Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
________________ / С.А. Махновский
«09» февраля 2022 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ЕН.01 Элементы высшей математики

для обучающихся специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование
Квалификация: Программист

Магнитогорск, 2022

ОДОБРЕНО

Предметно-цикловой комиссией
«Информатики и вычислительной техники»
Председатель И.Г. Зорина
Протокол № 5 от 19.01.2022г.

Методической комиссией МпК

Протокол № 4 от «09» февраля 2022г.

Разработчик:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» Многопрофильный колледж
Е.А. Васильева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Элементы высшей математики».
Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и овладению общими компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

У1. Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений.

У2. Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости.

У3. Применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

У4. Решать дифференциальные уравнения.

У5. Пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

У 01.2. Анализировать задачу, выбирать и использовать уместные цифровые средства, приложения и ресурсы для постановки и решения задачи\проблемы.

У 01.3. Разделять комплексные задачи на подзадачи; отслеживать процесс исполнения задач, с помощью цифровых инструментов.

У 01.5. Составлять план действия.

У 01.10. Реализовать составленный план.

У 01.12. Оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника).

У 02.2. Искать информацию в сети Интернет, с использованием фильтров и ключевых слов.

У 02.4. Применять программные решения для структурирования и систематизации информации.

У 02.5. Оценивать данные на достоверность.

У04.3. Взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности.

У05.3. Излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке.

У09.1. Применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач.

У09.2. Использовать современное программное обеспечение.

У10.1. Понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые).

У10.2. Участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и формированию ***общих компетенций***:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной направленности.

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Выполнение обучающимися практических работ по учебной дисциплине «Элементы высшей математики» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1. Матрицы и определители

Практическая работа № 1

Операции над матрицами. Вычисление определителей

Цель работы: формирование умений выполнять операции над матрицами; вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- выполнять операции над матрицами;
- вычислять определители.

Материальное обеспечение:
Раздаточный материал (карточки с заданиями), лекции в тетрадях.
Образовательный портал.
Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

Краткие теоретические сведения:

1. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы А на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы, которых $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Следствия.

1) Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

2) Произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, то есть $0 \cdot A = O$.

2. Сложение матриц. Суммой двух матриц А и В одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ *для* $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

В частном случае *A+O=A*.

3. Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: *A-B=A+(-1)B.*

4. Умножение матриц. Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в *i*-той строке в *k*-том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов *i*-той строки первой матрицы на соответствующие элементы *k*-того столбца второй.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj}\ ,\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами:

1) $A + B = B + A.$
2) $(A + B) + C = A + (B + C).$
3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$
4) $A(B + C) = AB + AC.$
5) $(A + B)C = AC + BC.$
6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$
7) $A(BC) = (AB)C.$
8) $A \cdot E = E \cdot A = A.$
9) $A \cdot B \neq B \cdot A.$

5. Возведение в степень. Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы *A* называется произведение *m* матриц, равных *A*, т.е. $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{m}$.

Операция возведение в степень определяется только для квадратных матриц.

Следствия. 1) $A^\circ = E$; 2) $A^1 = A$; 3) $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$; 4) $(A^{m})^k = A^{mk}$.

6. Транспонирование матрицы. Матрица, полученная из матрицы *A* путем замены строк на соответствующие столбцы, называется *транспонированной* относительно матрицы *A* и обозначается A', то есть:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \underset{n\times m}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Запишите определитель, определите какого он порядка.
4. Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.
5. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы:

1.Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а**)** Найдем А^2, умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б**)** Найдем матрицу *3A*, умножив все элементы матрицы *A* на 3.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в**)** Найдем произведение 3АВ

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу С, складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2.Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимообратными.

3.Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 16 & -16 & -4 \\ 14 & -14 & -8 \end{pmatrix};$$

$c_{11} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 3;$

$c_{12} = -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2;$

$c_{13} = -3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 11;$

$c_{21} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 16;$

$c_{22} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) = -16;$

$c_{23} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -4;$

$c_{31} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 14;$

$c_{32} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) = -14;$

$c_{33} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -8.$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 & 2 \\ -11 & -10 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$

$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3A_{11} + (-1)A_{21} + 0A_{31} + 1A_{41} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot$

$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 122$

Форма представления результата: Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий

Тема 2 Системы линейных уравнений
Практическая работа №2

Решение систем линейных уравнений различными методами.

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений различными методами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-решать системы линейных уравнений методом Крамера;

- решать системы уравнений методом Гаусса;

- решать системы линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$.

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Чтобы решить систему методом Крамера, составим определитель из коэффициентов при неизвестных.

Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;

-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;

-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Для решения системы методом Гаусса используйте алгоритм:

1) Запишите систему линейных уравнений.
2) Составьте расширенную матрицу.
3) Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4) По ступенчатой матрице составьте систему.
5) Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6) Запишите ответ.

Матричный метод (с помощью обратной матрицы)

Пусть задана система линейных уравнений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

Составим матричное уравнение: AX = B, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots\ a_{2n} \\ a_{n1} a_{n2\dots} a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно $A^{-1} \cdot B$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы A ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A и составить из них союзную матрицу A^*.

в) транспонировать матрицу A^* из алгебраических дополнений

$A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n} A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n} A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B, состоящую из свободных членов.

Для решения системы матричным методом:

1. Запишите систему линейных уравнений.

2. Составьте матричное уравнение.

3. Вычислите обратную матрицу.

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы A ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A;

в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

4. Найдите значения неизвестных.

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B, состоящую из свободных членов.

5. Запишите ответ.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Решите каждую систему всеми тремя способами.
3. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим примеры:

1) Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

2) Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12;$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31;$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13;$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26;$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -120+64+56 \\ -310-8-98 \\ 130-104+182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (0;4;-2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0+12-2=10 \\ 0-8+4=-4 \\ 0-4-10=-14 \end{cases}. \text{ (верно)}$$

3) Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0; \\ 2x_1-x_2+4x_3=5; \\ 3x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ x_2-2x_3=-1; \\ -2x_3=0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ x_2-2x_3=-1 \\ x_3=0 \end{cases}; \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ x_2=-1 \\ x_3=0 \end{cases}; \begin{cases} x_1+2\cdot(-1)=0 \\ x_2=-1 \\ x_3=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1. \\ x_3=0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3 Элементы векторной алгебры
Практическая работа № 3

Операции над векторами

Цель: Научиться выполнять действия над векторами, вычислять угол между векторами, применять векторное и смешанное произведения для решения геометрических задач

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- находить проекцию вектора;
- вычислять угол между векторами;
- вычислять векторное произведение и применять его к решению задач;
- вычислять смешанное произведение и применять его для вычисления объема.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Дано: $\bar{a} = (3;-6;-1)$, $\bar{b} = (1;4;-5)$, $\bar{c} = (3;-4;12)$. Найти проекцию вектора $(\bar{a}+\bar{b})$ на вектор $\bar{c}$.

2. Даны вершины треугольника А (1; -1; 2), В (5; -6; 2) и С (1; 3; -1). Найдите длину высоты, опущенной из вершины В на сторону АС.

3. Дана пирамида с вершинами A_1 (7; 2; 4), A_2 (7; -1; -2), A_3 (3; 3; 1), A_4 (-4; 2; 1). Найдите:

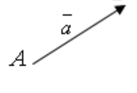
а) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

б) объем пирамиды;

в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Краткие теоретические сведения:

Вектором называется направлен ный отрезок $\overline{AB}$ с начальной точкой *A* и конечной точкой *B*. Векторы могут обозначаться: $\bar{a} = \overline{AB}$.



Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными,* и обозначаются $\bar{a} \| \bar{b}$.

Векторы называются *компланарными,* если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если начало и конец вектора совпадают, например, $\overline{AA}$, то такой вектор называют *нулевым* и обозначают $\bar{0} = \overline{AA}$. Длина нулевого вектора равна нулю: $|\bar{0}| = 0$.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину:

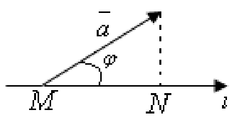
$$\bar{a} = \bar{b} \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1)\ \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}; \\ 2)\ |\bar{a}| = |\bar{b}|. \end{cases}$$

Произведением вектора $\bar{a}$ *на число* λ называется вектор $\bar{b} = \lambda\,\bar{a}$, имеющий длину $|\bar{b}| = |\lambda|\,|\bar{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно ему, если $\lambda<0$.

Противоположным вектором $-\bar{a}$ называется произведение вектора $\bar{a}$ на число (-1), т.е. $-\bar{a} = (-1)\,\bar{a}$.

Прямая l с заданным направлением, принимаемым за положительное, называется *осью*.

Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось lназывается число, обозначаемое $пр_l\,\bar{a}$ и равное $|\bar{a}|\cos\varphi$, *где* $\varphi \in [0,\pi]$ – угол между вектором $\bar{a}$ и положительным направлением оси l.



$$пр_l\,\bar{a} = MN,\ 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$пр_l\,\bar{a} = -MN,\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi.$$

Вектор $\bar{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$ где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – единичные векторы (орты), совпадающие с направлением осей соответственно *Ox, Oy, Oz;* $|\bar{i}| + |\bar{j}| + |\bar{k}| = 1.$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\bar{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad или \quad |\bar{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \qquad (1)$$

Линейные операции над векторами в координатной форме. Пусть вектор $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тогда

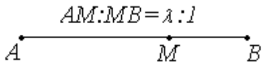
$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2),$$
$$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2),$$

а произведение вектора $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на число λ есть вектор $\bar{f} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Если даны точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{MN}$ будет иметь координаты: $\overline{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *коллинеарны* тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны: $\bar{a} \| \bar{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $A = (x_1, y_1, z_1)$ и $B = (x_2, y_2, z_2)$, а точка *M* определена условием *AM=λMB, λ>0.*



Тогда координаты *x, y, z* точки *M* определяются равенствами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частном случае *λ=1* и точка *M* будет серединой отрезка *AB*.

Скалярным произведением $(\bar{a}, \bar{b})$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$$

Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$.

Скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{b})$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (2)$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*:*

$$(\bar{a}, \bar{a}) = \bar{a}^{\,2} = |\bar{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \qquad (3)$$

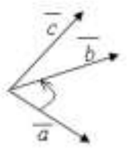
Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (4)$$

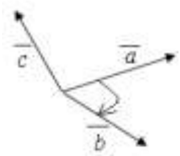
Для двух ненулевых векторов $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *условие ортогональности* имеет вид: $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

<u>Векторное произведение векторов</u>

Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ с общим началом в точке *O* называется правой, если кратчайший поворот оси вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ со стороны вектора $\bar{c}$ осуществляется против часовой стрелки (рис. а). В противном случае тройка векторов называется левой (рис. б).



а



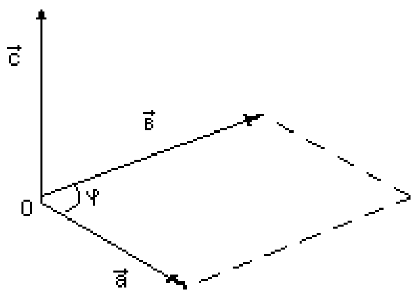
б

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обозначаемый $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, который удовлетворяет трем условиям:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a}, \bar{b})$;
2) $\bar{c} \perp \bar{a}, \ \ \bar{c} \perp \bar{b}$;
3) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – правая тройка векторов.

Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

$c \perp a \ \ c \perp в$ Этот вектор перпендикулярен перемножаемым векторам (перпендикулярен плоскости параллелограмма), т.е и



Векторное произведение в координатной форме

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ в_y & в_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ в_x & в_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ в_x & в_y \end{vmatrix}$$

Длина векторного произведения равна площади параллелограмма - удвоенного треугольника, а именно произведению сторон в виде векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенные от одной точки, на синус угла между ними $\sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

<u>Смешанное произведение векторов</u>

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется действительное число, равное скалярному произведению векторов $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ и $\vec{c}$, где $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ - векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Смешанное произведение векторов равно определителю матрицы третьего порядка, строками которой являются координаты умножаемых векторов, то есть

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Условие компланарности трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ имеет вид:

$$\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \text{ – компланарны} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b}\bar{c}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

Геометрический смысл смешанного произведения состоит в следующем. Смешанное произведение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах, если $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – правая тройка. Если же эта тройка левая, то смешанное произведение отрицательно и равно объему параллелепипеда с противоположным знаком:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{cases} V,\ \bar{a},\bar{b},\bar{c} \text{ – } \textit{правая тройка}; \\ -V,\ \bar{a},\bar{b},\bar{c} \text{ – } \textit{левая тройка}. \end{cases}$$

$$V_{параллелепипеда}=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

Объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равняется $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда.

Получаем: $V_{тетраэдра}=\frac{1}{6}V_{параллелепипеда}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Задание 1. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (-1; 0; 2) и $\vec{b}$ = (3; -4; 1).

Решение. Для нахождения проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, будем использовать формулу

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Подставляя в нее координаты векторов, получим:

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{-1\cdot3+0\cdot(-4)+2\cdot1}{\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{-1}{\sqrt{26}}=-\frac{\sqrt{26}}{26}$$

Ответ. $Пр_{\vec{b}}\vec{a}=-\frac{\sqrt{26}}{26}$

Задание 2.Даны вершины треугольника A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1). Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Решение .

$\overrightarrow{AB}=(4;-5;\ 0);\ \overrightarrow{AC}=(0;\ 4;-3)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}=15i+12j+16k=(15;\ 12;\ 16)$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{225+144+256}=\frac{25}{2}$$

$$\textit{С другой стороны}:\ S_{ABC}=\frac{1}{2}h\cdot AC=\frac{1}{2}\sqrt{16+9}\cdot h$$

$$\Rightarrow\frac{25}{2}=\frac{5}{2}h\Rightarrow h=5$$

Ответ: 5

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4. Аналитическая геометрия на плоскости
Практическая работа № 4

Решение задач по аналитической геометрии.

Цель: формирование умений составлять уравнения прямых, уравнения кривых 2-го порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи, используя уравнения прямых;
- решать задачи, используя уравнения кривых второго порядка на плоскости.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями: а) $2x-y+3=0$ и $4x+8y+17=0$; б) $2x-y+3=0$ и $4x-8y-11=0$.

2. Даны вершины *A(4, 3), B(-3, -3), C(2, 7)* треугольника *ABC*. Найти: а) уравнение стороны *AB*; б) уравнение высоты *CH;* в) уравнение медианы *AM*; г) точку *N* пересечения ме-

дианы AM и высоты CH; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB; е) расстояние от точки C до прямой AB.

3. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(6;-1)$ с центром в точке пересечения прямых $3x-4y-5=0$ и $4x+3y-15=0$.
4. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2+25y^2-100=0$.
5. Определить вид и расположение кривой (полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет) $5x^2+16y^2+10x-96y+69=0$.
6. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1;-3)$ и симметрична относительно оси Ox. Найти фокус и уравнения параболы и ее директрисы.

Краткие теоретические сведения:

Уравнение прямой на плоскости

В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени

$Ax+By+C=0$, где A, B, C – определенные числа, $A^2+B^2\neq 0$. И обратно, всякое уравнение вида $Ax+By+C=0$ определяет прямую на плоскости.

Данное уравнение называется *общим уравнением прямой* на плоскости, коэффициенты уравнения A, B определяют координаты вектора$\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой. Этот вектор называется *нормальным вектором* прямой.

Укажем основные способы задания прямой на плоскости и соответствующие уравнения.

1. Прямая проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A,B)$. В этом случае прямая описывается общим уравнением
$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

2. Прямая проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=(m,n)$. В этом случае прямая задается *каноническим уравнением*

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \end{cases}$$

где t – параметр, принимающий любые числовые значения.

3. Прямая проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ с заданным углом наклона α, определяемым *угловым коэффициентом*$k=tg\alpha$ (рис. 1). В этом случае уравнение прямой имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$.

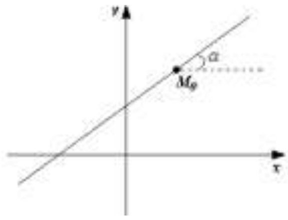


Рис. 1.

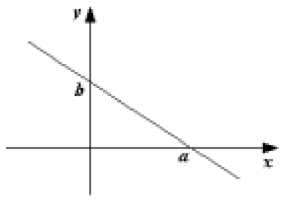


Рис. 2.

4. Прямая отсекает на координатных осях заданные отрезки (рис. 2). В этом случае используют *уравнение прямой в отрезках* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

5. Прямая задана углом наклона α, определяемым угловым коэффициентом $k=tg\alpha$, и отрезком b, отсекаемым на оси *Oy.* В этом случае используют *уравнение прямой с угловым коэффициентом* $y=kx+b$.

Расстояниеdот точки$M_1(x_1,y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Кривые второго порядка на плоскости

Общее уравнение кривых второго порядка имеет вид

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, в котором *A, B* и *C* не равны нулю одновременно, т.е. $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Эллипс и окружность

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная *2a*, причем эта величина больше расстояния *2c* между фокусами.

Если за ось *Ox* принять прямую, проходящую через фокусыF_1 иF_2, а за ось *Oy* – перпендикуляр к оси *Ox*, проходящий через середину отрезка F_1F_2 (рис. 1), то уравнение эллипса примет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Это уравнение называют *каноническим уравнением эллипса*. При этом *a* – большая полуось эллипса, b– его малая полуось, $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса.

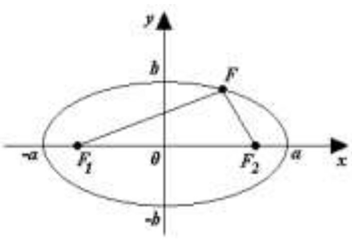


Рис. 1.

Отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$ называется *эксцентриситетом эллипса*.

При *a<b* уравнение также задает эллипс, но у такого эллипса фокусы расположены на оси *Oy*, параметр b задает большую полуось, а *a* – малую полуось. Параметр *c*, равный поло-

вине расстояния между фокусами, можно найти по формуле $c=\sqrt{b^2-a^2}$, а эксцентриситет – по формуле $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

При $a=b$ уравнение задает окружность с центром в начале координат и радиусом a.

Окружность радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ задается уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта величина меньше расстояния $2c$ между фокусами.

Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусыF_1 иF_2, а за ось Oy – перпендикуляр к оси Ox, проходящий через середину отрезка F_1F_2 (рис. 2), то уравнение гиперболы примет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Это уравнение называют *каноническим уравнением гиперболы*. При этом a – действительная полуось гиперболы, b– его мнимая полуось, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса.

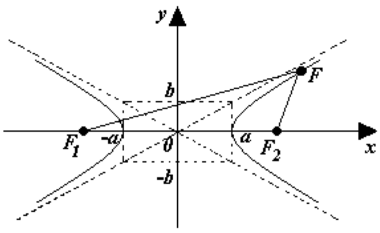


Рис. 2.

Отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$ называется *эксцентриситетом гиперболы.* Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$, к которым гипербола неограниченно приближается на бесконечности, представляют собой асимптоты гиперболы.

Уравнение $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, определяет гиперболу, но у этой гиперболы фокусы расположены на оси Oy, параметр b есть действительная полуось, параметр a – мнимая полуось, а эксцентриситет вычисляется по формуле $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокус перпендикулярно директрисе, а за ось Oy – прямую, проходящую через середину перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису (рис. 3), то уравнение параболы примет вид $y^2=2px$, где p – расстояние от фокуса до директрисы. Это уравнение называют *каноническим уравнением параболы*. При этом $x=-\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы, а фокус $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

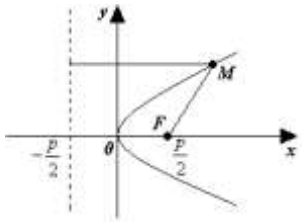


Рис. 3.

Уравнение $x^2=2py$ задает параболу, симметричную относительно оси *Oy*. В этом случае директриса параболы $y=-\frac{p}{2}$, а фокус $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$.

Порядок выполнения работы:

1**.** Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5. Основы теории комплексных чисел
Практическая работа № 5

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- записывать комплексные числа в алгебраической форме;
- выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: z_1= (7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3). Записать эти числа в алгебраической форме.
2. Вычислить:
   1) $z_1 + z_2$;
   2) $z_2 - z_3$;
   3) $\frac{z_1}{z_3}$;
   4) $z_2 \cdot z_3$;
   5) z_1^5;
3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Краткие теоретические сведения:

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$.

Комплексные числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называются равными, если $a = c$ и $b = d$.

Комплексные числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ называются сопряженными. Числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются противоположными.

Модулем комплексного числа называется длина радиус-вектора соответствующей точки комплексной плоскости. Обозначается $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$.

Запись комплексного числа z в виде $a + bi$, где a и b ϵ R, называется алгебраической формой комплексного числа.

1. **Сумма** двух чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ равна $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

2. **Разность** двух чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ равна $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

3. **Произведением** комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число $z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

4. **Частным** комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di \neq 0$ называется комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

5. **Возведение комплексного числа в степень** nϵN рассматривается как частный случай умножения комплексного числа n раз.

