Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/ С.А. Махновский
08.02.2023г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН.01 Математика

для обучающихся специальности

08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий

Магнитогорск, 2023

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией «Математических и естественнонаучных дисциплин»
Председатель Е.С. Корытникова
Протокол № 6 от 25.01.2023

Методической комиссией МпК
Протокол № 4 от 08.02.2023

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК Ю.Н.Садчикова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01«Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 08.02.09 «Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий» и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике, в том числе прикладного характера), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен ***уметь***:

У1 находить производную элементарной функции;
У2 выполнять действия над комплексными числами;
У3 вычислять погрешности результатов действия над приближенными числами;
У4 решать простейшие уравнения и системы уравнений;
У5 задавать множества и выполнять операции над ними;
У6 находить вероятность в простейших задачах;
У7 выполнять арифметические операции с векторами;
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
Уо01.03 определять этапы решения задачи;
Уо01.08 реализовать составленный план;
Уо02.03 планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию;
Уо02.06 оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач;

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 2.4 Участвовать в проектировании силового и осветительного электрооборудования.

ПК 3.4 Участвовать в проектировании электрических сетей

А также формированию общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

– обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

– формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

– выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 1
Вычисление пределов функций. Раскрытие неопределённостей

Цель: Научиться вычислять пределы функций. Научиться находить точки разрыва функций, определять их род, находить асимптоты графиков функций.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание 1:
Вычислить пределы функций:
1. $\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}$
5. $\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Задание 2:
Исследовать функции на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род. Найти асимптоты функций.
1) $y = \frac{2x^2+3}{x^2-9}$;
2) $y = \frac{2x^2-4x-30}{x^2-25}$.

Порядок выполнения работы:
1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:
1) ***Точками разрыва функции*** называются точки, в которых нарушается условие непрерывности функции.
2) Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.
3) Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т е
4) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$. При этом: если $A_1 = A_2$,то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва; если$A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва.
5) Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.
6) ***Асимптотой графика функции***$y = f(x)$называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки$(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.
7) Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

8) ***Замечание.*** Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

9) Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ равно b.

10) **Замечание.** График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

11) Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции , если $\lim_{x\to\infty}|f(x) - kx - b| = 0$

12) Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Найти предел функции:

1) $\lim_{x\to2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$$
$$= 2\left(\lim_{x\to2} x\right)^3 - 10\left(\lim_{x\to2} x\right)^2 - 4\lim_{x\to2} x + 5 = 2\cdot8 - 10\cdot4 - 4\cdot2 + 5 = -27$$

2) $\lim_{x\to3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке $x = 3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию.

Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 11x + 6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3(x-3)(x - \frac{2}{3})$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x - 3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)(x + \frac{1}{2})$$

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to3}\frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x\to3}\frac{3(x-3)(x-\frac{2}{3})}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to3}\frac{3(x-\frac{2}{3})}{2(x+\frac{1}{2})}$$
$$= \lim_{x\to3}\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{3\lim_{x\to3} x - 2}{2\lim_{x\to3} x + 1} = \frac{3\cdot3-2}{2\cdot3+1} = \frac{7}{7} = 1$$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞, то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} - \frac{6x}{x^4} + \frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} - \frac{8x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{6 - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6} = 0$$

4) $\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Введем новую переменную: $x=-3y; x\to\infty; y\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{5\cdot(-3y)}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y}=e^{-15}=\frac{1}{e^{15}}$$

Исследовать функцию на непрерывность. Найти асимптоты функции.

$y=\frac{x^2}{2x-2}$.

Область определения функции $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

Точка $x=1$ является точкой разрыва 2 рода, т.к.

$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{2x-2}=\left[\frac{1}{0}\right]=-\infty \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{2x-2}=\left[\frac{1}{0}\right]=+\infty$

Прямая $x=1-$ вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 2
Дифференцирование сложных функций

Цель работы: научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
У1 находить производную элементарной функции;
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.
Задание:
Найти производные функций
1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2 x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:
1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы
Найти производные функций:
1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x)$$
$$= -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u'$, $(cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x)$$
$$\cdot (2x)' = \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{8x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)\,ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)\,ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент
$u = 1 - e^{2x}$
Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})'$$
$$= -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x)$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 3
Применение производной к исследованию функций

Цель работы: научиться исследовать функции с помощью производной и строить графики.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
У1 находить производную элементарной функции;
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
Уо01.03 определять этапы решения задачи;
Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.
Задание:
Исследовать функцию и построить ее график:
1) $f(x) = x^3 - 12x$;
2) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$.

Порядок выполнения работы:
1. Запишите функцию.
2. Используя общую схему, исследуйте функцию.
3. По результатам исследования постройте график функции

Ход работы:
1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это не вызывает затруднения) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции .
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.

6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Построить график функции.

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки.
3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
4) Записать интервалы, на которых функция возрастает $f'(x) > 0$ и убывает $f'(x) < 0$.
5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1) Найти вторую производную.
2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
4) Если $f''(x) > 0$, то график выпуклый вниз. Если $f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх.
5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 4
Применение производной к решению практических задач

Цель работы: научиться применять производную функции при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У1 находить производную элементарной функции;
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
Уо01.03 определять этапы решения задачи;
Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке :а)$[-1; 1]$;б) $[0; 3]$.

2. Имеется проволока длиной a метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее .

Ход работы:

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на промежутке :$a)[-2; -0,5]$;б) $[1;3]$.

Решение. Находим критические точки функции.

$$f^{/}(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 4)^{|} = -x^2 - 6x = -6x(x+1);$$

$f^{/}(x) = 0$; $-6x(x+1)=0$; $x = 0$ и $x = -1$. получили две критические точки: $x = 0$ и $x = -1$.

a) В промежутке $[-2; -0,5]$ лежит одна из критических точек:x= -1.

Так как $f(-2) = 8, f(-1) = 3. f(-0,5) = 3,5,$ то наименьшее значение функция $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ достигает в точке $x = -1$ и равно 3, а наибольшее - в точке $x = -2$ и равно 8.. Кратко это можно записать так: $\min_{[-2;-0,5]} f(x) = f(-1) = 3.$ $\max_{[-2;-0,5]} f(x)=f(-2) = 8.$

б) Отрезку $[1;3]$ не принадлежит ни одна из критических точек, поэтому найдём значения функции на концах отрезка: $f(1) = -2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 4 = -1. [1;3]; f(3) = -2\cdot 3^3 - 3\cdot 3^2 + 4 = -77.$. Кратко это можно записать так: $\min_{[\ \ 1;3]} f(x) = f(3) = -7;$. $\max_{[1;3]} f(x)=f(1) = -1.$

2 Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найдите эти слагаемые.

Решение. Пусть заданное число представлено в виде суммы двух слагаемых x и y,т.е.86= $x + y$. Выразим второе слагаемое через x:
y=86-x.Запишем произведение этих чисел в виде функции от x:$f(x) = x\cdot(86-x)$ Найдём значение x, при котором функция
$f(x) = x\cdot(86-x)$ достигает максимума..Найдём производную$f^{/}(x)$ и приравняем её нулю. $f^{/}(x)$ $=(x\cdot(86-x))^{/} = (86x - x^2)^{/}=86 - 2x = 2(43-x),$
$2(43-x) = 0, x = 43.$

Определим второе слагаемое: $y = 86 - x = 86 - 43 = 43.$

Ответ: $x = 43$; $y = 43.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 5

Методы вычисления неопределенных интегралов. Применение математических преобразований

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Найти неопределённый интеграл, использую таблицу интегралов.

