для правой части свойство степеней с отрицательным показателем, получаем:
$(5\cdot 2)^x \succ (10^{-1})^{-3} \Leftrightarrow 10^x \succ 10^3 \Rightarrow x \succ 3.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением

необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 12

«Решение показательных уравнений и неравенств»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать показательные уравнения и неравенства, сводящиеся к линейным и квадратным;
- находить значения корня, степени на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решить уравнение:

а) $0{,}1^{x^2-0{,}5}\cdot\sqrt{0{,}1}=0{,}001$;

в) $4\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^x-17\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x+4=0\cdot$

Порядок выполнения работы:

а-в) Обе части уравнения приводим к одному основанию: $a^{f(x)}=a^{\Phi(x)}$, где $(a\succ 0, a\neq 1)$.Затем используем следующее свойство: ($a^{f(x)}=a^{\Phi(x)}$)$\Leftrightarrow(f(x)=\Phi(x))$.

Ход работы:

Решите уравнение: $0{,}1^{x^2-0{,}5}\cdot\sqrt{0{,}1}=0{,}001$.

Решение: Преобразуем уравнение к виду: $a^{f(x)}=a^{\Phi(x)}$.

$0{,}1^{x^2-0{,}5}\cdot 0{,}1^{0{,}5}=0{,}1^3\Leftrightarrow 0{,}1^{x^2-0{,}5+0{,}5}=0{,}1^3\Leftrightarrow 0{,}1^{x^2}=0{,}1^3$. Затем решаем уравнение:

$x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}\ , x_2 = \sqrt{3}.$

Решить неравенство:

в) $\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-5,5} \le \left(\frac{27}{125}\right)^3$;

с) $3^{\frac{x-4}{x}-3} < \frac{1}{27}$

Обе части неравенства приведите к одному основанию: $a^{f(x)} \succ a^{\Phi(x)}$. При решении данного неравенства имеет место преобразование: $a^{f(x)} \succ a^{\Phi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \prec a \prec 1 \\ f(x) \prec \Phi(x) \end{cases} или \begin{cases} a \succ 1 \\ f(x) \succ \Phi(x) \end{cases}$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 13

«Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому. Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить значения корня, степени, логарифма на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1) Найдите значения выражений:

a) $\log_5 135 - \log_5 5{,}4$;

b) $\log_4 104 - \log_4 6{,}5$;

c) $\log_3 \log_9 \sqrt[27]{\sqrt[3]{9}}$.

2) Найдите значения выражений:

a) $5^{\log_5 2} + 36^{\log_6 \sqrt{19}}$;

b) $2^{\log_2 5} + 81^{\log_9 \sqrt{19}}$;

С) $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125}$.

Порядок выполнения работ

1) Используйте соответствующие свойства логарифмов и определение логарифма.

2) Используйте основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов.

Ход работы:

1) Вычислите: $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10$.

Решение: $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 =$

Используем формулу перехода к новому основанию $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, получим

$= \dfrac{\log_{0,5} 0{,}64}{\log_{0,5} 0{,}25} + \log_{0,5} 10 = \dfrac{1}{2}\log_{0,5} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 =$

далее используем свойства логарифма степени и логарифма произведения

$= \log_{0,5} \sqrt{0{,}64} + \log_{0,5} 10 = \log_{0,5}(0{,}8 \cdot 10) = \log_{0,5} 8 = -3.$

Ответ: -3.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 14

«Приближенные вычисления и решение прикладных задач»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– находить значения корня, степени, логарифма на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Вычислите: $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10$.

Найдите значение выражения: $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125}$.

Порядок выполнения работы:

1) Используем формулу перехода к новому основанию $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

2) Используем свойства степеней и основное логарифмическое тождество

Ход работы

Вычислите:

$\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 =$

Используем формулу перехода к новому основанию $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, получим

$$= \frac{\log_{0,5} 0{,}64}{\log_{0,5} 0{,}25} + \log_{0,5} 10 = \frac{1}{2}\log_{0,5} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 =$$

далее используем свойства логарифма степени и логарифма произведения

$$= \log_{0,5} \sqrt{0{,}64} + \log_{0,5} 10 = \log_{0,5}(0{,}8 \cdot 10) = \log_{0,5} 8 = -3.$$

Ответ: -3.

Найдите значение выражения: $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125}$.

Используем свойства степеней и основное логарифмическое тождество

$$= (3^3)^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125} =$$

$$= 3^{3-3\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125} = \frac{3^3}{3^{\log_3 6^3}} - 4^{\log_4 0{,}125^{-1}} = \frac{3^3}{6^3} - 0{,}125^{-1} = \frac{1}{8} - 8 = -7\frac{7}{8}.$$

Ответ: $-7\frac{7}{8}$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 15

«Решение логарифмических уравнений»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать логарифмические, уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным;
- находить значения корня, степени, логарифма на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите уравнение: $\ln(x+4)-\ln(x+3)=\ln 3$

Порядок выполнения работы:

Записать задание в тетрадь и решить.

Ход работы

Используя свойства логарифмов обе части уравнения приводим к одному основанию $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 1$. Потенцируем обе части уравнения, получаем $f(x) = g(x)$.

Решаем полученное уравнение. Т.к. потенцирование уравнения может привести к появлению посторонних корней, то делаем проверку. Записываем ответ.

$$\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = (x-4)\cdot\log_7 5.$$

Решение: Согласно свойствам логарифмической функции : $\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = \log_7 5^{x-4} \Leftrightarrow 5^{\sqrt{x+2}} = 5^{x-4} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x-4 \Rightarrow x+2 = x^2-8x+16;$ Приводим уравнение к стандартному виду $x^2-9x+14=0$. Решаем квадратное уравнение и получаем корни $x_1=2$, $x_2=7$. Проверка показывает, что $x_1=2$ является посторонним корнем. Ответ: 7

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 16

«Решение логарифмических неравенств»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать логарифмические неравенства;
- находить значения корня, степени, логарифма на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

$$2\log_3(x-1) - \log_3(2x-5) \le 1.$$

Порядок выполнения работы:

1)Работаем по алгоритму**:** используя определение логарифма обе части неравенства приводим к одному основанию, т. е. получаем неравенство вида $\log_a f(x) \prec \log_a g(x)$. Если основание логарифма a=x-3$\succ 1$, то неравенство $\log_a f(x) \prec \log_a g(x)$ равносильно любой из систем: $\begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Если $0 \prec$ x-3$\prec 1$, то неравенство $\log_a f(x) \prec \log_a g(x)$ равносильно любой из систем: $\begin{cases} f(x) \succ g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \succ g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$. Решаем полученную систему, записываем ответ.

2)В левой части неравенства делаем преобразования, используя свойства логарифмов- логарифм степени и логарифм частного:

$$\log_c a^k = k \cdot \log_c a, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0;$$

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Получаем неравенство вида $\log_a f(x) < g(x)$, $a > 1$, которое заменяем на равносильную систему: $\begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$. Решаем полученную систему, записываем ответ.

Ход работы

1) Решить неравенство

$$\log_{2x}\left(x^2 + 2x + 2\right) \le 2.$$

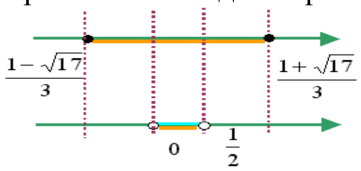
Решение: Неравенство равносильно совокупности систем

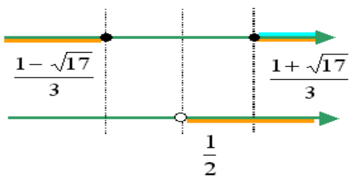
$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 \ge 4x^2, \\ x^2 + 2x + 2 > 0, \\ 0 < 2x < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 2 \le 4x^2, \\ x^2 + 2x + 2 > 0, \\ 2x > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 \le 0, \\ 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 \ge 0, \\ x > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\left(x - \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \le 0, \\ 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\left(x - \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \ge 0, \\ x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Применим метод интервалов





Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right).$

2) Решить неравенство

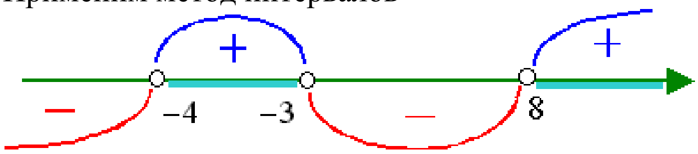
$$\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0.$$

Решение:

$$\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<\log_{0,3}1; \;\Leftrightarrow\; \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{x^2+x}{x+4}>6 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+3)(x-8)}{x+4}>0.$$

Применим метод интервалов



$$x\in(-4;-3)\cup(8;+\infty).$$

При этих значениях x все выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны.

Ответ: $x\in(-4;-3)\cup(8;+\infty).$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

Практическая работа № 17

«Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать логарифмические неравенства;
- находить значения корня, степени, логарифма на основе определения, используя при

необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задания:
Задание №1. Решите логарифмические уравнения и их системы

а	б
$\log_{\sqrt{2}} x + 4 + \log_4 x + \log_3 x = 2$	$\begin{cases} \lg x - \lg y = 7 \\ \lg x + \lg y = 5 \end{cases}$

Задание№2. Решить логарифмическое неравенство

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{\frac{1}{8}} x \le 3{,}5$$

Порядок выполнения работы:

1)Работаем по алгоритму**:** используя определение логарифма обе части неравенства приводим к одному основанию, т. е. получаем неравенство вида log $_a$ f(x) $\prec$ log $_a$ g(x). Если основание логарифма a=x-3$\succ 1$, то неравенство log $_a$ f(x) $\prec$ log $_a$ g(x) равносильно любой из систем: $\begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Если $0 \prec$ x-3$\prec 1$, то неравенство log $_a$ f(x) $\prec$ log $_a$ g(x) равносильно любой из систем: $\begin{cases} f(x) \succ g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \succ g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$. Решаем полученную систему, записываем ответ.

2)В левой части неравенства делаем преобразования, используя свойства логарифмов-логарифм степени и логарифм частного:

$$\log_c a^k = k \cdot \log_c a, \quad c > 0, \quad c \ne 1, \quad a > 0;$$

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b, \quad c > 0, \quad c \ne 1, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Получаем неравенство вида log $_a$ f(x) < g(x), *a*> 1, которое заменяем на равносильную систему: $\begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$. Решаем полученную систему, записываем ответ.

Ход работы:
Записать задание в тетрадь и решить.

3) Решить неравенство

$$\log_{2x}\left(x^2 + 2x + 2\right) \le 2.$$

Решение: Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2+2x+2\ge 4x^2, \\ x^2+2x+2>0, \\ 0<2x<1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+2x+2\le 4x^2, \\ x^2+2x+2>0, \\ 2x>1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2-2x-2\le 0, \\ 0<x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2-2x-2\ge 0, \\ x>\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\left(x-\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right)\le 0, \\ 0<x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\left(x-\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right)\ge 0, \\ x>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Применим метод интервалов

Ответ: $x\in(-4;-3)\cup(8;+\infty).$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическая работа № 18

«Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой. Нахождение значений тригонометрических функций»

Цель работы: Научиться переходить от радианной меры углов к градусной и обратно. Научится находить значения тригонометрических функций по определению.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах

а) $150°$ б) $450°$ в) $40°$

2. Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах

а) $\frac{\pi}{10}$ б) 4π в) $\frac{4\pi}{9}$

3. Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для углов:

а) $-210°$ б) $\frac{2\pi}{3}$

Порядок выполнения работы

1. Радианная и градусная меры связаны зависимостью $180° = \pi\,радиан$. Поэтому $1° = \frac{\pi}{180°}$, значит $\propto° = \frac{\pi}{180}\alpha\ радиан$.

2. Чтобы выразить угол в градусной мере воспользуйтесь соотношением $1рад = \frac{180°}{\pi}$.

3. Начертите единичную окружность, отложите заданный угол, помня, что положительным считается угол, откладываемый против часовой стрелки, а отрицательным – по часовой стрелке.

- *Синусом угла α называется ордината точки единичной окружности, полученной при повороте начального радиуса на угол α.*
- *Косинусом угла α называется абсцисса точки единичной окружности, полученной при повороте начального радиуса на угол α.*
- *Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки единичной окружности к ее абсциссе.*
- *Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки единичной окружности к ее ординате.*

Ход работы:

1. Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах

а) $120°$ б) $225°$ в) $10°$

а) $120° = \frac{\pi}{180°}\cdot 120° = \frac{2\pi}{3}$; б) $225° = \frac{\pi}{180°}\cdot 225° = \frac{3\pi}{4}$; в) $10° = \frac{\pi}{180°}\cdot 10° = \frac{\pi}{18}$.

2. Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах

а) $\frac{3\pi}{5}$ б) $\frac{2\pi}{9}$ в) $\frac{5\pi}{6}$

а) $\frac{3\pi}{5} = \frac{180°}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{5} = 108°$ б) $\frac{2\pi}{9} = \frac{180°}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{9} = 40°$ в) $\frac{5\pi}{6} = \frac{180°}{\pi}\frac{5\pi}{6} = 150°$

3. Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для углов:

а) $-120°$ б) $\frac{3\pi}{5}$

Построим единичную окружность и отложим данные углы. Угол$-120°$ откладываем по часовой стрелке. Точка, соответствующая углу $-120°$ лежит в III четверти, значит,

$\cos(-120°) < 0,\ \sin(-120°) < 0,$

$tg\,(-120°) > 0,\ \ ctg(-120°) > 0.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическая работа № 19

«Преобразование тригонометрических выражений. Основные тригонометрические тождества»

Цель работы: Научиться находить значения тригонометрических функций, используя основные тригонометрические тождества.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Найдите значения тригонометрических функций, если известно:

1) $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

3) $tg\, \alpha = -\frac{8}{15}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Порядок выполнения работы

1. Запишите, что дано в задании.
2. Запишите формулы основных тригонометрических тождеств, содержащие данную функцию и ту, которую необходимо найти.
3. Выразите неизвестную функцию. Если необходимо извлечь квадратный корень, то определите знак искомой функции, используя заданную четверть.

4. Вычислите значения всех неизвестных функций.

Ход работы:

Найдите значения тригонометрических функций, если известно:

1) $\cos\propto = 0{,}8,\ \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$

2) $\sin\propto = 0{,}6, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$

3) $tg\propto = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$

а) Дано: $\cos\propto = 0{,}8,\ \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$

Найти: $\sin\propto,\ tg\propto, ctg\propto$

Решение: 1)Запишем основное тригонометрическое тождество

$\cos^2\propto + \sin^2\propto = 1$

Выразим из него искомую функцию $\sin\propto = \pm\sqrt{1-\cos^2\propto}$

Так как синус в IV четверти имеет отрицательное значение, то $\sin\propto = -\sqrt{1-0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg\propto = \frac{\sin\propto}{\cos\propto}$$

Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию

$$tg\propto = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$tg\propto \cdot ctg\alpha = 1$

Выразим из него искомую функцию $ctg\propto = \frac{1}{tg\propto}$

$$ctg\propto = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

б) Дано:) $\sin\propto = 0{,}6, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$

Найти: $\cos\propto,\ tg\propto, ctg\propto$

Решение: 1)Запишем основное тригонометрическое тождество

$\cos^2\propto + \sin^2\propto = 1$

Выразим из него искомую функцию $\cos\propto = \pm\sqrt{1-\sin^2\propto}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то $\cos\propto = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg\propto = \frac{\sin\propto}{\cos\propto}$$

Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию

$$tg\propto = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$tg\propto \cdot ctg\alpha = 1$

Выразим из него искомую функцию $ctg\propto = \frac{1}{tg\propto}$

$$ctg\propto = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

в) Дано: $tg\propto = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$

Найти: $\cos\propto,\ \sin\propto, ctg\propto$

Решение: 1) Запишем основное тригонометрическое тождество
$tg\,\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

Выразим из него искомую функцию $ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ $\qquad ctg\,\alpha = -1\frac{1}{3}$

2) Запишем основное тригонометрическое тождество
$1 + tg^2\,\alpha = \frac{1}{cos^2\,\alpha}$

Выразим из него искомую функцию $cos\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то $cos\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = -\frac{4}{5} = -0{,}8.$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество
$cos^2\,\alpha + sin^2\,\alpha = 1$

Выразим из него искомую функцию $sin\,\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\,\alpha}$

Так как синус во II четверти положительный, то $sin\,\alpha = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическая работа № 20
«Преобразования тригонометрических выражений. Формулы сложения, удвоения. Формулы приведения»

Цель работы: Научиться преобразовывать тригонометрические выражения, используя тригонометрические формулы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Вычислите $\frac{cos12°\cdot cos48°-sin12°\cdot sin48°}{cos54°\cdot sin36°+cos36°\cdot sin54°}$

2. Дано $cos\propto=-\frac{3}{5};\ \ cos\beta=-\frac{24}{25};\ \pi<\propto<\frac{3\pi}{2};\ \ \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

Найдите $\sin(\propto-\beta)$.

