



## **ОДОБРЕНО**

Предметной комиссией  
«Математических и естественнонаучных дисциплин»  
Председатель Е.С.Корытникова  
Протокол № 6 от 25.01.2023.

Методической комиссией МпК  
  
Протокол № 4 от 08.02.2023

### **Разработчик:**

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» МпК

И.А. Панфилова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 15.02.03 Техническая эксплуатация гидравлических машин, гидроприводов и гидропневмоавтоматики и овладению профессиональными компетенциями.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение	5
2 Методические указания	10
Практическое занятие 1	10
Практическое занятие 2	11
Практическое занятие 3	12
Практическое занятие 4	14
Практическое занятие 5	17
Практическое занятие 6	19
Практическое занятие 7	21
Практическое занятие 8	24
Практическое занятие 9	27
Практическое занятие 10	29
Практическое занятие 11	30
Практическое занятие 12	32
Практическое занятие 13	33
Практическое занятие 14	35
Практическое занятие 15	36
Практическое занятие 16	38
Практическое занятие 17	40
Практическая занятие 18	43
Практическое занятие 19	44
Практическое занятие 20	47
Практическое занятие 21	49
Практическое занятие 22	51
Практическое занятие 23	53
Практическое занятие 24	56
Практическое занятие 25	60
Практическое занятие 26	63
Практическое занятие 27	65
Практическое занятие 28	66
Практическое занятие 29	69
Практическое занятие 30	71
Практическое занятие 31	73
Практическое занятие 32	75
Практическое занятие 33	78
Практическое занятие 34	81
Практическое занятие 35	83
Практическое занятие 36	84
Практическое занятие 37	86
Практическое занятие 38	88
Практическое занятие 39	90
Практическое занятие 40	93
Практическое занятие 41	95
Практическое занятие 42	97
Практическое занятие 43	100
Практическое занятие 44	102

Практическое занятие 45	105
Практическое занятие 46	108
Практическое занятие 47	111
Практическое занятие 48	114
Практическое занятие 49	116
Практическое занятие 50	119
Практическое занятие 51	122
Практическое занятие 52	124
Практическое занятие 53	127
Практическое занятие 54	130
Практическое занятие 55	133
Практическое занятие 56	135
Практическое занятие 57	137
Практическое занятие 58	139
Практическое занятие 59	141

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебного предмета «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

Выполнение практических работ обеспечивает достижение обучающимися следующих **результатов:**

ПР61 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПР62 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПР63 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

ПР64 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПР65 умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;

ПР66 умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов;

ПР67 умение оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств;

ПР68 умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

ПР69 умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол

между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;

ПР610 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПР611 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПР612 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПР613 умение оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками;

ПР614 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру1 умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;

Пру2 умение оперировать понятиями: множество, подмножество, операции над множествами; умение использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений и при решении задач, в том числе из других учебных предметов;

Пру3 умение оперировать понятиями: граф, связный граф, дерево, цикл, граф на плоскости; умение задавать и описывать графы различными способами; использовать графы при решении задач;

Пру4 умение свободно оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач;

Пру5 умение оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления;

Пру6 умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и

системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

Пру9 умение свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; умение задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

Пру11 умение оперировать понятиями: комплексное число, сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа, форма записи комплексных чисел (геометрическая, тригонометрическая и алгебраическая); уметь производить арифметические действия с комплексными числами; приводить примеры использования комплексных чисел;

Пру12 умение свободно оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение для описания числовых данных; умение исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии;

Пру13 умение находить вероятности событий с использованием графических методов; применять для решения задач формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; оценивать вероятности реальных событий; умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений; умение использовать свойства изученных распределений для решения задач; знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

Пру14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение

использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

Пру15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

Пру16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

Пру17 умение свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; оперировать понятиями: матрица  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ , определитель матрицы, геометрический смысл определителя;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;

Пру19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

MP8 способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

MP10 формирование научного типа мышления, владение научной терминологией, ключевыми понятиями и методами;

MP12 выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;

MP13 анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;

MP16 осуществлять целенаправленный поиск переноса средств и способов действия в профессиональную среду;

MP17 уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности;



МР18 уметь интегрировать знания из разных предметных областей;

ЛР23 готовность к труду, осознание ценности мастерства, трудолюбие;

ЛР26 готовность и способность к образованию и самообразованию на протяжении всей жизни.

Содержание практических и лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **общими компетенциями:**

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

Выполнение практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

## 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

### Тема 1.1. Развитие понятия о числе

#### Практическое занятие № 1

#### «Арифметические действия над рациональными и комплексными числами»

**Цель работы:** Повторить действия с действительными и комплексными числами.

**Выполнение работы способствует формированию:**

Пу5 умение оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления;

Пу11 умение оперировать понятиями: комплексное число, сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа, форма записи комплексных чисел (геометрическая, тригонометрическая и алгебраическая); уметь производить арифметические действия с комплексными числами; приводить примеры использования комплексных чисел;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Выполнить действия с рациональными числами:

1)  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ ;

2)  $\frac{3}{7} + \frac{4}{7}$ ;

3)  $3\frac{1}{5} + 4\frac{1}{5}$ ;

4)  $3\frac{2}{7} - 1\frac{1}{7}$ ;

5)  $\frac{7}{12} : \frac{3}{4}$ ;

6)  $2\frac{1}{5} : 3\frac{2}{3}$ ;

7)  $3\frac{2}{5} + 14\frac{1}{3}$

2. Выполнить действия с комплексными числами:

$(8 + i) : (2 - 3i)$ .

**Порядок выполнения работы:**

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание.

**Ход работы:**

Задание №1

1)  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$ ;

2)  $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{3+4}{7} = \frac{7}{7} = 1$ ;

3)  $3\frac{1}{5} + 4\frac{1}{5} = (3 + 4) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = 7 + \frac{2}{5} = 7\frac{2}{5}$ ;

$$4) 3\frac{2}{7} - 1\frac{1}{7} = (3 - 1) + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\right) = 2 + \frac{1}{7} = 2\frac{1}{7}$$

$$5) \frac{7}{12} : \frac{3}{4} = \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{7}{9};$$

$$6) 2\frac{1}{5} : 3\frac{2}{3} = \frac{11}{5} : \frac{11}{3} = \frac{11 \cdot 3}{5 \cdot 11} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5};$$

$$7) 3\frac{2}{5} + 14\frac{1}{3} = (3 + 14) + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = 17 + \frac{6+5}{15} = 17\frac{11}{15}.$$

Задание №2

Найти  $(8 + i) : (2 - 3i)$ .

Решение. Перепишем это отношение в виде дроби:  $\frac{8+i}{2-3i}$ .

Умножив, её числитель и знаменатель на  $2 + 3i$  и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1 + 2i.$$

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 1.1. Развитие понятия о числе

### Практическое занятие № 2

#### «Тождественные преобразования рациональных выражений»

**Цель работы:** Повторить формулы сокращённого умножения. Закрепить теоретические знания, углубленное решение изученного материала, применение полученных знаний для решения задач.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР62 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

Пру5 умение оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:** упростить выражения:

а)  $(3x^2 - 2y^3)^3$ .

б)  $(1 - a) \cdot (1 + a) \cdot (1 + a^2) \cdot (1 + a^4)$ .  
 в)  $(x - m)^2 \cdot (x + m)^2$ .  
 г)  $(2n - c) \cdot (8n^3 + c^3) \cdot (c^2 + 2cn + 4n^2)$ .

**Порядок выполнения работы:**

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), примените нужную формулу сокращённого умножения.

**Ход работы:**

Задание: Упростить выражения, применив формулы сокращённого умножения.

а)  $(3p^2 - 2y^3)^3 = 27p^6 - 54p^4y^3 + 36p^2y^6 - 8y^9$ .

б)  $(1 - a) \cdot (1 + a) \cdot (1 + a^2) \cdot (1 + a^4) = (1 - a^2) \cdot (1 + a^2) \cdot (1 + a^4) = (1 - a^4) \cdot (1 + a^4) = 1 - a^8$ .

в)  $(x - m)^2 \cdot (x + m)^2 = (x^2 - 2xm + m^2)(x^2 + 2xm + m^2) = x^4 + 2x^3 + x^2m^2 - 2x^3m - 4x^2m^2 - 2xm^3 + m^2x^2 + 2xm^3 + m^4 = x^4 - 2x^2m^2 + m^4$ .

г)  $(2n - c) \cdot (8n^3 + c^3) \cdot (c^2 + 2cn + 4n^2) = (2n - c) \cdot (4n^2 + 2cn + c^2) \cdot (8n^3 + c^3) = (8n^3 - c^3) \cdot (8n^3 + c^3) = 64n^6 - c^6$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

**Тема 1.1. Развитие понятия о числе**

**Практическое занятие №3**

**«Решение рациональных уравнений»**

**Цель работы:** Закрепление теоретических знаний, повторение ранее изученного материала, формирование умений решения задач.

**Выполнение работы способствует формированию:**

Прб3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Прб6 умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические,

тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:** решить уравнения:

$$a) (3x+1)^2 + (4x-1)^2 = (5x-2)^2;$$

$$б) \frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}.$$

**Порядок выполнения работы:**

При решении уравнений используются следующие правила преобразования уравнений в равносильные:

а) какой-либо член уравнения можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком;

б) обе части уравнения можно умножить или разделить на одно то же число, отличное от 0.

Решение уравнений I–II степени с одной переменной

$ax+b=0, \left(x = \frac{-b}{a}, a \neq 0\right)$  – линейное уравнение I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$  – уравнение II степени с одной переменной.

1. Определить вид уравнения и способ его решения.

2. Если уравнение дробно-рациональное, то найти общий знаменатель всех дробей, которые входят в уравнение.

3. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.

4. Решить полученное целое уравнение.

5. Произвести проверку корней, и исключить те из них, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Так как мы решаем дробные рациональные уравнения, то в знаменателях дробей будут переменные. Значит, будут они и в общем знаменателе. Во втором пункте алгоритма мы умножаем уравнение на общий знаменатель. При этом могут появиться посторонние корни, при которых общий знаменатель будет равен нулю, а значит и умножение на него будет бессмысленным. Поэтому в конце обязательно нужно сделать проверку полученных корней.

Решим уравнения:

$$a) (3x+1)^2 + (4x-1)^2 = (5x-2)^2$$

Раскроем скобки, применяя формулы сокращенного умножения  $(a+b)^2$  и  $(a-b)^2$

$$9x^2 + 6x + 1 + 16x^2 - 8x + 1 = 25x^2 - 20x + 4. 9x^2 + 6x + 1 + 16x^2 - 8x + 1 - 25x^2 + 20x - 4 = 0.$$

Приведем подобные члены, получим

$$\begin{array}{l} 18x - 2 = 0 \\ 18x = 2 \end{array} \quad x = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Ответ:  $x = \frac{1}{9}$  – корень уравнения.

$$б) \frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

Разложим  $x^2-4$  на множители и перенесем все члены уравнения в левую часть. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} - \frac{8}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\frac{x(x+2) - 7(x-2) - 8}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{x^2 + 2x - 7x + 14 - 8}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x+2)(x-2)} = 0$$

дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т. е.  
 $(x+2)(x-2) \neq 0, \Rightarrow x \neq 2; x \neq -2$

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2};$$

$$x_1 = 3; x_2 = 2$$

корни можно найти по теореме Виета, но так как  $x \neq 2$ , то  $x_2 = 2$  – посторонний корень, следовательно, решением уравнения будет  $x = 3$ .

Ответ:  $x = 3$

$$в) x^2 - x + 4 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$$

Ответ: действительных корней нет.

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 1.1. Развитие понятия о числе

### Практическое занятие №4

#### «Решение систем рациональных уравнений»

**Цель работы:** Повторить решение систем рациональных уравнений.

**Выполнение работы способствует формированию:**

Прб3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:** решить системы рациональных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x - 15y = 16, \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y + 2x = 6, \\ 3x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{9}{y} - 1 = 0, \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

**Порядок выполнения работы:**

решить системы уравнений используются способы сложения, подстановки, графический.

Решим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases}$$

Решим систему всеми способами, т.е. убедимся, что результат получается одинаковый и определимся, какой из методов более рационально применим для данной системы.

1) Способ подстановки.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ 10x + 7y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{8}{3}y = \frac{31}{3} \\ 10x + 7y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{31}{3} - \frac{8}{3}y \\ 10\left(\frac{31}{3} - \frac{8}{3}y\right) + 7y = 5 \end{cases}$$

$$\frac{310}{3} - \frac{80}{3}y + 7y = 5$$

Решаем второе уравнение относительно «у»:  $\frac{310}{3} - \frac{80}{3}y + 7y = 5$ , приведем к общему знаменателю и так как  $3 \neq 0$ , то

$$310 - 80y + 21y = 15$$

$$-59y = 15 - 310$$

$$-59y = -295; \quad y = \frac{-295}{-59} = 5$$

$$y = 5, \text{ тогда } x = \frac{31}{3} - \frac{8}{3} \cdot 5 = \frac{31}{3} - \frac{40}{3} = -\frac{9}{3} = -3$$

Ответ:  $(-3; 5)$ .