Степени числа i:

$$\mathbf{i^n} = \begin{cases} \text{i, если } n = 4k + 1 \\ -1\text{, если } n = 4k + 2 \\ -\text{i, если } n = 4k + 3 \\ 1\text{, если } n = 4k \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Ход работы:

1. Даны комплексные числа: z_1= (7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).
Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид: $z = a + bi$, то числа в алгебраической форме будут записаны в виде:

$$z_1 = 7 + i;\ z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i;\ z_3 = 4 - 3i.$$

2. Вычислить:

$z_1 + z_2 = (7 - 1{,}5) + (1 + 1{,}5)i = 5{,}5 + 2{,}5i;$

$z_2 - z_3 = (-1{,}5 - 4) + (1{,}5 + 3)i = -5{,}5 + 4{,}5i;$

$\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+4i+21i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1 + i;$

$z_2 \cdot z_3 = (-1{,}5 + 1{,}5i)(4 - 3i) = -6 + 4{,}5i + 6i - 4{,}5i^2 = -6 + 10{,}5i + 4{,}5 = -1{,}5 + 10{,}5i;$

$z_1^5 = (7 + i)^5 = ((7 + i)^2)^2(7 + i) = (49 + 14i + i^2)^2(7 + i) = (48 + 14i)^2(7 + i) = (2304 + 1344i + 196i^2)(7 + i) = (2304 + 1344i - 196)(7 + i) = (2108 + 1344i)(7 + i) = 13412 + 11516i$

;

3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Решение:

$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2{,}1 - 2{,}7i;$

1) $\frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{-i-3-3i^2-9i}{-i^2+9} = \frac{-10i}{10} = -i$

2) $\frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-9i^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1{,}1 - 1{,}7i$

3) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$

4) $-i - 1{,}1 - 1{,}7i - 1 = -2{,}1 - 2{,}7i$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5. Основы теории комплексных чисел
Практическая работа № 6

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в тригонометрической форме;
- выполнять действия в тригонометрической форме;
- переходить от одной формы комплексных чисел к другой форме.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: z_1=(-3;-5), z_2=(-7,2;7,2), z_3=(2;6).
   Записать эти числа в тригонометрической форме.

2. Вычислите: $z_2 \cdot z_3$; $\frac{z_1}{z_3}$; z_1^5; $\sqrt{z_2}$.

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:
a) $(3 \cdot (cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}))^2$ b) $\frac{24(cos75^0 + isin\,75^0)}{3(cos\,30^0 + isin\,30^0)}$

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.

1) Модуль$r = |z|$ однозначно определяется по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить, в какой четверти находится вектор (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z = a + bi$
- Решив уравнение $tg\varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z = \varphi = arctg\,\frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = arctg\,\frac{b}{a} + \pi$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = arctg\,\frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

1.Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2.Выполните необходимые действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$|z_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,

Число находится в первой четверти, значит

$\varphi = arctg\,\frac{1}{7} = arctg\,0{,}1429$.

$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + i\sin 8°8').$

2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$

$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}1$

Число находится во второй четверти, значит $\varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;

$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = 2{,}1(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}).$

3) $z_3 = 4 - 3i$

$|z_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

Число находится в четвертой четверти, значит
$\varphi = arctg\frac{-3}{4} = arctg(-0{,}75) = -36°°52'.$

$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52' + i\sin(-36°52').$

2. Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;
2) $\frac{z_1}{z_3}$;
3) z_1^5;
4) $\sqrt{z_2}$;

Решение:

$z_2 \cdot z_3 = 2{,}1 \cdot 5\left(\cos\left(135° - 36°52'\right) + i\sin\left(135° - 36°52'\right)\right) = 10{,}5(\cos 98°8' + i\sin 98°8');$

$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}\left(\cos\left(8°8' - \left(-36°52'\right)\right) + i\sin\left(8°8' + 36°52'\right)\right) = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°);$

$z_1^5 = \left(5\sqrt{2}\right)^5\left(\cos 5 \cdot 8°8' + i\sin 5 \cdot 8°8'\right) = 12500\sqrt{2}(\cos 40°40' + i\sin 40°40');$

Воспользуемся формулой:

$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$

В нашем примере n=2.

$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{135° + 360°k}{2} + i\sin\frac{135° + 360°k}{2}\right);$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{135° + 360° \cdot 0}{2} + i\sin\frac{135° + 360° \cdot 0}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 67°30' + i\sin 67°30');$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{135° + 360° \cdot 1}{2} + i\sin\frac{135° + 360° \cdot 1}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 247°30' + i\sin 247°30')$

2. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$(2 \cdot (\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}))^6 = 2^6\left(\cos\frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i\sin\frac{5\pi}{24} \cdot 6\right) = 64\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$
$-32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$

$\frac{24(cos75^0+isin\,75^0)}{3(\cos 15^0+isin\,15^0)} = \frac{24}{3}(\cos(75° - 15°) + isin(75° - 15°) = 8(cos60° + isin60°) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6. Теория пределов
Практическая работа № 7

Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей.

Цель: Научиться вычислять пределы функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;

- раскрывать неопределенности;

- находить пределы функций, используя формулы замечательных пределов.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}$
5. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Краткие теоретические сведения:

Раскрытие неопределенностей различных типов

Для того чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения этой функции, нужно в выражение функции вместо аргумента подставить его предельное значение.

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями;

к ним относятся неопределенности видов $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $\left(\infty^{0}\right)$, $\left(0^{0}\right)$. Рассмотрим несколько типов примеров, классифицируя их по виду неопределенности и предельному значению x.

1-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ в общем случае – сложные степенные или показательные функции. В случае степенных функций необходимо выносить за скобку в числителе и в знаменателе дроби x с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; в случае показательных функций за скобку выносится наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

Полезно запомнить правило:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ n<m,\\ \frac{a_0}{b_0},\ \textit{если}\ n=m,\\ \infty,\ \textit{если}\ n>m.\end{cases}$$

2-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

3-й тип. Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $(\infty-\infty)$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится ко 2-му типу после приведения дробей к общему знаменателю. Если упомянутая функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность устраняется или приводится к 1-му типу путем домножения и деления функции на одно и то же (сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел (число e): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ или $\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

Для того что бы избавиться от неопределенности вида $\left(1^{\infty}\right)$. необходимо выделить целую часть дроби (которая должна быть равна 1) в выражении, стоящем под знаком предела ,которое представляет собой степенно-показательную функцию. Неопределенность устраняется при помощи выделения второго замечательного предела.

Например:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}(1+0)^{\infty}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k*\frac{k}{x}}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{k}=\ell^{k};$$

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{n}=(1^{\infty})=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}*n}}=\ell^{\frac{4}{n}*n}=\ell^{4};$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{n+2}=(1^{\infty})=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{\frac{4n}{3}}\right]^{\frac{3}{4n}(n+2)}=\ell^{\frac{3(n+2)}{4n}}=\ell^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n}}=\ell^{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{4n}{n}}}=$ $\ell^{\lim_{n\to\infty}\frac{3+0}{4}}=\ell^{\frac{3}{4}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}$;Данный предел можно вычислить двумя способами:

1 способ:

Разделим числитель на знаменатель выделив целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\,x+3 & x-2 \\ \underline{x-2} & 1 \\ 5 & \end{array} \Rightarrow \frac{x+3}{x-2}=1+\frac{5}{x-2};$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5}{x-2}*x}=\ell^{\frac{5x}{x-2}}=\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{x-2}}=$ $\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}}=\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-0}}=\ell^{5}$;

2 способ:

Поделив числитель и знаменатель дроби на x, сведем данный предел к частному пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}}=\frac{\ell^{3}}{\ell^{-2}}=\ell^{5}.$$

. Пределы от некоторых тригонометрических функций необходимо решать применяя первый замечательный предел или закон эквивалентных величин при условии x $\to 0$. Эквивалентными называются бесконечно малые величины, предел от понятия которых равен единице.