3.Докажите тождество: $\frac{\sin(\alpha-\beta)cos\beta+\cos(\alpha-\beta)sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\,cos\beta-\sin(\alpha-\beta)sin\beta}=tg\alpha$

Порядок выполнения работы

1) Запишите задание и определите, какими формулами тригонометрии нужно воспользоваться.

2) Примените эти формулы.

3) Упростите получившееся выражение. Вычислите, если это необходимо, значение выражения.

Ход работы:

1.Вычислите $\frac{cos71°\cdot cos26°+sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25°+cos20°\cdot sin25°}$

Решение:

$$\frac{cos71°\cdot cos26°+sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25°+cos20°\cdot sin25°}$$

Для решения нам необходимо использовать формулы сложения:

$\cos(\alpha\pm\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta\mp sin\alpha\cdot sin\beta$

$\sin(\alpha\pm\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta\pm cos\alpha\cdot sin\beta$

$$\frac{cos71°\cdot cos26°+sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25°+cos20°\cdot sin25°}=\frac{\cos(71°-26°)}{\sin(20°+25°)}=\frac{cos45°}{sin45°}=tg45°=1$$

2. Дано $sin\propto=\frac{8}{17};\ \ cos\beta=\frac{4}{5};\ \frac{\pi}{2}<\propto<\pi;\ \ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Найдите $\sin(\propto+\beta)$.

Решение: Для решения нам нужно использовать формулу сложения $\sin(\alpha+\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot sin\beta$

Но нам неизвестны значения $cos\propto$ и $sin\beta$.

Найдем сначала эти значения, используя основное тригонометрическое тождество:

$cos^2\propto+sin^2\propto=1$

Выразим из него искомую функцию $cos\propto=\pm\sqrt{1-sin^2\propto}$

$sin\beta=\pm\sqrt{1-cos^2\beta}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то $cos\propto=-\sqrt{1-\frac{64}{289}}=-\sqrt{\frac{289}{289}-\frac{64}{289}}=-\frac{15}{17}$.

Так как синус в I четверти положительный, то $sin\beta=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$.

Подставим найденные значения в формулу и вычислим значение

$\sin(\propto+\beta)$.

$\sin(\propto+\beta)=\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5}+\left(-\frac{15}{17}\right)\cdot\frac{3}{5}=\frac{32}{85}-\frac{45}{85}=-\frac{13}{85}$

3.Докажите тождество: $\frac{\sin(\propto-\beta)cos\beta+\cos(\alpha-\beta)sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\,cos\beta-\sin(\alpha-\beta)sin\beta}=tg\alpha$

Доказательство:

Выпишем отдельно левую часть тождества и преобразуем ее, используя формулы сложения:

$$\frac{\sin(\propto-\beta)cos\beta+\cos(\alpha-\beta)sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\,cos\beta-\sin(\alpha-\beta)sin\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta+\beta)}{\cos(\alpha-\beta+\beta)}=\frac{sin\,\alpha}{cos\alpha}=tg\alpha$$

$\text{tg}\propto=\text{tg}\propto$

Тождество доказано.

Возможен и другой способ доказательства:

$$\frac{\sin(\propto-\beta)cos\beta+\cos(\alpha-\beta)sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\,cos\beta-\sin(\alpha-\beta)sin\beta}=\frac{(sin\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sin\beta)\,cos\beta+(cos\alpha\cdot cos\beta+sin\alpha\cdot sin\beta)sin\beta}{(cos\alpha\cdot cos\beta+sin\alpha\cdot sin\beta)\,cos\beta-(sin\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sin\beta)sin\beta}=$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$$=\frac{sin\alpha\cdot cos^2\beta-cos\alpha\cdot sin\beta\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot cos\beta\cdot sin\beta+sin\alpha\cdot sin^2\beta}{cos\alpha\cdot cos^2\beta+sin\alpha\cdot sin\beta\cdot cos\beta-sin\alpha\cdot cos\beta\cdot sin\beta+cos\alpha\cdot sin^2\beta}=\frac{sin\alpha\cdot cos^2\beta+sin\alpha\cdot sin^2\beta}{cos\alpha\cdot cos^2\beta+cos\alpha\cdot sin^2\beta}$$

$$=\frac{sin\alpha\,(cos^2\beta+sin^2\beta)}{cos\alpha(cos^2\beta+sin^2\beta)}=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=tg\alpha$$

$\text{tg}\propto=\text{tg}\propto$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическая работа № 21

«Преобразования тригонометрических выражений. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение. Преобразование произведения тригонометрических функций с сумму»

Цель работы: Научиться преобразовывать тригонометрические выражения, используя тригонометрические формулы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите значение выражения: $\frac{sin78° - sin42°}{cos78° - cos42°}$
2. Упростите выражение: $\frac{tg(180° - \alpha)\, cos(180° - \alpha) tg(90° - \alpha)}{sin(90° + \alpha) ctg(90° + \alpha) tg(90° + \alpha)}$.
3. Докажите тождество: $\frac{sin2\alpha + sin6\alpha}{cos2\alpha + cos6\alpha} = tg4\alpha$

Порядок выполнения работы

1) Запишите задание и определите, какими формулами тригонометрии нужно воспользоваться.

2) Примените эти формулы.

3) Упростите получившееся выражение. Вычислите, если это необходимо, значение выражения.

Ход работы:

1. Найдите значение выражения: $\frac{sin68° - sin22°}{cos68° - cos22°}$

Для решения нам нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение:

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha - sin\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Решение:

$$\frac{sin68° - sin22°}{cos68° - cos22°} = \frac{2cos\frac{68° + 22°}{2} \cdot sin\frac{68° - 22°}{2}}{-2sin\frac{68° + 22°}{2} \cdot sin\frac{68° - 22°}{2}} = \frac{2cos45° \cdot sin23°}{-2sin45° \cdot sin23°} = -\frac{cos45°}{sin45°} = -ctg45° = -1$$

2. Упростите выражение: $\frac{sin(180° + \alpha) tg(\alpha - 180°) \cdot cos(360° - \alpha)}{ctg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot ctg(\pi + \alpha) \cdot cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}$.

При решении этого задания нужно применить формулы приведения. Для этого вспомним мнемоническое правило: 1) Название функции не меняется, если к аргументу α прибавляется $-\pi n$ или πn.

Название функции меняется, если к аргументу α прибавляется $-\frac{\pi}{2}n$ или $\frac{\pi}{2}n$, n- нечетное число.

2) Ставится знак исходной функции, считая , что α- острый угол.

Решение:

$$\frac{sin(180° + \alpha) \cdot \mathrm{tg}(\alpha - 180°) \cdot cos(360° - \alpha)}{\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot ctg(\pi + \alpha) \cdot cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)} = \frac{-sin\alpha \cdot tg\alpha \cdot cos\alpha}{tg\alpha \cdot ctg\alpha \cdot (-sin\alpha)} = \frac{cos\alpha}{ctg\alpha} = \frac{cos\alpha}{\frac{cos\alpha}{sin\alpha}} = \frac{cos\alpha \cdot sin\alpha}{cos\alpha} = sin\alpha$$

3. Докажите тождество: $\frac{sin\alpha + sin3\alpha + sin5\alpha}{cos\alpha + cos3\alpha + cos5\alpha} = tg3\alpha$

Для решения нам нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Решение:

$$\frac{sin\alpha + sin3\alpha + sin5\alpha}{cos\alpha + cos3\alpha + cos5\alpha} = tg3\alpha$$

Выпишем отдельно левую часть тождества и преобразуем ее, используя формулы:

$$\frac{sin\alpha + sin3\alpha + sin5\alpha}{cos\alpha + cos3\alpha + cos5\alpha} = \frac{(sin\alpha + sin5\alpha) + sin3\alpha}{(cos\alpha + cos5\alpha) + cos3\alpha} = \frac{2sin\frac{\alpha+5\alpha}{2} \cdot cos\frac{\alpha-5\alpha}{2} + sin3\alpha}{2cos\frac{\alpha+5\alpha}{2} \cdot cos\frac{\alpha-5\alpha}{2} + cos3\alpha} = \frac{sin3\alpha \cdot cos(-2\alpha) + sin3\alpha}{cos3\alpha \cdot cos(-2\alpha) + cos3\alpha} =$$

Воспользуемся четностью косинуса $cos(-\alpha) = cos\alpha$

$$= \frac{sin3\alpha \cdot \cos 2\alpha + sin3\alpha}{cos3\alpha \cdot \cos 2\alpha + cos3\alpha} = \frac{sin3\alpha \cdot (cos2\alpha + 1)}{cos3\alpha \cdot (cos2\alpha + 1)} = \frac{sin3\alpha}{cos3\alpha} = tg3\alpha$$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \mathrm{tg}3\alpha$$

Тождество доказано.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическая работа № 22

Построение графиков тригонометрических функций с использованием геометрических преобразований

Цель работы: Научиться строить графики тригонометрических функций

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;

– находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Построить график функции $y = 3sin(x - \frac{\pi}{6})$. Записать свойства этой функции.

Порядок выполнения работы:

При построении графика нужно воспользоваться преобразованиями графиков.

1. ***y = f(x) + b*** – график функции получается из графика функции y = f(x) путем параллельного переноса этого графика на величину вдоль от ОУ. При этом, если b>0, то график функции f(x) + b располагается выше графика функции f(x), если b<0, то ниже этого графика.

2. ***y = f (x + b)*** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью параллельного переноса этого графика на величину b вдоль оси ОХ, при этом, если b>0, то сдвиг влево, а если b<0, то сдвиг вправо.

3. ***y = - f(x)*** – график симметричен графику y = f(x) относительно оси ОХ

4. ***y = a f(x)*** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия графика по оси ОУ пропорционально коэффициенту *a*, причем,

если *a* > 1, то все ординаты графика af(x) увеличиваются в *a* раз, если a < 1, то уменьшаются в *a* раз.

5. ***y = f(a x)*** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия вдоль оси ОХ пропорционально коэффициенту *a*, причем, если, *a* > 1, то график сжимается в *a* раз, если 0 < a <1, то растягивается в 1/*a* раз.

6. ***y =*** $\left|f(x)\right|$ - для построения этого графика нужно построить график функции y = f(x) и отобразить относительно оси ОХ те части графика, которые расположены ниже этой оси.

После построения графика проведите исследование функции по общей схеме.

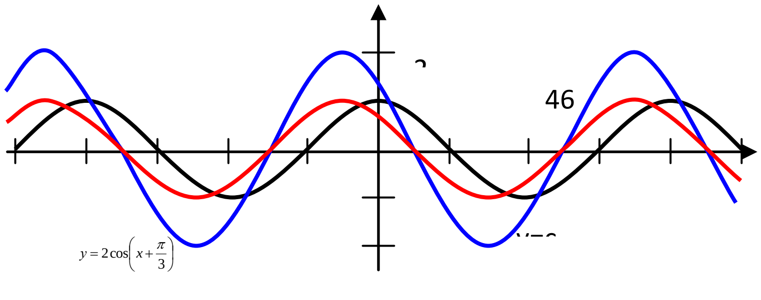
Ход работы

Построить график функции $y = 2cos(x + \frac{\pi}{3})$. Записать свойства этой функции.

Сначала построим график функции $y = cosx$

Перенесем график функции $y = cos\,x$ на $\frac{\pi}{3}$ влево. Получим график функции $y = cos(x + \frac{\pi}{3})$.

Растянем график получившейся функции в 2 раза вдоль оси Оу.



Исследуем функцию по общей схеме:

1. D(y) = R;
2. E(y) = [-2; 2]
3. y = 0, при x= π/6 + πn, n Є Z;
4. Функция общего вида.
5. Функция немонотонная, при x Є (2π/3 + 2πn; 5π/3 + 2πn) – функция возрастает; при x Є (-π/3 + 2πn;2 π/3 + 2πn) – функция убывает;
6. (-π/3 + 2πn; 2) – max; (2π/3 + 2πn; -2) – min;
7. T=2π.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

Практическая работа № 23

«Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства»

Цель работы: Научиться решать простейшие тригонометрические уравнения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите тригонометрические уравнения:

1) $cos3x = 0$

2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

3) $3tg\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

4) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $sin4x \cdot cos3x + cos4x \cdot sin3x = \frac{1}{2}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать уравнение и определить, к какому виду оно относится и какой формулой необходимо воспользоваться.
2. Решить уравнение.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Решите тригонометрические уравнения:

1) $sin2x = 0$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни находятся по формуле

$x = \pi n, \quad n \in Z$

$2x = \pi n, n\epsilon Z$;

$x = \frac{\pi}{2}n, n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}n, n\epsilon Z$

2) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни находятся по формуле

$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$

$5x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z$

$5x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n\epsilon Z$

$5x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}n, \ \ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}n, \ \ n\epsilon Z$

3) $2\cos 3x = -1$

Разделим обе части уравнения на 2. Получим уравнение: $\cos 3x = -\frac{1}{2}$.

Это уравнение не является частным случаем, $a = -\frac{1}{2}, |a| < 1$. Поэтому оно имеет решение, которое находится по формуле: $x = \pm arccos a + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$3x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$3x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$3x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n, \ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n,\ n\epsilon Z$

4) $tg\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Уравнение имеет решение, которое находится по формуле: $x = arctga + \pi n,\ n\epsilon Z$

$6x - \frac{\pi}{4} = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n, \qquad n\epsilon Z$

Функция $y = arctgx$ нечетная, поэтому $arctg(-x) = -arctgx$.