$\int (x^3+2x^2-5)dx$ **1.1**	**1.6** $\int (4x^2+x^5+3)dx$	**1.11** $\int (6x^5-2x^3+x-1)dx$
1.2 $\int (\frac{5}{3}x^4-x^6+4x-8)dx$	**1.7** $\int (x^3+\frac{3}{2}x^2-x^4)dx$	**1.12** $\int (\frac{16}{3}x^3+2x^2+x)dx$
1.3 $\int \sqrt{x^5}\,dx$	**1.8** $\int \sqrt{x^7}\,dx$	**1.13** $\int \sqrt{x^6}\,dx$
$\int (\sqrt[3]{x^4}+x^6)dx$ **1.4**	**1.9** $\int (\sqrt[4]{x^5}+\frac{1}{2}x^3)dx$	**1.14** $\int (\sqrt[3]{x^4}-5x^3)dx$
$\int (x^4+\sqrt[3]{x^2}+3x^2)dx$ **1.5**	**1.10** $\int (\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x^3}+9x^2)dx$	**1.15** $\int (4x^7-\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^6})dx$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

$\int f(x)dx = F(x)+C$, $где$ $C = const$

$\int$ – значок интеграла.

$f(x)$ – подынтегральная функция.

dx – знак дифференциала.

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

$F(x)$ – первообразная функции.

$F(x)+C$ – множество первообразных функций.

C - константа.

Решить интеграл – это значит найти определенную функцию $F(x)+C$, пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.**

*Непосредственное интегрирование – это нахождение неопределенных интегралов с использованием таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла***.**

1) $\int dx = x + C$;
2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$;
3) $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$;
4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C$;
5) $\int e^x dx = e^x + C; \int e^{kx+b}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx+b} + C$
6) $\int sin\,x\,dx = -cos\,x + C; \int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b)$
7) $\int cos\,x\,dx = sin\,x + C; \int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b)$
8) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$;
9) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$;

Метод непосредственного интегрирования

Задача нахождения неопределенных интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов.

Правило интегрирования суммы (разности)

$$\int (u \pm v \pm w)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \pm \int w\,dx.$$

Пример

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx$$

Решение:

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx \overset{(1)}{=}$$

$$= \int xdx + \int \sqrt{x}dx - \int 3x^5 dx + \int \frac{2dx}{x^3} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int tg5dx \overset{(2)}{=}$$

$$= \int xdx + \int x^{\frac{1}{2}}dx - 3\int x^5 dx + 2\int x^{-3}dx - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + tg5\int dx \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}} - 3\cdot\frac{1}{6}x^6 + 2\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot x^{-2} - (-ctgx) + tg5\cdot x + C \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + ctgx + tg5\cdot x + C, \text{ где } C = const$$

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 6
Методы вычисления неопределенных интегралов. Метод замены

Цель работы:
Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
Уо01.03 определять этапы решения задачи;
Уо01.08 реализовать составленный план;
Материальное обеспечение:
– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
– комплект дидактического раздаточного материала.
Задание:
Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

1. Найти неопределённый интеграл, использую таблицу интегралов.

2.1 $\int(4cosx+2sinx)dx$	**2.6** $\int\left(\frac{1}{x}+3e^x\right)dx$	**2.11** $\int(\frac{4}{cos^2x}-2e^x)dx$
2.2 $\int(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{sin^2x})dx$	**2.7** $\int(\frac{2}{x^5}-3cosx)dx$	**2.12** $\int\left(2e^x-\frac{8}{x}\right)dx$
2.3 $\int\frac{dx}{1+sin^2x}$	**2.8** $\int\sqrt{(1-cos2x)}\ dx$	**2.13** $\int tg^2xdx$
2.4 $\int\frac{x^2-4}{x+2}dx$	**2.9** $\int\frac{2x^2+3x-2}{x+2}dx$	**2.14** $\int\frac{x^2+2x-15}{x-3}dx$
2.5 $\int\frac{3x^2+x^7}{x^2}dx$	**2.10** $\int\frac{x^2+7x+12}{x(x+3)}dx$	**2.15** $\int\frac{x-1}{x^2-x}dx$

1. Найти неопределённый интеграл методом подстановки.

3.1 $\int(4x-2)^3dx$	**3.6** $\int(8x+1)^5dx$	**3.11** $\int(3-5x)^6dx$
3.2 $\int\frac{5}{2x-7}dx$	**3.7** $\int\frac{4}{2+7x}dx$	**3.12** $\int\frac{2}{4x-8}dx$
3.3 $\int\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)dx$	**3.8** $\int3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$	**3.13** $\int4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$

3.4 $\int e^{6x-9}dx$	3.9 $\int 2e^{4-2x}\,dx$	3.14 $\int 5e^{10x+2}dx$
3.5 $\int \frac{2}{cos^2(4x+1)}dx$	3.10 $\int \frac{6}{sin^2(2x-1)}dx$	3.15 $\int \frac{3}{cos^2(9x-2)}dx$

2. Найти неопределённый интеграл методом подстановки.

4.1 $\int \frac{2xdx}{6+x^2}$ $z=6+x^2$	4.4 $\int \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$ $z=lnx$	4.7 $\int tgxdx$
4.2 $\int \frac{e^x dx}{2+3e^x}$ $z=2+3e^x$	4.5 $\int \frac{x^2-x}{(x-3)^2}dx$ $z=x-3$	4.8 $\int x\sqrt{2-x}\,dx$ $z^2=2-x$
4.3 $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$ $z=e^x-1$	4.6 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ $x=\frac{1}{z}$	4.9 $\int \frac{cosxdx}{\sqrt{1-cos2x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

Метод подстановки (интегрирование заменой переменной)

Алгоритм вычисления неопределенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверять дифференцированием.

Пример типового расчета:

$\int(2x^3+1)^4 xdx$

Введем подстановку:

$t=2x^3+1.$

Дифференцируя это равенство, имеем: $dt=6x^2dx.$

Выразив отсюда x^2dx, получим: $x^2dx=\frac{dt}{6}$. Подставив в данный интеграл вместо $2x^3+1$ и x^2dx их выражения, получим:

$$\int(2x^3+1)^4 x^2dx=\int t^4\cdot\frac{dt}{6}=\frac{1}{6}\int t^4\,dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{4+1}}{4+1}+C=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{t^5}{30}+C=\frac{(2x^3+1)^5}{30}+C$$

.

3. Метод интегрирования по частям

$$\int u du = uv - \int v du$$

Если подынтегральная функция представляет собой произведение либо тригонометрической функции на алгебраическую, либо показательной на алгебраическую, то за u следует принимать алгебраическую функцию.

Пример 1.

Вычислить интеграл:

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

Решение:

Здесь подынтегральное выражение содержит логарифм. Тогда

$$du = \frac{d \ln x}{dx} dx = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x},$$

$$v = \int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} = \frac{1}{3} x^3.$$

$$I = \int x^2 \ln x \, dx = \int \ln x \cdot x^2 \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = \ln x \cdot \frac{1}{3} x^3 - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx.$$

Вычисляем оставшийся интеграл:

$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} = \frac{1}{3} x^3.$$

Тогда

$$I = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

Пример 2. $\int x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = u'(x) \cdot dx = x' dx = dx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| = x \cdot \sin x - \int \sin x dx =$

$= x \cdot \sin x - (-\cos x) + C.$

Пример 3. $\int (3x-2) e^{2x-5} dx = \left| \begin{matrix} u = 3x-2 & du = u'(x) \cdot dx = 3dx \\ dv = e^{2x-5} & v = \int e^{2x-5} dx = \frac{1}{2} e^{2x-5} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}(3x-2) e^{2x-5} - \frac{3}{2} \int e^{2x-5} dx$

$= \frac{1}{2}(3x-2) e^{2x-5} - \frac{3 e^{2x-5}}{4} + C.$

Пример 4. $\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = u'(x) \cdot dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C.$