2) Способ алгебраического сложения

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases}$$

уравняем по модулю коэффициенты при  $x$ , для этого умножим первое уравнение на 10, а второе – на 3.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 & | \cdot 10 \\ -10x - 7y = -5 & | \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 30x + 80y = 310 \\ -30x - 21y = -15 \end{cases}$$

почленно сложим и получим:

$$59y = 295$$

$$y = 5$$

подставим  $y = 5$  в любое из уравнений системы, например в первое, затем найдем  $x$ :

$$3x + 8 \cdot 5 = 31$$

$$3x + 40 = 31$$

$$3x = -9$$

$$x = -3$$

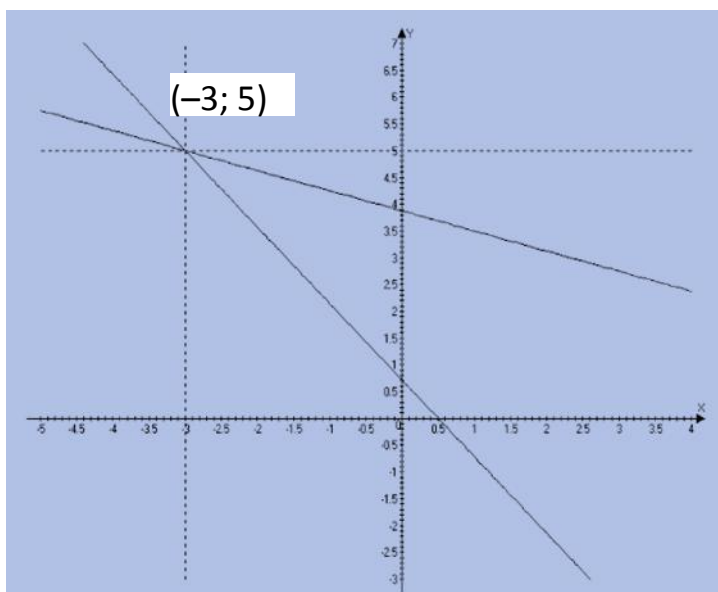
получаем  $x = -3$ ;  $y = 5$ , как и в первом случае.

Ответ:  $(-3; 5)$ .

3) Графический способ (следует помнить, что результаты могут быть получены приближенно, что можно объяснить нашим зрением, умением проводить линии, выбором масштаба, неудобством записи числа и т.д.)

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases}$$

Графиком каждого уравнения является прямая (рис.1), а прямая определяется двумя точками.



$$3x + 8y = 31$$

$$x = 0; y = \frac{31}{8} = 3\frac{7}{8}$$

$$x = 2; 6 + 8y = 31;$$

$$y = \frac{31 - 6}{8} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$

$$-10x - 7y = -5$$

$$10x + 7y = 5$$

$$x = 0; y = \frac{5}{7}$$

$$x = 2; 20 + 7y = 5;$$

$$7y = -15; y = -\frac{15}{7} = -2\frac{1}{7}$$

Ответ:  $(-3; 5)$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.



**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 1.1 Развитие понятия о числе

### Практическое занятие №5

#### «Решение рациональных неравенств»

**Цель работы:** Цель работы: повторение ранее изученного материала, закрепление теоретических знаний, применение теоретических знаний к решению практических задач.

#### Выполнение работы способствует формированию:

Прб3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

#### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:** решить рациональные неравенства:

1.  $5x - \frac{7x-1}{2} + \frac{2x-5}{5} > \frac{7}{10}$

2.  $|5-2x| < 3$ ,

3.  $5x - 2 - 3x^2 > 0$

#### Порядок выполнения работы:

При решении неравенств используются следующие правила преобразования неравенств в равносильные:

а) какой-либо член неравенства можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком, оставив при этом без изменения знак неравенства;

б) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства;

в) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный

При решении систем неравенств нужно решить каждое из них и выбрать общее решение.

Решим неравенства.

1.  $5x - \frac{7x-1}{2} + \frac{2x-5}{5} > \frac{7}{10}$

Перенесем все члены в левую часть и приведем к общему знаменателю. общий знаменатель 10; так как знаменатель не содержит переменной, то в дальнейшем его можно не писать

(опустить).

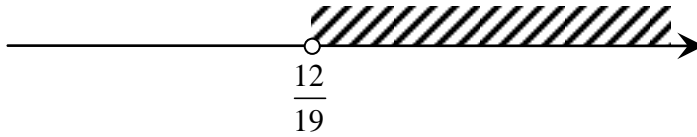
$$50x - 5(7x - 1) + 2(2x - 5) - 7 > 0$$

$$50x - 35x + 5 + 4x - 10 - 7 > 0$$

$$19x - 12 > 0$$

$$19x > 12$$

$$x > \frac{12}{19}$$

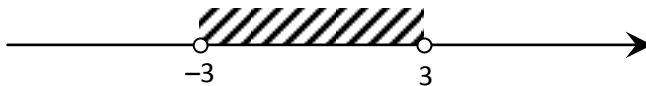


$$x \in \left( \frac{12}{19}; +\infty \right)$$

2.  $|5 - 2x| < 3$  то есть

$$-3 < 5 - 2x < 3$$

Используя свойства числовых неравенств, имеем



$$-3 - 5 < 5 - 2x - 5 < 3 - 5$$

$$-8 < -2x < -2; \text{ делим на } (-2), \text{ знак неравенства меняется}$$

$$4 > x > 1 \Leftrightarrow 1 < x < 4$$

Или можно записать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} 5 - 2x < 3 \\ 5 - 2x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x < 3 - 5 \\ -2x > -3 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x < -2 \\ -2x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 4 \end{cases}$$



3.  $5x - 2 - 3x^2 > 0$  - квадратное неравенство умножим на  $(-1)$

$$3x^2 - 5x + 2 < 0$$

Найдем корни уравнения:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6}; \quad x_1 = 1; x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Графиком функции  $y = 3x^2 - 5x + 2$  является парабола (рис.2), ветви которой направлены

вверх, а точки пересечения параболы и оси ОХ  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = \frac{2}{3}$

Изобразим геометрически:

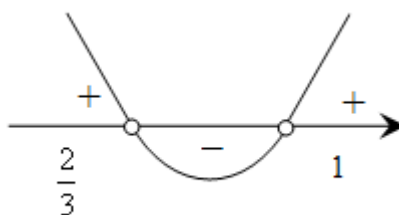


Рисунок 2. График функции

Так как мы решаем неравенство  $3x^2 - 5x + 2 < 0$ , то решением неравенства будет промежуток (интервал)  $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$

Ответ:  $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 1.3. Функции, их свойства, графики

#### Практическое занятие №6

#### «Исследование функций. Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций»

**Цель работы:** научиться определять четность нечетность функции, проводить исследование функции на монотонность, экстремумы, нули функции и промежутки знакопостоянства.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения,

на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПР65 умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем.

### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

### Задание:

1. Найти область определения функции  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}$ .
2. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{2(x+5)^2}$  на четность.
3. Исследовать функцию  $y = 6\sqrt{x} \cdot (2x - 1)$  на монотонность и знакопостоянство.

### Порядок выполнения работы:

- 1) Найдите область определения функции.

Для нахождения промежутков знакопостоянства найдите точки пересечения с осью абсцисс, решив уравнение  $y=0$ . Найденные корни расставьте на оси  $Ox$  в порядке возрастания и найдите знак функции на каждом из полученных интервалов. Запишите результат.

- 2) Найдите область определения функции. Убедитесь, что она симметрична.

1. Замените аргумент функции  $x$  на " $-x$ ". Подставьте этот аргумент в функциональное выражение.

2. Упростите выражение.

3. Таким образом, вы получили одну и ту же функцию, записанную для аргументов " $x$ " и " $-x$ ". Посмотрите на две эти записи.

Если  $y(-x) = y(x)$ , то это четная функция.

Если  $y(-x) = -y(x)$ , то это нечетная функция.

Если же про функцию нельзя сказать, что  $y(-x) = y(x)$  или  $y(-x) = -y(x)$ , то по свойству четности это функция общего вида. То есть, она не является ни четной, ни нечетной.

4. Запишите сделанные вами выводы.

3) Найдите область определения функции и нули функции, если они есть. Исследуйте функцию на монотонность на полученных интервалах.

Функция  $F(x)$  называется **возрастающей на отрезке  $[a, b]$** , если для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  из  $[a, b]$  справедливо неравенство  $F(x_1) < F(x_2)$ , когда  $x_1 < x_2$ .

Функция  $F(x)$  называется **убывающей на отрезке  $[a,b]$** , если для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  из  $[a,b]$  справедливо неравенство  $F(x_1) > F(x_2)$ , когда  $x_1 < x_2$ .

1) Найти область определения функции  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}$  и промежутки знакопостоянства.

**Решение:**

1. Область определения функции:  $x^2 + x > 0, x(x+1) > 0, x_1 = 0, x_2 \neq -1$ . Рассмотрим три интервала  $(-\infty; -1), (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ . На интервалах  $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$   $x^2 + x > 0$ , а на интервале  $(-1; 0)$   $x^2 + x < 0$ . Получаем, что  $D(y) = \underline{(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)}$ .

2. Нулей функции нет, т.к.  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} \neq 0$ , следовательно график не пересекает ось абсцисс.

3. Найдем знак функции на интервалах  $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ . На интервале  $(-\infty; -1)$   $y < 0$ , на интервале  $(0; +\infty)$   $y > 0$ .

2) Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{2(x+5)^2}$  на четность.

**Решение:** Область определения. Функция определена для всех  $x$  кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль:  $x = -5$ , то есть  $D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$ . Т.к. область определения не симметрична, то по свойству четности это функция общего вида. То есть, она не является ни четной, ни нечетной.

3) Исследовать функцию  $y = 6\sqrt{x} \cdot (2x - 1)$  на монотонность и промежутки знакопостоянства.

**Решение:** Область определения функции:  $x \geq 0$ , т.е.  $D(y) = [0; +\infty)$ .

Нули функции:  $x_1 = 0, x_2 = 0,5$ .

Промежутки знакопостоянства: на интервале  $(0; 0,5)$   $y < 0$ , на интервале  $(0,5; +\infty)$   $y > 0$ .

Промежутки монотонности: логично рассматривать интервал  $(0,5; +\infty)$ . С возрастанием аргумента от  $0,5$  до  $+\infty$  функция возрастает.

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 1.2. Функции, их свойства, графики

### Практическое занятие №7

#### «Построение и чтение графиков функций»

**Цель работы:** повторение изученного материала; применение теоретических знаний к решению практических задач.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР64 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПР65 умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:** построить графики функций:

$$y = -3x^2 - 6x - 4$$

**Порядок выполнения работы**

1) График функции  $y = ax^2 + vx + c$ , где  $a \neq 0$  строится по следующему алгоритму:

- Описать функцию, заданную формулой  $y = ax^2 + vx + c$ , где  $a \neq 0$ ;
- задать координаты вершины  $x_{в} = -\frac{v}{2a}$ ;  $y_{в} = ax^2 + vx + c$  и построить

точку на координатной плоскости;

- провести ось симметрии параболы;

○ определить нули функции (если это возможно), построить точки по соответствующим координатам;

- найти координаты точки пересечения графика функции с осью ординат и постройте ее, а также постройте точку, ей симметричную, на координатной плоскости;

- найти, если необходимо, координаты дополнительных точек;

2) График функции  $y = x^2 + px + q$ , где  $a \neq 0$  строится по следующему алгоритму:

- В квадратном трехчлене  $x^2 + px + q$  выделим полный квадрат:  $x^2 + px + q = (x - a)^2 + v$
- Построим график функции  $y = x^2$

○ Делает параллельный перенос графика функции  $y=x^2$  вдоль оси абсцисс на  $|a|$  единиц вправо, если  $a > 0$  или влево, если  $a < 0$ .

○ Делает параллельный перенос вдоль оси ординат на  $|b|$  единиц вверх, если  $b > 0$  или вниз, если  $b < 0$ .

3) Чтобы построить график функции  $y=x^2+3$  построим график функции  $y=x^2$  и сделаем параллельный перенос вдоль оси Оу на 3 единицы вверх.

### Ход работы:

1) Построим график функции  $y = -3x^2 - 6x - 4$ .

**Решение:**  $y = -3x^2 - 6x - 4$  – квадратичная, график – парабола,  $a = -3$ ,  $-3 < 0$ , следовательно, ветви направлены вниз.

Координаты вершины: **(-1; -1)**.

$$x_в = \frac{b}{2(-3)} = \frac{-6}{-6} = -1;$$

$$y_в = -3(-1)^2 - 6(-1) - 4 = -3 + 6 - 4 = -1;$$

Нули функции:

$$-3x^2 - 6x - 4 = 0,$$

$$3x^2 + 6x + 4 = 0,$$

$$a = 3, \quad m = 6, \quad c = 4,$$

$$D = m^2 - 4ac,$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 36 - 48 = -12, \quad -12 < 0.$$

Действительных корней нет. То есть, нет точек пересечения с осью абсцисс.

Точка пересечения с ОУ: **(0; -4)**.

Если  $x = 0$ , то  $y = 0 + 0 - 4 = -4$ .

Дополнительные точки: **(1; -13)**, так как  $y(1) = -3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 4 = -3 - 6 - 4 = -13$ ;

Строим график.

2) Построим график функции  $y=x^2-4x+3$  с помощью преобразований.  $y=x^2-4x+3$  – квадратичная, график – парабола,  $a=1$ ,  $1 > 0$  следовательно, ветви направлены вверх, т.к.  $x^2-4x+3 = (x-2)^2 - 1$ , то  $y = (x-2)^2 - 1$ . Строим график функции  $y=x^2$  и делаем параллельный перенос вдоль оси абсцисс на 2 единицы вправо и вдоль оси ординат на 1 единицу вниз. 3) Построим график функции  $y=x^2-5$  с помощью преобразований. Чтобы бы построить график функции  $y=x^2-5$  построим график функции  $y=x^2$  и сделаем параллельный перенос (рис. 3) вдоль оси Оу на 5 единиц вниз.

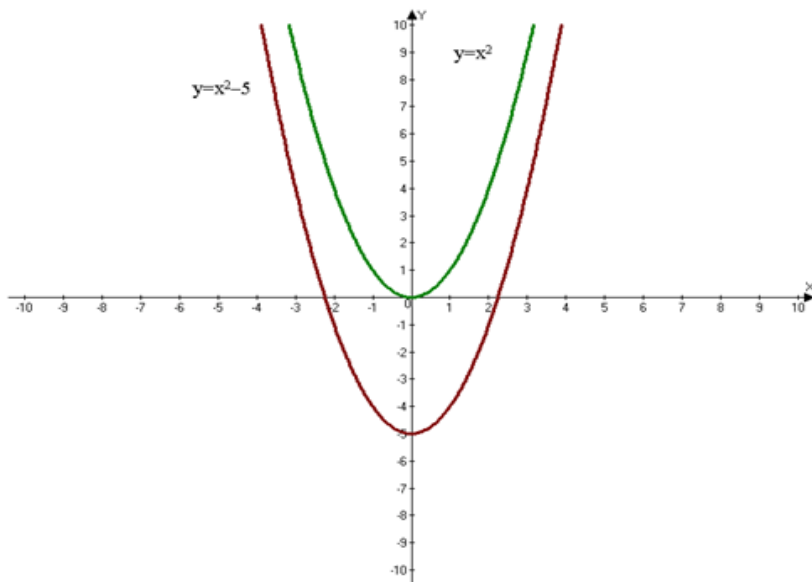


Рисунок 3. График функции

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

**Тема 1.3. Корни, степени логарифмы**

**Практическое занятие № 8**

**«Решение иррациональных уравнений»**

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении различных видов иррациональных уравнений.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР63 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни.



## Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

## Задание:

- 1) Решите уравнение  $\sqrt{5-4x} = 2x+5$ .
- 2) Решить уравнение  $9 + \sqrt{x-3} = x$ .
- 3) Решить уравнение  $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{3-4x}$ .
- 4) Решить уравнение  $\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$

## Порядок выполнения работы

1) При возведении уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Поэтому возможно появление посторонних решений уравнения, но невозможна потеря корней. Причина приобретения корней состоит в том, что при возведении в четную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и тот же результат.

Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной только в первоначальное уравнение, а не в какие-то промежуточные.

2) При решении иррациональных уравнений полезно перед возведением обеих частей уравнения в некоторую степень "уединить радикал", то есть представить уравнение в виде  $C(x) = \sqrt[n]{D(x)}$ .

Тогда после возведения обеих частей уравнения в  $n$ -ую степень радикал справа исчезнет.

3) Уравнение  $\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)}$  равносильно каждой из двух систем

$$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x), \\ A(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку после возведения в четную степень получаем уравнение-следствие  $A(x) = B(x)$ . Мы должны, решив его, выяснить, принадлежат ли найденные корни области определения исходного уравнения, то есть выполняется ли неравенство  $A(x) \geq 0$  (или  $B(x) \geq 0$ ). Из этих систем выбирают для решения ту, в которой неравенство проще.

4) Возведете обе части уравнения в квадрат и произведете приведение подобных членов, перенесите слагаемые из одной части равенства в другую. Уедините радикал. Снова возведите обе части уравнения в квадрат. Решите полученное уравнение. Сделайте проверку.

## Ход работы:

1) Решить уравнение

$$\sqrt{-3x+3} = x-1.$$

Аккуратное возведение в четную степень уравнения вида  $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$  состоит в переходе к равносильной ему системе

$$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^{2k}(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство  $B(x) \geq 0$  в этой системе выражает условие, при котором уравнение можно возводить в четную степень, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

Уравнение  $\sqrt{-3x+3} = x-1$  равносильно системе

$$\begin{cases} 3-3x = (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, равносильное уравнению  $x^2 + x - 2 = 0$ , получим корни  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -2$ .

Второй корень не удовлетворяет неравенству системы и, следовательно, является посторонним корнем исходного уравнения.

**Ответ.**  $x = 1$ .

2) Решить уравнение

$$x + \sqrt{2x+3} = 6.$$

**Решение:** Метод уединения радикала приводит к уравнению  $\sqrt{2x+3} = 6-x$ .

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+3 = (6-x)^2, \\ 6-x \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, получим корни  $x_1 = 11$  и  $x_2 = 3$ , но условие  $6-x \geq 0$  выполняется только для  $x = 3$ .

**Ответ.**  $x = 3$ .

3) Решить уравнение  $\sqrt{-9x^2+3x-6} = \sqrt{-6x-24}$ .

**Решение:** Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -9x^2+3x-6 = -6x-24, \\ -6x-24 \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, равносильное уравнению  $-x^2 + x + 2 = 0$ , получим корни  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 2$ .

Однако при этих значениях  $x$  не выполняется неравенство  $-6x-24 \geq 0$ , и потому данное уравнение не имеет корней.

**Ответ.** Корней нет.

4) Решить уравнение

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7.$$

**Решение:** Возведем обе части уравнения в квадрат и произведем приведение подобных членов, перенос слагаемых из одной части равенства в другую и умножение обеих частей на  $1/2$ .

В результате получим уравнение

$\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{20-x} = 12$ , являющееся следствием исходного. Снова возведем обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение

$$(x+5)(20-x) = 144$$

которое приводится к виду  $x^2 - 15x + 44 = 0$ .

Это уравнение (также являющееся следствием исходного) имеет корни

$$x_1 = 4, x_2 = 11.$$

Оба корня, как показывает проверка, удовлетворяют исходному уравнению.

**Ответ.**

$$x_1 = 4, x_2 = 11.$$

**Форма представления результата:** выполненные задания 1, 2.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

#### Практическое занятие №9

#### «Преобразования выражений, содержащих степени и радикалы»

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ2 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

Пруб умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

1) Провести упрощение степеней с рациональным показателем:

а)  $\frac{3c^2d^3}{16x^2y^{-3}} \left(\frac{-cd}{4xy}\right)^2.$

б)  $\left(\frac{a^{-8} + a^{-2}}{a^{-3} + a^3}\right)^{-2}.$

2) Выполнить действия:  $\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$

### Порядок выполнения работы

1) а) Вынесите знак минус из произведения. Воспользуйтесь свойством степени с отрицательным показателем. Употребите свойство воспроизведения во вторую степень. Для окончательного упрощения этого примера воспользуйтесь правилом умножения дробей. В последнем шаге воспользуйтесь делением степеней с одинаковым показателем.

б) В этом случае надо применит свойство степеней с отрицательным показателем. Чтобы разгрузить полученную дробь, надо преобразовать эту дробь в деление. Привести дробь к общему знаменателю и произвести сложение дробей с общим знаменателем. Последним шагом сделать сокращение.

2) Определите порядок действия. Выражение в первой скобке приведите к общему знаменателю, в числителе сделайте группировку и вынесите общий множитель за скобку. Выполните деление, сократите на общий множитель. Последнее действие – сложение дробей с одинаковыми знаменателями. Приведите подобные слагаемые.

### Ход работы

1) Упростить выражение: 
$$\frac{((x^6)^{-3}(x^2)^4)y^6}{x^2y^3} - \frac{x^7y^5z^7}{x^{10}y^{10}z^{17}} =$$

Вначале надо провести раскрытие скобок, для этого воспользуемся свойством степеней.

$$= \frac{x^{((-3)6)x^{(4)2}}y^{6-3}}{x^2} - x^{7-10}y^{5-10}z^{7-17} = x^{-12}y^3 \cdot x^{-3}y^{-5}z^{-10} =$$

Воспользуемся свойством степеней с отрицательным показателем.

$$= \frac{y^3}{x^{12}} - \frac{1}{x^3y^5z^{10}}.$$

Ответ: 
$$\frac{y^3}{x^{12}} - \frac{1}{x^3y^5z^{10}}$$

2) Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$$

**Решение.** Введем обозначение  $a = \sqrt{x}$ , тогда  $x = (\sqrt{x})^2 = a^2$ ,  $x\sqrt{x} = a^2a = a^3$ .

Формула из условия задачи после замены будет выглядеть так: 
$$\frac{a+1}{a^3+a^2+a} : \frac{1}{a^4-a}.$$

Заметим, что  $a^4-a = a(a^3-1^3) = a(a-1)(a^2+a+1)$ .

Тогда 
$$\frac{a+1}{a^3+a^2+a} : \frac{1}{a^4-a} = \frac{a+1}{a(a^2+a+1)} \cdot \frac{a(a-1)(a^2+a+1)}{1} = (a+1)(a-1) = a^2-1.$$

Вернемся к замене:  $a^2-1=x-1$ .

Ответ:  $x-1$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

#### Практическое занятие № 10

#### «Решение показательных уравнений»

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

#### Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПРб3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

ПРу7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

ПРу8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем.

#### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### Задание:

Решить уравнение:

а)  $3^{x^2-4,5} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{27}$ ;

в)  $0,1^{x^2-0,5} \cdot \sqrt{0,1} = 0,001$ ;

$$c) 4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x - 17 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 = 0.$$

**Порядок выполнения работы:**

а-в) Обе части уравнения приводим к одному основанию:  $a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}$ , где  $(a > 0, a \neq 1)$ .  
Затем используем следующее свойство:  $(a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}) \Leftrightarrow (f(x) = \Phi(x))$ .

с) Решаем квадратное уравнение относительно переменной  $(1/4)^x$ .

**Ход работы**

Решите уравнение:  $0,1^{x^2-0,5} \cdot \sqrt{0,1} = 0,001$ .

**Решение:** Преобразуем уравнение к виду:  $a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}$ .

$0,1^{x^2-0,5} \cdot 0,1^{0,5} = 0,1^3 \Leftrightarrow 0,1^{x^2-0,5+0,5} = 0,1^3 \Leftrightarrow 0,1^{x^2} = 0,1^3$ . Затем решаем уравнение:  
 $x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

**Тема 1.3. Корни, степени логарифмы**

**Практическое занятие № 11**

**«Решение показательных неравенств»**

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб2 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПРб3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром;

применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

Решить неравенство:

а)  $10^{4x-5} > -0,1$ ;

в)  $\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-5,5} \leq \left(\frac{27}{125}\right)^3$ ;

с)  $3^{\frac{x-4}{x}-3} < \frac{1}{27}$

#### **Порядок выполнения работы:**

Обе части неравенства приведите к одному основанию:  $a^{f(x)} > a^{\Phi(x)}$ . При решении данного неравенства имеет место преобразование:  $a^{f(x)} > a^{\Phi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \Phi(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \Phi(x) \end{cases}$ .

#### **Ход работы**

Решите неравенство:  $5^x \cdot 2^x > 0,1^{-3}$ .

**Решение:** Преобразуем неравенство к виду:  $a^{f(x)} > a^{\Phi(x)}$ . Для левой части неравенства используем свойство степеней:  $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ , для правой части свойство степеней с отрицательным показателем, получаем:

$$(5 \cdot 2)^x > (10^{-1})^{-3} \Leftrightarrow 10^x > 10^3 \Rightarrow x > 3.$$

**Форма представления результата:** выполненное задание

#### **Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

#### Практическое занятие № 12

##### «Решение показательных уравнений и неравенств»

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ2 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПРБ3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;

умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность

функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение

использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить уравнение:

а)  $0,1^{x^2-0,5} \cdot \sqrt{0,1} = 0,001$ ;

в)  $4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x - 17 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 = 0$ .

**Порядок выполнения работы:**

а-в) Обе части уравнения приводим к одному основанию:  $a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}$ , где  $(a > 0, a \neq 1)$



.Затем используем следующее свойство:  $(a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}) \Leftrightarrow (f(x) = \Phi(x))$ .

**Ход работы:**

Решите уравнение:  $0,1^{x^2-0,5} \cdot \sqrt{0,1} = 0,001$ .

**Решение:** Преобразуем уравнение к виду:  $a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}$ .

$$0,1^{x^2-0,5} \cdot 0,1^{0,5} = 0,1^3 \Leftrightarrow 0,1^{x^2-0,5+0,5} = 0,1^3 \Leftrightarrow 0,1^{x^2} = 0,1^3.$$

Затем решаем уравнение:  $x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$ .

Решить неравенство:

в)  $\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-5,5} \leq \left(\frac{27}{125}\right)^3$ ;

с)  $3^{\frac{x-4}{x}-3} < \frac{1}{27}$

Обе части неравенства приведите к одному основанию:  $a^{f(x)} > a^{\Phi(x)}$ . При решении данного неравенства имеет место преобразование:  $a^{f(x)} > a^{\Phi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \Phi(x) \end{cases}$  или  $\begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \Phi(x) \end{cases}$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

#### Практическое занятие № 13

**«Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому. Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений»**

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ2 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПРБ3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

- 1) Найдите значения выражений:
  - a)  $\log_5 135 - \log_5 5,4$ ;
  - b)  $\log_4 104 - \log_4 6,5$ ;
  - c)  $\log_3 \log_9 \sqrt[27]{\sqrt[3]{9}}$ .
- 2) Найдите значения выражений:
  - a)  $5^{\log_5 2} + 36^{\log_6 \sqrt{19}}$ ;
  - b)  $2^{\log_2 5} + 81^{\log_9 \sqrt{19}}$ ;
  - c)  $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0,125}$ .

**Порядок выполнения работ**

- 1) Используйте соответствующие свойства логарифмов и определение логарифма.
- 2) Используйте основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов.

**Ход работы:**

- 1) Вычислите:  $\log_{0,25} 0,64 + \log_{0,5} 10$ .

**Решение:**  $\log_{0,25} 0,64 + \log_{0,5} 10 =$

Используем формулу перехода к новому основанию  $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ , получим

$$= \frac{\log_{0,5} 0,64}{\log_{0,5} 0,25} + \log_{0,5} 10 = \frac{1}{2} \log_{0,5} 0,64 + \log_{0,5} 10 =$$

далее используем свойства логарифма степени и логарифма произведения

$$= \log_{0,5} \sqrt{0,64} + \log_{0,5} 10 = \log_{0,5} (0,8 \cdot 10) = \log_{0,5} 8 = -3.$$

Ответ: -3.

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

#### Практическая работа № 14

##### «Построение графиков логарифмических функций»

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР65 умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выразить формулами зависимости между величинами;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;

умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выразить формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность

функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение

использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

Задание №1. В одной системе координат построить график элементарной и данной функций.