$6x - \frac{\pi}{4} = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$6x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$6x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$6x = \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{6}n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{6}n, \qquad n\epsilon Z$

5) $cos6x \cdot cos3x + sin6x \cdot sin3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Видим, что левую часть можно свернуть по формулам сложения:

$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$

$cos(6x - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\,3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Теперь уравнение является простейшим и его корни находятся по формуле: $x = \pm arccosa + 2\pi n,\ n\epsilon Z$.

$$3x = \pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$$

$$3x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$$

$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n, \qquad n\epsilon Z$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

Практическая работа № 24

«Тригонометрические уравнения и методы их решения»

Цель работы: Научиться решать тригонометрические уравнения.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
– находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Решите тригонометрические уравнения:
1) $2sin^2x - 3sinx + 1 = 0$
2) $8sin^2x + 6cosx - 3 = 0$
3) $6tg^2x + tgx - 1 = 0$
4) $sin4x + sin3x = 0$
5) $cos^2(\pi - x) + 8\cos(\pi + x) + 7 = 0$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите уравнение и определите, каким способом уравнение возможно свести к простейшим уравнениям.
2. Если необходимо, введите новую переменную и решите уравнение относительно этой переменной. После решения уравнения с новой переменной вернитесь к замене. Должно получиться простейшее тригонометрическое уравнение, решив которое, получим корни данного уравнения. Помните, что, если уравнение содержит функции $y = tgx, y = ctgx$, то необходимо учесть их область определения.
3. Если уравнение можно представить в виде произведения нескольких множителей, и правая часть равна нулю, то разложите левую часть на множители и используй правило, когда произведение равно нулю. Приравняв каждый множитель к нулю, получим несколько простейших уравнений, которые необходимо решить, учитывая область допустимых значений.
4. Запишите ответ.

Ход работы:
Решите тригонометрические уравнения:
1) $2cos^2x + cosx = 1$
Решение:

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть $cosx = t$, тогда наше уравнение примет вид $2t^2 + t = 1$

Перенесем 1 в левую часть и получим полное квадратное уравнение

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9, \quad \sqrt{D} = 3$

$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1;$

$t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Вернемся к старой переменной:

$cosx = -1$ или $cosx = \frac{1}{2}$.

Получили два простейших тригонометрических уравнения, первое относится к частным случаям, а второе решается по общей формуле. Решим их.

1)$cosx = -1$

$x = \pi + 2\pi n, \quad n\epsilon Z$

2)$cosx = \frac{1}{2}$

$x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n\epsilon Z$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; n\epsilon Z$

2) $2cos^2x + sinx - 1 = 0$

Решение:

Это уравнение содержит разноименные функции, поэтому сразу ввести новую переменную не получится.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и выразим одну функцию через другую:

$cos^2x + sin^2x = 1$

$cos^2x = 1 - sin^2x$

$2(1 - sin^2x) + sinx - 1 = 0$

$2 - 2sin^2x + sinx - 1 = 0$

$-2sin^2x + sinx + 1 = 0$

$2sin^2x - sinx - 1 = 0$

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть $sinx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - t - 1 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9, \quad \sqrt{D} = 3$

$t_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2};$

$t_2 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Вернемся к старой переменной:

$sinx = 1$ или $sinx = -\frac{1}{2}$.

Получили два простейших тригонометрических уравнения, первое относится к частным случаям, а второе решается по общей формуле. Решим их.

1) $sinx = 1 \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$

2) $sinx = -\frac{1}{2}$. $x = (-1)^n arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ n\epsilon Z$

$x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \quad n\epsilon Z$

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n\epsilon Z$

3) $5ctg^2x - 8ctgx + 3 = 0$

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть $ctgx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $5t^2 - 8t + 3 = 0$

Учитываем ОДЗ $x \neq \pi n,\ n\epsilon Z$

$5t^2 - 8t + 3 = 0$

$D = 64 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4, \quad \sqrt{D} = 2$

$t_1 = \frac{8-2}{10} = 0{,}6;$

$t_2 = \frac{8+2}{10} = 1$

Вернемся к старой переменной:

$ctgx = 1$ или $ctgx = 0{,}6$.

Решим их.

1)$ctgx = 1 \quad x = arcctg1 + \pi n, n\epsilon Z \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$

2)$ctgx = 0{,}6 \quad x = arcctg0{,}6 + \pi n, n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = arcctg0{,}6 + \pi n, n\epsilon Z$

4) $cos2x + cos4x - cos3x = 0$

Решение:

Используя формулы преобразования суммы и разности функций в произведение, разложим правую часть уравнения на множители:

$2cos\frac{2x+4x}{2} \cdot cos\frac{2x-4x}{2} - cos3x = 0$

$2cos3x \cdot cos(-2x) - cos3x = 0 \quad cos(-2x) = cos2x$

$2cos3x \cdot cos2x - cos3x = 0$

$cos3x(2cos2x - 1) = 0$

$cos3x = 0$ или $2cos2x - 1 = 0$

Получили два простейших тригонометрических уравнения, первое относится к частным случаям, а второе решается по общей формуле. Решим их.

1)$cos3x = 0$

$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n\epsilon Z$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n\epsilon Z$

2)$2cos2x - 1 = 0$

$2cos2x = 1$

$cos2x = \frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n\epsilon Z$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n\epsilon Z$

5) $2sin^2(\pi - x) + 5\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 2 = 0$

Решение:

Сначала нужно применить формулы приведения: $sin^2(\pi - x) = sin^2x$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -sinx$

Получим уравнение: $2sin^2x - 5sinx + 2 = 0$

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть $sinx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9, \quad \sqrt{D} = 3$

$t_1 = \frac{5-3}{4} = -\frac{1}{2};$

$t_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

Вернемся к старой переменной:

$sinx = \frac{1}{2}$ или $sinx = 2.$

1)$sinx = \frac{1}{2}$ $x = (-1)^n arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n\epsilon Z$ 2)$sinx = 2$ Уравнение не имеет решений, т.к. $2 > 1$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

Практическая работа № 25

«Тригонометрические уравнения»

Цель работы: Научиться решать однородные тригонометрические уравнения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- находить значения тригонометрических выражений на основе определения, используя

при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите тригонометрические уравнения:

1) $sin^2x - 5sinx \cdot cosx + 4cos^2x = 0$

2) $7sin^2x - 4sin2x + cos^2x = 0$

3) $6sin^2x - 3sinx \cdot cosx - cos^2x = 1$

4) $5cos^2x + 3sinx \cdot cosx + 2sin^2x = 2$

Порядок выполнения работы:

1.Установите, является ли уравнение однородным.

Однородными тригонометрическими уравнениями *называются уравнения вида:*

$asinx + bcosx = 0$

$asin^2x + bcos^2x + csinx \cdot cosx = 0$

2. Если уравнение является однородным уравнением первого порядка, то разделите обе части уравнения на $cosx \neq 0$ или $sinx \neq 0$.

3. Если уравнение является однородным уравнением второго порядка, то разделите обе части уравнения на $cos^2x \neq 0$ или $sin^2x \neq 0$.

4. Введите новую переменную и решите уравнение относительно этой переменной.

5. Вернитесь к старой переменной и решите получившиеся простейшие тригонометрические уравнения.

6. Запишите ответ.

Ход работы:

Решите тригонометрические уравнения:

1) $2sin^2x - 5sinx \cdot cosx + 3cos^2x = 0$

Решение:

Уравнение является однородным тригонометрическим уравнением второго порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на $cos^2x \neq 0$.

$$\frac{2sin^2x}{cos^2x} - \frac{5sinx \cdot cosx}{cos^2x} + 3 = 0$$

Знаем, что $\frac{sinx}{cosx} = tgx$. $2tg^2x - 5tgx + 3 = 0$

Введем новую переменную. Пусть $tgx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - 5t + 3 = 0$

Учитываем ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\epsilon Z$.

$2t^2 - 5t + 3 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1,\ \sqrt{D} = 1$

$t_1 = \frac{5-1}{4} = 1$

$t_2 = \frac{5+1}{4} = 1{,}5$

Вернемся к старой переменной:

$tgx = 1$ или $tgx = 1{,}5$

1) $tgx = 1$ $\qquad x = arctg1 + \pi n,\ n \epsilon Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$

2) $tgx = 1{,}5$ $\qquad x = arctg1{,}5 + \pi n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad x = arctg1{,}5 + \pi n, \qquad n\epsilon Z$

2) $4sin^2x - 3sin2x + 2cos^2x = 0$

Сначала преобразуем аргумент , используя формулы двойного аргумента: $sin2x = 2sinx \cdot cosx.$

$4sin^2x - 6sinx \cdot cosx + 2cos^2x = 0$

Уравнение является однородным тригонометрическим уравнением второго порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на $sin^2x \neq 0.$

$$\frac{4sin^2x}{sin^2x} - \frac{6sinx \cdot cosx}{sin^2x} + \frac{2cos^2x}{sin^2x} = 0$$

Знаем, что $\frac{cosx}{sinx} = ctgx \qquad 4 - 6ctgx + 2ctg^2x = 0$

Введем новую переменную. Пусть $ctgx = t,$ тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - 6t + 4 = 0$

Учитываем ОДЗ: $x \neq \pi n,\ n\epsilon Z.$

$2t^2 - 6t + 4 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 4,\ \sqrt{D} = 2$

$t_1 = \frac{6-2}{4} = 1$

$t_2 = \frac{6+2}{4} = 2$

Вернемся к старой переменной:

$ctgx = 1$ или $ctgx = 2$

1)$ctgx = 1 \qquad x = arcctg1 + \pi n,\ n\epsilon Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$

2)$ctgx = 2 \qquad x = arctg2 + \pi n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad x = arctg2 + \pi n, \qquad n\epsilon Z$

3) $2sin^2x + 5sinx \cdot cosx + cos^2x = 4$

Решение:

Уравнение пока не является однородным, т.к. в правой части его вместо нуля стоит 4. Перенесем 4 в правую часть и применим основное тригонометрическое тождество:

$$2sin^2x + 5sinx \cdot cosx + cos^2x - 4(cos^2x + sin^2x) = 0$$

$$2sin^2x + 5sinx \cdot cosx + cos^2x - 4cos^2x - 4sin^2x = 0$$

$$-2sin^2x + 5sinx \cdot cosx - 3cos^2x = 0$$

Уравнение теперь является однородным тригонометрическим уравнением второго порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на $cos^2x \neq 0.$

$\frac{-2sin^2x}{cos^2x} + \frac{5sinx \cdot cosx}{cos^2x} - 3 = 0$

$-2tg^2x + 5tgx - 3 = 0$

$2tg^2x - 5tgx + 3 = 0$

Введем новую переменную. Пусть $tgx = t,$ тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - 5t + 3 = 0$

Учитываем ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\epsilon Z.$

$2t^2 - 5t + 3 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1, \ \sqrt{D} = 1$

$t_1 = \frac{5-1}{4} = 1$

$t_2 = \frac{5+1}{4} = 1{,}5$

Вернемся к старой переменной:

$tgx = 1$ или $tgx = 1{,}5$

1) $tgx = 1 \qquad x = arctg1 + \pi n, \ n\epsilon Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$

2) $tgx = 1{,}5 \qquad x = arctg1{,}5 + \pi n, \ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad x = arctg1{,}5 + \pi n, \qquad n\epsilon Z$

4) $5cos^2x + \sqrt{3}sinx \cdot cosx + 6sin^2x = 5$

Уравнение пока не является однородным, т.к. в правой части его вместо нуля стоит 5. Перенесем 5 в правую часть и применим основное тригонометрическое тождество:

$5cos^2x + \sqrt{3}sinx \cdot cosx + 6sin^2x - 5cos^2x - 5sin^2x = 0$

$\sqrt{3}sinx \cdot cosx + sin^2x = 0$

Вынесем общий множитель за скобки: $sinx\left(\sqrt{3}cosx + sinx\right) = 0$

$sinx = 0$ или $\sqrt{3}cosx + sinx = 0$

1) $sinx = 0, \quad x = \pi n, n\epsilon Z$

2) $\sqrt{3}cosx + sinx = 0$

Уравнение является однородным тригонометрическим уравнением первого порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на $cosx \neq 0$.

$\frac{\sqrt{3}cosx}{cosx} + \frac{sinx}{cosx} = 0$

$\sqrt{3} + tgx = 0$

$tgx = -\sqrt{3}$

$x = arctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n, n\epsilon Z$

$x = -arctg\sqrt{3} + \pi n, n\epsilon Z$

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pi n, \qquad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad n\epsilon Z$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но

объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическая работа № 26

«Числовая последовательность, способы ее задания, вычисление членов последовательности. Предел последовательности. Нахождение пределов функции»

Цель работы:

1. Научиться вычислять пределы функции.
2. Научиться избавляться от неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
3. Научиться решать задачи связанные с числовой последовательностью.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

1. Вычислять пределы функции.
2. Избавляться от неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
3. Решать задачи связанные с числовой последовательностью.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание.

1) Решить задачи на числовую последовательность.

2) Вычислить пределы функций

Задание 1	Задание 2
1. Найти восьмой член последовательности; $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{n}{n+1}$. 2. Найти номер числа 3 в последовательности: $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$ 3. Вычислить: $\lim_{x\to -2}(3x^2 - 8x + 5)$ 4.$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}+1}{1-\sqrt{2x}}$ 5.$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$	6.$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}$ 7.$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 8.$\lim_{x\to 2}\frac{6x^2+5x-4}{x^2-2x}$ 9.$\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{2x}+1}{1-\sqrt{2x}}$ 10.$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание

Ход работы:

Задание №1

1. Девятый член последовательности $c_n = \left(\frac{2n-1}{\sqrt{n^3+3}}\right)$ равен?

$$c_9 = \left(\frac{2\cdot 9-1}{\sqrt{9^3+3}}\right) = \frac{17}{\sqrt{732}} = \frac{17}{2\sqrt{183}}; \Rightarrow c_9 = \frac{17}{2\sqrt{183}}$$

2. Номер числа 6, являющегося членом последовательности $a_n = n^2 - 5n$ равен?

$6=n^2-5n$

$n^2-5n-6=0$

$n_1=6$

$n_2=-1$ –посторонний корень т.к. номер не может быть отрицательным числом.

Ответ: n=6.

Задание №2

Найдите пределы предварительно избавившись от неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{x^2-9x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+9)}{x(x-9)} = \lim_{x\to 9}\frac{x+9}{x} = \lim_{x\to 9}\frac{18}{9} = \lim_{x\to 3} 2 = 2;$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+5) = \lim_{x\to 1}(1+5) = \lim_{x\to 1}(6) = 6$

$x^2+4x-5=0$ $\quad \begin{cases} x_1+x_2=-4 \\ x_1+x_2=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{a+x-a+x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} =$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+0}+\sqrt{a-0}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2\sqrt{a}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}};$

Вычислить пределы имеющие неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+0+0+0}{4+0+0+0} = \lim_{x\to\infty} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+0+0}{0+0} = \left(\frac{2}{0}\right).=+\infty$

(0 в знаменателе принимаем за бесконечно малую величину.)

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическая работа № 27

«Нахождение производных по определению»

Цель работы: Отработать определение производной функции. Применять правила дифференцирования . Научиться находить производную в заданной точке.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить производные элементарных функций;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Найдите $y' = (0)$, если $y = x^2 - x$
2. Найдите $y' = (3)$, если $y = -\frac{3}{x}$
3. Найдите $y' = (5)$, если $y = \sqrt{x-1}$

Порядок выполнения работы:
Вычисление производной функции $y = f(x)$ производится по общему правилу дифференцирования:
1) Придавая аргументу x приращение Δx и подставляя в выражение функции вместо аргумента x наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции:
$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$
2) Вычитая из наращенного значение функции её первоначальное значение находим приращение функции:
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
3) Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx_1 т.е. составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
4) Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т. е.
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
Этот предел и есть производная от функции $y = f(x)$

Ход работы:
1. Найти: $y'(x)$, если $y = 2x^2 - 3x$
Находим производную по общему правилу:
1) $y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x$
2) $y + \Delta y - y = \cancel{2x^2} + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \cancel{3x} - 3\Delta x - \cancel{2x^2} + \cancel{3x} = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x$
3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(4x+2\Delta x-3)}{\cancel{\Delta x}} = 4x + 2\Delta x - 3$
4) $\lim_{\Delta x \to 0}(4x + 2\Delta x - 3) = 4x - 3$

Найдём значение производной при $x = 3$.