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

1) $\lim_{x\to 2}(2x^{3}-10x^{2}-4x+5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to 2}(2x^{3}-10x^{2}-4x+5)$$
$$=2\left(\lim_{x\to 2}x\right)^{3}-10\left(\lim_{x\to 2}x\right)^{2}-4\lim_{x\to 2}x+5=2\cdot 8-10\cdot 4-4\cdot 2+5=-27$$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{3x^{2}-11x+6}{2x^{2}-5x-3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке $x = 3$.Поэтому сначала преобразуем данную функцию.
Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2корни квадратного трехчлена.
Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 11x + 6$ являются числа $\frac{2}{3}$и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3(x - 3)(x - \frac{2}{3})$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x - 3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x - 3)(x + \frac{1}{2})$$

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{3(x-3)(x-\frac{2}{3})}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 3} \frac{3(x-\frac{2}{3})}{2(x+\frac{1}{2})}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3x-2}{2x+1} = \frac{3\lim\limits_{x\to 3} x - 2}{2\lim\limits_{x\to 3} x + 1} = \frac{3\cdot 3 - 2}{2\cdot 3 + 1} = \frac{7}{7} = 1$$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2}$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞, то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{11x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} - \frac{6x}{x^4} + \frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} - \frac{8x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{11}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{6 - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6} = 0$$

$$4)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел : $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Введем новую переменную: $x = -3y; x \to \infty; y \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{5\cdot(-3y)} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15} = \frac{1}{e^{15}}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6. Теория пределов
Практическая работа № 8

Исследование функций на непрерывность и точки разрыва

Цель: Научиться находить точки разрыва функций, определять их род, находить асимптоты графиков функций.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- исследовать функции на непрерывность;
- находить точки разрыва, определять их род;
- находить асимптоты.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Исследовать функции на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род. Найти асимптоты функций.

1) $y = \frac{2x^2+3}{x^2-9}$;
2) $y = \frac{2x^2-4x-30}{x^2-25}$.

Краткие теоретические сведения:

Точками разрыва функции называются точки, в которых нарушается условие непрерывности функции.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т е

$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$и $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$. При этом: если $\text{A}_1 = \text{A}_2$,то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва; если$\text{A}_1 \neq \text{A}_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.
Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ равно b.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции ,если $\lim_{x\to\infty}|f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Найти область определения функции и выявить точки разрыва.

2. Найти асимптоты функции.

Ход работы:

Исследовать функцию на непрерывность. Найти асимптоты функции.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Точка $x = 1$ является точкой разрыва 2 рода, т.к.

$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = -\infty \lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$

Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 7. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной
Практическая работа № 9

Вычисление производных сложных функций

Цель: Научиться находить производные сложных функций.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- применять правила дифференцирования;
- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид функции. Если функция является сложной, то введите промежуточный аргумент.
2. Определите, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Примените соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найдите производные функций.
4. Раскройте скобки и приведите подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1-4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1-4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1-4x^2)^9 \cdot (1-4x^2)' = 10\,(1-4x^2)^9(-8x) = -80x(1-4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(sin\frac{1}{2}x\right)' cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u'$, $(cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(sin\frac{1}{2}x\right)' cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2}\frac{1}{(3+10x)\,ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x)\log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2}\frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'.$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' =$$
$$-\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 7. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной
Практическая работа № 10

Исследование функций и построение графиков.

Цель работы: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- проводить исследование функций с помощью производной;

- строить графики функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.

2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).

3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.

4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.

5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.

6. Найти асимптоты графика функции.

7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

8. Найти область значений.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае.

Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ равно b.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$,

если $\lim_{x\to\infty}|f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.

2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$.

$y(-x) \neq y(x);\ y(-x) \neq -y(x)$.

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

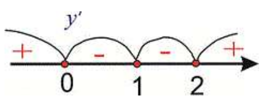
4.Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5.Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max} = 0;\ y_{min} = 2$.

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2(2x-2) \cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

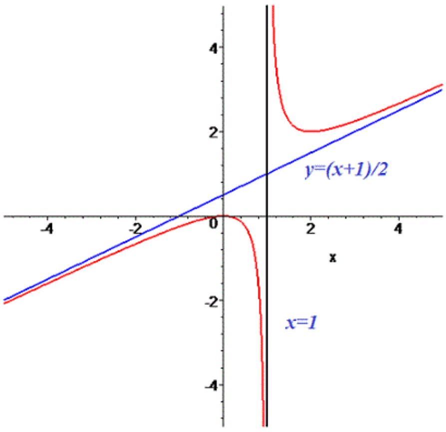
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

8.На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 8. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Практическая работа № 11

Интегрирование различными методами

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования, методом подстановки;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите неопределенные интегралы:

1)$\int(8x^4-6x^2+2x-3)dx$

2)$\int\frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$

3)$\int\cos(10x-5)\,dx$

4) $\int 3^{4x^2}xdx$

5)$\int\frac{5dx}{25+16x^2}$

6)$\int\frac{x^2dx}{(1-2x^3)^2}$

7) $\int\frac{2x^4-4x^2-3x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, приведите интеграл к табличным формулам. Проинтегрируйте.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то введите новую переменную, найдите ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Найдите полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернитесь к старой переменной.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то примените формулу интегрирования по частям $\int UdV=UV-\int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *U*и *dV*. Затем, после нахождения *dU*и *V*, используйте формулу интегрирования по частям.
   -Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где *P*(*x*)- многочлен, *k*- число.
   Удобно положить$U=P(x)$,а все остальные множители принять за *dV*.
   -Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$
$\int P(x)arcctgxdx$.

Удобно положить $P(x)dx=dV$, а остальные множители принять за *U*.

- Интегралы вида $\int e^{ax} sinbxdx, \int e^{ax} cosbxdx$, где aи bчисла. За Uможно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1) $\int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx$$
$$= \int \left(\frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right) dx$$
$$= \int \left(6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2}\right) dx$$
$$= 6 \int x^2 dx - 5 \int dx$$
$$+ 3 \int \frac{dx}{x} + 4 \int x^{-2} dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3\ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 - 5x + 3\ln|x| - \frac{4}{x} + C$$

2) $\int \frac{15x^2 dx}{(1 - x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1 - x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1 - x^3 = t \\ d(1 - x^3) = dt \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5 \int t^{-4} dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1 - x^3)^3} + C$$

3) $\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx, \ dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x} dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x} dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right) dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

4) $\int (x^2 - 2x) cos4xdx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x, \ dV = cos4xdx$.

$$dU = (2x-2)dx, \qquad V = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x$$

$$\int (x^2-2x)\cos 4x\,dx = (x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x - \int \frac{1}{4}sin4x(2x-2)dx =$$

$$(x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x - \frac{1}{4}\int sin4x(2x-2)dx = \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}\int sin4x(x-1)dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x-1,\ dV = sin4xdx$.

$$dU = dx, \qquad V = \int sin4xdx = -\frac{1}{4}cos4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int -\frac{1}{4}cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) + \frac{1}{4}\int cos4xdx =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{8}\int cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{32}sin4x + C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 8. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной
Практическая работа № 12

Вычисление определенных интегралов

Цель работы: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенные интегралы различными методами;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_{-2}^{3}(4x^3+3x^2+2x+1)dx$

1. $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$
2. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$
3. $\int_{-2}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$
4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}e^{sinx}\,cosxdx$
5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{dx}{sin^2\frac{x}{3}}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то необходимо вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