	A	B	B
1	$y = \log_2(x - 3)$	$y = 2 - \log_{\frac{1}{2}}x$	$y = \log_3(x - 2) + 1$
2	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$	$y = \log_2x + 2$	$y = 3 - \log_{\frac{1}{3}}(x - 4)$
3	$y = \log_3(x - 1)$	$y = 3 - \log_{\frac{1}{3}}x$	$y = \log_4(x + 2) - 3$
4	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$	$y = \log_4x - 1$	$y = \log_{\frac{1}{4}}(x - 1) - 2$
5	$y = \log_4(x - 3)$	$y = 4 - \log_{\frac{1}{4}}x$	$y = 2 - \log_2(x - 4)$
6	$y = \log_{\frac{1}{4}}(x + 1)$	$y = \log_2x + 3$	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) + 2$
7	$y = \log_2(x - 2)$	$y = \log_{\frac{1}{2}}x - 2$	$y = \log_3(x - 5) + 1$
8	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$	$y = \log_3x + 4$	$y = 4 - \log_{\frac{1}{3}}(x - 4)$
9	$y = \log_3(x - 2)$	$y = 1 - \log_{\frac{1}{3}}x$	$y = \log_4(x + 1) - 5$
10	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 3)$	$y = \log_4x - 1$	$y = \log_{\frac{1}{4}}(x - 2) - 1$
11	$y = \log_4(x - 1)$	$y = \log_{\frac{1}{4}}x + 2$	$y = 1 - \log_2(x + 1)$
12	$y = \log_{\frac{1}{4}}(x + 2)$	$y = \log_2x - 5$	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + 3$
13	$y = \log_2(x - 1)$	$y = 2 - \log_{\frac{1}{2}}x$	$y = \log_3(x + 2) + 2$
14	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$	$y = \log_3x + 3$	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 3) + 2$
15	$y = \log_3(x - 4)$	$y = \log_{\frac{1}{3}}x - 1$	$y = 5 - \log_4(x - 4)$

Задание №2. В одной системе координат построить график данной функции  $y = f(x)$  и график модуля функции  $y = |f(x)|$

1	$y = \log_{\frac{1}{4}}(x - 2) - 1$	6	$y = \log_4(x + 1) - 1$	11	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 3) + 1$
2	$y = 3 - \log_2(x - 4)$	7	$y = \log_{\frac{1}{4}}(x - 2) + 1$	12	$y = 5 - \log_4(x - 4)$
3	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) - 2$	8	$y = 1 - \log_2(x + 2)$	13	$y = \log_3(x - 2) + 3$
4	$y = \log_3(x - 4) + 1$	9	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + 3$	14	$y = 3 - \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)$
5	$y = 4 - \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$	10	$y = \log_3(x + 2) + 2$	15	$y = \log_4(x + 2) - 3$

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

## Практическое занятие № 15

### «Решение логарифмических уравнений»

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

#### Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПРб3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Пру6 умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем.

#### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### Задание:

Решите уравнение:  $\ln(x+4) - \ln(x+3) = \ln 3$

Используя свойства логарифмов обе части уравнения приводим к одному основанию

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ,  $a > 1$ . Потенцируем обе части уравнения, получаем  $f(x) = g(x)$ . Решаем полученное уравнение. Т.к. потенцирование уравнения может привести к появлению посторонних корней, то делаем проверку. Записываем ответ.

#### Порядок выполнения работы:

Записать задание в тетрадь и решить.

### Ход работы

$$\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = (x-4) \cdot \log_7 5.$$

**Решение:** Согласно свойствам логарифмической функции :  
 $\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = \log_7 5^{x-4} \Leftrightarrow 5^{\sqrt{x+2}} = 5^{x-4} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x-4 \Rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16$ ; Приводим уравнение к стандартному виду  $x^2 - 9x + 14 = 0$ . Решаем квадратное уравнение и получаем корни  $x_1=2$ ,  $x_2=7$ . Проверка показывает, что  $x_1=2$  является посторонним корнем. Ответ: 7

**Форма представления результата:** выполненное задание

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

### Практическое занятие № 16

#### «Решение логарифмических неравенств»

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

### Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПРб3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Пруб умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять

преобразования графиков функций;  
 умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

$$2\log_3(x-1) - \log_3(2x-5) \leq 1$$

**Порядок выполнения работы:**

1) Работаем по алгоритму: используя определение логарифма обе части неравенства приводим к одному основанию, т. е. получаем неравенство вида  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ . Если основание логарифма  $a = x-3 > 1$ , то неравенство  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$  равносильно любой из систем:

$$\text{систем: } \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Если  $0 < x-3 < 1$ , то неравенство  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$  равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Решаем полученную систему, записываем ответ.

2) В левой части неравенства делаем преобразования, используя свойства логарифмов-логарифм степени и логарифм частного:

$$\log_c a^k = k \cdot \log_c a, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0;$$

$$\log_c \left( \frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Получаем неравенство вида  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ,  $a > 1$ , которое заменяем на равносильную систему:

$$\text{систему: } \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Решаем полученную систему, записываем ответ.

**Ход работы**

1) Решить неравенство

$$\log_{2x}(x^2 + 2x + 2) \leq 2.$$

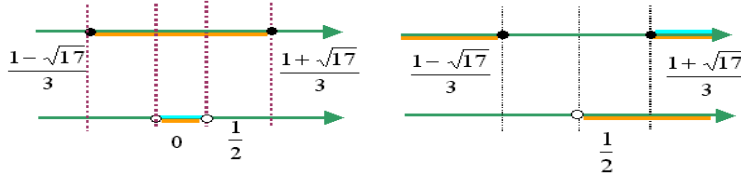
Решение: Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 \geq 4x^2, \\ x^2 + 2x + 2 > 0, \\ 0 < 2x < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 2 \leq 4x^2, \\ x^2 + 2x + 2 > 0, \\ 2x > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 \leq 0, \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 \geq 0, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \leq 0, \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \geq 0, \\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Применим метод интервалов



Ответ:  $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ .

2) Решить неравенство

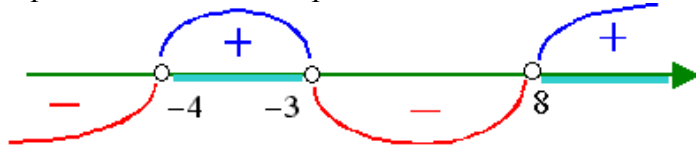
$$\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0$$

Решение:

$$\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < \log_{0,3} 1; \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 6 \Leftrightarrow \frac{(x + 3)(x - 8)}{x + 4} > 0.$$

Применим метод интервалов



$$x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty).$$

При этих значениях  $x$  все выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны.

Ответ:  $x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty)$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.



### Тема 1.3. Корни, степени логарифмы

#### Практическое занятие № 17

#### «Решение логарифмических уравнений и неравенств»

**Цель работы:** Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР62 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПР63 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

Пру6 умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;

умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции;

умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задания:**

**Задание №1.** Решите логарифмические уравнения и их системы

а	б
$\log_{\sqrt{2}} x + 4 + \log_4 x + \log_3 x = 2$	$\begin{cases} \lg x - \lg y = 7 \\ \lg x + \lg y = 5 \end{cases}$

**Задание №2.** Решить логарифмическое неравенство

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{\frac{1}{8}} x \leq 3,5$$

**Порядок выполнения работы:**

1) Работаем по алгоритму: используя определение логарифма обе части неравенства приводим к одному основанию, т. е. получаем неравенство вида  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ . Если основание логарифма  $a = x - 3 > 1$ , то неравенство  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$  равносильно любой из

$$\text{систем: } \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}.$$

Если  $0 < x - 3 < 1$ , то неравенство  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$  равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}. \text{ Решаем полученную систему, записываем ответ.}$$

2) В левой части неравенства делаем преобразования, используя свойства логарифмов-логарифм степени и логарифм частного:

$$\log_c a^k = k \cdot \log_c a, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0;$$

$$\log_c \left( \frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Получаем неравенство вида  $\log_a f(x) < g(x)$ ,  $a > 1$ , которое заменяем на равносильную

$$\text{систему: } \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}. \text{ Решаем полученную систему, записываем ответ.}$$

**Ход работы:**

Записать задание в тетрадь и решить.

3) Решить неравенство

$$\log_{2x} (x^2 + 2x + 2) \leq 2.$$

Решение: Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 \geq 4x^2, \\ x^2 + 2x + 2 > 0, \\ 0 < 2x < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 2 \leq 4x^2, \\ x^2 + 2x + 2 > 0, \\ 2x > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 \leq 0, \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 \geq 0, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \left( x - \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right) \left( x - \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right) \leq 0, \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3 \left( x - \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right) \left( x - \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right) \geq 0, \\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Применим метод интервалов

$$\text{Ответ: } x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty).$$

**Форма представления результата:** выполненное задание

### **Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## **Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений**

### **Практическое занятие № 18**

#### **«Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой. Нахождение значений тригонометрических функций»**

**Цель работы:** Научиться переходить от радианной меры углов к градусной и обратно. Научится находить значения тригонометрических функций по определению.

#### **Выполнение работы способствует формированию:**

Умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;

умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

- Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах  
а)  $150^\circ$  б)  $450^\circ$  в)  $40^\circ$
- Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах  
а)  $\frac{\pi}{18}$  б)  $4\pi$  в)  $\frac{4\pi}{9}$
- Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для

углов:

а)  $-210^\circ$       б)  $\frac{2\pi}{3}$

### Порядок выполнения работы

1. Радианная и градусная меры связаны зависимостью  $180^\circ = \pi$  радиан. Поэтому  $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$ , значит  $\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \alpha$  радиан.

2. Чтобы выразить угол в градусной мере воспользуйтесь соотношением  $1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$ .

3. Начертите единичную окружность, отложите заданный угол, помня, что положительным считается угол, откладываемый против часовой стрелки, а отрицательным – по часовой стрелке.

• Синусом угла  $\alpha$  называется ордината точки единичной окружности, полученной при повороте начального радиуса на угол  $\alpha$ .

• Косинусом угла  $\alpha$  называется абсцисса точки единичной окружности, полученной при повороте начального радиуса на угол  $\alpha$ .

• Тангенсом угла  $\alpha$  называется отношение ординаты точки единичной окружности к ее абсциссе.

• Котангенсом угла  $\alpha$  называется отношение абсциссы точки единичной окружности к ее ординате.

### Ход работы:

1. Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах

а)  $120^\circ$     б)  $225^\circ$     в)  $10^\circ$

а)  $120^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ;    б)  $225^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$ ;    в)  $10^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 10^\circ = \frac{\pi}{18}$ .

2. Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах

а)  $\frac{3\pi}{5}$       б)  $\frac{2\pi}{9}$       в)  $\frac{5\pi}{6}$

а)  $\frac{3\pi}{5} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{5} = 108^\circ$     б)  $\frac{2\pi}{9} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{9} = 40^\circ$     в)  $\frac{5\pi}{6} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$

3. Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для углов:

а)  $-120^\circ$       б)  $\frac{3\pi}{5}$

Построим единичную окружность и отложим данные углы. Угол  $-120^\circ$  откладываем по часовой стрелке. Точка, соответствующая углу  $-120^\circ$  лежит в III четверти, значит,

$\cos(-120^\circ) < 0$ ,  $\sin(-120^\circ) < 0$ ,  
 $\text{tg}(-120^\circ) > 0$ ,  $\text{ctg}(-120^\circ) > 0$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

### Практическое занятие № 19

#### «Преобразование тригонометрических выражений. Основные тригонометрические тождества»

**Цель работы:** Научиться находить значения тригонометрических функций, используя основные тригонометрические тождества.

#### Выполнение работы способствует формированию:

Умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;

Умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

#### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### Задание:

Найдите значения тригонометрических функций, если известно:

1)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2)  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

3)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8}{15}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

#### Порядок выполнения работы

1. Запишите, что дано в задании.
2. Запишите формулы основных тригонометрических тождеств, содержащие данную функцию и ту, которую необходимо найти.
3. Выразите неизвестную функцию. Если необходимо извлечь квадратный корень, то определите знак искомой функции, используя заданную четверть.
4. Вычислите значения всех неизвестных функций.

#### Ход работы:

Найдите значения тригонометрических функций, если известно:

1)  $\cos \alpha = 0,8, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

$$2) \sin \alpha = 0,6, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$a) \text{ Дано: } \cos \alpha = 0,8, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

Найти:  $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$

Решение: 1) Запишем основное тригонометрическое тождество  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Выразим из него искомую функцию  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

Так как синус в IV четверти имеет отрицательное значение, то  $\sin \alpha = -\sqrt{1 - 0,64} = -\sqrt{0,36} = -0,6$ .

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-0,6}{0,8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

$$б) \text{ Дано: } \sin \alpha = 0,6, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

Найти:  $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$

Решение: 1) Запишем основное тригонометрическое тождество  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Выразим из него искомую функцию  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то  $\cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8$ .

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

$$в) \text{ Дано: } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

Найти:  $\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$

Решение: 1) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = -1\frac{1}{3}$

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Выразим из него искомую функцию  $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = -\frac{4}{5} = -0,8$ .

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

Так как синус во II четверти положительный, то  $\sin \alpha = \sqrt{1 - 0,64} = \sqrt{0,36} = 0,6$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

### Практическое занятие № 20

#### «Преобразования тригонометрических выражений. Формулы сложения, удвоения. Формулы приведения»

**Цель работы:** Научиться преобразовывать тригонометрические выражения, используя тригонометрические формулы.

**Выполнение работы способствует формированию:**

Пруб умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;

умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность

функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение

использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств

и их систем;

### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

### Задание:

1. Вычислите  $\frac{\cos 12^\circ \cdot \cos 48^\circ - \sin 12^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\cos 54^\circ \cdot \sin 36^\circ + \cos 36^\circ \cdot \sin 54^\circ}$

2. Дано  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ;  $\cos \beta = -\frac{24}{25}$ ;  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ;  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ .

Найдите  $\sin(\alpha - \beta)$ .

3. Докажите тождество:  $\frac{\sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \sin \beta} = \operatorname{tg} \alpha$

### Порядок выполнения работы

1) Запишите задание и определите, какими формулами тригонометрии нужно воспользоваться.

2) Примените эти формулы.

3) Упростите получившееся выражение. Вычислите, если это необходимо, значение выражения.

### Ход решения:

1. Вычислите  $\frac{\cos 71^\circ \cdot \cos 26^\circ + \sin 71^\circ \cdot \sin 26^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 25^\circ}$

Решение:

$$\frac{\cos 71^\circ \cdot \cos 26^\circ + \sin 71^\circ \cdot \sin 26^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 25^\circ}$$

Для решения нам необходимо использовать формулы сложения:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\cos 71^\circ \cdot \cos 26^\circ + \sin 71^\circ \cdot \sin 26^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 25^\circ} = \frac{\cos(71^\circ - 26^\circ)}{\sin(20^\circ + 25^\circ)} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

2. Дано  $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ;  $\cos \beta = \frac{4}{5}$ ;  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ .

Найдите  $\sin(\alpha + \beta)$ .

Решение: Для решения нам нужно использовать формулу сложения  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Но нам неизвестны значения  $\cos \alpha$  и  $\sin \beta$ .

Найдем сначала эти значения, используя основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$$\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то  $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{64}{289}} = -\sqrt{\frac{225}{289} - \frac{64}{289}} = -\frac{15}{17}$ .

Так как синус в I четверти положительный, то  $\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ .

Подставим найденные значения в формулу и вычислим значение  $\sin(\alpha + \beta)$ .



$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{8}{17} \cdot \frac{4}{5} + \left(-\frac{15}{17}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{32}{85} - \frac{45}{85} = -\frac{13}{85}$$

3. Докажите тождество:  $\frac{\sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \sin \beta} = \operatorname{tg} \alpha$

Доказательство:

Выпишем отдельно левую часть тождества и преобразуем ее, используя формулы сложения:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta + \beta)}{\cos(\alpha - \beta + \beta)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$$

Тождество доказано.

Возможен и другой способ доказательства:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \sin \beta} = \frac{(\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cos \beta + (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cos \beta - (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) \sin \beta} =$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$$= \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \sin^2 \beta}{\cos \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \sin^2 \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin \alpha \cdot \sin^2 \beta}{\cos \alpha \cdot \cos^2 \beta + \cos \alpha \cdot \sin^2 \beta}$$

$$= \frac{\sin \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)}{\cos \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$$

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

### Практическое занятие № 21

#### «Преобразования тригонометрических выражений. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение. Преобразование произведения тригонометрических функций с сумму»

**Цель работы:** Научиться преобразовывать тригонометрические выражения, используя тригонометрические формулы.

**Выполнение работы способствует формированию:**

Пруб умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Найдите значение выражения:  $\frac{\sin 72^\circ - \sin 42^\circ}{\cos 72^\circ - \cos 42^\circ}$
2. Упростите выражение:  $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}$ .
3. Докажите тождество:  $\frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$

**Порядок выполнения работы**

- 1) Запишите задание и определите, какими формулами тригонометрии нужно воспользоваться.
- 2) Примените эти формулы.
- 3) Упростите получившееся выражение. Вычислите, если это необходимо, значение выражения.

**Ход работы:**

1. Найдите значение выражения:  $\frac{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}$

Для решения нам нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Решение:

$$\frac{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ} = \frac{2 \cos \frac{68^\circ + 22^\circ}{2} \cdot \sin \frac{68^\circ - 22^\circ}{2}}{-2 \sin \frac{68^\circ + 22^\circ}{2} \cdot \sin \frac{68^\circ - 22^\circ}{2}} = \frac{2 \cos 45^\circ \cdot \sin 23^\circ}{-2 \sin 45^\circ \cdot \sin 23^\circ} = -\frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$$

2. Упростите выражение:  $\frac{\sin(180^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) \cdot \cos(360^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}$ .

При решении этого задания нужно применить формулы приведения. Для этого вспомним мнемоническое правило: 1) Название функции не меняется, если к аргументу  $\alpha$  прибавляется  $-\pi$  или  $\pi$ .

Название функции меняется, если к аргументу  $\alpha$  прибавляется  $-\frac{\pi}{2}$  или  $\frac{\pi}{2}$ ,  $n$ -нечетное число.

2) Ставится знак исходной функции, считая, что  $\alpha$  - острый угол.

Решение:

$$\frac{\sin(180^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) \cdot \cos(360^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot (-\sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha$$

3. Докажите тождество:  $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$

Для решения нам нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Решение:

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$$

Выпишем отдельно левую часть тождества и преобразуем ее, используя формулы:

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \sin 5\alpha) + \sin 3\alpha}{(\cos\alpha + \cos 5\alpha) + \cos 3\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha+5\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-5\alpha}{2} + \sin 3\alpha}{2\cos\frac{\alpha+5\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-5\alpha}{2} + \cos 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha \cdot \cos(-2\alpha) + \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos(-2\alpha) + \cos 3\alpha} =$$

$$\begin{aligned} & \text{Воспользуемся четностью косинуса } \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ & = \frac{\sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha \cdot (\cos 2\alpha + 1)}{\cos 3\alpha \cdot (\cos 2\alpha + 1)} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \\ & \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha \end{aligned}$$

Тождество доказано.

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

### Практическое занятие № 22

**Построение графиков тригонометрических функций с использованием геометрических**

## преобразований

**Цель работы:** Научиться строить графики тригонометрических функций

### Выполнение работы способствует формированию:

ПР65 умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выразить формулами зависимости между величинами;

Пру6 умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;

умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выразить формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность

функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение

использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

### Задание:

Построить график функции  $y = 3\sin(x - \frac{\pi}{8})$ . Записать свойства этой функции.

### Порядок выполнения работы:

При построении графика нужно воспользоваться преобразованиями графиков.

1.  $y = f(x) + b$  – график функции получается из графика функции  $y = f(x)$  путем параллельного переноса этого графика на величину вдоль от ОУ. При этом, если  $b > 0$ , то график функции  $f(x) + b$  располагается выше графика функции  $f(x)$ , если  $b < 0$ , то ниже этого графика.

2.  $y = f(x + b)$  – график функции получается из графика функции  $y = f(x)$  с помощью параллельного переноса этого графика на величину  $b$  вдоль оси ОХ, при этом, если  $b > 0$ , то сдвиг влево, а если  $b < 0$ , то сдвиг вправо.

3.  $y = -f(x)$  – график симметричен графику  $y = f(x)$  относительно оси ОХ

4.  $y = a f(x)$  – график функции получается из графика функции  $y = f(x)$  с помощью растяжения или сжатия графика по оси ОУ пропорционально коэффициенту  $a$ , причем, если  $a > 1$ , то все ординаты графика  $af(x)$  увеличиваются в  $a$  раз, если  $a < 1$ , то уменьшаются в  $a$  раз.

5.  $y = f(ax)$  – график функции получается из графика функции  $y = f(x)$  с помощью растяжения или сжатия вдоль оси ОХ пропорционально коэффициенту  $a$ , причем, если  $a > 1$ , то график сжимается в  $a$  раз, если  $0 < a < 1$ , то растягивается в  $1/a$  раз.

6.  $y = |f(x)|$  – для построения этого графика нужно построить график функции  $y = f(x)$  и отобразить относительно оси ОХ те части графика, которые расположены ниже этой оси.

После построения графика проведите исследование функции по общей схеме.

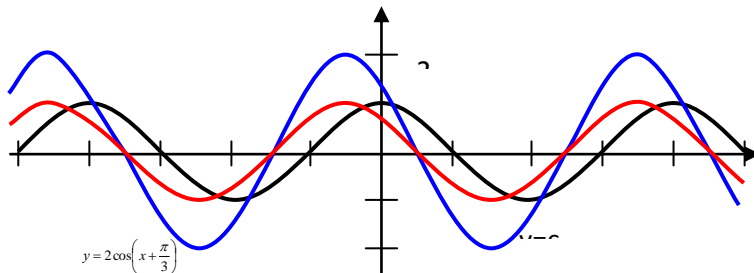
### Ход работы

Построить график функции  $y = 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$ . Записать свойства этой функции.

Сначала построим график функции  $y = \cos x$

Перенесем график функции  $y = \cos x$  на  $\frac{\pi}{3}$  влево. Получим график функции  $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ .

Растянем график получившейся функции в 2 раза вдоль оси Оу.



Исследуем функцию по общей схеме:

1.  $D(y) = \mathbb{R}$ ;
2.  $E(y) = [-2; 2]$
3.  $y = 0$ , при  $x = \pi/6 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;
4. Функция общего вида.
5. Функция

при  $x \in (2\pi/3 + 2\pi n; 5\pi/3 + 2\pi n)$  – функция немонотонная, возрастает;  
 при  $x \in (-\pi/3 + 2\pi n; 2\pi/3 + 2\pi n)$  – функция убывает;  
 6.  $(-\pi/3 + 2\pi n; 2\pi/3 + 2\pi n)$  –  $\min$ ;  $(5\pi/3 + 2\pi n; 2\pi/3 + 2\pi n)$  –  $\max$ ;  
 7.  $T=2\pi$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

### Практическое занятие № 23

#### «Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства»

**Цель работы:** Научиться решать простейшие тригонометрические уравнения.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР63 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы; Пру6 умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

Решите тригонометрические уравнения:

1)  $\cos 3x = 0$

2)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

3)  $3 \operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

4)  $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5)  $\sin 4x \cdot \cos 3x + \cos 4x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$

#### **Порядок выполнения работы:**

1. Записать уравнение и определить, к какому виду оно относится и какой формулой необходимо воспользоваться.

2. Решить уравнение.

3. Записать ответ.

#### **Ход работы:**

Решите тригонометрические уравнения:

1)  $\sin 2x = 0$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни находятся по формуле

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни находятся по формуле

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3) 2 \cos 3x = -1$$

Разделим обе части уравнения на 2. Получим уравнение:  $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ .

Это уравнение не является частным случаем,  $a = -\frac{1}{2}, |a| < 1$ . Поэтому оно имеет решение, которое находится по формуле:  $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$3x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4) \operatorname{tg}\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Уравнение имеет решение, которое находится по формуле:  $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$6x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Функция  $y = \operatorname{arctg} x$  нечетная, поэтому  $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ .

$$6x - \frac{\pi}{4} = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$6x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$6x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$6x = \frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{6} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{6} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5) \cos 6x \cdot \cos 3x + \sin 6x \cdot \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Видим, что левую часть можно свернуть по формулам сложения:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(6x - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Теперь уравнение является простейшим и его корни находятся по формуле:  
 $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$$3x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n, n \in \mathbb{Z}$

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

### Практическое занятие № 24

#### «Тригонометрические уравнения и методы их решения»

**Цель работы:** Научиться решать тригонометрические уравнения.

**Выполнение работы способствует формированию:**

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность



функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

Решите тригонометрические уравнения:

- 1)  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$
- 2)  $8\sin^2 x + 6\cos x - 3 = 0$
- 3)  $6\tg^2 x + \tg x - 1 = 0$
- 4)  $\sin 4x + \sin 3x = 0$
- 5)  $\cos^2(\pi - x) + 8\cos(\pi + x) + 7 = 0$

**Порядок выполнения работы:**

- 1. Запишите уравнение и определите, каким способом уравнение возможно свести к простейшим уравнениям.
- 2. Если необходимо, введите новую переменную и решите уравнение относительно этой переменной. После решения уравнения с новой переменной вернитесь к замене. Должно получиться простейшее тригонометрическое уравнение, решив которое, получим корни данного уравнения. Помните, что, если уравнение содержит функции  $y = \tg x, y = \ctg x$ , то необходимо учесть их область определения.
- 3. Если уравнение можно представить в виде произведения нескольких множителей, и правая часть равна нулю, то разложите левую часть на множители и используйте правило, когда произведение равно нулю. Приравняв каждый множитель к нулю, получим несколько простейших уравнений, которые необходимо решить, учитывая область допустимых значений.
- 4. Запишите ответ.

**Ход работы:**

Решите тригонометрические уравнения:

1)  $2\cos^2 x + \cos x = 1$

Решение:

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть  $\cos x = t$ , тогда наше уравнение примет вид  $2t^2 + t = 1$

Перенесем 1 в левую часть и получим полное квадратное уравнение

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9, \quad \sqrt{D} = 3$$

$$t_1 = \frac{-1 - 3}{4} = -1;$$

$$t_2 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Вернемся к старой переменной:

$$\cos x = -1 \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Получили два простейших тригонометрических уравнения, первое относится к частным случаям, а второе решается по общей формуле. Решим их.

1)  $\cos x = -1$

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi + 2\pi n, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Решение:

Это уравнение содержит разноименные функции, поэтому сразу ввести новую переменную не получится.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и выразим одну функцию через другую:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ 2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 &= 0 \\ 2 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \\ -2\sin^2 x + \sin x + 1 &= 0 \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть  $\sin x = t$ , тогда наше уравнение примет вид:  $2t^2 - t - 1 = 0$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9, \quad \sqrt{D} = 3$$

$$t_1 = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$t_2 = \frac{1 + 3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Вернемся к старой переменной:

$$\sin x = 1 \quad \text{или} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

Получили два простейших тригонометрических уравнения, первое относится к частным случаям, а второе решается по общей формуле. Решим их.

$$1) \sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin x = -\frac{1}{2} \quad x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3) 5\text{ctg}^2 x - 8\text{ctg} x + 3 = 0$$

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть  $\text{ctg} x = t$ , тогда наше уравнение примет вид:  $5t^2 - 8t + 3 = 0$

Учитываем ОДЗ  $x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$5t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4, \quad \sqrt{D} = 2$$

$$t_1 = \frac{8 - 2}{10} = 0,6;$$

$$t_2 = \frac{8+2}{10} = 1$$

Вернемся к старой переменной:

$$\operatorname{ctg} x = 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} x = 0,6.$$

Решим их.

$$1) \operatorname{ctg} x = 1 \quad x = \operatorname{arccot} 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{ctg} x = 0,6 \quad x = \operatorname{arccot} 0,6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \operatorname{arccot} 0,6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4) \cos 2x + \cos 4x - \cos 3x = 0$$

Решение:

Используя формулы преобразования суммы и разности функций в произведение, разложим правую часть уравнения на множители:

$$2\cos \frac{2x+4x}{2} \cdot \cos \frac{2x-4x}{2} - \cos 3x = 0$$

$$2\cos 3x \cdot \cos(-2x) - \cos 3x = 0 \quad \cos(-2x) = \cos 2x$$

$$2\cos 3x \cdot \cos 2x - \cos 3x = 0$$

$$\cos 3x(2\cos 2x - 1) = 0$$

$$\cos 3x = 0 \quad \text{или} \quad 2\cos 2x - 1 = 0$$

Получили два простейших тригонометрических уравнения, первое относится к частным случаям, а второе решается по общей формуле. Решим их.

$$1) \cos 3x = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2\cos 2x - 1 = 0$$

$$2\cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5) 2\sin^2(\pi - x) + 5\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 2 = 0$$

Решение:

Сначала нужно применить формулы приведения:  $\sin^2(\pi - x) = \sin^2 x$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$\text{Получим уравнение: } 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть  $\sin x = t$ , тогда наше уравнение примет вид:  $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9, \quad \sqrt{D} = 3$$

$$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2};$$

$$t_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Вернемся к старой переменной:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sin x = 2.$$

$$1) \sin x = \frac{1}{2} \quad x = (-1)^n \operatorname{arcsin} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$2) \sin x = 2 \quad \text{Уравнение не имеет решений, т.к. } 2 > 1$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

### Практическое занятие № 25

#### «Тригонометрические уравнения»

**Цель работы:** Научиться решать однородные тригонометрические уравнения.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРy7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

ПРy8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

Решите тригонометрические уравнения:

$$1) \sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x = 0$$

- 2)  $7\sin^2 x - 4\sin 2x + \cos^2 x = 0$
- 3)  $6\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 1$
- 4)  $5\cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x = 2$

**Порядок выполнения работы:**

1. Установите, является ли уравнение однородным.