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 7

Применение формулы Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

1. **Вычислить определённый интеграл.**

$\int_{-1}^{2} 25x^4 dx$	**1.6** $\int_{-1}^{2} 8x^3 dx$	**1.11** $\int_{-1}^{2} 64x^7 dx$
$\int_{0}^{1} (2x^2 + x - 1) dx$	**1.7** $\int_{0}^{2} (x^3 - 1) dx$	**1.12** $\int_{0}^{4} (3 + x^3) dx$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2cosx dx$	**1.8** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$	**1.13** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} sinx dx$
$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$	**1.9** $\int_{0}^{4} \frac{dx}{16 + x^2}$	**1.14** $\int_{1}^{2} \frac{2dx}{x}$
$\int_{1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$	**1.10** $\int_{0}^{\pi} cos\frac{x}{2} dx$	**1.15** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin2x dx$

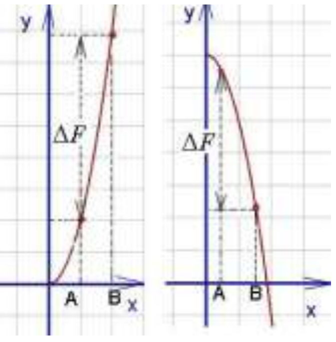
Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

Определённым интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись

$$\int_a^b f(x)dx.$$



Как видно на графиках внизу (приращение первообразной функции обозначено ΔF), **определённый интеграл может быть как положительным, так и отрицательным числом** (Вычисляется как разность между значением первообразной в верхнем пределе и её же значением в нижнем пределе, т. е. как $F(b) - F(a)$).

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования.
Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница.
Разность $F(b) – F(a)$ кратко записывают так:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Поэтому формулу Ньютона-Лейбница будем записывать и так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Докажем, что определённый интеграл не зависит от того, какая первообразная подынтегральной функции взята при его вычислении. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ – произвольные первообразные подынтегральной функции. Так как это первообразные одной и той же функции, то они отличаются на постоянное слагаемое: $\Phi(x) = F(x) + C$. Поэтому

$$\Phi(b) - \Phi(a) =$$
$$= [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$

Тем самым установлено, что на отрезке $[a, b]$ приращения всех первообразных функции $f(x)$ совпадают.
Таким образом, для вычисления определённого интеграла необходимо найти любую первообразную подынтегральной функции, т.е. сначала следует найти неопределённый интеграл. Постоянная C из последующих вычислений исключается. Затем применяется формула Ньютона-Лейбница: в первообразную функцию подставляется значение верхнего предела b, далее - значение нижнего предела a и вычисляется разность $F(b)$ - $F(a)$. Полученное число и будет определённым интегралом..
При $a = b$ по определению принимается

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Пример 1**.** Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\ dx.$$

<u>Решение</u>: сначала найдём неопределённый интеграл:

$$\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{1/3}dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к первообразной

$$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$$

(при $C = 0$), получим

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\ dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_0^8 = \frac{3}{4} \bullet 8\sqrt[3]{8} - 0 = 12.$$

Однако при вычислении определённого интеграла лучше не находить отдельно первообразную, а сразу записывать интеграл в виде (39).
Пример 2**.** Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 e^{2x}dx.$$

<u>Решение</u>: используя формулу

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,$$

получим

$$\int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1).$$

Свойства определённого интеграла

1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю*, т.е.

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0.$$

2. *Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования*, т.е.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

4. *Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\,dx \right] =$$

$$= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b \varphi(x)\ dx - \int_a^b \psi(x)\ dx.$$

5. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям*, т.е. если

$c \in [a,b]$,

то

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

6. *При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак*, т.е.

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Пример 3**.** Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx.$$

<u>Решение</u> : используя теоремы 4 и 3, а при нахождении первообразных – табличные интегралы (7) и (6), получим

$$\int_1^2\left(\frac{4}{x}-5x^4+2\sqrt{x}\right)dx=$$
$$=4\int_1^2\frac{dx}{x}-5\int_1^2 x^4dx+2\int_1^2\sqrt{x}\ dx=$$
$$=4\ln|x|\Big|_1^2-5\frac{x^5}{5}\Big|_1^2+2\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2=$$
$$=4(\ln 2-\ln 1)-\left(2^5-1^5\right)+\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\sqrt{1}\right)=$$
$$=4\ln 2+\frac{8}{3}\sqrt{2}-32\frac{1}{3}.$$

Форма представления результата:
Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 8
Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел

Цель: формирование умений применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
Уо01.03 определять этапы решения задачи;
Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:
   a) $y=x^2+1,\ y=0,\ x=1, x=4$;
   b) $y=\ln x, y=0,\ x=1, x=e$;
   c) $y^2=x^3; x=4$.

2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x}; y=0; x=4$ (ось вращения ось Ох).

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

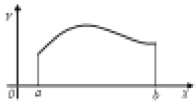


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

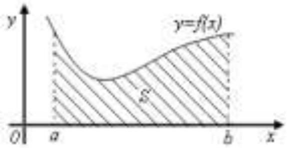


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь Sпод кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

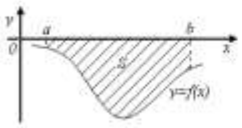


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь Sфигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

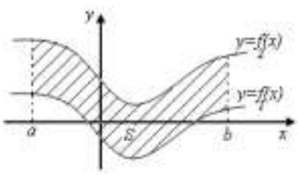
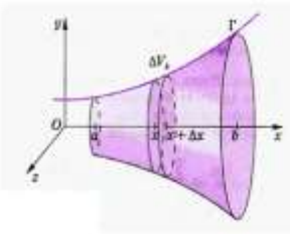


Рис. 4

Вычисление объемов тел вращения.

При помощи определенного интеграла можно вычислить объем того или иного тела, в частности, тела вращения.

Телом вращения называется тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг ее основания (рис. 1, 2)



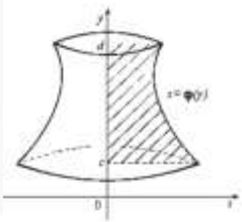


Рис.1 рис.2

Объем тела вращения вычисляется по одной из формул:

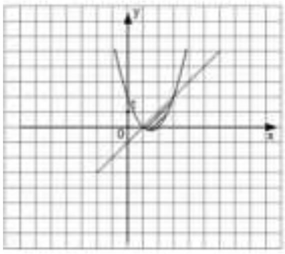
1. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$, если вращение криволинейной трапеции**вокруг оси OX.**

2. $V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 dy$, если вращение криволинейной трапеции**вокруг оси ОУ.**

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \ge f_2(x)$ на данном отрезке,находится по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.



Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования. Значит, площадь фигуры равна:

$$S = \int_1^3 ((x-1) - (x^2 - 3x + 2))dx = \int_1^3 (4x - x^2 - 3)dx =$$

$$= (2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x)\Big|_1^3 = 18 - 9 - 9 - (2 - \frac{1}{3} - 3) =$$

$$= -2 + \frac{1}{3} + 3 = 1\frac{1}{3}.$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Пример 2. Найти объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 64, y = -5, y = 5, x = 0.$

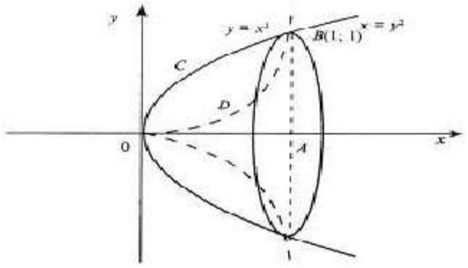
Решение.

$$V = \pi \int_{-5}^{5} (64 - y^2)dy = \pi \left(64y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{5} = 556\frac{2}{3}\pi \approx 1163 см^3$$

Ответ : 1163 cm^3.