Ход работы:

1) $\int_{-1}^{3}(4\,x^3-3x^2+2x+5)dx$

$\int_{-1}^{3}(4x^3-3x^2+2x+5)dx=4\int_{-1}^{3}x^3dx-3\int_{-1}^{3}x^2dx+2\int_{-1}^{3}xdx+5\int_{-1}^{3}dx=x^4-x^3+x^2+5x|_{-1}^{3}=$

$3^4-3^3+3^2+5\cdot3-(1+1+1-5)=81-27+9+15+2=80$

2) $\int_{0}^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2}=\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2}==\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}x=t\\ \frac{5}{2}dx=dt\\ dx=\frac{2}{5}dt\\ x_H=0\ \ t_H=0\\ x_B=0,4\ \ t_B=1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt|_0^1=\frac{1}{2}(arctg1-arctg0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^3x}=\begin{bmatrix}cosx=t\\ dcosx=dt\\ -sinxdx=dt\\ sinxdx=-dt\\ x_H=0\ \ t_H=cos0=1\\ x_B=\frac{\pi}{3}\quad t_B=cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\int_1^{0,5}\frac{-dt}{t^3}=-\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5}=\frac{1}{2t^2}|_1^{0,5}=\frac{1}{2\cdot 0,25}-\frac{1}{2}=2-0,5=1,5$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 9. Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных
Практическая работа № 13

Вычисление частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных.

Цель работы: формирование умений вычислять частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять частные производные функций нескольких переменных;

- вычислять дифференциалы функций нескольких переменных.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1. Найти частные производные функций: а)$z = e^{x-y} \cdot (2x-1)$; б)$z = xe^{y} + x^{y}$;

   в)$z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

2. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных

   $z = \sin(x + \sqrt{y})$.

3. Найти дифференциал функции двух переменных$z = \ln(1 + e^{x} + y^{2})$.

Краткие теоретические сведения:

Пусть имеется *n* переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из некоторого множества *X* соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана *функция нескольких переменных* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *независимыми переменными* или *аргументами*, z – *зависимой переменной*, а символ *f* означает *закон соответствия*. Множество *X* называется *областью определения функции*.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по *x* называют производную функции $z = f(x, y)$ по *x* при фиксированной переменной *y* и обозначают $f'_x(x, y)$.

Частная производная функции $z = f(x, y)$ по *y* при фиксированной переменной *x* обозначается $f'_y(x, y)$.

Для частных производных используют также обозначения $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Частные производные второго порядка определяются следующим образом: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения независимых переменных $dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$ или $dz = z'_x dx + z'_y dy$ или $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Порядок выполнения работы:

1**.** Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Ход работы:

<u>Задание1.</u> Найти частные производные функций: а) $z = x^3 y^5 + 5x^2 - 3y + 1$; б) $z = x^2 e^{y^2}$; в) $z = x \ln y + \frac{y}{x}$.

Решение. а) При дифференцировании по *x* считаем постоянной величиной *y*. Таким образом, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^5 + 10x$. При дифференцировании по *y* считаем постоянной величиной *x*, следовательно, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^3 y^4 - 3$.

б) При дифференцировании по *x* считаем постоянной величиной *y*. Таким образом, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{y^2}$. При дифференцировании по *y* считаем постоянной величиной *x*, следовательно, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^{y^2} \cdot 2y = 2x^2 y e^{y^2}$.

в) При дифференцировании по *x* считаем постоянной величиной *y*. Таким образом, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + y\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln y - \frac{y}{x^2}$. При дифференцировании по *y* считаем постоянной величиной *x*, следовательно,
$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x(\ln y)' + \frac{1}{x} \cdot y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}$.

<u>Задание2.</u> Найти частные производные второго порядка функции двух переменных $z = \ln(1 + x + 2y)$.

Решение. Частные производные первого порядка имеют вид: $z'_x = \frac{1}{1 + x + 2y}$, $z'_y = \frac{2}{1 + x + 2y}$. Считая их новыми функциями двух переменных, найдем их частные производные. Получаем: $z''_{xx} = \frac{1}{(1 + x + 2y)^2}$, $z''_{xy} = -\frac{2}{(1 + x + 2y)^2}$, $z''_{yy} = -\frac{4}{(1 + x + 2y)^2}$.

<u>Задание3</u>. Найти дифференциал функции двух переменных $z = x^2 y - y^3 x$.

Решение. Частные производные первого порядка имеют вид: $z'_x = 2xy - y^3$ и $z'_y = x^2 - 3y^2 x$. Следовательно, $dz = (2xy - y^3)dx + (x^2 - 3y^2 x)dy$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 10. Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных
Практическая работа №14

Вычисление двойных интегралов

Цель работы: формирование умений вычислять двойные интегралы в случае области 1 и 2 типа.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять двойные интегралы.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислить двойной интеграл:

а) $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16y^3x^3\right)dxdy$, где D: $x = 1; y = x^2; y = -\sqrt{x}$;

б) $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96y^3x^3\right)dxdy$, где D: $x = 1; y = -x^3; y = \sqrt[3]{x}$;.

Краткие теоретические сведения:

Двойным интегралом от функции $z = f(x;y)$ по области D называется конечный предел (если он существует) интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i$ при $max\, d_i \to 0$, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения области на элементарные части, ни от выбора точек в них. Итак, двойной интеграл определяется равенством

$$\iint f(x;y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\, d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i$$

В этом случае функция $f(x;y)$ называется интегрируемой в области D, D- область интегрирования; x и y – переменные интегрирования; $dxdy$ – элемент площади.

Двойной интеграл обладает следующими свойствами.

1. $\iint\limits_{(G)} d\sigma = S(G)$, где S(G) – площадь области G.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла: $\iint\limits_{(G)} Af(x,y)d\sigma = A\iint\limits_{(G)} f(x,y)d\sigma$.

3. Двойной интеграл аддитивен относительно подынтегральной функции: $\iint\limits_{(G)} (f_1 + f_2)d\sigma = \iint\limits_{(G)} f_1 d\sigma + \iint\limits_{(G)} f_2 d\sigma$.

4. Двойной интеграл аддитивен относительно области интегрирования: если $G = G_1 \cup G_2$, причем $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, то $\iint\limits_{(G)} fd\sigma = \iint\limits_{(G_1)} fd\sigma + \iint\limits_{(G_2)} fd\sigma$.

Двойной интеграл имеет простой геометрический смысл: величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна объему цилиндрического тела.

Вычисление двойного интеграла

Пусть область D определяется неравенствами:

$D: \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases}$ и при этом, всякая прямая, параллельная оси Oy пересекает границу области D не более чем в двух точках (рис. 1), тогда вычисление двойного интеграла от функции f(x,y) в области D сводится к вычислению, так называемого, повторного интеграла по формуле:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

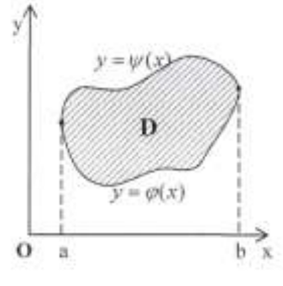
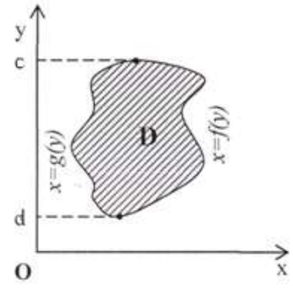


Рис. 1

В формуле (1) сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной *y*, считая при этом *x* величиной постоянной $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$. Затем вычисляется внешний интеграл по переменной *x*.