*Однородными тригонометрическими уравнениями* называются уравнения вида:

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x \cdot \cos x = 0$$

2. Если уравнение является однородным уравнением первого порядка, то разделите обе части уравнения на  $\cos x \neq 0$  или  $\sin x \neq 0$ .

3. Если уравнение является однородным уравнением второго порядка, то разделите обе части уравнения на  $\cos^2 x \neq 0$  или  $\sin^2 x \neq 0$ .

4. Введите новую переменную и решите уравнение относительно этой переменной.

5. Вернитесь к старой переменной и решите получившиеся простейшие тригонометрические уравнения.

6. Запишите ответ.

**Ход работы:**

Решите тригонометрические уравнения:

1)  $2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$

Решение:

Уравнение является однородным тригонометрическим уравнением второго порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на  $\cos^2 x \neq 0$ .

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + 3 = 0$$

Знаем, что  $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ .

$$2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 3 = 0$$

Введем новую переменную. Пусть  $\operatorname{tg} x = t$ , тогда наше уравнение примет вид:  $2t^2 - 5t + 3 = 0$

Учитываем ОДЗ:  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1, \sqrt{D} = 1$$

$$t_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{5+1}{4} = 1,5$$

Вернемся к старой переменной:

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = 1,5$$

1)  $\operatorname{tg} x = 1 \quad x = \arctg 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2)  $\operatorname{tg} x = 1,5 \quad x = \arctg 1,5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \arctg 1,5 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

2)  $4\sin^2 x - 3\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$

Сначала преобразуем аргумент, используя формулы двойного аргумента:  $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ .

$$4\sin^2 x - 6\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$$

Уравнение является однородным тригонометрическим уравнением второго порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на  $\sin^2 x \neq 0$ .

$$\frac{4\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{6\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x} = 0$$

Знаем, что  $\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$

$$4 - 6\operatorname{ctg} x + 2\operatorname{ctg}^2 x = 0$$

Введем новую переменную. Пусть  $ctgx = t$ , тогда наше уравнение примет вид:  $2t^2 - 6t + 4 = 0$

Учитываем ОДЗ:  $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$$2t^2 - 6t + 4 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 4, \sqrt{D} = 2$$

$$t_1 = \frac{6-2}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{6+2}{4} = 2$$

Вернемся к старой переменной:

$$ctgx = 1 \quad \text{или} \quad ctgx = 2$$

$$1) ctgx = 1 \quad x = \arccotg 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) ctgx = 2 \quad x = \arccotg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \arccotg 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3) 2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 4$$

Решение:

Уравнение пока не является однородным, т.к. в правой части его вместо нуля стоит 4. Перенесем 4 в правую часть и применим основное тригонометрическое тождество:

$$2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 4(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0$$

$$2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 4\cos^2 x - 4\sin^2 x = 0$$

$$-2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$$

Уравнение теперь является однородным тригонометрическим уравнением второго порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на  $\cos^2 x \neq 0$ .

$$\frac{-2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{5\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - 3 = 0$$

$$-2tg^2 x + 5tgx - 3 = 0$$

$$2tg^2 x - 5tgx + 3 = 0$$

Введем новую переменную. Пусть  $tgx = t$ , тогда наше уравнение примет вид:  $2t^2 - 5t + 3 = 0$

Учитываем ОДЗ:  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1, \sqrt{D} = 1$$

$$t_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{5+1}{4} = 1,5$$

Вернемся к старой переменной:

$$tgx = 1 \quad \text{или} \quad tgx = 1,5$$

$$1) tgx = 1 \quad x = \arctg 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) tgx = 1,5 \quad x = \arctg 1,5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \arctg 1,5 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4) 5\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + 6\sin^2 x = 5$$

Уравнение пока не является однородным, т.к. в правой части его вместо нуля стоит 5. Перенесем 5 в правую часть и применим основное тригонометрическое тождество:

$$5\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + 6\sin^2 x - 5\cos^2 x - 5\sin^2 x = 0$$

$$\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$$

$$\text{Вынесем общий множитель за скобки: } \sin x (\sqrt{3}\cos x + \sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$$

$$1) \sin x = 0, \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$$

Уравнение является однородным тригонометрическим уравнением первого порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на  $\cos x \neq 0$ .

$$\frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\sqrt{3} + \operatorname{tg} x = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 3.1. Производная функции и ее применение

#### Практическое занятие № 26

**«Числовая последовательность, способы ее задания, вычисление членов последовательности. Предел последовательности. Нахождение пределов функции»**

**Цель работы:**

1. Научиться вычислять пределы функции.

2. Научиться избавляться от неопределенностей  $\left(\frac{0}{0}\right)$  или  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

3. Научиться решать задачи, связанные с числовой последовательностью.

**Выполнение работы способствует формированию:**

Пру9 умение свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; умение задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание.**

- 1) Решить задачи на числовую последовательность.
- 2) Вычислить пределы функций

Задание 1	Задание 2
<p>1. Найти восьмой член последовательности;  <math>\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{n}{n+1}</math>;</p> <p>2. Найти номер числа 3 в последовательности:  <math>a_n = \frac{2n+1}{n^2}</math></p> <p>3. Вычислить:  <math>\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - 8x + 5)</math></p> <p>4. <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt{2x}}</math></p> <p>5. <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4}</math></p>	<p>6. <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}</math></p> <p>7. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+1}</math></p> <p>8. <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^2+5x-4}{x^2-2x}</math></p> <p>9. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x}+1}{1-\sqrt{2x}}</math></p> <p>10. <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}</math></p>

**Порядок выполнения работы:**

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание

**Ход работы:**

**Задание №1**

1. Девятый член последовательности  $c_n = \left(\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+3}}\right)$  равен?

$$c_9 = \left(\frac{2 \cdot 9 - 1}{\sqrt{9^2 + 3}}\right) = \frac{17}{\sqrt{732}} = \frac{17}{2\sqrt{183}}; \Rightarrow c_9 = \frac{17}{2\sqrt{183}}$$

2. Номер числа 6, являющегося членом последовательности  $a_n = n^2 - 5n$  равен?

$$6 = n^2 - 5n$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0$$

$$n_1 = 6$$

$n_2 = -1$  – посторонний корень т.к. номер не может быть отрицательным числом.

Ответ:  $n=6$ .

**Задание №2**

Найдите пределы предварительно избавившись от неопределенности  $\left(\frac{0}{0}\right)$

1.  $\lim_{k \rightarrow 9} \frac{k^2-81}{k^2-9k} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{k \rightarrow 9} \frac{(k-9)(k+9)}{k(k-9)} = \lim_{k \rightarrow 9} \frac{k+9}{k} = \lim_{k \rightarrow 9} \frac{18}{9} = \lim_{k \rightarrow 9} 2 = 2;$

2.  $\lim_{k \rightarrow 1} \frac{k^2+4k-5}{k-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{k \rightarrow 1} \frac{(k+5)(k-1)}{(k-1)} = \lim_{k \rightarrow 1} (k+5) = \lim_{k \rightarrow 1} (1+5) = \lim_{k \rightarrow 1} (6) = 6$



$$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a+x})^2 - (\sqrt{a-x})^2}{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a+x-a-x}{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{a+0} + \sqrt{a-0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2\sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

Вычислить пределы имеющие неопределенность  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+0+0+0}{4+0+0+0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+0+0}{0+0} = \left(\frac{2}{0}\right) = +\infty$$

(0 в знаменателе принимаем за бесконечно малую величину.)

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 3.1. Производная функции и ее применение

#### Практическое занятие № 27

#### «Нахождение производных по определению»

**Цель работы:** Отработать определение производной функции. Применять правила дифференцирования. Научиться находить производную в заданной точке.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Найдите  $y' = (0)$ , если  $y = x^2 - x$
2. Найдите  $y' = (3)$ , если  $y = -\frac{3}{x}$

3. Найдите  $y' = (5)$ , если  $y = \sqrt{x-1}$

### Порядок выполнения работы:

Вычисление производной функции  $y = f(x)$  производится по общему правилу дифференцирования:

1) Придавая аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$  и подставляя в выражение функции вместо аргумента  $x$  наращенное значение  $x + \Delta x$ , находим наращенное значение функции:  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

2) Вычитая из наращенного значение функции её первоначальное значение находим приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3) Делим приращение функции  $\Delta y$  на приращение аргумента  $\Delta x$ , т.е. составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4) Находим предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Этот предел и есть производная от функции  $y = f(x)$

### Ход работы:

1. Найти:  $y'(x)$ , если  $y = 2x^2 - 3x$

Находим производную по общему правилу:

$$1) y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x$$

$$2) y + \Delta y - y = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 2x^2 + 3x = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x - 3)}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 3$$

$$4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x - 3) = 4x - 3$$

Найдём значение производной при  $x = 3$ .

$$y'(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 9$$

2. Найти  $y'(4)$ , если  $y = \sqrt{x}$

$$1) y + \Delta y = y\sqrt{x + \Delta x}$$

$$2) \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Найдём значение производной в точке  $x = 4$ ,  $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём

выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 3.1. Производная функции и ее применение

#### Практическое занятие № 28

#### «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

**Цель работы:** Научиться вычислять производные элементарных функций

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРБ14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание.**

1) Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций.

2) Вычислить производную функции в точке.

Задание 1	Задание 2
1) $y=7x^4-4x^3+5x^2-2;$	6) $f(t)=0,5t+0,6t^2+0,8t+8; f'(1)-?$
2) $y=5\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}}{x^3}+\frac{x^4}{\sqrt{x}};$	7) $f(x)=\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x; f'\left(\frac{\pi}{4}\right)-?$
3) $y=3\operatorname{ctg}x+5\ln x-3^x;$	8) $f(x)=2\cdot 5^x+3\cdot e^x; f'(0)-?$
4) $y=(9+x^2)(2x-1);$	9) $f(x)=\cos x(1+\sin x); f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-?$
5) $y=\frac{x^3}{3x+5};$	10) $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}; f'(1)-?$

**Порядок выполнения работы:**

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Пользуясь конспектом лекций и справочными материалами, выполните задание.

**Ход работы:**

**Задание №1**

Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций

Таблица производных основных элементарных функций.

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$c' = 0, c - \text{const};$	$x' = 1;$	$(C \cdot U)' = C \cdot U'$	
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	

1.  $y = 6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4$

$$y' = (6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4)' = 24x^3 - 24x^2 + 4x;$$

2.  $y = (5x - 4) \cdot (x + 2)$

$$y' = ((5x - 4)(x + 2))' = \left. \begin{array}{l} u = 5x - 4; \quad u' = 5 \\ v = x + 2; \quad v' = 1 \\ (u \cdot v)' = u'v + uv' \end{array} \right| =$$

$$= 5(x + 2) + 1(5x - 4) = 5x + 10 + 5x - 4 = 10x + 6$$

3.  $y = \frac{x+1}{2x}$

$$y' = \left(\frac{x+1}{2x}\right)' = \left. \begin{array}{l} u = x+1; \quad u' = 1 \\ v = 2x; \quad v' = 2 \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{array} \right| = \frac{1 \cdot 2x - 2(x+1)}{(2x)^2} = \frac{2x - 2x - 2}{4x^2} =$$

$$= \frac{-2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2};$$

**Задание №2**

Вычислить производную функции в точке.

$$y = 3x^5 - 8x^4 + 9x^2 - 4$$

$$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^5 - 8 \cdot (-1)^4 + 9(-1)^2 - 4 = -3 - 8 + 9 - 4 = -6.$$

1.  $y = 5 \sin x \cos x$

$$y'$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5((\sin x)' \cdot \cos x + \sin x (\cos x)') = 5(\cos^2 x - \sin^2 x) = 5(\cos 2x) = 5\left(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos \pi = 5 \cdot (-1) = -5$$

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### **Тема 3.1. Производная функции и ее применение**

#### **Практическое занятие № 29**

##### **«Производные сложных функций»**

**Цель работы:** Научиться вычислять производные сложных функций

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРб14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание.**

**Задание 1:** Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных сложных функций.

**Задание 2:** Вычислить производную функции в точке.

Задание№1	Задание№2
1) $y = (mx^k + 4)^p$	2) $y = m \cdot \cos(px^k - m)$ ; $y'(1)=?$
3) $y = (e^{px^m} + kx)$	4) $y = k \operatorname{tg}(mx^p)$ ; $y'(-1)=?$
5) $y = 12^{px^m - mx}$	6) $y = \operatorname{ctg}(px^k - mx)$ ; $y'(2)=?$
7) $y = \ln(x^k + px^m)$	8) $y = \sqrt{mp^x + kx}$ ; $y'(-2)=?$
9) $y = \log_7(mx + k)$	10) $y = (e^{px+k}) \cdot \sqrt{x^p + mx}$ ; $y'(3)=?$
11) $y = p \cdot \sin(kx + m)$	12) $y = \frac{\ln(px^n)}{k \cdot \cos mx}$ ; $y'(-3)=?$

Где  $p$  – число букв в имени;  $m$  – число букв в фамилии;  $k$  – число букв отчества.

### Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций и справочными материалами, выполните задание.

### Ход работы:

#### Задание № 1

Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных сложных функций

«Правила вычисления и таблицу производных сложных функций»

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(e^u)' = e^u u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \ln a u'$	$(\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{u'}{u}$	$(\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u' = \frac{u'}{u \ln a}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

1.  $y = (3x^2 - 4x)^5$ ;

$$y' = ((3x^2 - 4x)^5)' = 5(3x^2 - 4x)^4 \cdot (3x^2 - 4x)' =$$

$$= 5(3x^2 - 4x)^4 \cdot (6x - 4) = (30x - 20)(3x^2 - 4x)^4.$$

2.  $y = \sin(3x - x^2)$

$$y' = (\sin(3x - x^2))' = \cos(3x - x^2) \cdot (3x - x^2)' = (3 - 2x) \cdot \cos(3x - x^2).$$

3.  $y = 6 \ln 5x$

$$y' = (6 \ln 5x)' = 6(\ln 5x)' = 6 \cdot \frac{1}{5x} \cdot (5x)' = \frac{6 \cdot 5}{5x} = \frac{6}{x}.$$

#### Задание № 2

Вычислить производную функции в точке.

1.  $y' = (\sqrt{x^2 + 6})'$ ;  $y'(3) = ?$

$$y' = (\sqrt{x^2 + 6})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 6}} \cdot (x^2 + 6)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 6}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 6}}$$

$$y'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2+6}} = \frac{3}{\sqrt{9+6}} = \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 3.1. Производная функции и ее применение

#### Практическое занятие № 30

##### «Геометрические приложения производной»

**Цель работы:** Научиться составлять уравнение касательной к данной кривой в точке касания; находить угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР64 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПР614 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;

умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;

Пру19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

### Задание:

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе  $y = -x^2 + x$  в точке  $x_0 = -2$
2. Найдите угол наклона к оси касательной, проведенной к кривой  $y = x^3$  в точке  $x_0 = -2$
3. Составьте уравнение касательной к кривой  $y = \sin 3x$  в точке  $(\frac{\pi}{6}; 0)$ .

### Порядок выполнения работы:

1. Значение производной функции  $y = f(x)$  при  $x = x_0$  равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой  $y = f(x)$  в её точке с абсциссой  $x_0$ , т.е.  $k' = y'(x_0) = f'(x_0) = \tan \alpha$

где  $\alpha$ -угол между касательной к кривой в точке  $M_0(x_0; y_0)$  и положительным направлением оси  $O_x$ .

2. Уравнение касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке имеет вид  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ .

3. Направление кривой в каждой точке определяется направлением касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклона кривой в данной точке надо вычислить угол между касательной, проведенной в этой точке, и осью.

### Ход работы:

1. Найти угол наклона к оси  $O_x$  касательной проведенной к кривой  $y = \sin x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{3}$

-найдем производную функцию  $y = \sin x$   $y' = \cos x$

-найдем значение производной в точке  $x_0 = \frac{\pi}{3}$   $y'(\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

-тангенс угла наклона касательной в данной точке равен  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \approx 26,6^\circ$

2. Под какими углами парабола  $y = x^2 + x$  пересекает ось  $O_x$  ?

-Найдем точки пересечения параболы с осью  $O_x$ , решив систему

$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1; 0) \\ (0; 0) \end{cases}$$

-Парабола пересекает ось  $O_x$  в точках  $A(1; 0); O(0; 0)$ . Найдём угловые коэффициенты касательных к параболе в этих точках

$$y' = (x^2 + x)' = 2x + 1; k(-1) = 2(-1) + 1 = -1, k(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

- вычислили углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , образуемые касательными в точках пересечения параболы с осью  $O_x$ :  $\operatorname{tg} \alpha_1 = -1, \alpha_1 = 135^\circ; \operatorname{tg} \alpha_2 = 1, \alpha_2 = 45^\circ$

3. Составьте уравнение касательной к кривой  $y = 3x^2 - x$  в точке  $x_0 = -1$

-найдем производную кривой в точке  $x_0$

$$y' = (3x^2 - x)' = 6x - 1; y'(-1) = 6(-1) - 1 = -7$$

-найдем координату точки касания:

$$y(-1) = 3(-1) - (-1) = 4; M(-1; 4)$$



-поставим в формулу уравнения касательной:

$$y - 4 = -7(x + 1)$$

$$y - 4 = -7x - 7$$

$$7x + y + 3 = 0 - \text{уравнение касательной}$$

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 3.1. Производная функции и ее применение

#### Практическое занятие № 31

##### «Общая схема исследования функции»

**Цель работы:** Научиться исследовать функции с помощью производной и строить графики.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРБ14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с

параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;

Пру19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

#### **Задание:**

Исследовать функцию и построить ее график:

1)  $f(x) = x^3 - 12x$ ;

2)  $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$ .

#### **Краткие теоретические сведения:**

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

- 1) Найти производную функции.
- 2) Найти критические точки.
- 3) Отметить критические точки на числовой прямой и определить знак производной на каждом интервале.
- 4) Записать интервалы, на которых функция возрастает  $f'(x) > 0$  и убывает  $f'(x) < 0$ .
- 5) Выписать точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

- 1) Найти вторую производную.
- 2) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
- 3) Отметить эти точки на числовой прямой и определить знак второй производной на каждом интервале.
- 4) Если  $f''(x) > 0$ , то график выпуклый вниз. Если  $f''(x) < 0$ , то график выпуклый вверх.
- 5) Вычислить значения функции в точках перегиба.

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то прямая  $x = a$  является вертикальной асимптотой.

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде  $y = kx + b$

#### **Порядок выполнения работы:**

1. Запишите функцию.
2. Используя общую схему, исследуйте функцию.
3. По результатам исследования постройте график функции

### Ход работы:

Исследовать функцию  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$  и построить график.

-функция определена на всей числовой прямой:  $D(x): x \in (-\infty; \infty)$

-данная функция не является ни четной, ни нечетной:  $y(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 3 = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3 = -(x^3 + 6x^2 + 9x + 3) \neq -y(x)$

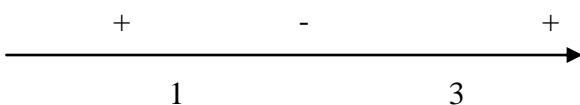
-найдем точку пересечения графика с осью  $O_y$ , полагая  $x = 0$ , получим  $y = -3$  точки пересечения графика с осью  $O_x$  в данном случае найти затруднительно.

-найдем производную:  $y' = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 - 12x + 9$

-найдем критические точки, для этого  $y' = 0$ , т.е.  $3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0; x_1 = 1; x_2 = 3$$

-исследуем функцию на монотонность



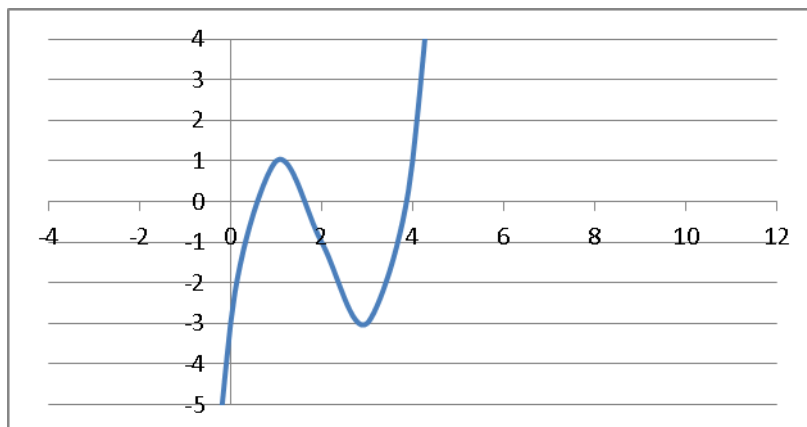
$(-\infty; 1)$  и  $(3; \infty)$  график функции возрастает,  $(1; 3)$ -убывает

-исследуем функцию на экстремум:

$$y(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1; A(1; 1) \text{ точка max}$$

$$y(3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3; B(3; -3) \text{ точка min}$$

-используя полученные данные строим искомый график.



**Форма представления результата:** выполненная работа

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 3.1. Производная функции и ее применение

### Практическое занятие № 32

#### «Исследование функций и построение графиков функций»

**Цель работы:** Научиться исследовать функций и строить их графики.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР64 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПР614 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;

Пру19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:** Исследовать функций и построить схематически их графики.

Задания	
$a) y = 2 + 5x^3 - 3x^5;$	$b) f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;$
$a) y = 2x^3 - 3x^2 - 36x;$	$b) f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;$
$a) y = x^3 - 4x^2;$	$b) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2;$

### Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь конспектом лекций и справочными материалами, выполните задание.

### Ход работы

Понятие производной позволяет провести подробное исследование функций с целью более точного построения их графиков.

Рассмотрим алгоритм исследования функций:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на четность и не четность;

▪ Если для функции выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ , то данная функция является четной. Следовательно, график функции симметричен относительно оси (ОУ).

▪ Если для функции выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ , то дана функция является нечетной. Следовательно график функции симметричен относительно начала координат (0;0)

▪ Если  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ , то данная функция является функцией общего вида и свойством симметричности данная функция не обладает

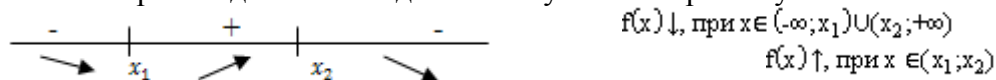
- 3) найти интервалы монотонности функции;

▪ Найти производную функции.

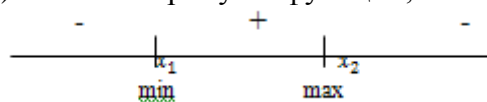
▪ Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение.

▪ Отметить найденные корни уравнения на координатной прямой, разбив её на промежутки.

- Найти знак производной на каждом из полученных промежутков.



- 4) найти экстремумы функции;



$$x_{\min} = x_1$$

$$x_{\max} = x_2$$

- 5) найти значение функции в критических точках и в точках экстремума;

6) найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график функции;

- 7) построить график функции.

Задание № 1

- 1) Исследуйте функцию и постройте её график  $y = 1 + 2x^2 - x^4;$

2) Определим четность

$$f(-x) = 1 + 2(-x)^2 - (-x)^4 = 1 + 2x^2 - x^4 \Rightarrow \text{имеем } f(-x) = f(x) \Rightarrow$$

функция четная и ее график симметричен относительно оси (ОУ).

3) Найдем производную

$$f'(x) = (1 + 2x^2 - x^4)' = 4x - 4x^3;$$

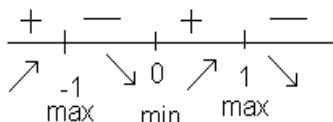
$$4x - 4x^3 = 0$$

$$4x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 : x = \pm 1;$$

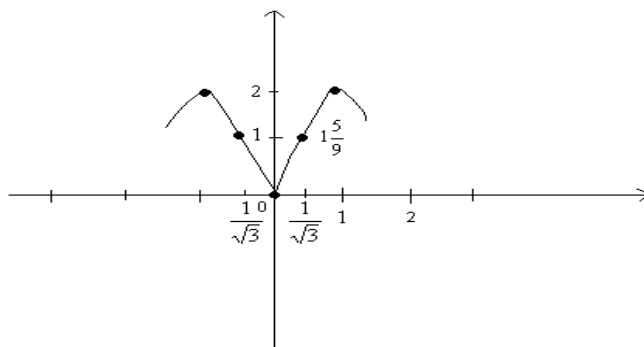
$$f(-1) = 1 + 2(-2)^2 - (-2)^4 = 2$$

$$f(0) = 1 + 2(0)^2 - 0^4 = 1$$

$$f(1) = 1 + 2 \cdot 1^2 - 1^4 = 2$$



x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$



**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 3.1. Производная функции и ее применение

#### Практическое занятие № 33

#### «Нахождение наибольшего и наименьшего значения и экстремальных значений функции. Прикладные задачи на экстремум»

**Цель работы:** Научиться применять производную функции при решении задач.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРб14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;

умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность

функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение

использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции;

умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;

Пру19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$  на отрезке  $а) [-1; 1]; б) [0; 3]$ .

2. Имеется проволока длиной  $a$  метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

#### Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.

#### Ход работы:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$  на промежутке  $а) [-2; -0,5]; б) [1; 3]$ .

Решение.

Находим критические точки функции.

$$f'(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 4)' = -x^2 - 6x = -6x(x + 1);$$

$$f'(x) = 0; -6x(x + 1) = 0; x = 0 \text{ и } x = -1. \text{ получили две критические точки: } x = 0 \text{ и } x = -1.$$

а) В промежутке  $[-2; -0,5]$  лежит одна из критических точек:  $x = -1$ .

Так как  $f(-2) = 8, f(-1) = 3, f(-0,5) = 3,5$ , то наименьшее значение функция  $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$  достигает в точке  $x = -1$  и равно 3, а наибольшее - в точке  $x = -2$  и равно 8. Кратко это можно записать так:  $\min_{[-2; -0,5]} f(x) = f(-1) = 3, \max_{[-2; -0,5]} f(x) = f(-2) = 8$ .

б) Отрезку  $[1; 3]$  не принадлежит ни одна из критических точек, поэтому найдём значения функции на концах отрезка:  $f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = -1, [1; 3]; f(3) = -2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = -77$ . Кратко это можно записать так:  $\min_{[1; 3]} f(x) = f(3) = -77, \max_{[1; 3]} f(x) = f(1) = -1$ .

2. Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найдите эти слагаемые.