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением лепестка, вокруг оси абсцисс $y = x^2$, $y^2 = x$.

Решение .



Построим графики функции. $y = x^2$, $y^2 = x$. График $y^2 = x$ преобразуем к виду $y = \sqrt{x}$.
Имеем $V = V_1 - V_2$ Вычислим объем каждой функции

$$V_1 = \pi\int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V_2 = \pi\int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = 0{,}3\pi$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 9
Применение интегралов в физике

Цель: научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
Уо01.03 определять этапы решения задачи;
Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.

2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.

3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?

4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.

5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е . $v(t) = \frac{dS}{dt}$.

Отсюда следует, что dS = v(t)dt. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$

Вычисление работы с помощью определённого интеграла.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка М движется по прямой в направлении оси OX. Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки М из положения $x = x_1$ в положение $x = x_2$.

1) Если сила постоянна $f(x) = C$, то работа выражается следующим образом $A = C(x_2 - x_1)$.

2) Если сила переменная величина, то $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила Р давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле:

$P = 9{,}81\gamma hS$ (4), где γ – плотность жидкости.

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx \ (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то a=0 и формула (5) примет вид

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx \ (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx = 9{,}81\gamma y \int_a^b x\,dx = 9{,}81\gamma y \frac{x^2}{2} \int_a^b = 9{,}81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1.Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела v(t) = 10t + 2 (м/с).

Решение: Если v(t)=10t+2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2)\,dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (\text{м}).$$

Ответ. S = 88(м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно,F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12,5 \ (\text{Дж}).$$

Пример 3. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/$м^3$. Следовательно,

$$P = 9810\int_a^b xy\,dx = 9810\int_a^b x\,dx = 9810\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5} = 9810\,\frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430 \ (H).$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 10

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения I порядка с разделяющими переменными. Научиться находить общие и частные решения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$

б) $(y-1)^2 dx + (1-x^3)dy = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$dy = (3x^2 - 2x)dx$, *если y=4 при x=*

Порядок выполнения работы:

1) Привести данное уравнение к уравнению с разделяющими переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:

а) Производные функции заменить её дифференциалами;

б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;

в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих" дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$

2) Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

3) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0; y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постояннойС ,а затем С подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

1) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6xdx + 3xy^2dx) - (6ydy + 2x^2ydy) = 0$$

Сгруппируем члены с *dx* и *dy*

$$3x(2+y^2)dx - 2y(3+x^2)dy = 0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3+x^2} = \frac{2ydy}{2+y^2}$$

-Интегрируем

$$3\int \frac{xdx}{3+x^2} = 2\int \frac{ydy}{2+y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2}\ln(3+x^2) = \ln(2+y^2) + \ln c$$

$$\ln(3+x^2)^{\frac{3}{2}} = \ln(2+y^2)\cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3+x^2)^3} = (2+y^2)\cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}{2+y^2} = c$$

2) Найти частные решение дифференциальных уравнений

$2(y-3)dx - dy = 0$ *при x=0 , y=4*

-Разделим переменные

$dy = 2(y-3)dx$

$\frac{dy}{y-3} = 2dx$

-Проинтегрируем обе части уравнения

$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$

$\ln(y-3) = 2x + \ln c$

-По определению логарифма $2x = \ln e^{2x}$

$\ln(y-3) = \ln(e^{2x} \cdot c)$

-Запишем общее решение

$y = e^{2x} \cdot c + 3$

-Подставим в это уравнение начальные условия *x=0 , y=4*

$4 = e^0 \cdot c + 3$=>*c=1*

-Запишем частное решение

$y = e^{2x} + 3$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 11
Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы:
Научиться определять вид дифференциальных уравнений, находить общее и частное решение линейных дифференциальных уравнений I порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти частное решение дифференциального уравнения

   a) $y^2 + x^2y' = xy \cdot y'$ *при* $y(1) = 1$

   b) $y' \sin x - y \cos x = 1$ *при* $x\frac{\Pi}{2}$*, y=1*

Порядок выполнения работы:

1. Линейное дифференциальное уравнение I порядка решается путем подстановки

$y = u \cdot \vartheta$; $\frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$

Дифференциальное уравнение сводится к решению двух дифференциальных уравнений, с разделяющими переменными, сначала относительно u , потом-ϑ, где u и ϑ неизвестные функции от *x*.

Ход работы:

1) Найти частное решение линейного дифференциального уравнения I порядка

$xy' + y = 3$, если *y=0, при x=1*

-Приведем уравнение к виду по определению

$y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$

-Сделаем замену

$y = u\vartheta$; $\frac{dy}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx}$

-Сгруппируем члены сϑ, получим

$\vartheta\left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right) = 0$, т.к. $\vartheta \neq 0$ =>$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$

-Разделим переменные

$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$

-Проинтегрируем

$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|u| = -\ln|x|$

-Пропотенцируем

$u = \frac{1}{x}$

-Подставим *u* в оставшееся уравнение

$\frac{1}{x}\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{3}{x}$

$d\vartheta = 3dx$

-Проинтегрируем

$\vartheta = 3x + c$

-Подставим $y = u\vartheta$

$y = \frac{1}{x}(3x + c)$- общее решение

-Подставим начальные условия

$0 = 3 + c$ =>c=-3

$y = \frac{3}{x}(x - 1)$- частное решение

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 12
Приближенные значения величин. Абсолютная и относительная погрешности. Правила приближенных вычислений

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У3 вычислять погрешности результатов действия над приближенными числами;
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

1. Модуль разности между точным числом *a* и его приближенным значением *x* называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа *x* и обозначается Δx.

Имеем $x = 9,\ y = 9$.
$\Delta x = |9,2 - 9| = 0,2.$
$\Delta y = |8,9 - 9| = 0,1.$

2. При измерении линейкой длины и ширины фанерного листа были получены размеры a=120 см. и b=60 см. Известно, что погрешность измерения линейкой равна 2 см.

Была найдена площадь листа S=120·60=7200 кв.см. Полученный результат имеет относительную погрешность равную …

3) Пусть $a=3,8$ и $b=6,2$.
Необходимо найти значение $a+4b$.
4) Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления.
Получили $3,8 + 4\cdot 6,2 \approx 4 - 4\cdot 6 = -20.$
Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …
5) Вычислили значение функции $f(x;y) = x^3 y$ при $x = 2$ и $y = 5,$ получили результат 40.
6) Известны относительные погрешности чисел 2 и 5: $\delta_x = 0,01;\ \delta_y = 0,04.$
Тогда относительная погрешность полученного результата равна …
7) Форма записи рациональной дроби $\frac{3}{14}$ в виде бесконечной десятичной дроби имеет вид …
Поделить числитель дроби на знаменатель:

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

Действительное число - любое положительное, отрицательное число или нуль. Посредством действительных чисел выражаются результаты измерения всех физических величин.

Результат измерений подсчетов и вычисления являются числами. Числа полученные в результате измерения лишь приблизительны с некоторой точностью характеризуют искомые величины.

Погрешностью называют разность точного и приближенного знач величины.

Абсолютная погрешность - это разность между измеренным и истинным значениями измеряемой величины. Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность — это отношение абсолютной погрешности измерения к истинному (действительному) значению измеряемой величины (она обычно выражается в процентах).

Правила вычислений

1. **При сложении и вычитании** приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных.
2. **При умножении** следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.
3. **При возведении в квадрат** или куб следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.
4. **При умножении** следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.
5. **При вычислении** сложных выражений следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий.

Кроме того, при обработке результатов используются ***правила нахождения погрешности*** суммы, разности, произведения и частного.