$y'(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 0$

2. Найти $y'(4)$, если $y\sqrt{x}$

1) $y + \Delta y = y\sqrt{x + \Delta x}$

2) $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =$

4) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Найдем значение производной в точке $x = 4$, $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическая работа № 28

«Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

Цель работы: Научиться вычислять производные элементарных функций

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Вычислять производные элементарных функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание.

1) Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций.

2) Вычислить производную функции в точке.

Задание 1	Задание 2

1)	$y=7x^4-4x^3+5x^2-2;$	6)	$f(t)=0,5t+0,6t^2+0,8t+8;\quad f'(1)-?$
2)	$y=5\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}}{x^3}+\frac{x^4}{\sqrt{x}};$	7)	$f(x)=ctgx-tgx;\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)-?$
3)	$y=3ctgx+5\ln x-3^x;$	8)	$f(x)=2\cdot 5^x+3\cdot e^x;\quad f'(0)-?$
4)	$y=(9+x^2)(2x-1);$	9)	$f(x)=\cos x\cdot(1+\sin x);\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-?$
5)	$y=\frac{x^3}{3x+5};$	10)	$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1};\quad f'(1)-?$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций и справочными материалами, выполните задание.

Ход работы:

Задание №1

Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций

Таблица производных основных элементарных функций.

$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(e^x)'=e^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\ln x)'\frac{1}{x}$	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$c'=0, c-const;$	$x'=1;$	$(CU)'=C\cdot U'$	
$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(u\cdot v)'=u'v+uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v+uv'}{v^2}$	

1. $y=6x^4-8x^3+2x^2-4$

$$y'=(6x^4-8x^3+2x^2-4)'=24x^3-24x^2+4x;$$

2. $y=(5x-4)*(x+2)$

$$y'=((5x-4)(x+2))'=\begin{vmatrix} u=5x-4;\ \ u'=5 \\ v=x+2;\ \ v'=1 \\ (u*v)'=u'v+uv' \end{vmatrix}=$$

$$=5(x+2)+1(5x-4)=5x+10+5x-4=10x+6$$

3. $y=\frac{x+1}{x}$

$$y' = \left(\frac{x+1}{2x}\right)' = \left| \begin{array}{l} u = x+1;\ u' = 5 \\ v = 2x;\ v' = 2 \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{array} \right| = \frac{1\cdot 2x - 2(x+1)}{(2x)^2} = \frac{2x-2x-2}{4x^2} =$$

$$= \frac{-2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2};$$

Задание№2

Вычислить производную функции в точке.

$y = 3x^5 - 8x^4 + 9x^2 - 4$

y' (-1)=3$\cdot (-1)^5 - 8\cdot(-1)^4 + 9(-1)^2 - 4 = -3 - 8 + 9 - 4 = -6.$

1. $y = 5\sin x\cos x$

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5((sinx)'\cdot cosx + sinx(cosx)') = 5(cos^2x - sin^2x) = 5(cos2x) = 5(cos2\frac{\pi}{2}) = \quad = 5cos\pi = 5\cdot(-1) = -5$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическая работа № 29

«Производные сложных функций»

Цель работы: Научиться вычислять производные сложных функций

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Вычислять производные сложных функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание.

Задание 1: Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных сложных функций.

Задание 2: Вычислить производную функции в точке.

Задание№1	Задание№2
$1) y=(mx^k+4)^p$	$2) y=m*\cos(px^k-m)$; y′(1)=?
$3) y=(e^{px^m}+kx)$	$4) y=ktg(mx^p)$; y′(-1)=?
$5) y=12^{px^m-mx}$	$6) y=ctg(px^k-mx)$; y′(2)=?
$7) y=\ln(x^k+px^m)$	$8) y=\sqrt{mp^x+kx}$; y′(-2)=?
$9) y=\log_7(mx+k)$	$10) y=(e^{px+k})*\sqrt{x^p+mx}$; y′(3)=?
$11) y=p*\sin(kx+m)$	$12) y=\dfrac{\ln(px^n)}{k*\cos mx}$; y′(-3)=?

Где р – число букв в имени; м – число букв в фамилии; к – число букв отчества.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций и справочными материалами, выполните задание.

Ход работы:

Задание № 1

Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных сложных функций

«Правила вычисления и таблицу производных сложных функций»

$(u^n)'=nu^{n-1}u'$	$(\sin u)'=\cos uu'$
$(e^u)'=e^uu'$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
$(a^u)'=a^u\ln au'$	$(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}u'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}u'=\dfrac{u'}{u}$	$(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'=-\dfrac{u'}{\ln^2 u}$
$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}u'=\dfrac{u'}{u\ln a}$	$(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

1. $y=(3x^2-4x)^5;$

$y'=((3x^2-4x)^5)=5(3x^2-4x)^4\cdot(3x^2-4x)'=$
$=5(3x^2-4x)^4\cdot(6x-4)=(30x-20)(3x^2-4x)^4.$

2. $y=\sin(3x-x^2)$

$y'(\sin(3x-x^2))'=\cos(3x-x^2)\cdot(3x-x^2)'=(3-2x)\cdot\cos(3x-x^2).$

3. $y=6\ln 5x$

$$y'=(10\ln 2x)'=10(\ln 2x)'=10\cdot\frac{1}{2x}\cdot(2x)'=\frac{10\cdot 2}{2x}=\frac{10}{x}.$$

Задание № 2

Вычислить производную функции в точке.

1. $y' = (\sqrt{x^2+6})'$; $y'(3) = ?$

$y' = (\sqrt{x^2 = 6})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+6}} \cdot (x^2+6)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+6}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+6}}.$

$y'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2+6}} = \frac{3}{\sqrt{9+6}} = \frac{3}{\sqrt{15}}.$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическая работа № 30

«Геометрические приложения производной»

Цель работы: Научиться составлять уравнение касательной к данной кривой в точке касания; находить угловой коэффициент касательной, проведенный к кривой.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить производные элементарных функций;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = -x^2 + x$ в точке $x_0 = -2$
2. Найдите угол наклонена к оси касательной, проведенной к кривой $y = x^3$ в точке $x_0 = -2$
3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = \sin 3x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$.

Порядок выполнения работы:

1. Значение производной функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равно угловому коэффициенту

касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в её точке с абсциссой x_0, т.е. $k' = y'(x_0) = f'(x_0) = \tan \propto$

где $\propto$-угол между касательной к кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ и положительным направлением оси 0_x.

2. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

3. Направление кривой в каждой точке определяется направление касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклонной кривой в данной точке надо вычислить угол между касательной, проведенной в этой точке, и осью .

Ход работы:

1. Найти угол наклона к оси O_x касательной проведенной к кривой $y = \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$

-найдем производную функцию $y = \sin x \quad y' = \cos x$

-найдем значение производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{3} \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

-тангенс угла наклона касательной в данной точке равен $k = tg \propto$, откуда $\propto = arc\ \mathrm{tg}\frac{1}{2} \approx 26{,}6°$

2. Под какими углами парабола $y = x^2 + x$ пересекает ось O_x ?

-Найдем точки пересечения параболы с осью O_x, решив систему

$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} (-1; 0) \\ (0; 0) \end{cases}$

-Парабола пересекает ось O_x в точках А$(1; 0); O(0; 0)$. Найдём угловые коэффициенты касательных к параболе в этих точках

$y' = (x^2 + x) = 2x + 1; k(-1) = 2(-1) + 1 = -1, k(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

- вычислили углы $\propto_1 и \propto_2$, образуемые касательными в точках пересечения параболы с осью O_x: $tg \propto_1 = -1, \propto_1 = 135°; tg \propto_2 = 1, \propto_2 = 45°$

3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = 3x^2 - x$ в точке $x_0 = -1$

-найдём производную кривой в точке x_0

$y' = (3x^2 - x)' = 6x - 1; y'(-1) = 6(-1) - 1 = -7$

-найдем координату точки касания:

$y(-1) = 3(-1) - (-1) = 4; M(-1; 4)$

-поставим в формулу уравнения касательной:

$y - 4 = -7(x + 1)$

$y - 4 = -7x - 7$

$7x + y + 3 = 0 - \textit{уравнение касательной}$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или

объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическая работа № 31

«Общая схема исследования функции»

Цель работы: Научиться исследовать функции с помощью производной и строить графики.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
-определять промежутки монотонности функций с помощью производной;
- находить экстремумы функции;
-проводить исследование функции по общей схеме;
-строить графики функций, используя проведенное исследование.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:
Исследовать функцию и построить ее график:
1) $f(x) = x^3 - 12x$;
2) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$.

Порядок выполнения работы:
1. Запишите функцию.
2. Используя общую схему, исследуйте функцию.
3. По результатам исследования постройте график функции

Ход работы:
Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:
1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки.
3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
4) Записать интервалы, на которых функция возрастает $f'(x) > 0$ и убывает $f'(x) < 0$.
5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:
1) Найти вторую производную.
2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
4) Если $f''(x) > 0$, то график выпуклый вниз. Если $f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх.
5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Если $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая$x = a$ является вертикальной асимптотой.

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$

Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ и построить график.

-функция определенна на всей числовой прямой: $D(x): x \in (-\infty; \infty)$

-данная функция не является ни четной, ни нечетной: $y(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 3 = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3 = -(x^3 + 6x^2 + 9x + 3) \neq -y(x)$

-найдём точку пересечения графика с осью O_y , пологая $x = 0$, получим $y = -3$ точки пересечения графика с осью O_x в данном случае найти затруднительно.

-найдём производную: $y' = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = 3x^2 - 12x + 9$

-найдём критические точки, для этого $y' = 0$,т.е $3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0; x_1 = 1; x_2 = 3$

-исследуем функцию на монотонность

+ - +

1 3

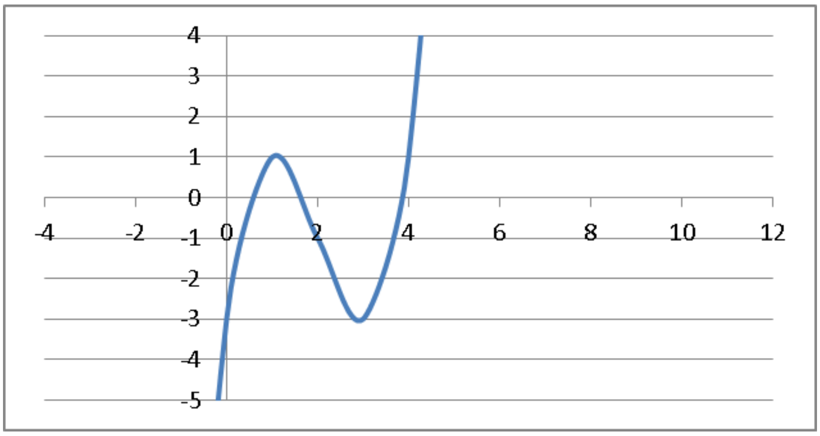
$(-\infty; 1)$ и $(3; \infty)$ график функции возрастает, $(1; 3)$-убывает

-исследуем функцию на экстремум:

$y(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1; A(1; 1)$точка max

$y(3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3, B(3: -3)$точка min

-используя полученные данные строим искомый график.



Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическая работа № 32

«Исследование функций и построение графиков функций»

Цель работы: Научиться исследовать функций и строить их графики.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь: исследовать функций и строить их графики.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: Исследовать функций и построить схематически их графики.

Задания	
$а) y = 2 + 5x^3 - 3x^5;$	$б) f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;$
$а) y = 2x^3 - 3x^2 - 36x;$	$б) f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;$
$а) y = x^3 - 4x^2;$	$б) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2;$

Порядок выполнения работы:
Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
Пользуясь конспектом лекций и справочными материалами, выполните задание.

Ход работы

Понятие производной позволяет провести подробное исследование функций с целью более точного построения их графиков.

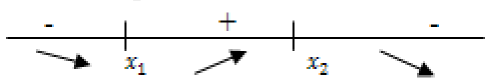
Рассмотрим алгоритм исследования функций:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность и не четность;

- Если для функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, то данная функция является четной. Следовательно, график функции симметричен относительно оси (ОУ).
- Если для функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, то дана функция является нечетной. Следовательно график функции симметричен относительно начала координат (0;0)
- Если $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то данная функция является функцией общего вида и свойством симметричности данная функция не обладает

3) найти интервалы монотонности функции;

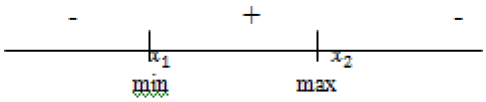
- Найти производную функции.
- Прировнять производную к нулю и решить полученное уравнение.
- Отметить найденные корни уравнения на координатной прямой, разбив её на промежутки.
- Найти знак производной на каждом из полученных промежутков.



$f(x)\downarrow$, при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

$f(x)\uparrow$, при $x \in (x_1; x_2)$

4) найти экстремумы функции;



$x_{min} = x_1$

$x_{max} = x_2$

5) найти значение функции в критических точках и в точках экстремума;

6) найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график функции;

7) построить график фикции.

Задание № 1

1) Исследуйте функцию и постройте её график $y = 1 + 2x^2 - x^4$;

2) Определим четность

$f(-x) = 1 + 2(-x)^2 - (-x)^4 = 1 + 2x^2 - x^4 \Rightarrow имеем \ f(-x) = f(x) \Rightarrow$

функция четная и ее график симметричен относительно оси (ОУ).

3) Найдем производную

$f'(x) = (1 + 2x^2 - x^4)' = 4x - 4x^3;$

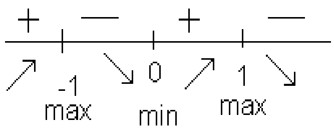
$4x - 4x^3 = 0$

$4x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 : x = \pm 1;$

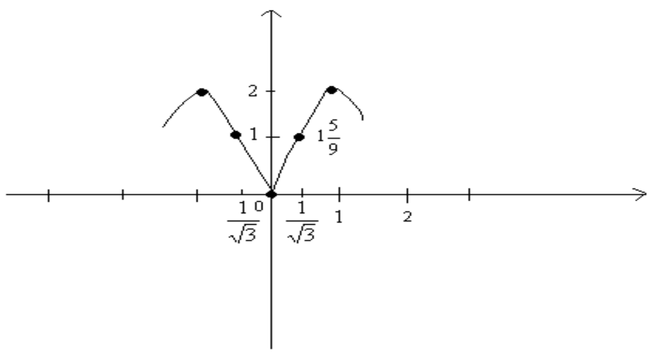
$f(-1) = 1 + 2(-2)^2 - (-2)^4 = 2$

$f(0) = 1 + 2(0)^2 - 0^4 = 1$

$f(1) = 1 + 2 * 1^2 - 1^4 = 2$



x	$(-\infty;-1)$	-1	(-1:0)	0	(0;1)	1	(1;+ ∞)
$f'(x)$	+	0	_	0	+	0	_
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	2	↘



Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но

объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическая работа № 33

«Нахождение наибольшего и наименьшего значения и экстремальных значений функции. Прикладные задачи на экстремум»

Цель работы: Научиться применять производную функции при решении задач.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– находить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке;
– решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке :а)$[-1; 1]$; б) $[0; 3]$.
2. Имеется проволока длиной *a* метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.

Ход работы:

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на промежутке :а)$[-2; -0,5]$;б) $[1; 3]$.

Решение.

Находим критические точки функции.