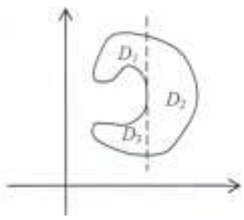


Если область интегрирования есть $D: \begin{cases} c \le y \le d \\ g(y) \le x \le f(y) \end{cases}$

и при этом, всякая прямая, параллельная оси *Ox* пересекает границу области *D* не более чем в двух точках (рис. 2), тогда двойной интеграл вычисляется через повторный интеграл по формуле:

Рис. 2

Замечание 1. Если область интегрирования более сложная, чем в описанных выше случаях, то ее можно разбить на несколько непересекающихся частей, удовлетворяющих указанным условиям, при помощи прямых параллельных координатным осям. Затем применить свойство аддитивности.



Например, область, изображенную на рис.3, можно разбить на три области. Тогда

Рис. 3

Замечание 2. Пределы интегрирования внешнего интеграла в повторном интеграле всегда постоянны. Пределы интегрирования внутреннего интеграла, в общем случае, будут функциями той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл.

Порядок выполнения работы:

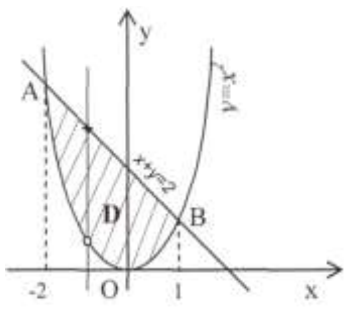
1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Задание. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x-2yx)\,dxdy$$, где $D: x+y=2,\ y=x^2$.

Решение. Область интегрирования D ограничена прямой y+ x = 2 и параболой $y = x^2$, проходящей через начало координат, с осью симметрии Oy (рис. 4). Определим точки пересечения графиков функций. Для того решим систему:



$$\begin{cases} x+y=2 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2+x-2=0$$

$$D=1-4\cdot(-2)=9$$

$$x_1=\frac{-1-3}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{-1+3}{2}=1$$

Рис. 4

Имеем две точки пересечения: A(–2, 4), B(1, 1). Любая прямая, проходящая через внутренние точки отрезка [–2;1] параллельно оси Oy пересекает границу области D в двух точках: в точке входа "°", в которой $y = x^2$ и в точке выхода "×", в которой y = 2–x. Таким образом, область интегрирования D можно задать неравенствами: $\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 2-x \end{cases}$. Тогда по формуле (1) получаем:

$$\iint_D (x-2yx)dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} (x-2yx)dy$$.

Сначала вычисляем внутренний интеграл по y, считая x постоянной величиной

$$\int_{x^2}^{2-x} (x-2yx)dy = x\int_{x^2}^{2-x} (1-2y)dy = x\left(y-y^2\right)\Big|_{x^2}^{2-x} = x\left(2-x-(2-x)^2-x^2+x^4\right)=$$
$$= x\left(-2+3x-2x^2+x^4\right) = -2x+3x^2-2x^3+x^5.$$

Далее вычисляем внешний интеграл

$$\int_{-2}^{1}\left(-2x+3x^2-2x^3+x^5\right)dx = \left(-x^2+x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{1}{3}+\frac{28}{3}=9.$$

Ответ: $\iint_D (x-2yx)dxdy = 9$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 11. Теория рядов
Практическая работа № 15

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Цель: формирование умений раскладывать элементарные функции в ряд Тейлора.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
раскладывать элементарные функции в ряд Тейлора.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

Разложить следующие функции в ряд Тейлора при заданном начальном значении аргумента x_0:

а) e^x, $a=-2$; б) 3^{-5x}, $a=-1$; в) $\ln(3+2x)$, $a=1$.

Краткие теоретические сведения:

Если функция $f(x)$ в некотором интервале раскладывается в степенной ряд по степеням $x-a$, то это разложение единственно и задается формулой:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Ряды Тейлора некоторых элементарных функций. Имеют место следующие разложения:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;\infty)$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\quad x\in(-1;1]$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\quad x\in(-1;1]$$

Эти формулы используются для приближённого вычисления значений указанных функций.

Порядок выполнения работы:

1) Найти производные функции f(x) в точке $x=a$: $f^{(n)}(a), \forall n\in N$.

2) Составить ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Ход работы.

Задание 1. Разложить функцию $f(x)=x^3+4x^2-3x+2$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$

В данном случае $a=1$.

$$f(a)=f(1)=1+4-3+2=4$$

$$f'(x)=(x^3+4x^2-3x+2)'=3x^2+8x-3$$
$$f'(a)=f'(1)=3+8-3=8$$

$$f''(x)=(3x^2+8x-3)'=6x+8$$
$$f''(a)=f''(1)=6+8=14$$

$$f'''(x)=(6x+8)'=6=const$$
$$f'''(a)=f'''(1)=6$$

$f^{(4)}(x)=(6)'=0$, все производные, начиная с четвёртой производной, будут нулевыми.

Теперь подставляем найденные значения в формулу Тейлора:

$$f(x)=x^3+4x^2-3x+2=4+\frac{8}{1!}(x-1)+\frac{14}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3+0+0+0+\ldots=$$
$$=4+8(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3$$

Задание 2. Разложить функцию $y=\ln(1+2x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-3)$.

В данном случае: $a=3$

$$f(x_0)=f(3)=\ln 7$$

$$f'(x)=(\ln(1+2x))'=\frac{2}{1+2x}$$

$$f'(x_0)=f'(3)=\frac{2}{7}$$

$$f''(x)=\left(\frac{2}{1+2x}\right)'=-\frac{2^2\cdot 1}{(1+2x)^2}$$

$$f''(x_0)=f''(3)=-\frac{2^2}{7^2}=-\left(\frac{2}{7}\right)^2$$

$$f'''(x)=\left(-\frac{2^2\cdot 1}{(1+2x)^2}\right)'=\frac{2^3\cdot 1\cdot 2}{(1+2x)^3}=\frac{2^3\cdot 2!}{(1+2x)^3}$$

$$f'''(x_0)=f'''(3)=\frac{2^3\cdot 2!}{7^3}$$

…

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot(n-1)!}{(1+2x)^n}$$

$$f^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(3)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot(n-1)!}{7^n}$$

Таким образом:

$$\ln(1+2x)=\ln 7+\frac{\frac{2}{7}}{1!}(x-3)+\frac{-\frac{2^2}{7^2}}{2!}(x-3)^2+\frac{\frac{2^3\cdot 2!}{7^3}}{3!}(x-3)^3+\ldots+\frac{\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot(n-1)!}{7^n}}{n!}(x-3)^n+\ldots=$$

$$=\ln 7+\frac{2}{7}(x-3)-\frac{2^2}{2\cdot 7^2}(x-3)^2+\frac{2^3}{3\cdot 7^3}(x-3)^3-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n\cdot 7^n}(x-3)^n+\ldots$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 12. Обыкновенные дифференциальные уравнения
Практическая работа № 16

Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять вид дифференциального уравнения;
- находить общее решение дифференциального уравнения первого порядка;
- находить частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее некоторым начальным условиям (решать задачу Коши).