Правило 1. Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей отдельных слагаемых, но при значительном числе погрешностей слагаемых обычно происходит взаимная компенсация погрешностей, поэтому истинная погрешность суммы лишь в исключительных случаях совпадает с предельной погрешностью или близка к ней.

- ***Правило 2.*** Предельная абсолютная погрешность разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого или вычитаемого.
- ***Правило 3.*** Предельная относительная погрешность суммы (но не разности) лежит между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых.

Если все слагаемые имеют одну и ту же предельную относительную погрешность, то и сумма имеет ту же предельную относительную погрешность. Иными словами, в этом случае точность суммы (в процентном выражении) не уступает точности слагаемых.

В противоположность сумме разность приближенных чисел может быть менее точной, чем уменьшаемое и вычитаемое. Потеря точности особенно велика в том случае, когда уменьшаемое и вычитаемое мало отличаются друг от друга.

- ***Правило 4.*** Предельная относительная погрешность произведения приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей: $\delta=\delta_1+\delta_2$, или, точнее, $\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2$ где δ – относительная погрешность произведения, $\delta_1\delta_2$ - относительные погрешности сомножителей.
- ***Правило 5.*** Предельная относительная погрешность частного приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя. Точная величина предельной относительной погрешности всегда превышает приближенную. Процент превышения примерно равен предельно относительной погрешности делителя.

1. Найти сумму, разность, произведение и частное приближенных чисел и границы абсолютной и относительной погрешностей результата:

1) $a_1 = 25,74 \pm 0,2$; $a_2 = 96,42 \pm 0,3$.

2) $a_1 = 37,375 \pm 0,03$; $a_2 = 3,042 \pm 0,004$.

3) $a_1 = 879,03 \pm 0,1$; $a_a = 653,84 \pm 0,4$.

2. Выполнить действия, округляя промежуточные результаты до четырех цифр, и сравнить результаты: (0,3644 + 423)-0,125 и

0,364-0,125 4 0,423-0,125.

3. При вычислении значения выражения $z = 8x - 2y$ данные в условии задачи значения $x = 50,4$ и $y = 100,3$ округлили до целых и получили $z = 8 \cdot 50 - 2 \cdot 100 = 200.$ Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

<u>Решение</u>: модуль разности между точным числом и его приближенным значением называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа. Значит, абсолютная погрешность числа 50 равна $|50,4 - 50| = 0,4$ и абсолютная погрешность числа 100 равна $|100,3 - 100| = 0,3.$ Абсолютная погрешность

суммы и разности приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей. Тогда абсолютная погрешность полученного числа 200 будет равна $8 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}8$.

4. Известно, что ребра прямоугольного параллелепипеда равны 56 см, 19 см и 122 см. Для упрощения вычислений эти числа округлили до 50 см, 20 см и 120 см соответственно. Нашли объем $V = 60 \cdot 20 \cdot 120 = 144000$ (куб. см.). Полученный результат имеет относительную погрешность, равную …

Решение: относительная погрешность приближенного положительного числа равна отношению абсолютной погрешности числа к точному значению этого числа. Так как точное значение числа, как правило, неизвестно, то под относительной погрешностью понимают отношение абсолютной погрешности числа к его приближенному значению.

Тогда относительные погрешности чисел 50, 20 и 120 равны $\delta_1 = \frac{\Delta_1}{50} = \frac{|56-50|}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$,

$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{20} = \frac{|19-20|}{20} = \frac{1}{20}$,

$\delta_3 = \frac{\Delta_3}{120} = \frac{|122-120|}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$, соответственно.

Относительная погрешность произведения приближенных чисел равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

Значит, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$.

5. Пусть $a=3{,}8$ и $b=6{,}2$. Необходимо найти значение $a+4b$. Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления. Получили $3{,}8 + 4 \cdot 6{,}2 \approx 4 - 4 \cdot 6 = -20$.

Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

Решение: модуль разности между точным числом a и его приближенным значением x называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа x и обозначается Δx.

Имеем $x = 4,\ y = 6$.

$\Delta x = |3{,}8 - 4| = 0{,}2$.

$\Delta y = |6{,}2 - 6| = 0{,}2$.

Абсолютная погрешность полученного результата можно найти по формуле $\Delta(x - 4y) = \Delta x + 4 \cdot \Delta y$.

Получим: $\Delta(x - 4y) = 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 = 1$.

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 13

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
У2 выполнять действия над комплексными числами;
Уо02.03 планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию;

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

1. Даны комплексные числа : $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7,2;7,2)$, $z_3=(2;6)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:
1) $z_1+ z_2$;
2) $z_2 - z_3$;
3) z_1 / z_3;
4) $z_2 * z_3$;
5) z_1^5.
3. Вычислить:
$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$
2. Выполните действия н

Ход работы:

Форма представления результата:
1.Даны комплексные числа : $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:
Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то
$z_1 = 7 + i$; $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$; $z_3 = 4 - 3i$
2.Выполнить действия в алгебраической форме:
1) $z_1+ z_2$;
2) $z_2 - z_3$;
3) z_1 / z_3;
4) $z_2 \cdot z_3$;
5) z_1^5.

Решение:
1) $z_1+ z_2=(7-1{,}5)+(1+1{,}5)i=5{,}5+2{,}5i$;)
2) $z_1- z_3=(7-4)+(1+3)i=3+4i$;
3) $\frac{z_1}{z_3}=\frac{7+i}{4-3i}=\frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{28+21i+4i+3i^2}{16-(3i)^2}=\frac{28+25i-3}{16+9}=\frac{25+25i}{25}=1+i$

4) $z_2 \cdot z_3 = (-1{,}5+1{,}5i)(4-3i) = -6+4{,}5i+6i-4{,}5i^2 = -6+10{,}5i+4{,}5 = -2{,}5+10{,}5i$;

5) $z_1^5 = (7+i)^5 = ((7+i)^2)^2(7+i) = (49+14i+i^2)^2(7+i) = (48+14i)^2(7+i) =$

$(2304+1344i+196i^2)(7+i) =$

ад комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

$= (2108+1344i)(7+i) = 14756+2108i+9408i+1344i^2 = 13412+11516i$

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$$

Решение:

$\dfrac{1+3i}{i-3} + \dfrac{4-5i}{1+3i} - i^8$=-2,1-2,8i

1) $\dfrac{1+3i}{i-3} = \dfrac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \dfrac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2-i^2} = \dfrac{-10i}{10} = -i$;

2) $\dfrac{4-5i}{1+3i} = \dfrac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2} = \dfrac{-11-17i}{10} = -1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$

4) $-i + (-1{,}1-1{,}7i) - 1 = -i - 1{,}1 - 1{,}7i - 1 = -2{,}1 - 2{,}8i$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 14

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической и показательной формах.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
У2 выполнять действия над комплексными числами;
Уо02.03 планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию **Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, конспекты лекций
Задание:
4. Даны комплексные числа в тригонометрической форме:
$z_1 = 5\left(cos\frac{\pi}{9} + isin\frac{\pi}{9}\right)$ и $z_2 = 8\left(cos\frac{3\pi}{5} + i\ sin\frac{3\pi}{5}\right)$. Вычислите: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$; z_1^3; $\sqrt[8]{z_2}$
5. Выполните действия и запишите результат в показательной форме:

a) $(3 \cdot (cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}))^2$b) $\frac{24(cos75^0 + isin\ 75^0)}{3(cos\,30^0 + isin\ 30^0)}$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите заданные в тригонометрической форме числа.
2. Используя конспект, выясните, как выполняются действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
3. Выполните заданные действия.