$f'(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 4)' = -x^2 - 6x = -6x(x+1)$;

$f'(x) = 0$; $-6x(x+1)=0$; $x = 0$ и $x = -1$. получили две критические точки: $x = 0$ и $x = -1$.

а) В промежутке $[-2; -0{,}5]$ лежит одна из критических точек:x= -1.

Так как $f(-2) = 8, f(-1) = 3. f(-0{,}5) = 3{,}5,$ то наименьшее значение функция $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ достигает в точке $x = -1$ и равно 3, а наибольшее - в точке $x = -2$ и равно 8.. Кратко это можно записать так: $\min_{[-2;-0,5]} f(x) = f(-1) = 3. \max_{[-2;-0,5]} f(x) = f(-2) = 8.$

б) Отрезку $[1; 3]$ не принадлежит ни одна из критических точек, поэтому найдём значения функции на концах отрезка: $f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = -1. [1; 3]; f(3) = -2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = -77.$. Кратко это можно записать так: $\min_{[\ \ 1;3]} f(x) = f(3) = -7; . \max_{[1;3]} f(x) = f(1) = -1.$

2. Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найдите эти слагаемые.

Решение. Пусть заданное число представлено в виде суммы двух слагаемых x и y,т.е.86=$x + y$. Выразим второе слагаемое через x:

y=86-x.Запишем произведение этих чисел в виде функции от x:$f(x) = x \cdot (86 - x)$ Найдём значение x, при котором функция

$f(x) = x \cdot (86 - x)$ достигает максимума..Найдём производную$f'(x)$ и приравняем её нулю. $f'(x) = (x \cdot (86 - x))' = (86x - x^2)' = 86 - 2x = 2(43 - x),$

$2(43 - x) = 0, x = 43.$

Определим второе слагаемое: $y = 86 - x = 86 - 43 = 43.$

Ответ: $x = 43; y = 43.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическая работа № 34

«Интеграл и первообразная. Нахождение неопределенных интегралов при помощи свойств интегралов»

Цель: научиться находить неопределённые интегралы непосредственным интегрированием при помощи свойств интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить интеграл
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием

определенного интеграла.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Найти следующие интегралы:
1. $\int\left(\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5\right)dx$
2. $\int 3(2x^2-1)^2\,dx$
3. $\int x^3(1+5x^2)dx$
4. $\int(\frac{3}{x^4}+\frac{8}{x^5})dx$
5. $\int\left(5\sqrt{x^6}-7\sqrt[4]{x^3}\right)dx$

Порядок выполнения работы:
Совокупность всех первообразных для функции называется неопределенным интегралом.
Основные свойства неопределённого интеграла
1) $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$
2) $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$
Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Могут представиться следующие случаи:
1) Данный интеграл находиться непосредственно по соответствующему табличному интегралу.
2) Данный интеграл после применения свойств 1и2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;
3) Данный интеграл после элементарных тождественных преобразований, над подынтегральной функцией и применяя свойства 1и2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Ход работы:
Свойства неопределенного интеграла
1) $\int mf(x)dx=m\int f(x)dx$, m-const
2) $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

Таблица основных интегралов
1) $\int dx=x+C$;
2) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n\neq -1$;
3) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$;
4) $\int e^x dx=e^x+C$;
5) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$;
6) $\int\sin x dx=-\cos x+C$;

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Найти следующие интегралы:

1. $\int 6x^2 dx$ –используем свойство 2 и формулу 2.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ Получим:

$\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 6\frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c$

2. $\int 4(x^2 - x + 3)dx$ Используя свойства 1 и 2 и, формулы 1 и 2 получим: $4\int x^2 dx - 4\int x dx + 12\int dx = 4\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 12x + c = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + c$

- постоянная интегрирования С равна алгебраической сумме трех постоянных интегрирования .

3. $\int 2(3x-1)^2 dx = 2\int (3x-1)^2 dx = 2\int (9x^2 - 6x - 1)dx = 2\cdot 9\frac{x^3}{3} - 2\cdot 6\frac{x^2}{2} + 2x + c = 6x^3 - 6x^2 + 2x + c$

4. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx$ –разделим почленно на х, получим:

$\int (x^2 + 3x + 4)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ –используем формулу 2 $\int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическая работа № 35

«Интегрирование методом замены переменной»

Цель работы: Научиться вычислять интегралы способом подстановки.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить интеграл
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Найти интегралы:
1. $\int (12ч-5)^7 dx$
2. $\int \frac{dx}{6x+5}$
3. $\int x\sqrt{x^2-7}\,dx$
4. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$
5. $\int tgx dx$
6. $\int \frac{dx}{1+16x^2}$

Порядок выполнение работы:
В основе интегрирования методом замены переменной (или способом постановки) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если $\int f(x)dx = F(x)+c$, то $\int f(u)du = F(u)+c$, где $u(x)$ производная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видом:
1. $x=\varphi(t)$, где t-новая переменная, а $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируемая функция $\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$
2. $t=\mu(x)$,где t-новая переменная, тогда: $\int f\big(\mu(t)\big)\mu'(x)dx = \int f(t)dt$

Ход работы:
1. $\int \frac{x^2dx}{8+x^3}$
-т.к. $d(8+x^3)=3x^2dx$, то
$$\int \frac{x^2dx}{8+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(8+3x^3)}{8+x^3}$$
-полагая $8+x^3=t$, получим: $\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln(t)+c = \frac{1}{3}\ln|8+x^3|+c$

2. $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{4+\sin^2 x}$-поэтому, используя подстановку $t=\sin x$, приходим к табличному интегралу: $\int\frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+c = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right)+c$

3. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-t^2}} = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{9-t^2}}$
-воспользовавшись подстановкой $t=e^x$, приводим к табличному интегралу $\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = arcsin\frac{1}{3}+c = arcsin\frac{e^x}{3}+c$

Примечание: $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$

$xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$
$e^x dx = d(e^x)$
$\frac{dx}{x} = d(\ln(x)$
$cosxdx = d(sinx)$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическая работа № 36
«Интегрирование различными методами»

Цель работы: Научиться находить интегралы различными методами: интегрирование подстановкой и по частям.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить интеграл
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Найти интегралы
1. $\int \frac{dx}{(6+\sqrt[3]{x})^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$
2. $\int \frac{\sqrt{5tgx}}{cos^2 x} dx$
3. $\int xcosxdx$
4. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
5. $\int \frac{xdx}{sin^2 x}$

Порядок выполнение работы:
1. Первые два интеграла решаются методом замены переменной (этот случай

рассматривался в практической работе № 35).

2. Следующие интегралы решаются методом интегрирования по частям.

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле: $\int u d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du$ где u и ϑ непрерывно дифференцируемые функции от x.

Интегрируя обе части равенства $d(u\vartheta) = ud\vartheta + \vartheta du$, получим

$$\int d(u\vartheta) = \int ud\vartheta + \int \vartheta du$$

$$u\vartheta = \int ud\vartheta + \int \vartheta du, \text{ откуда } \int ud\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла сводится к вычислению интеграла $\int \vartheta du$, если последний окажется проще исходного.

Ход работы:

Вычислить интеграл методом интегрирования по частям:

1. $\int (x-5) cosx dx$

-полагая $u = x - 5;\ d\vartheta = cosxdx,$

-найдём $du = dx;\quad \vartheta = \int cosxdx = sinx$

-следовательно:

$$\int (x-5)cosxdx = (x-5)sinx = \int sinxdx = (x-5)sinx + cosx + c$$

2. $\int xarctgxdx$

–пусть $u = arctgx;\quad d\vartheta = xdx,$

-тогда $du = \frac{1}{1+x^2}dx;\quad \vartheta = \frac{x^2}{2}$

-на основании формулы находим

$$\int xarctgxdx = \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2arctgx - \frac{1}{2}(\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}) = \frac{1}{2}(x^2arctgx - x + arctgx) + c$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическая работа № 37

«Теорема Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов»

Цель работы: научиться вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
находить определенный интеграл

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Вычислите интегралы.

1. $\int_1^2 2x^2\,dx$
2. $\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)\,dx$
3. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos x-3\sin x)\,dx$
5. $\int_{-2}^{2}\frac{1-x^2}{x^2}\,dx$

Порядок выполнения работы:
1) Используя таблицу интегралов найти интеграл
2) Используя формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

найти определенный интеграл

Ход работы:
Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3-1^3)=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{2}{3}\cdot 7=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$.

Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^{4}dx + 2\int_{-2}^{4}xdx - \int_{-2}^{4}x^2dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^{4} + 2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^{4} - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^{4} \overset{(3)}{=}$$

$$= 8(4-(-2)) + (4^2-(-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3-(-2)^3) = 8\cdot 6 + (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) =$$

$$= 48+12-24 = 36$$

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница: $F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Совет: перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?

Так, применительно к рассматриваемому примеру: перед тем, как в первообразную функцию $8x + x^2 - \frac{x^3}{3}$ подставлять верхний и нижний пределы, желательно на черновике проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:

$$\left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)' = 8(x)' + (x^2)' - \frac{1}{3}(x^3)' = 8\cdot 1 + 2x - \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = 8 + 2x - x^2$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

Форма представления результата: выполненное задание/

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или

объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическая работа № 38

«Вычисление определенных интегралов методом замены переменной»

Цель работы: научиться вычислять определённые интегралы методом замены переменной.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить определенный интеграл методом замены переменной

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Вычислите интегралы.

1. $\int_5^6 \frac{xdx}{x^2-6}$

2. $\int_3^4 (2x-5)^3 dx$

3. $\int_0^1 \sqrt[3]{x+2}dx$

4. $\int_{-1}^1 (x^3+1)^4 x^2\ dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx$

Порядок выполнения работы:
1) Ввести новую переменную
2) Найти дифференциал
3)Вычислить новые границы интегрирования
4) Сделать подстановку
5) Вычислить, получившийся интеграл

Ход работы:
Вычислите интегралы.
1.$\int_5^6 \frac{xdx}{x^2-6}$
Введем новую переменную $t = x^2 - 6$
Дифференциал будет равен $dt = 2xdx$
Вычислим границы интегрирования t1=25-6=19, t2=36-6=30
Выполним подстановку $\frac{1}{2}\int_5^6 \frac{2xdx}{x^2-6} = \frac{1}{2}\int_{19}^{30} \frac{dt}{t}$

Вычислим, получившийся интеграл $\frac{1}{2}\ln|30|-\frac{1}{2}\ln|19|=\frac{1}{2}\ln\frac{30}{19}$

Форма представления результата: выполненное задание/

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическая работа № 39

«Вычисление площадей фигур и объемов тел»

Цель работы: Научиться вычислять площади фигур и объемы тел, используя определенные интегралы

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить интеграл
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$a)\quad y=-x^2+4,\ y=0$

$b)\quad y=x^2,\ y=x^3$

$c)\quad y=e^x,\ y=e^{-x},\ y=4$

2. Вычислить объем тела

$y=x^2,\ y=1,\ \textit{вокруг оси}\ OY$

Порядок выполнения работы:

1) построить графики функций
2) найти область, ограниченную этими графиками
3) составит определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

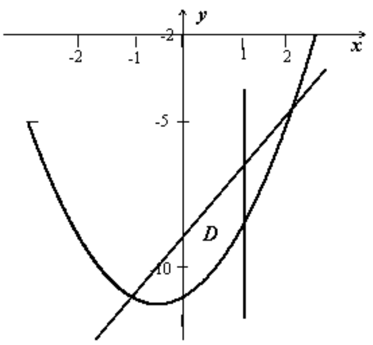
Ход работы:

Пример 1: Найти площадь области **D**, ограниченной кривыми **y** = $\mathbf{x}^2$ + **x** + 11, **y** = 2 **x** - 9, при условии,

x<=1

$$D:\begin{cases} y = x^2 + x - 11, \\ y = 2x - 9, \\ x \le 1. \end{cases}$$

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение $\mathbf{x}^2$ + **x** + 11 = 2 **x** - 9 имеет два корня: **x** = -1 и **x** = 2. Подходящий корень - **x** = -1. Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой **x** = 1, крайняя левая точка - **x** = -1, поэтому



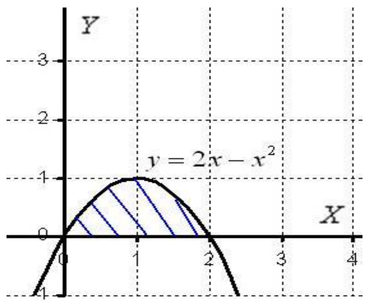
$$S(D)=\int_{-1}^{1}\left[(2x-9)-(x^2+x-11)\right]dx=\int_{-1}^{1}(2-x^2+x)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{3}.$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части .

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX. В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0\right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}$ ед^3. $\approx 3{,}35$ ед^3.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическая работа № 40

«Физические приложения интегралов»

Цель работы: Научиться применять интегралы к решению физических задач

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить интеграл
- вычислять в простейших случаях путь, пройденный телом за промежуток времени.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1) Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела

v(t) = 10t + 2 (м/с).

2) Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

3) Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v = 29.4 - 9.8t$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

Порядок выполнения работы:

1) Записать формулу, используя определенный интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

2) Вычислить определенный интеграл

Ход работы:

1. Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

Решение: согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t, \quad t_1 = 3, t_2 = 4$. Следовательно, $s = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83$ (м).

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе — со скоростью v = (4t+5) м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = [2t^3 + t^2]_0^5 = 275\ (м), s_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = [2t^2 + 5t]_0^5 = 75\ (м),$$
$$s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200\ (м).$$

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью и = (39,2—9,8^) м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда v = 0, т.е. 39,2—9,8t = 0, откуда t= 4 с. По формуле (1) на ходим h=78.4

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1. Координаты и векторы

Практическая работа № 41

«Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве.

Расстояние между точками»

Цель работы: Научиться применять теоретические знания при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
распознавать на чертежах и моделях пространственные формы;
соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Решите задачи:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения

1. Даны две точки: $A(m; -n; 0)$ и $B(p; -n; 2)$.Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

2. Даны векторы $\vec{a} = p\vec{i} - \vec{j} + m\vec{k}$ и $\vec{b} = n\vec{i} + p\vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b}$.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{-m; n; p\}$ и $\vec{b} = \{0; -p; n\}$.

4. При каком значении «x» векторы $\vec{a} = \{m; -n; x\}$ и $\vec{b} = \{-2m; 2n; p\}$ будут коллинеарными?

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:
Задача № 1. Даны точки $A(-3; 1; -1)$ и $B(2; -4; 1)$.

Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.
Решение.

1) $\overrightarrow{AB} = \{2-(-3); -4-1; 1-(-1)\} = \{5; -5; 2\}$ - координаты вектора.

2) Разложим $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса:
$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

3) Длину $|AB|$ найдем по формуле:

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$.

Задача № 2.

Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$.Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.Решение

$\vec{a} = \{1;-3;1\}$.

$\vec{b} = \{-2;0;1\}$; $2\vec{b} = \{-4;0;2\}$.

$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = \{1;-3;1\} - \{-4;0;2\} = \{1-(-4);-3-0;1-2\} = \{5;-3;-1\}$.

Задача № 3

Вычислите скалярное произведение $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{1;0;3\}$ и $\vec{b} = \{2;-1;1\}$.

Решение

1) Найдём координаты $2\vec{a}$:

$2\vec{a} = \{2;0;6\}$

2). Найдём координаты $2\vec{a} + \vec{b}$:

$2\vec{a} + b = \{2;0;6\} + \{2;-1;1\} = \{4;-1;7\}$.

3). Найдём скалярное произведение:

$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 = 25$.

Ответ: 25

Задача № 4.