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}}=\frac{3dx}{\sqrt{y}}$

б) $(y-1)^2dx+(1-x^3)dy=0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

a) $y^2+x^2y'=xy\cdot y'$ *при* $y(1)=1$

b) $y'\sin x-y\cos x=1$ *при* $x=\frac{\Pi}{2}$, $y=1$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид дифференциального уравнения.
2. Если уравнение является уравнением *с разделяющимися переменными*, то
   1) Приведите данное уравнение к уравнению с разделенными переменными, т. е. произведите разделение переменных, для этого:

      -Производные функции замените её дифференциалами;

      -Сгруппируйте члены с одинаковыми дифференциалами и запишите их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;

      - Поделите или умножьте обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих" дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$

   2) Проинтегрируйте обе части равенства и найдите общее решение.

   3) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0 : y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постоянной C ,а затем C подставляем в общее решение и записываем частное решение.

3. Для решения *однородного дифференциального уравнения*I порядка данное уравнение путем введения новой переменной нужно привести к уравнению с разделяющимися переменными. Заменим $y = z \cdot x, \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$, где Z-новая неизвестная функция от *x*.

Получилось уравнение с разделяющими переменными относительно Z. Решив его, надо Z заменить на $\frac{y}{x}$ и выразить *y*.

4. *Линейное* дифференциальное уравнение I порядка решается путем подстановки

$$y = u \cdot \vartheta; \qquad \frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$$

Дифференциальное уравнение сводится к решению двух дифференциальных уравнений, с разделяющими переменными, сначала относительно u , потом-ϑ, где u и ϑ неизвестные функции от *x*.

Ход работы

1) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6xdx + 3xy^2dx) - (6ydy + 2x^2ydy) = 0$$

Сгруппируем члены с dx и dy

$$3x(2 + y^2)dx - 2y(3 + x^2)dy = 0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3 + x^2} = \frac{2ydy}{2 + y^2}$$

-Интегрируем

$$3\int \frac{xdx}{3 + x^2} = 2\int \frac{ydy}{2 + y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2}\ln(3 + x^2) = \ln(2 + y^2) + \ln c$$

$$\ln(3 + x^2)^{\frac{3}{2}} = \ln(2 + y^2) \cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3 + x^2)^3} = (2 + y^2) \cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}{2+y^2}=c$$

2. Найти частное решение однородного дифференциального уравнение I порядка $y' = \frac{2x+y}{2x}$, если *y=0* при*x=1*

   -Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{2x}$

   -Произведем подстановку $y=zx$; $\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z$

   $x\frac{dz}{dx}+z=\frac{2x+zx}{2x}$; $x\frac{dz}{dx}+z=\frac{x(2+z)}{2x}$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{2+z}{2}-z$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{2-z}{2}$$

   -Разделим переменные $\frac{2}{2-z}dz=\frac{dx}{x}$

   -Проинтегрируем выражение: $2\int\frac{dz}{2-z}=\int\frac{dx}{x}$

   -Решаем данное уравнение $-2\ln|2-z|=\ln|x|+\ln c$

$$\ln\frac{1}{(2-z)^2}=\ln(xc)$$

   -Пропотенцируем выражение $\frac{1}{(2-z)^2}=xc$

   -Выразим z: $(2-z)^2=\frac{1}{xc}$

$$2-z=\frac{1}{\sqrt{xc}}$$

$$z=2-\frac{1}{\sqrt{xc}}$$

   -Заменим $z=\frac{y}{x}$ и выразим $yy=\frac{2x\sqrt{xc}-x}{\sqrt{xc}}$– общее решение

   -Подставим начальные условия *y=0 , x=1*

$0=\frac{2\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}}$; $2\sqrt{c}-1=0$, $2\sqrt{c}=1$, $\sqrt{c}=\frac{1}{2}$,$c=\frac{1}{4}$

   -Подставим *c*в общее решение $y=2(x-\sqrt{x})$ частное решение.

3. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения I порядка $xy'+y=3$, если *y=0, при x=1*

-Приведем уравнение к виду по определению

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{3}{x}$$

-Сделаем замену

$y=u\vartheta$; $\frac{dy}{dx}=u\frac{d\vartheta}{dx}+\vartheta\frac{du}{dx}$

-Сгруппируем члены сϑ, получим

$\vartheta\left(\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}\right)=0$, т.к. $\vartheta\neq 0$ =>$\frac{du}{dx}=-\frac{u}{x}$

-Разделим переменные

$$\frac{du}{u}=-\frac{dx}{x}$$

-Проинтегрируем

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|u| = -\ln|x|$$

-Пропотенцируем

$$u = \frac{1}{x}$$

-Подставим u в оставшееся уравнение

$$\frac{1}{x}\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{3}{x}$$
$$d\vartheta = 3dx$$

-Проинтегрируем

$$\vartheta = 3x + c$$

-Подставим $y = u\vartheta$

$y = \frac{1}{x}(3x + c)$- общее решение

-Подставим начальные условия

$0 = 3 + \text{c}$ =>c=-3

$y = \frac{3}{x}(x - 1)$- частное решение

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 12. Обыкновенные дифференциальные уравнения
Практическая работа № 17

Решение дифференциальных уравнений высших порядков.

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения II порядка и линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка;

- находить общее и частное решение простейших дифференциальных уравнений второго порядка;

- находить общее и частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения II порядка:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$

b) $y'' = x$, $A(1;0); B(1;1)$

2. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения II порядка.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ при } x = 0\,; y = 0;\ \frac{dy}{dx} = 0$$

Порядок выполнения работы:

1) Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $p = \frac{dy}{dx}$

Приводим к уравнению с разделяющими переменными и решаем относительно p.
Подставляем p и решаем уравнение разделением переменных относительно y.
Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно C_1 и C_2. Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, находим частные решения.

2) Однородное дифференциальное уравнение II порядка.

Путем замены $y = e^{kx}$

$$y' = ke^{kx}$$
$$y'' = k^2e^{kx}$$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = o$ из которого находим k_1 и k_2.
Общее решение при D>0 будет:

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$$

При D=0 будет: $y = e^{kx}(c_1 + c_2x)$
При D<0 будет: $y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx)$
При заданных начальных условиях составляем систему линейных уравнений и решаем её относительно C_1 и C_2.

Ход работы:

Решить дифференциальное уравнение 2 порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$$

-Заменим $p = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx};\frac{dp}{dx} = 1 - 2x$$

-Разделим переменные

$$dp = (1 - 2x)dx$$

-Проинтегрируем

$$\int dp = \int (1 - 2x)dx$$
$$p = x - x^2 + c_1$$

-Заменим pна $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + c_1$$

-Разделим переменные

$$dy = (x - x^2 + c_1)dx$$

-Проинтегрируем и получим общее решение

$$\int dy = \int (x - x^2 + c_1)dx$$
$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

II. Решить однородное дифференциальное уравнение II порядка

a) $y'' - 5y' + 6 = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 5k + 6 = 0$, решаем квадратное уравнение, получим $k_1 = 2, k_2 = 3$

-Общее решение будет:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

b) $y'' + 4y' + 4y = o$

-Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k + 2)^2 = 0 \qquad k = -2$$

-Запишем общее решение для *D*=0

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$$

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 6k + 12 = 0$; $D = 36 - 4 \cdot 13 = -16$D<0 =>$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i a = 3; b = 2$

-Запишем общее решение

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.