Ход работы
Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде: $z = r \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$.
При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$
$z^n = r^n(cosn\varphi + isin\ n\varphi)$
Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме z=r·(cos φ+isinφ) используется формула :
$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot (cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.1. Матрицы и определители

Практическое занятие №15
Действия с матрицами

Цель работы: Научиться выполнять действия над матрицами.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
Уо01.03 определять этапы решения задачи;
Уо01.08 реализовать составленный план;
Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.
Задание:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

Порядок выполнения работы:
1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами:

1.Сложение.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \cdots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в *i*-той строке в *k*-том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов *i*-той строки первой матрицы на соответствующие элементы *k*-того столбца второй.

1.Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а**)** Найдем A^2, умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б**)** Найдем матрицу *3A*, умножив все элементы матрицы *A* на 3.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в**)** Найдем произведение 3АВ

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу С, складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2.Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимообратными.

3.Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите: А+В; 2А; АВ; ВА.

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 16 & -16 & -4 \\ 14 & -14 & -8 \end{pmatrix};$$

$c_{11} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 3;$

$c_{12} = -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2;$

$c_{13} = -3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 11;$

$c_{21} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 16;$

$c_{22} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) = -16;$

$c_{23} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -4;$

$c_{31} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 14;$

$c_{32} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) = -14;$

$c_{33} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -8.$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 & 2 \\ -11 & -10 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Матрицы и определители

Практическая занятие № 16
Вычисление определителей второго и третьего порядков

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

Порядок выполнения работы:

1 Запишите определитель, определите какого он порядка.

2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Ход работы:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$

$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7)$

$= 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 17

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У4 решать простейшие уравнения и системы уравнений;

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+3y-5z=-2 \\ x+y+2z=3 \\ 2x-y+7z=27 \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1.Запишите систему уравнений.

2.Запишите и вычислите определитель системы.

3.Вычислите определители каждой неизвестной.

4.Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера:$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$;$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0; \\ 2x_1-x_2+4x_3=5; \\ 3x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=10\neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0-15+40-15+10-0=20$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}=-5-30+0+45-0-20=-10$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-5+0+30-0-20-5=0$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{10}=2;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-10}{10}=-1;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{0}{10}=0$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 18
Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У4 решать простейшие уравнения и системы уравнений;

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x-2y+z=10 \\ x+5y-2z=-15 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4=6, \\ x_2+x_3+3x_4=16, \\ x_1-2x_2-x_4=-6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3 \qquad =6 \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;

-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;

-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Рассмотрим пример:

1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1\,; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2\cdot(-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

2) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_4 = -4 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 2 \end{cases};$$

Ответ : (8;6;4;2).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.1. Векторы

Практическое занятие № 19
Арифметические операции с векторами

Цель работы: научиться выполнять действия над векторами

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У7 выполнять арифметические операции с векторами;

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD}$

2 Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$

3 Найти косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$

4 Найти Найти $\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \cdot \overline{AD}$

5 Найти $Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD} + \overline{AC}\right)$

6 Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

7 Выяснить, ортогональны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

1 A (2; 3; -1); B (0; 1; 2); C (4; -1; -1); D (2; -3; 1)
2 A (3; -1; 1); B (1; 3; 2); C (1; -1; -1); D (4; 0; 3)
3 A (4; 1; 2); B (1; 0; 1); C (-1; 2; -1); D (3; 1; 0)
4 A (3; -2; 1); B (2; -1; 1); C (4; 0; 2); D (1; 1; -1)
5 A (-2; 2; 1); B (3; 0; 4); C (7; 1; 0); D (3; 0; 5)
6 A (1; -1; -1); B (2; 5; 7); C (-3; 1; -1); D (2; 2; 3)
7 A (-3; 1; 4); B (1; -2; -3); C (2; 2; 3); D (5; 3; 1)
8 A (2; -5; 1); B (4; 3; 5); C (-1; 0; 1); D (2; 1; 0)
9 A (-2; 2; 1); B (3; -1; 0); C (4; 4; 0); D (1; -1; 1)
10 A (4; 2; 5); B (0; 1; 3); C (-1; -1; 1); D (2; -2; 1)
11 A (1; 0; 1); B (7; 4; 3); C (3; -5; 1); D (-2; 2; 2)
12 A (5; 1; 0); B (-1; -1; -1); C (2; 4; 7); D (1; 0; 1)
13 A (10; 1; 1); B (-2; -1; 1); C (4; 3; 2); D (1; 0; -1)
14 A (2; -7; 4); B (2; -1; 3); C (1; 0; -1); D (2; 1; 3)

15 A (6; 3; 3); B (-1; 0; -2); C (3; 1; 1); D (0; 4; 5)
16 A (3; 2; 0); B (2; -1; 7); C (4; 0; 5); D (1; -2; -1)
17 A (4; -1; 2); B (1; 0; 3); C (-2; 1; 5); D (3; 8; -1)
18 A (1; 1; -3); B (-7; 5; 2); C (2; 1; 0); D (3; -3; 1)
19 A (5; 0; 1); B (2; -1; -1); C (-6; -1; 1); D (3; 1; 3)
20 A (3; 5; 1); B (7; -4; 3); C (2; 1; 1); D (0; -1; 3)
21 A (1; -2; 1); B (-1; 8; -3); C (3; 2; 1); D (5; 3; 1)
22 A (-3; -1; 1); B (2; -3; 0); C (1; 4; 5); D (2; 3; 4)
23 A (3; -1; 2); B (4; 0; 4); C (-1; 9; -1); D (3; -2; -2)
24 A (3; -2; 1); B (4; 2; 1); C (-1; -1; 1); D (3; 0; 1)
25 A (-2; 0; 1); B (4; -1; 3); C (-3; 2; 1); D (4; 1; 1)
26 A (2; -2; 1); B (2; 5; 7); C (1; 3; 5); D (7; 0; 3)
27 A (2; 3; 3); B (-2; 4; 1); C (3; 5; 2); D (3; 8; -1)
28 A (1; 1; -3); B (-3; 2; -1); C (4; 1; 2); D (7; -3; 0)
29 A (7; 6; 1); B (2; -1; -1); C (1; 0; 1); D (-2; 1; -1)
30 A (-7; 2; -1); B (2; 5; 1); C (2; 1; 1); D (0; 1; 3)

Порядок выполнения работы:

1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD}$

2 Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$

3 Найти косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$

4 Найти Найти $(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AD}$

5 Найти $Пр_{\overline{AB}}(\overline{BD} + \overline{AC})$

6 Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

7 Выяснить, ортогональны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

Ход работы

Вектором называется отрезок, у которого указано, какой из концов является началом, а какой – концом (направленный отрезок), обозначается $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$, где A - начало вектора, B - конец.

Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых.

Векторы называются ортогональными, если угол между ними 90^0.

Векторы можно складывать (по правилам треугольника и параллелограмма), можно умножать на число:

$a = \{a_1, a_2, a_3\}$ $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ $a + b = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$; $ka = \{ka_1, ka_2, ka_3\}$.

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов: $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

Модуль вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ равен $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Если заданы начало $A(x_1, y_1, z_1)$ и конец $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overline{AB}$, то его координаты и длина находятся следующим образом:

$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$; $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

*8*Скалярным произведением векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов: $a \cdot b = 0$.

Проекция вектора на направление:
$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Пример выполнения:

Даны точки $A(6,3,3),\quad B(-1,0,-2),\quad C(3,1,1),\quad D(0,4,5)$.