4. При каком значении «x» векторы $\vec{a} = \{4;-6;x\}$ и $\vec{b} = \left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4};3\right\}$ будут коллинеарными?

Условие коллинеарности векторов:

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Получим:

$$\frac{4}{-\frac{1}{2}} = \frac{-6}{\frac{3}{4}} = \frac{x}{3}.$$

$-8 = \frac{x}{3}$; $x = -24$.

Ответ: $x = -24$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1. Координаты и векторы

Практическая работа № 42

«Декартова система координат на плоскости. Уравнения прямой, окружности. Решение задач на расположение прямых на плоскости»

Цель работы: Научиться применять теоретические знания при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы;
- соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения
1. Найти точку пересечения прямых: $mx - py + n = 0$ и $x - y - p = 0$.
2. Найдите острый угол между прямыми:
$mx + ny - p = 0$ и $nx - py - nm = 0$.

3. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $px + y - m = 0$ и проходящей через точку $A(-n; 1)$.

4. Из точки $A(m; -1)$ на прямую $nx + py + 1 = 0$ опущен перпендикуляр. Составьте его уравнение.

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

Ход работы:
Задача № 1
Найти точку пересечения прямых :

$2x+3y-12=0$ и $x-y-1=0$.

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x+3y-12=0, \\ x-y-1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2(1+y)+3y-12=0, \\ x=1+y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+2y+3y-12=0, \\ x=1+y; \end{cases} \quad \begin{cases} 5y=10, \\ x=1+y; \end{cases} \quad \begin{cases} y=2, \\ x=3. \end{cases}$$

Ответ: точка М (3; 2).

Задача № 2

Определить угол между прямыми, заданными уравнениями:

$2x-3y+6=0$ и $x+5y-2=0$.

Решение

Найдем угловые коэффициенты этих прямых:

$$2x-3y+6=0; \qquad x+5y-2=0$$

$$-3y=-2x-6, \qquad 5y=-x+2,$$

$$y=\frac{2}{3}x+6, \qquad y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5},$$

$$k_1=\frac{2}{3}. \qquad k_2=-\frac{1}{5}.$$

Подставим найденные значения k_1 и k_2 в формулу:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.\ tg\varphi=\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{1+(-\frac{1}{5})\cdot\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=-1.$$

$$tg\varphi=-1; \quad \varphi=135^0.$$

Полученный угол между прямыми - тупой. Смежный с ним, будет острый, то есть $\varphi_1=180^0-135^0=45^0$.

Задача № 3

1. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $5x+3y-7=0$ и проходящей через точку А(-2;6).

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку А(-2;6).

$$y-6=k(x+2)$$

Находим угловой коэффициент данной прямой:

$$3y=-5x+7,$$

$$y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}; \quad k_1=-\frac{5}{3}.$$

Так как прямые параллельны, то $k_2=-\frac{5}{3}$ - угловой коэффициент искомой прямой.

Подставим найденное значение $k_2=-\frac{5}{3}$ в уравнение пучка прямых:

$$y-6=k(x+2);$$

после преобразования получим:
$5x+3y-8=0.$

Задача № 4

Из точки А(-3;5) на прямую $x-2y+3=0$ опущен перпендикуляр. Написать его уравнение.

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(-3;5)$.

$y-5=k(x+3).$

Найдем угловой коэффициент k_1 прямой $x-2y+3=0$;

$-2y=-x-3;$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2};$

$k_1=\frac{1}{2}.$

Учитывая условие перпендикулярности прямых: $k_1=-\frac{1}{k_2}$, найдем уравнение искомой прямой

$k_2=-2.$

$y-5=-2(x+3);$

$y+2x+1=0.$

Ответ: $y+2x+1=0.$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа № 43

«Решение задач на параллельность прямой и плоскости»

Цель работы: Научиться решать задачи на параллельность прямой и плоскости, используя признак параллельности прямой и плоскости.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

- строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

Задача№1

Точка К не лежит в плоскости квадрата ABCD. Точки М и Р - середины отрезков КВ и КС.

1). Как расположены прямые AD и МР?

2). Вычислите длину отрезка МР, если сторона квадрата равна n см.

Задача №2

Основание AD трапеции ABCD находится на плоскости Р, а основание ВС отстоит от нее на р см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до плоскости Р, если $\frac{DA}{CB} = \frac{m+n}{m}$.

Задача №3

Плоскость Р пересекает стороны АВ и АС треугольника в точках B_1 и C_1 соответственно. B_1C_1 параллельна ВС и равна p см, а $AC_1 : C_1C = m:n$. Найти ВС.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение параллельных прямой и плоскости, признак параллельности прямой и плоскости, а также ваши знания из планиметрии.

Ход работы:

Задача №1

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. К и М – середины отрезков BD и CD.

1) Имеют ли общие точки прямая КМ и плоскость, в которой лежат точки А,В и С?
2) Вычислите периметр треугольника АКМ, если расстояние между каждой парой

данных точек равно 8 см.

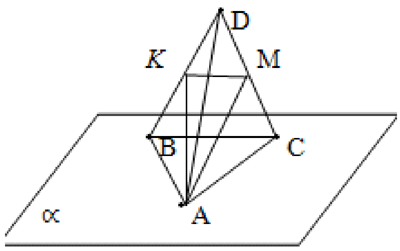
Дано: $\propto$, $A \in \propto$, $B \in \propto, C \in \propto$,

BK=KD, CM=MD,

AB=AC=BC=AD=BD=CD=8 см

1) пересекаются ли KM и $\propto$

2) Найти P_{AKM}



Решение:

1) Точка K является серединой отрезка BD, точка M- середина отрезка CD. Значит отрезок KM - средняя линия треугольника BCD.

По свойству средней линии треугольника $KM||BC$, $KM = \frac{1}{2}BC$. Следовательно, отрезок KM параллелен прямой, лежащей в плоскости. По признаку параллельности прямой и плоскости, отрезок KM и плоскость параллельны, т.е. не пересекаются.

2)$P_{AKM} = AK + AM + KM$

$KM = \frac{1}{2}BC$ $\quad KM = 4$ см.

Рассмотрим треугольники ACD и ABD: AC=AD=AB=CD=BD, т.е. ACD и ABD- равные равносторонние треугольники, а отрезки AM и AK- медианы и высоты этих треугольников. Найдем эти отрезки:

$AK = AM = \sqrt{AC^2 - MC^2}$

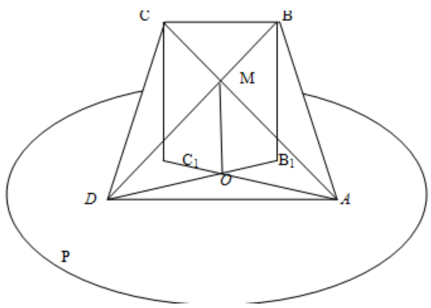
$MC = 4$ см.

$AK = AM = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ см

$P_{AKM} = 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 8\sqrt{3}$ см

Задача № 2

Основание AD трапеции ABCD находится на плоскости P, а основание BC отстоит от нее на 5 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до плоскости P, если $\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3}$.



Дано:

ABCD – трапеция,

$\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3}$. BB_1=5см, $BB1 \perp P$

Найти: расстояние от M до плоскости P

Решение

1) Из точки M проведем к плоскости P перпендикуляр OM. Следовательно, OM- расстояние от M до плоскости P.

2) Рассмотрим ΔADM и ΔCBM

$\angle BMC = \angle DMC$ как вертикальные

$\angle CBM = \angle ADM$ как накрестлежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD.

Значит, ΔADM и ΔCBM подобны и $\frac{DA}{CD} = \frac{DM}{BM} = \frac{AM}{CM}$.

$\frac{DA}{CB}=\frac{7}{3}\Longrightarrow\frac{DA}{CD}=\frac{DM}{BM}=\frac{AM}{CM}=\frac{7}{3}$

$\frac{DM}{BM}=\frac{7}{3}\Rightarrow DM=\frac{7}{10}BD, BM=\frac{3}{10}BD$

3) Рассмотрим ΔBB_1D и ΔMOD

$\angle D$ – общий, $\angle BB_1D=\angle MOD=90^0\Rightarrow\Delta BB_1D\sim\Delta MOD$

$\frac{BB_1}{MO}=\frac{BD}{MD}$

$\frac{BB_1}{MO}=\frac{BD}{0{,}7BD}=\frac{10}{7}$

$MO=\frac{7}{10}BD$

$MO=\frac{7}{10}\cdot5=3{,}5$ см.

Ответ: 3,5 см.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа № 44

«Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости»

Цель работы: Научиться использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трех перпендикулярах при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения

Задача№1

Дан ромб ABCD. Из точки пересечения его диагоналей проведен отрезок OF, так, что $AF = CF$, $BF = DF$. Докажите, что OF перпендикулярен плоскости ромба, отрезок AC перпендикулярен плоскости BDF.

Задача №2

Дан равнобедренный треугольник ABC. $AC = BC = n$ см, $AB = m + 5$ см. Из вершины угла C проведен к плоскости перпендикуляр CD, равный p см. Найдите расстояние от точки D до стороны AB.

Задача №3

Точки A и B лежат в плоскости α, M – такая точка в пространстве, для которой $AM = m$, $BM = n$ и ортогональная проекция на плоскость α отрезка BM в три раза больше ортогональной проекции на эту плоскость отрезка AM. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

Задача № 4

Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна p см. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причем $CM = m + n$ см. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.

Порядок выполнения работы:

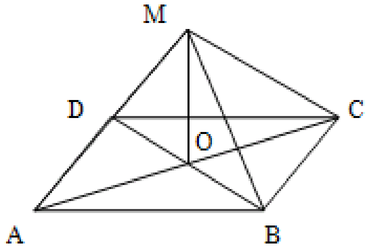
1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение перпендикулярных прямой и плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о трех перпендикулярах, а также ваши знания из планиметрии

Ход работы:

Задача 1

Из точки пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведен отрезок OM так, что $MA = MC, MB = MD$. Докажите, что отрезок OM перпендикулярен плоскости параллелограмма.



Дано:
$ABCD$ – параллелограмм
$AC \cap BD = O$
$MA = MC, MB = MD$
Доказать: $OM \perp (ABCD)$

Доказательство

1) Рассмотрим треугольники AOM и COM. OM - общая сторона, $MA = MC$ по

условию, $AO = OC$ по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е. $\Delta AOM = \Delta COM$. Следовательно, $\angle AOM = \angle COM$.

Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по 90^0, т.е. $OM \perp AC$.

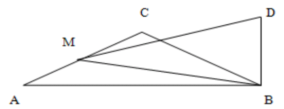
2) Рассмотрим треугольники BOM и DOM. OM - общая сторона, $MB = MD$ по условию, $BO = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е. $\Delta BOM = \Delta DOM$. Следовательно, $\angle BOM = \angle DOM$.

Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по 90^0, т.е. $OM \perp BD$.

3) $\left.\begin{matrix} OM \perp AC \\ OM \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM \perp (ABCD)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Задача 2

Стороны треугольника 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла этого треугольника проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Найдите расстояние от его концов до большей стороны.



Дано:

$\Delta ABC, AB = 10\text{ см}, BC = 17\text{см}, AC = 21\text{см}$

$BD \perp (ABC), BD = 15\text{см}$

Найти расстояние от B и D до AC

Решение

1) Дополнительное построение: проведем $BM \perp AC$.

Значит, BM- расстояние от B до AC.

$\left.\begin{matrix} DM - \text{наклонная} \\ BM - \text{проекция наклонной} \\ BM \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow DM \perp AC \Rightarrow DM - \text{расстояние от } D \text{ до } AC.$

2) Для того, чтобы найти высоту BM треугольника ABC, вычислим сначала его площадь, используя формулу Герона $S_\Delta = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$

$p = \frac{10+17+21}{2} = 24\text{ см}$

$S_{ABC} = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84\text{см}^2$

3) Запишем формулу для вычисления площади $S_\Delta = \frac{1}{2}ah$

Применим эту формулу к нашему треугольнику: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BM$.

Выразим из этой формулы BM: $BM = \frac{2S_{ABC}}{AC}$

$BM = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8\text{ см}$

4) Рассмотрим треугольник BDM- прямоугольный, т.к. $BD \perp (ABC)$.

По теореме Пифагора найдем DM:

$DM^2 = BD^2 + BM^2$

$DM^2 = 15^2 + 8^2 = 289$

$DM = \sqrt{289} = 17\text{ см}$

Ответ: расстояния от концов перпендикуляра до стороны AC равны 8 см и 17 см.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа № 45

«Решение задач на применение теорем о трёх перпендикулярах»

Цель работы: Научиться использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трех перпендикулярах при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

Задача№1

Дан ромб ABCD. Из точки пересечения его диагоналей проведен отрезок OF, так, что $AF = CF$, $BF = DF$. Докажите, что OF перпендикулярен плоскости ромба, отрезок AC перпендикулярен плоскости BDF.

Задача №2

Дан равнобедренный треугольник ABC. $AC = BC = n$ см, $AB = m + 5$ см. Из вершины угла C проведен к плоскости перпендикуляр CD, равный p см. Найдите расстояние от точки D до стороны AB.

Задача №3

Точки A и B лежат в плоскости α, M – такая точка в пространстве, для которой $AM = m$, $BM = n$ и ортогональная проекция на плоскость α отрезка BM в три раза больше ортогональной проекции на эту плоскость отрезка AM. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

Задача № 4

Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна p см. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причем $CM = m+n$ см. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение перпендикулярных прямой и плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о трех перпендикулярах, а также ваши знания из планиметрии

Ход работы:

Задача

Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна 9.6. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причем CM = 28. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.

Решение

Примените теорему о трех перпендикулярах.

Пусть CK - высота данного прямоугольного треугольника. Тогда MK - наклонная к плоскости треугольника ABC, а CK - ортогональная проекция этой наклонной на плоскость треугольника ABC. Так как $CK \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах $MK \perp AB$. Значит, длина отрезка MK равна расстоянию от точки M до прямой AB. Из прямоугольного треугольника MCK по теореме Пифагора находим, что

$MK = \sqrt{CK^2 + CM^2} = \sqrt{9.6^2 + 28^2} = 29.6.$

Ответ: расстояние от точки М до гипотенузы АВ равно 29.6.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа № 46

«Решение задач на параллельность плоскостей»

Цель работы: Научиться использовать признак параллельности плоскостей и свойства параллельных плоскостей при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

Задача № 1

Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной $m+n$ см. Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно p см.

Задача № 2

Плоскости M и P параллельны. Из точек A и B плоскости M проведены к плоскости P наклонные $AC = m+n$ см и $BD = m+n-3$ см. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна m см. Чему равна проекция наклонной BD?

Задача №3

Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P), $AC = m+n+p$ дм, $BD = m+n$ дм, разность проекций AC и BD на одну из плоскостей равна m дм. Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

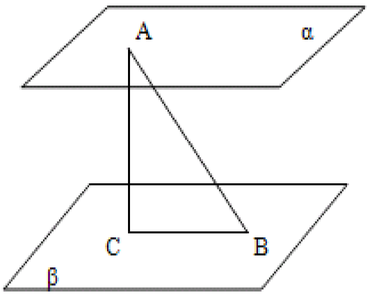
При решении задач на эту тему используется определение параллельных плоскостей, признак параллельности плоскостей, теоремы о параллельных плоскостях, а также ваши знания из планиметрии

Ход работы:

Задача № 1

Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной 10 м . Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно 8 м.

Дано:



Найти проекции AC

Решение

1) Так как плоскости параллельны, то расстояние между ними - это перпендикуляр AC. Построим проекцию отрезка AB на плоскость β. Это отрезок BC.