Задание 1

Решение:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1-6; 0-3; -2-3\} = \{-7;-3;-5\};$$

$$\overrightarrow{BC} = \{3+1; 1-0; 1+2\} = \{4; 1; 3\};$$

$$\overrightarrow{CD} = \{0-3; 4-1; 5-1\} = \{-3; 3; 4\};$$

$$\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD} = \{-7-3\cdot4+4\cdot(-3); -3-3\cdot1+4\cdot3; -5-3\cdot3+4\cdot4\} =$$
$$\{-31; 6; 2\}$$

Задание 2

Решение:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-5)^2} = \sqrt{83}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(4)^2+(1)^2+(3)^2} = \sqrt{26}$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-3)^2+(3)^2+(4)^2} = \sqrt{34}$$

Задание 3

Решение:

$$\cos\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC} = \frac{-7\cdot4-3\cdot1-5\cdot3}{\sqrt{83}\sqrt{26}} = \frac{-46}{\sqrt{2158}};$$

$$\cos\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD} = \frac{4\cdot(-3)+1\cdot3+3\cdot4}{\sqrt{26}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{884}}$$

Задание 4

Решение:

Даны точки $A(6,3,3),\quad B(-1,0,-2),\quad C(3,1,1),\quad D(0,4,5)$.

$$\overrightarrow{AB} = \{-7;-3;-5\};\quad \overrightarrow{CD} = \{-3; 3; 4\};$$

$$\overrightarrow{AD} = \{0-6; 4-3; 5-3\} = \{-6; 1; 2\};$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \{-7+(-3), -3+3, -5+4\} = \{-10, 0, -1\}$$

$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = -10\cdot(-6)+0\cdot1+(-1)\cdot2 = 58$$

Задание 5

Решение:

$\overline{AB}=\{-7,-3,-5\}$,

$\overline{BD}=\{0-(-1),4-0,5-(-2)\}=\{1,4,7\}$, $\overline{AC}=\{3-6,1-3,1-3\}=\{-3,-2,-2\}$,

$\overline{BD}+\overline{AC}=\{1+(-3),4+(-2),7+(-2)\}=\{-2,2,5\}$.

$Пр_{\overline{AB}}(\overline{BD}+\overline{AC})=\dfrac{-7\cdot(-2)+(-3)\cdot 2+(-5)\cdot 5}{\sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-5)^2}}=\dfrac{-17}{\sqrt{83}}$.

Задание 6

Решение:

$\overline{AB}=\{-7,-3,-5\}$, $\overline{CD}=\{-3,3,4\}$

$\dfrac{-7}{-3}\neq\dfrac{-3}{3}\neq\dfrac{-5}{4}\Rightarrow$ векторы не являются коллинеарными.

Задание 7

Решение:

$\overline{AB}=\{-7,-3,-5\}$, $\overline{CD}=\{-3,3,4\}$

$-7\cdot(-3)+(-3)\cdot 3+(-5)\cdot 4=-8\neq 0$, следовательно, векторы не являются ортогональными.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.2. Уравнения прямой на плоскости. Кривые второго порядка

Практическое занятие № 20
Уравнение линии на плоскости

Цель: формирование умений решать задачи на взаимное расположение прямых.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

1. Найти точку пересечения прямых: $mx-py+n=0$ и $x-y-p=0$.
2. Найдите острый угол между прямыми: $mx+ny-p=0$ и $nx-py-nm=0$.
3. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $px+y-m=0$ и проходящей через точку $A(-n;1)$.

4. Из точки $A(m;-1)$ на прямую $nx+py+1=0$ опущен перпендикуляр. Составьте его уравнение.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

Ход работы:

Задача № 1

Найти точку пересечения прямых :

$2x+3y-12=0$ и $x-y-1=0$.

Решим систему:

$$\begin{cases}2x+3y-12=0,\\ x-y-1=0;\end{cases}\ \begin{cases}2(1+y)+3y-12=0,\\ x=1+y;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2+2y+3y-12=0,\\ x=1+y;\end{cases}\ \begin{cases}5y=10,\\ x=1+y;\end{cases}\ \begin{cases}y=2,\\ x=3.\end{cases}$$

Ответ: точка $M(3;2)$.

Задача № 2

Определить угол между прямыми, заданными уравнениями:

$2x-3y+6=0$ и $x+5y-2=0$.

Решение

Найдем угловые коэффициенты этих прямых:

$2x-3y+6=0;$	$x+5y-2=0$
$-3y=-2x-6,$	$5y=-x+2,$
$y=\frac{2}{3}x+6,$	$y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5},$
$k_1=\frac{2}{3}.$	$k_2=-\frac{1}{5}.$

Подставим найденные значения k_1 и k_2 в формулу: $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$. $tg\varphi=\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{1+(-\frac{1}{5})\cdot\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=-1.$

$tg\varphi=-1;\ \varphi=135^0.$

Полученный угол между прямыми - тупой. Смежный с ним, будет острый, то есть $\varphi_1=180^0-135^0=45^0$.

Задача № 3

1. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $5x+3y-7=0$ и проходящей через точку A(-2;6).

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку A(-2;6).

$y-6=k(x+2)$

Находим угловой коэффициент данной прямой:

$3y=-5x+7,$

$y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3};\ k_1=-\frac{5}{3}.$

Так как прямые параллельны, то $k_2=-\frac{5}{3}$ - угловой коэффициент искомой прямой.

Подставим найденное значение $k_2=-\frac{5}{3}$ в уравнение пучка прямых:

$y-6=k(x+2)$;

после преобразования получим:

$5x+3y-8=0.$

Задача № 4

Из точки А(-3;5) на прямую $x-2y+3=0$ опущен перпендикуляр. Написать его уравнение.

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(-3;5)$.

$y-5=k(x+3).$

Найдем угловой коэффициент k_1 прямой $x-2y+3=0$;

$-2y=-x-3;$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2};$

$k_1=\frac{1}{2}.$

Учитывая условие перпендикулярности прямых: $k_1=-\frac{1}{k_2}$, найдем уравнение искомой прямой

$k_2=-2.$

$y-5=-2(x+3);$

$y+2x+1=0.$

Ответ: $y+2x+1=0.$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1. Элементы комбинаторики

Практическое занятие № 21
Решение задач на основные понятия комбинаторики

Цель работы: осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?

2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.

3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Ход работы

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1.Правило сложения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами, а другой элемент $B-n$ способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов(либо A, либо B) можно осуществить $m+n$ способами.

2.Правило умножения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача1. При формировании экипажа космического корабля имеется:10 претендентов на пост командира,20 претендентов на пост бортинженера,25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Решение. По правилу суммы существует 10+20+25=55способов выбора одной из кандидатур.

Задача2. В столовой предлагают два различных первых : a_1 и a_2 ;три различных вторых блюда: b_1, b_2, b_3 и два различных десерта: c_1 и c_2. Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

Решение. Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует $2 \times 3 \times 2$ =12 способов выбрать обед из трех блюд.

3. Подмножества n- множеств(соединения).

Для нахождения $k-$ подмножеств некоторого $n-$ множества нужно выбрать k из n его элементов (поэтому часто говорят о *выборк*е k элементов из $n-$ элементов). Про выбранные k из n различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из n элементов по k .*Соединение*- собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений: ***перестановки, размещения, сочетания.***

Перестановки.

Перестановками из $n-$ элементов называются такие соединения из $n-$ элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n\,!$

Размещения.

Размещениями из $n-$ элементов называются такие соединения , каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных $n-$ элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем , и другим.

Обозначение $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из $n-$ элементов по $n-$ элементов.

$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$

55440.

Сочетания.

Сочетаниями из n- элементов по mназываются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение:$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1.Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2.Формула размещений имеет вид:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4 \, , m = 10$.

3. Производим расчёт :$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид:$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

3 . Производим расчёт:$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!}$ =120.

3.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

1.По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2.Формула перестановок из п –элементов имеет вид:$P_n = n!$ В нашем случае n =4.