2) Рассмотрим треугольник ABC- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$

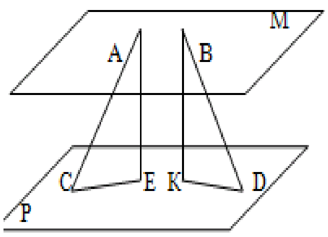
$AC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

AC=6 см.

Так как плоскости параллельны, то проекции отрезка на эти плоскости будут равны.

Задача № 2

Плоскости M и P параллельны. Из точек A и B плоскости M проведены к плоскости P наклонные AC= 37см и BD=125 см. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна 12 см. Чему равна проекция наклонной BD?



Дано: $M \parallel P, A \in M, B \in M$

$AC = 37$ см$, BD = 125$ см

$AE \perp P, BK \perp P, CE = 12$ см

Найти: KD

Решение

1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$AE^2 = AC^2 - CE^2 \quad AE^2 = 37^2 - 12^2 = 1369 - 144 = 1225$

AE=35 см.

2) Рассмотрим треугольник BKD- прямоугольный.

По теореме Пифагора $BD^2 = KD^2 + BK^2$

$KD^2 = BD^2 - BK^2$ AE=BK, как расстояния между параллельными плоскостями.

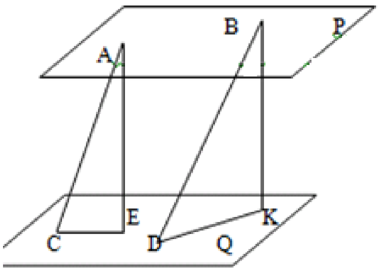
$KD^2 = 125^2 - 35^2 = 15625 - 1225 = 14400$

KD= 120 см.

Ответ: проекция BD равна 120 см.

Задача №3

Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P), AC=13 см, BD=15 см, сумма проекций AC и BD на одну из плоскостей равна 14 см . Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.



Дано: $Q \parallel P, A \in P, B \in P$

$AC = 13$ см, $BD = 15$ см

$AE \perp Q, BK \perp Q, CE + DK = 14$ см

Найти: CE, AE, DK

Решение

1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$AE^2 = AC^2 - CE^2$

Пусть $CE = x$, тогда DK=14-*x*.

$AE^2 = 169 - x^2$

2) Рассмотрим треугольник BDK- прямоугольный.

По теореме Пифагора $BD^2 = BK^2 + DK^2$

$BK^2 = BD^2 - DK^2$

$BK^2 = 225 - (14 - x)^2 = 225 - 196 + 28x - x^2 = 29 + 28x - x^2$

AE=BK, как расстояния между параллельными плоскостями

Значит,

$169 - x^2 = 29 + 28x - x^2$

$28x = 140$

$x=5$

CE=5 см, DK=14-5=9 см

$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ см

Ответ: расстояние между плоскостями 12 см, проекции наклонных 5 см и 9 см.

Форма представления результата: выполненное задание**.**

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа № 47

«Решение задач на двугранные углы»

Цель работы: Научиться решать задачи на применение понятий угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, угла между плоскостями.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

1) Из точки A вне плоскости проведены к плоскости перпендикуляр $AB = n$ см и наклонные AC и AM, образующие с плоскостью углы 30^0. Найдите угол между наклонными прямой. Найдите CM.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны n см и $n + m$ см. Определите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30^0 с плоскостью треугольника.

3) Точки A и B лежат на ребре прямого двугранного угла. AA_1 и BB_1- перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях, причем $AB = m$ см, $AA_1 = n + m$ см, $BB_1 = n - 1$ см. Найдите A_1B_1.

Порядок выполнения работы

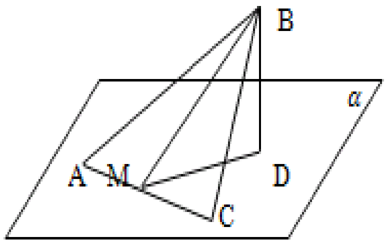
1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используются определения угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, линейного угла двугранного угла, а также ваши знания из планиметрии.

Ход работы:

Задача 1

Дан треугольник ABC со сторонами AB=9 см, BC= 6 см и AC= 5 см. Через меньшую сторону проходит плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол 45^0. Найдите расстояние между плоскостью и вершиной B.



Дано: $\Delta ABC, AB = 9$ см
$BC = 6$ см, $AC = 5$ см
$AC \in \alpha, \alpha = 45°$

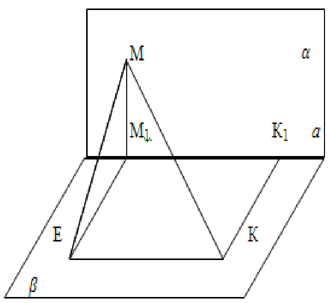
Найти: Расстояние от B до α

Решение

1) Дополнительное построение: проведем $BD \perp \alpha \Rightarrow BD$ – расстояние от B до плоскости α.
$BM \perp AC \Rightarrow DM \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах.
Значит, $\angle BMD$ – линейный угол двугранного угла, $\angle BMD = 45^0$.
2) В треугольнике ABC найдем высоту BM.
Сначала вычислим площадь треугольника по формуле Герона:
$S_\Delta = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$
$p = \frac{9+6+5}{2} = 10$ см
$S_{ABC} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5} = 10\sqrt{2}$см^2
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM \Rightarrow BM = \frac{2S_{ABC}}{AC}$
$BM = \frac{2 \cdot 10\sqrt{2}}{5} = 4\sqrt{2}$см
3) Рассмотрим треугольник BMD- прямоугольный по построению.
$\frac{BD}{BM} = \sin\angle BMD$
$BD = BM \sin\angle BMD$
$BD = 4\sqrt{2} \cdot \sin 45^0 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ см.
Ответ: расстояние от B до плоскости 4 см.

Задача 2

Концы отрезка MK лежат на гранях прямого двугранного угла. MM_1 и KK_1- перпендикуляры к ребру, причем MK=13 см, MM_1=12 см, M_1K_1=3 см. Найдите KK_1.



Дано: $\sphericalangle \alpha a \beta = 90°$
$MK = 13$ см, $MM_1 = 12$ см, $M_1K_1 = 3$ см
$MM_1 \perp a, KK_1 \perp a$
Найти: KK_1

Решение

1) Построим линейный угол двугранного угла. Для этого через точку M_1 проведем отрезок M_1E, параллельный и равный KK_1.

$KK_1 \perp a$, следовательно, $M_1E \perp a$.

$\angle MM_1E$ – линейный угол двугранного угла, значит $\angle MM_1E = 90^0$.

2) Рассмотрим ΔMEK

ME- наклонная к плоскости β, EM_1 – ее проекция на эту плоскость, $EM_1 \perp EK$ (т.к. EM_1K_1K – прямоугольник по построению). Следовательно, $ME \perp EK$ (по теореме о трех перпендикулярах) и ΔMEK – прямоугольный.

По теореме Пифагора $MK^2 = ME^2 + EK^2$

$ME^2 = MK^2 - EK^2$ $EK=M_1K_1=3$ см

$ME^2 = 13^2 - 3^2 = 169 - 9 = 160$

$ME = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ см

3) Рассмотрим ΔMM_1K – прямоугольный, т.к. $\angle MM_1E = 90^0$.

По теореме Пифагора $ME^2 = MM_1{}^2 + M_1E^2$

$M_1E^2 = ME^2 - MM_1{}^2$

$M_1E^2 = 160 - 144 = 16$

M_1E= 4 см.

Значит, KK_1=4 см.

Ответ: KK_1=4 см.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическая работа № 48

«Решение задач на параллелепипед и куб»

Цель работы: Научиться решать задачи с параллелепипедом и кубом

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

–распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

–описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

–анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

–изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

–строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

–решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

–использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

–проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Ребро куба равно 6 см. Найти его объем и площадь полной поверхности.

2. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания 12 см, а боковое ребро 15 см. Найти площадь диагонального сечения.

Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж

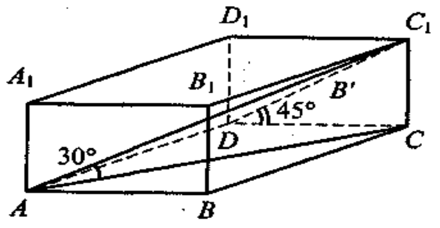
2)Записать кратко условие задачи

3) Оформить решение задачи

Ход работы:

Задача 1: Угол между диагональю AC, прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и плоскостью основания ABCD равен 30°, а диагональ боковой грани DC, наклонена к плоскости основания под углом 45°. Высота параллелепипеда равна 3 см. Найдите его объем.

Решение:



$$\angle C_1DC = \angle DC_1C = 45° \Rightarrow DC = CC_1 = 3$$

$$AC_1 = 2CC_1 = 6$$

$$AC = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

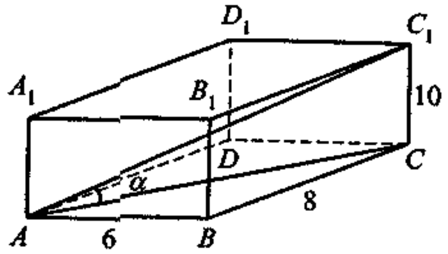
$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{27-9} = 3\sqrt{2}$$

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = AB \cdot BC \cdot CC_1 = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 = 27\sqrt{2}$$

Ответ: $27\sqrt{2}$ см^3.

Задача 2: Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 ми 8 м, боковое ребро равно 10 м. Найдите угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

Решение:



$$AC = \sqrt{6^2+8^2} = 10$$

$AC = CC_1 \Rightarrow \Delta ACC_1$ равнобедренный, а значит $\alpha = 45°$.

Ответ: 45°.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическая работа № 49

«Решение задач на призму»

Цель работы: Научиться решать задачи с призмой

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

–распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

–описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

–анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

–изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

–строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

–решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

–использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

–проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Основание прямой призмы - треугольник, стороны которого равны 4 м, боковое ребро призмы равно 8 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2. Основание прямой призмы – параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и углом между ними 60^0. Высота призмы 12 см. Найти полную поверхность и объем.

Порядок выполнения работы:

1) Выполнить чертеж
2) Записать кратко условие задачи
3) Оформить решение задачи

Ход работы:

Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Общие стороны смежных многоугольников называют **ребрами** многогранника. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, называются его **гранями**. Грани многогранника, сходящиеся в одной точке, образуют многогранный угол; вершины таких многогранных углов называются **вершинами** многогранника. Прямые, соединяющие две какие-нибудь вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

Призма – многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани – параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания – правильные многоугольники.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а **площадью боковой поверхности** призмы – сумма площадей ее боковых граней.

$S_{пол} = 2S_{осн} + S_{бок}$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

$S_{бок} = P \cdot h$

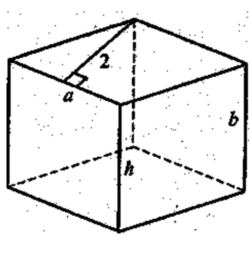
Объём прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

$V = S_{осн} \cdot h$

Задача 1: Основание прямой призмы - ромб с высотой 2 дм. Площадь боковой поверхности призмы равна 96 дм^2, а площадь полной поверхности равна 128 дм^2. Найдите высоту призмы.

Решение

Обозначим сторону основания *а,* а боковое ребро bРазницу между площадью полной поверхности призмы и площадью боковой поверхности призмы — это удвоенная площадь основания призмы.

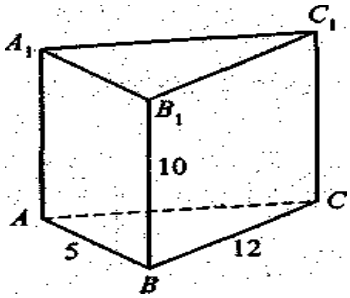


$$S_{оси} = 2a \Rightarrow 2a = 128 - 96 = 32 \Rightarrow a = 16$$

$$S_{бок} = 4ah = 96 \Rightarrow h = \frac{24}{a} = 1{,}5 \text{ (дм)}$$

Ответ: 1,5 дм.

Задача 2: Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 м и 12 м, боковое ребро призмы равно 10 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.



Решение

$$AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$S_{полн} = 2S_{\Delta ABC} + S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{AA_1C_1C}$$

S =2*0,5*5*12+5*10+12*10+13*10=60+300=360 м^2

Ответ: 360 м^2.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическая работа № 50

«Решение задач на пирамиду»

Цель работы: Научиться решать задачи с пирамидой

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:

–распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

–описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

–анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

–изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

–строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

–решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

–использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

–проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Найдите объем правильной четырёхугольной пирамиды, высота которой 4 см, а диагональ основания 8 см.

2. Найти полную поверхность прямой пирамиды, в основании, которой лежит равнобедренный треугольник с основанием 5 см и боковыми сторонами 6 см. Боковые ребра пирамиды 12 см.

Порядок выполнения работы:
1)Выполнить чертеж
2)Записать кратко условие задачи
3) Оформить решение.

Ход работы:

Пирамида – это многогранник, составленный из n–угольника и n треугольников.

Многоугольник - **основание** пирамиды, треугольники - **боковые грани** с общей вершиной, называемой **вершиной пирамиды**. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на ее основание, называется **высотой пирамиды**.

Площадь полной поверхности пирамиды: $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$

Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной,** если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой.**

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

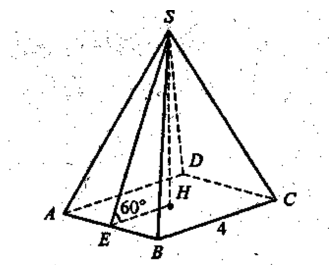
$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot \ell$$

Площадь полной поверхности правильной пирамиды:

$$S_{полн} = S_{осн} + \frac{1}{2} P \cdot l$$

Задача 1: Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а апофема образует с плоскостью основания угол в 60^0. Найдите площадь полной поверхности пирамиды

Решение:



$$EH = \frac{1}{2} BC = 2$$

$$\angle ESH = 90° - 60° = 30° \Rightarrow SE = 2EH = 4$$

$$S_{полн} = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} AB + AB^2 = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4^2 = 48\ (см^2)$$

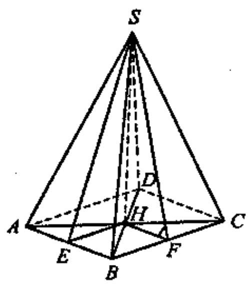
Ответ: 48 $см^2$.

Задача 2: Основание пирамиды —ромб, диагонали которого равны 30 см и 40 см. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, образуют с высотой пирамиды углы, равные 30^0. Найдите объем пирамиды.

Решение:

$$AC = 40 \Rightarrow AH = HC = 20$$

$$BD = 30 \Rightarrow BH = HD = 15$$



$$AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

$$HE = \frac{1}{2} BC = 12{,}5$$

$$SE = 2HE = 25$$

$$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} =$$

$$= \sqrt{25^2 - \frac{25^2}{4}} = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3}\ (см^3)$$

Ответ: $2500\sqrt{3}$ $см^3$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическая работа № 51

«Решение задач на вычисление объемов и поверхностей многогранников»

Цель работы: Научится решать задачи на сечения многогранников

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:

– распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
– описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
– изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
– строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
– решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

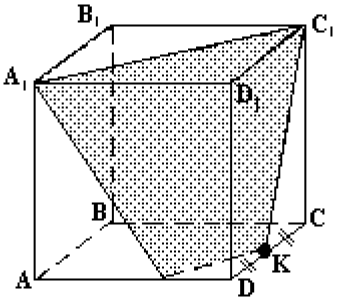
1. Определите вид и найдите периметр сечения куба $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ плоскостью, проходящей через ребро $А_1Д_1$ и середину ребра $ВВ_1$, если длина ребра куба равна 8 см.
2. Определите вид и найдите периметр сечения куба $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ плоскостью, проходящей через точки А, Д и середину ребра $СС_1$, если длина ребра куба равна 4 см.

Порядок выполнения работы:

1) Выполнить чертеж
2) Записать кратко условие задачи
3) Оформить решение задачи

Ход работы:

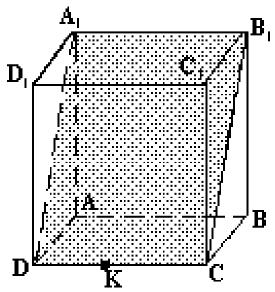
Задача 1: Дан куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Докажите, что сечение куба плоскостью $А_1С_1К$, где точка $К$ - середина $ДС$ - трапеция.



Решение: $МК||А_1С_1$, потому что $(А_1Д_1С_1)$ параллельна $(АДС)$, а $МК$ и $А_1С_1$ - линии пересечения этих плоскостей. $МК||А_1С_1$, $А_1М\nparallel С_1К$, $МК\neq А_1С_1$, значит $МА_1С_1К$ - трапеция.

Задача 2:

Дан куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Докажите, что сечение куба плоскостью $А_1В_1$К - параллелограмм.



Решение: $(АА_1В_1)||(ДД_1С)$, то $А_1В_1||ДС$ и $А_1В_1=ДС$. $(АА_1Д_1)||(ВВ_1С_1)$, то $А_1Д||В_1С$, значит $А_1В_1СД$ - параллелограмм.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическая работа № 52

«Решение задач на цилиндр»

Цель работы: Научиться решать задачи с цилиндром

Выполнив работу, Вы будете:

–распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

–описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

–анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

–изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

–строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

–решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

–использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

–проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Объем цилиндра 120 см^2, его высота 3,6 см.

Найти радиус цилиндра.

2. Высота цилиндра 12см, радиус основания 10см. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.

Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж

2)Записать кратко условие задачи

Ход работы:

Цилиндр – тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

Круги называются **основаниями цилиндра**, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей этих кругов – **образующими цилиндра**. У цилиндра основания равны и параллельны и образующие также равны и параллельны между собой.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований, параллельная образующим.

Боковая поверхность цилиндра – это поверхность полученная от вращения стороны прямоугольника, параллельной оси цилиндра.

Высотой цилиндра называется расстояние между основаниями цилиндра. **Радиусом** цилиндра называется радиус его основания.

Цилиндр называется **прямым,** если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi Rh;$

Площадь полной поверхности:

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi Rh + 2\pi R;$

$S_{полн} = 2\pi R(h+R)$

Объем цилиндра: $V = \pi R^2 h.$

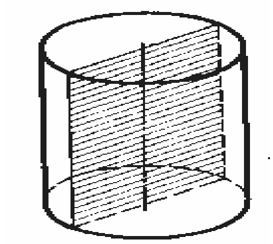
Сечение цилиндра – фигура полученная в пересечении цилиндра плоскостью.

Сечение, проходящее через ось цилиндра, называется *осевым сечением* и представляет собой прямоугольник.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом.

Задача 1.Осевое сечение цилиндра − квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

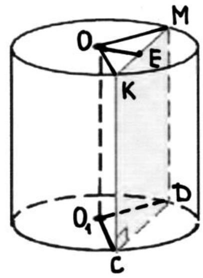
Решение:



Сторона квадрата равна $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

Ответ: $S_{осн.цил.} = \frac{\pi Q}{4}$

Задача 2. Высота цилиндра 6см, радиус основания 5см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4см от нее.



Решение:

$S_{сеч.}$= KM×KC,

OE = 4 см, KC = 6 см.

Треугольник OKM − равнобедренный (OK = OM = R = 5 см),

треугольник OEK − прямоугольный.

Из треугольника OEK, по теореме Пифагора:

EK = $\sqrt{OK^2 - OE^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$,

KM = 2EK = 2×3 = 6,

$S_{сеч.}$= 6×6 = 36 см^2.

Ответ: $S_{сеч.}$= 36 см^2.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическая работа № 53

«Решение задач на конус»

Цель работы: Научиться решать задачи на конус

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

–распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

–описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

–анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

–изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

–строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

–решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

–использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

–проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти полную поверхность конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом 30^0 и равна 12 см. А радиус основания 8 см.

2. Найти площадь осевого сечения конуса, если образующая равна 15 см, а радиус основания 4 см.

Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж

2)Записать кратко условие задачи

Ход работы:

Рассмотрим окружность с центром в точке О и прямую ОР, перпендикулярную к плоскости этой окружности. Каждую точку окружности соединим с точкой Р отрезком. Поверхность, образованная этими отрезками, называется **конической**, а сами отрезки – **образующими конуса**.

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, называется **конусом** (рис. 2.2).

Коническая поверхность – **боковая поверхность** конуса, круг – **основание** конуса, точка Р – **вершина** конуса, образующие конической поверхности – **образующие** конуса. Все образующие конуса равны друг другу. Прямая ОР, проходящая через центр основания и вершину конуса, называется **осью** конуса. Ось конуса перпендикулярна к плоскости основания. Отрезок ОР называется **высотой** конуса.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то полученное сечение называется **осевым сечением.**

Проведём секущую плоскость перпендикулярно к оси конуса. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется **усечённым конусом.** (Изобразите усечённый конус самостоятельно. Постройте образующую, высоту.)

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

$S_{бок} = \pi r l$

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площади боковой поверхности и площади основания.

$S_{полн} = \pi r(l + r)$

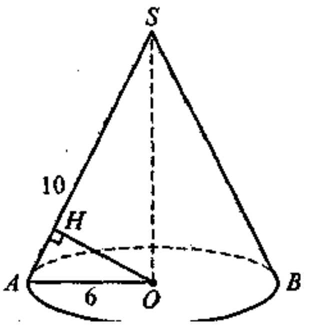
Площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полусуммы длин оснований на образующую.

Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Задача 1: Площадь боковой поверхности конуса равна 60 дм^2, а радиус основания равен 6 м. Найдите расстояние от центра основания до образующей конуса.

Решение:



$$S_{бок} = \pi r l = 60\pi \Rightarrow rl = 60$$

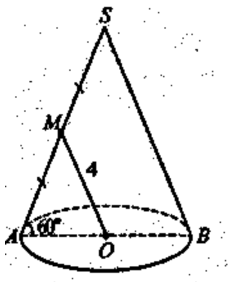
$$r = 6 \Rightarrow l = \frac{60}{r} = 10.$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

С другой стороны, $S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2} OH \cdot AS = 5OH = 24 \Rightarrow OH = \frac{24}{5}$

Задача 2: Расстояние от центра основания конуса до середины образующей равно 4 см, а угол наклона образующей конуса к плоскости основания равен 60^0. Найдите площадь осевого сечения конуса.



$$SA = SB \Rightarrow \angle SBA = 60^\circ$$

$$\angle ASB = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ,$$

то есть ΔSAB равносторонний.

$$\Delta AMO \sim \Delta ASB \Rightarrow \frac{\quad}{SB} = \frac{\quad}{AS} = \frac{1}{2}$$

$$SB = 2MO = 8$$

$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}\ (\text{см}^2)$$

Ответ: $16\sqrt{3}$ см^2.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическая работа № 54

«Решение задач на шар и сферу»

Цель работы: Научиться решать задачи на шар и сферу

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

–распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

–описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

–анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

–изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

–строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

–решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

–использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Расстояние от центра шара до секущей плоскости равно 8 м, а радиус сечения плоскостью равен 6 м. Найдите радиус шара и объем.

2. Объем шара 125П м^3. Найти площадь сферы.

Порядок выполнения работы:

1) Выполнить чертеж

2) Записать кратко условие задачи

Ход работы:

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Данная точка называется **центром сферы**, а данное расстояние – **радиусом сферы**. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, называется **диаметром**. Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**.

Шар можно получить при вращении полукруга вокруг диаметра. Границей шара служит сфера.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью** к сфере. Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Сечение шара, проходящее через центр, называется **большим кругом**, не проходящее – **малым кругом** Центр большого круга совпадает с центром шара, а центр малого круга является основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость этого круга.

Сечения, равноотстоящие от центра, равны.

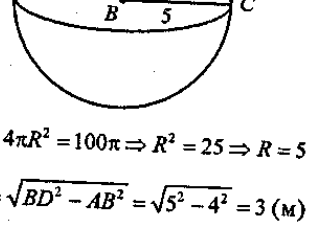
Радиус окружности, полученной при пересечении сферы радиуса R плоскостью, удаленной от центра сферы на d, равен $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Площадь поверхности сферы равна учетверенной площади большого круга: $S_{сферы} = 4\pi R^2$.

Объем шара: $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Задача 1: Площадь сферы равна 100 м^2. Расстояние от центра сферы до секущей плоскости равно 4 м. Найдите радиус сечения.

Решение:

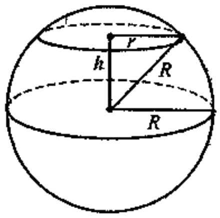


$S_{сф} = 4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$

$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (м)

Ответ: 3 м.

Задача 2: Площади сечения шара плоскостьюравна 16П м^2 , а площадь параллельного ему сечения, проходящего через центр шара, равна 25П м^2 . Найти расстояние между плоскостями сечений.



$\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r^2 = 16,\ r = 4$ м.

$\pi R^2 = 25\pi \Rightarrow R^2 = 25,\ R = 5$ м.

$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25-16} = 3$ (м)

Ответ: 3 м

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическая работа № 55

«Решение задач на комбинации геометрических тел»

Цель работы: Научиться решать задачи на комбинацию геометрических тел

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

–распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

–описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

–анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

–изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

–строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

–решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

–использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

–проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. В цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях основания. Найдите сторону квадрата, если высота цилиндра равна 2см, а радиус основания равен 7см.

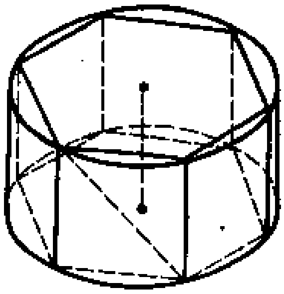
Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж

2)Записать кратко условие задачи

Ход работы:

Задача. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите отношения объема призмы к объему цилиндра.



Решение:

$$\frac{V_{призм}}{V_{цил.}} = \frac{S_{осн.} \times h}{\pi R^2 \times h} = \frac{S_{осн.}}{\pi R^2}$$

$a_6 = R$

$$S_{осн.} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{V_{призм}}{V_{цил.}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

Ответ: $\frac{V_{призм}}{V_{цил.}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическая работа № 56

«Решение задач на комбинации геометрических тел»

Цель работы: Научиться решать задачи на комбинацию геометрических тел

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

–распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

–описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;

–анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

–изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

–строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;

–решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

–использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

–проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. В цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях основания. Найдите сторону квадрата, если высота цилиндра равна 2см, а радиус основания равен 7см.

Порядок выполнения работы:

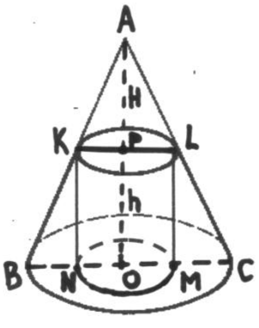
1)Выполнить чертеж

2)Записать кратко условие задачи

Ход работы:

Задача Найдите радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в конус, радиус основания которого равен 3.

Решение:



Обозначим через h и r высоту и радиус основания цилиндра, вписанного в конус с вершиной A. Рассмотрим осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник ABC с высотой AO = H и основанием BC = 2· 3 = 6 (рис.2). Плоскость ABC пересекает цилиндр, вписанный в конус, по его осевому сечению – прямоугольнику KLMN, где точки K и L лежат соответственно на отрезках AB и AC, а точки M и N – на отрезке BC , причём KL = 2r , KN = LM = h . Пусть P – точка пересечения AO и KL . Треугольник APL подобен треугольнику AOC , поэтому

$\frac{AP}{AO} = \frac{PL}{OC}$, или $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{3}$

откуда $h = H\left(1 - \frac{r}{3}\right)$. Пусть V(r)– объем цилиндра, где 0< r <3. Тогда

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi H r^2\left(1 - \frac{r}{3}\right) = \pi H\left(r^2 - \frac{r^3}{3}\right).$$

Найдем наибольшее значение функции V(r)на промежутке (0;3).

$V'(r) = H(2r - r^2) = Hr(2 - r)$.

Промежутку (0;3)принадлежит единственный корень (r = 2) полученного уравнения. Если 0< r <2, то V'(r)>0. Поэтому на промежутке (0;2)функция V(r)возрастает. Если 2< r <3, то V'(r) <0. Поэтому на промежутке (2;3)функция V(r)убывает. Значит, в точке r = 2функция V(r)имеет максимум. Следовательно, радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в данный конус, равен 2.

Ответ: r = 2.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 5 Теория вероятностей и математическая статистика

Тема 5.1. Элементы комбинаторики

Практическая работа № 57

«Решение комбинаторных задач. Размещения, сочетания и перестановки»

Цель работы: Научиться отличать сочетания от размещений, применять формулы для вычисления всех выборок без повторений.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Порядок выполнения работы
1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:
1.Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.
Решение.
Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.
2.Формула размещений имеет вид:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4, m = 10$.
Производим расчёт $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$
3.Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?
Решение.
В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем

по формуле сочетаний.

Формула сочетаний имеет вид6$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!}$ =120.

4.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

Формула перестановок из п –элементов имеет вид:$P_n = n!$ В нашем случае n =4.

Произведём расчёт: P_4 =4!=4$\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$=24.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.2. Теория вероятностей и элементы математической статистики

Практическая работа № 58

«Классическое определение вероятности. Свойства вероятностей, теорема о сумме вероятностей. Вычисление вероятностей»

Цель работы: научиться находить вероятности событий, используя классическое определение вероятности

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее10. Какова вероятность того, что это число является простым?

2.В книге 300 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь номер, кратный 5?

3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее- получить в сумме 7или8?

Порядок выполнения работы

1. Определите событиеА, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A)=\frac{m}{n}$.

Ход работы:

1.В урне 10 одинаковых по размеру и весу шаров, из которых 4 красных и 6голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлечённый шар окажется голубым?

Решение.

1. Событие А-«Извлечённый шар оказался голубым».
2. число n=10
3. число m=6
4. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=0{,}6$

2.Все натуральные числа от1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение.

1. Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».
2. число n=30
3. число m=6(числа 5,10,15,20,25,30)
4. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{30}=0{,}2$.

3. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) букв Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».

Решение.

1. Событие А-«Наугад выбранная буква будет гласной ».
2. число n=12(-число букв в слове)
3. число m=5(буквы :*и,е,е,и,а*)
4. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{12}\approx 0{,}417$
5. число m=7(буквы :*д,ф,ф,р,н,ц,л*)
6. Событие В-«Наугад выбранная буква будет согласной ».
7. число n=12(-число букв в слове)
8. $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{7}{12}\approx 0{,}583$
9. Событие С-«Наугад выбранная буква будет буквой *ч*».
10. число n=12(-число букв в слове)
11. число m=0(такой буквы нет в данном слове)
12. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{12}=0$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.