3.Произведём расчёт: P_4 =4!=4· $3 \cdot 2 \cdot 1$=24.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическая занятие № 22
Решение задач на вычисление классической вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель работы: Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У6 находить вероятность в простейших задачах;

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?
2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того.что выбранные детали оказались окрашенными?
3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того.при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается Р(А) и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы: 1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие А-«номер набран верно».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!}$=$\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}$=720. Итак, n=720
3. Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие А-«оба шара окажутся чёрными».

2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!}=\frac{20!}{2!\cdot 18!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!}$=190.

3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!}$=28

4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

2.На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК ?

Решение.

1. Событие А-«получится слово ЗАМОК».

2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов(букв): n=$P_5 = 5!$=5·4· $3 \cdot 2 \cdot 1$=120.

3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.

4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.3 Элементы теории множеств

Практическая занятие № 23

Дискретная и непрерывная случайная величина. Характеристики дискретной и непрерывной случайной величин

Цель работы: научиться находить числовые характеристики случайных величин.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У6 находить вероятность в простейших задачах;

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

заданной таблицей:.

X	7	-5	-1	6
p	0,2	0,3	0,4	0,1

Краткие теоретические сведения: имеются в конспекте лекций

Ход работы

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

.

Математическое ожидание***:***

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

2. Найти дисперсию дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	-3	1	2	3
p	0,4	0,3	0,1	0,2

.

Сначала находим математическое ожидание случайной величины *X*:

$M(X) = -3 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 = -0{,}1.$

Далее запишем закон распределения X^2:

X^2	9	1	4	9
p	0,4	0,3	0,1	0,2

.

Математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 9 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}2 = 6{,}1.$$

Находим дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 6{,}1 - (-0{,}1)^2 = 6{,}09.$$

3. Найти среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	-1	1	2	3
p	0,3	0,4	0,1	0,2

.

Сначала находим математическое ожидание случайной величины *X*:

$$M(X) = -1\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}2 = 0{,}9.$$

Далее запишем закон распределения X^2:

X^2	1	1	4	9
p	0,3	0,4	0,1	0,2

Математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 1\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}2 = 2{,}9.$$

Находим дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2{,}9 - (0{,}9)^2 = 2{,}09.$$

Отсюда находим среднеквадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2{,}09} \approx 1{,}45$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.3 Элементы теории множеств

Практическое занятие № 24
Операции над множествами

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

У5 задавать множества и выполнять операции над ними;

Уо02.03 планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию;

Уо02.06 оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач;

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

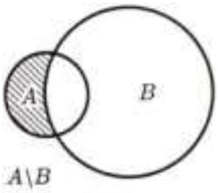
Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

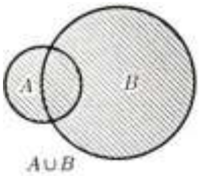
Пересечение	Объединение	Вычитание

Пересечением множеств А и В называется новое множество, состоящие из элементов и множества А и множества В А={Р,И,С}, В={Р,О,С,А} А В={Р,С}	Объединением множеств А и В называется новое множество, состоящее из элементов или множества А или множества В А={Р,И,С}, В={Р,О,С,А} А В={Р,С,И,О,А}	Разностью множеств А и В называется множество, состоящее из элементов множества А, не принадлежащих множеству В А={Р,И,С}, В={Р,О,С,А} А\В={И} В\А={О,А}
={С,Т,О,Л,Б}, В={С,Т,О,Л} **В={С,Т,О,Л}**	**А={С,Т,О,Л,Б}, В={С,Т,О,Л}** **А В={С,Т,О,Л,Б}**	**А={С,Т,О,Л,Б}, В={С,Т,О,Л}** **А\В={Б} = В$_A$ - дополнение множества В до множества А**
={Н,О,С},В={С,О,Н} **В=А=В={С,О,Н}**	**А={Н,О,С},В={С,О,Н}** **А В=А=В={С,О,Н}**	**А={Н,О,С},В={С,О,Н}** **А\В =**
={С,О,Н}, В={М,И,Р} **В=**	**А={С,О,Н}, В={М,И,Р}** **А В={С,О,Н,М,И,Р}**	**А={С,О,Н}, В={М,И,Р}** **А\В=А= {С,О,Н}** **В\А={М,И,Р}**

Объединением множеств А и В называется множество А⋂В(см. рис. 4) $A\bigcup B=\{x:\ x\in A\vee x\in B\}$.

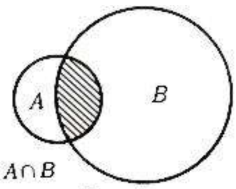


$A\setminus B$
Рис. 3

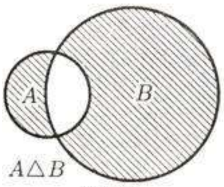


$A\cup B$
Рис. 4

Пересечением подмножеств А и В называется множество
$$A\bigcap B=\{x:\ x\in A\ x:\ x\in A\wedge x\in B\}.$$



$A\cap B$
Рис. 5



$A\triangle B$
Рис. 6

Рисунки 1-6 называются диаграммы Эйлера-Венна.

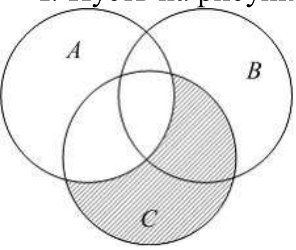
Пример. Даны множества A={1, 2, 3, 4, 5} и B={3, 4, 5, 6, 7}. Их пересечением будет множество …

<u>Решение</u>: Проанализируем все предложенные варианты.
1) $D=A\cup B$. Множество D является объединением множеств A и B, то есть оно должно содержать все элементы множества A и все элементы множества B. Но это не так. Значит, утверждение, что $D=A\cup B$, ложное.

2) $C = A \cap B$. Множество C является пересечением множеств A и B, то есть оно должно содержать все элементы, которые принадлежат как множеству A так и множеству B. Но множество C содержит элементы m и n, которые есть во множестве A, но отсутствуют во множестве B. Поэтому утверждение $C = A \cap B$ ложное.
3) $E = B \setminus A$. Множество E является разностью множеств B и A, поэтому должно содержать элементы, которые принадлежат множеству B, и не принадлежат множеству A. Но элементы m и n принадлежат, наоборот, множеству A и не принадлежат множеству B. Утверждение $E = B \setminus A$ неверное, верным будет $E = A \setminus B$.

Решить самостоятельно:

1. Пусть на рисунке изображены множества A, B и C.



Тогда заштрихованная область соответствует множеству

2. Даны множества $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{c, d, e, g, k\}$.

Тогда множество $B\setminus A$ равно …

3. Запишите элементы пересечения и объединения множеств А и В, если:
1)А= {к, е, р, ю, в, л, м}, В={м, л, ю, в, е, к, р}.
2) А= {к, л, м, н}, В={и, к, м, л, н, о, п}.
3) А= {3, 6, 9, 12,15}, В={6, 1, 2, 5, 9, 13}.
4) А= {1, 2, 3, 4,5,6}, В={12, 34, 56}.
4. Запишите элементы множества А\ В, если:
1) А= {к, l, f, t, u}, В={k,l,m, n, o, p }
2) А= {6, 3, 2, 5, 13}, В={6, 1, 2, 5, 9, 13 }
5. Какое множество является дополнением:
-множества хвойных деревьев до множества всех деревьев;
-множества четных чисел до множества натуральных чисел.
6. Известно, что А, В, С – подмножества универсального множества. Кроме того, множества А, В, С – попарно пересекаются. Изобразите при помощи кругов Эйлера следующие множества: (С\А) (С\В)
7. Даны множества: А - множество букв русского алфавита, В -множество гласных букв. В каком отношении находятся множества А и В? Изобразите данные множества при помощи кругов Эйлера.
8. Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между объемами понятий А: "Русский алфавит", В: "гласные буквы", С: "согласные буквы"

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.