Решение. Пусть заданное число представлено в виде суммы двух слагаемых  $x$  и  $y$ , т.е.  $86 = x + y$ . Выразим второе слагаемое через  $x$ :

$y = 86 - x$ . Запишем произведение этих чисел в виде функции от  $x$ :  $f(x) = x \cdot (86 - x)$  Найдём значение  $x$ , при котором функция

$f(x) = x \cdot (86 - x)$  достигает максимума. Найдём производную  $f'(x)$  и приравняем её нулю.  $f'(x) = (x \cdot (86 - x))' = (86x - x^2)' = 86 - 2x = 2(43 - x),$   
 $2(43 - x) = 0, x = 43.$

Определим второе слагаемое:  $y = 86 - x = 86 - 43 = 43.$

Ответ:  $x = 43; y = 43.$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все



записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 3.2 Интеграл и его применение

### Практическое занятие № 34

#### «Интеграл и первообразная. Нахождение неопределённых интегралов при помощи свойств интегралов»

**Цель:** научиться находить неопределённые интегралы непосредственным интегрированием при помощи свойств интегрирования.

#### Выполнение работы способствует формированию:

ПР64 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определённый интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определённый интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объёмы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений.

#### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### Задание:

Найти следующие интегралы:

1.  $\int \left( \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5 \right) dx$
2.  $\int 3(2x^2 - 1)^2 dx$
3.  $\int x^3(1 + 5x^2) dx$
4.  $\int \left( \frac{3}{x^4} + \frac{8}{x^5} \right) dx$
5.  $\int (5\sqrt{x^6} - 7\sqrt[4]{x^3}) dx$

#### Краткие теоретические сведения:

*Свойства неопределённого интеграла*

1)  $\int mf(x)dx = m \int f(x)dx, m = \text{const}$

$$2) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблица основных интегралов

$$1) \int dx = x + C;$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$$

$$3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$11) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

### Порядок выполнения работы:

Совокупность всех первообразных для функции называется неопределенным интегралом.

Основные свойства неопределённого интеграла

$$1) \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$2) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов.

Могут представиться следующие случаи:

1) Данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу.

2) Данный интеграл после применения свойств 1 и 2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) Данный интеграл после элементарных тождественных преобразований, над подынтегральной функцией и применяя свойства 1 и 2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

### Ход работы:

Найти следующие интегралы:

1.  $\int 6x^2 dx$  —используем свойство 2 и формулу 2.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{Получим:}$$

$$\int 6x^2 dx = 6 \int x^2 dx = 6 \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 6 \frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c$$

2.  $\int 4(x^2 - x + 3) dx$  Используя свойства 1 и 2 и, формулы 1 и 2 получим:

$$4 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 12 \int dx = 4 \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 12x + c = \frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + 12x + c$$

- постоянная интегрирования С равна алгебраической сумме трех постоянных

интегрирования .

$$3. \int 2(3x - 1)^2 dx = 2 \int (3x - 1)^2 dx = 2 \int (9x^2 - 6x - 1) dx = 2 \cdot 9 \frac{x^3}{3} - 2 \cdot 6 \frac{x^2}{2} + 2x + c = 6x^3 - 6x^2 + 2x + c$$

$$4. \int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx \quad \text{—разделим почленно на } x, \text{ получим:}$$

$$\int (x^2 + 3x + 4) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + c$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{—используем формулу } 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 3.2 Интеграл и его применение

### Практическое занятие № 35

#### «Интегрирование методом замены переменной»

**Цель работы:** Научиться вычислять интегралы способом подстановки.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРБ14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

Найти интегралы:

$$1. \int (12x - 5)^7 dx$$

$$2. \int \frac{dx}{5x+5}$$

$$3. \int x\sqrt{x^2 - 7} dx$$

4.  $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$
5.  $\int tgx dx$
6.  $\int \frac{dx}{1+16x^2}$

### Порядок выполнения работы:

В основе интегрирования методом замены переменной (или способом постановки) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если  $\int f(x) dx = F(x) + c$ , то  $\int f(u) du = F(u) + c$ , где  $u(x)$  производная дифференцируемая функция от  $x$ .

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1.  $x = \varphi(t)$ , где  $t$ -новая переменная, а  $\varphi(t)$  непрерывно дифференцируемая функция  
 $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$
2.  $t = \mu(x)$ , где  $t$ -новая переменная, тогда:  $\int f(\mu(x)) \mu'(x) dx = \int f(t) dt$

### Ход работы:

1.  $\int \frac{x^2 dx}{8+x^3}$

-т.к.  $d(8+x^3) = 3x^2 dx$ , то

$$\int \frac{x^2 dx}{8+x^3} = \frac{1}{3} \int \frac{d(8+3x^3)}{8+x^3}$$

-полагая  $8+x^3 = t$ , получим:  $\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln(t) + c = \frac{1}{3} \ln|8+x^3| + c$

2.  $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{4+\sin^2 x}$  - поэтому, используя подстановку  $t = \sin x$ , приходим к табличному интегралу:  $\int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} + c = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{\sin x}{2} \right) + c$

3.  $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-t^2}} = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{9-t^2}}$

-воспользовавшись подстановкой  $t = e^x$ , приводим к табличному интегралу  
 $\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + c = \arcsin \frac{e^x}{3} + c$

**Примечание:**  $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$$

$$e^x dx = d(e^x)$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln(x))$$

$$\cos x dx = d(\sin x)$$

**Форма представления результата:** выполненное задание

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 3.2 Интеграл и его применение

### Практическое занятие № 36 «Интегрирование различными методами»

**Цель работы:** Научиться находить интегралы различными методами: интегрирование подстановкой и по частям.

#### Выполнение работы способствует формированию:

ПРБ4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРБ14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

#### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### Задание:

Найти интегралы

$$1. \int \frac{dx}{(6 + \sqrt[3]{x}) \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$2. \int \frac{\sqrt{5 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$$

$$3. \int x \cos x dx$$

$$4. \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$5. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

#### Порядок выполнения работы:

1. Первые два интеграла решаются методом замены переменной (этот случай рассматривался в практической работе № 35).

2. Следующие интегралы решаются методом интегрирования по частям.

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле:  
 $\int u dv = uv - \int v du$  где  $u$  и  $v$  непрерывно дифференцируемые функции от  $x$ .

Интегрируя обе части равенства  $d(uv) = u dv + v du$ , получим

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$uv = \int u dv + \int v du, \text{ откуда } \int u dv = uv - \int v du$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла сводится к вычислению интеграла  $\int v du$ , если последний окажется проще исходного.

#### Ход работы:

Вычислить интеграл методом интегрирования по частям:

$$1. \int (x - 5) \cos x dx$$

-полагая  $u = x - 5$ ;  $dv = \cos x dx$ ,

-найдем  $du = dx$ ;  $\vartheta = \int \cos x dx = \sin x$

-следовательно:

$$\int (x - 5) \cos x dx = (x - 5) \sin x = \int \sin x dx = (x - 5) \sin x + \cos x + c$$

2.  $\int x \arctg x dx$

-пусть  $u = \arctg x$ ;  $d\vartheta = x dx$ ,

-тогда  $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ ;  $\vartheta = \frac{x^2}{2}$

-на основании формулы находим

$$\begin{aligned} \int x \arctg x dx &= \frac{x^2}{2} \arctg x \\ &- \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} \left( \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \right) = \frac{1}{2} (x^2 \arctg x - x + \arctg x) + c \end{aligned}$$

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 3.2 Интеграл и его применение

### Практическое занятие № 37

#### «Теорема Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов»

**Цель работы:** научиться вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРб14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в

искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера.

### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

### Задание:

Вычислите интегралы.

1.  $\int_1^2 2x^2 dx$

2.  $\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$

3.  $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

4.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x - 3 \sin x) dx$

5.  $\int_{-2}^2 \frac{1-x^2}{x^2} dx$

### Порядок выполнения работы:

- 1) Используя таблицу интегралов найти интеграл
- 2) Используя формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

найти определенный интеграл

### Ход работы:

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx = 2 \int_1^2 x^2 dx \stackrel{(1)}{=} \frac{2}{3} (x^3) \Big|_1^2 \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) \stackrel{(3)}{=} \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}$$

- (1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ .

Появившуюся константу  $\frac{1}{3}$  целесообразно отделить от  $x^3$  и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

$$\int_a^b f(x) dx = F(X) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница. Сначала подставляем в  $x^3$  верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &= 8 \int_{-2}^4 dx + 2 \int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx = 8(x) \Big|_{-2}^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-2}^4 = \\ &= 8(4 - (-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3} (4^3 - (-2)^3) = 8 \cdot 6 + (16 - 4) - \frac{1}{3} (64 + 8) = \\ &= 48 + 12 - 24 = 36 \end{aligned}$$

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница:  $F(X) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

**Совет:** перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?

Так, применительно к рассматриваемому примеру: перед тем, как в первообразную

функцию  $8x + x^2 - \frac{x^3}{3}$  подставлять верхний и нижний пределы, желательно на черновике проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:

$$\left( 8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right)' = 8(x)' + (x^2)' - \frac{1}{3} (x^3)' = 8 \cdot 1 + 2x - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 8 + 2x - x^2$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

**Форма представления результата:** выполненное задание/

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.



**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 3.2 Интеграл и его применение

### Практическое занятие № 38

#### «Вычисление определенных интегралов методом замены переменной»

**Цель работы:** научиться вычислять определённые интегралы методом замены переменной.

#### **Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРб14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объёмы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;

Пру19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

Вычислите интегралы.

$$1. \int_5^6 \frac{xdx}{x^2 - 6}$$

$$2. \int_3^4 (2x-5)^3 dx$$

$$3. \int_0^1 \sqrt[3]{x+2} dx$$

$$4. \int_{-1}^1 (x^3+1)^4 x^2 dx$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

**Порядок выполнения работы:**

- 1) Ввести новую переменную
- 2) Найти дифференциал
- 3) Вычислить новые границы интегрирования
- 4) Сделать подстановку
- 5) Вычислить, получившийся интеграл

**Ход работы:**

Вычислите интегралы.

$$1. \int_5^6 \frac{x dx}{x^2-6}$$

Введем новую переменную  $t = x^2 - 6$

Дифференциал будет равен  $dt = 2x dx$

Вычислим границы интегрирования  $t_1 = 25 - 6 = 19$ ,  $t_2 = 36 - 6 = 30$

Выполним подстановку  $\frac{1}{2} \int_5^6 \frac{2x dx}{x^2-6} = \frac{1}{2} \int_{19}^{30} \frac{dt}{t}$

Вычислим, получившийся интеграл  $\frac{1}{2} \ln|30| - \frac{1}{2} \ln|19| = \frac{1}{2} \ln \frac{30}{19}$

**Форма представления результата:** выполненное задание/

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 3.2 Интеграл и его применение

### Практическое занятие № 39

#### «Вычисление площадей фигур и объемов тел»

**Цель работы:** Научиться вычислять площади фигур и объемы тел, используя определенные интегралы

### **Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРб14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;

Пру19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

### **Задание:**

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

a)  $y = -x^2 + 4$ ,  $y = 0$

b)  $y = x^2$ ,  $y = x^3$

c)  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $y = 4$

2. Вычислить объем тела

$y = x^2$ ,  $y = 1$ , вокруг оси  $OY$

### **Порядок выполнения работы:**

- 1) построить графики функций
- 2) найти область, ограниченную этими графиками
- 3) составить определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

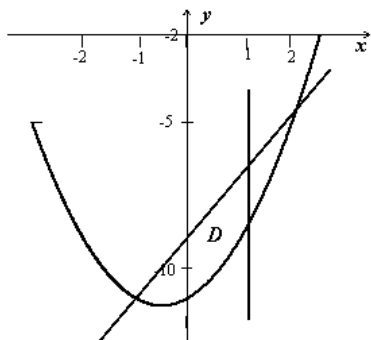
### **Ход работы:**

Пример 1: Найти площадь области **D**, ограниченной кривыми  $y = x^2 + x + 11$ ,  $y = 2x - 9$ , при условии,

$$x \leq 1$$

$$D: \begin{cases} y = x^2 + x - 11, \\ y = 2x - 9, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение  $x^2 + x + 11 = 2x - 9$  имеет два корня:  $x = -1$  и  $x = 2$ . Подходящий корень -  $x = -1$ . Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой  $x = 1$ , крайняя левая точка -  $x = -1$ , поэтому



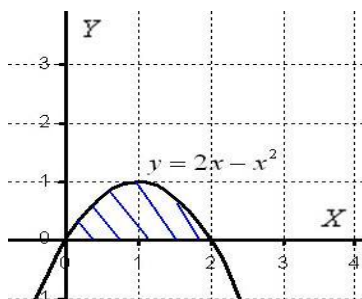
$$S(D) = \int_{-1}^1 [(2x-9) - (x^2+x-11)] dx = \int_{-1}^1 (2-x^2+x) dx = \left( 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = \left( 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left( -2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{10}{3}.$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части .

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $OX$ .

**Решение:** Как и в задаче на нахождение площади, решение начинается с чертежа плоской фигуры. То есть, на плоскости  $XOY$  необходимо построить фигуру, ограниченную линиями  $y = 2x - x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси  $OX$ . В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси  $OX$ .

**Объем тела вращения можно вычислить по формуле:**

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx =$$

$$= \pi \cdot \left( \frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left( \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

$$V = \frac{16\pi}{15} \text{ ед}^3 \approx 3,35 \text{ ед}^3.$$

**Ответ:**

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 3.2 Интеграл и его применение

### Практическое занятие № 40

#### «Физические приложения интегралов»

**Цель работы:** Научиться применять интегралы к решению физических задач

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР64 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПР614 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций,

находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;

Пру19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

1) Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела  $v(t) = 10t + 2$  (м/с).

2) Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью  $v=v(t)$ . Найдем путь  $S$ , пройденный ею за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ .

3) Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону  $v = 29.4 - 9.8t$  м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

#### **Порядок выполнения работы:**

1) Записать формулу, используя определенный интеграл  $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$

2) Вычислить определенный интеграл

#### **Ход работы:**

1. Скорость движения точки  $v = (9t^2 - 8t)$  м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

Решение: согласно условию,  $f(t) = 9t^2 - 8t$ ,  $t_1 = 3, t_2 = 4$ . Следовательно,  $s = \int_3^4 (9t^2 - 8t) dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83$  (м).

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  $v = (6t^2 + 2t)$  м/с, второе — со скоростью  $v = (4t+5)$  м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t) dt = [2t^3 + t^2]_0^5 = 275 \text{ (м)}, s_2 = \int_0^5 (4t + 5) dt = [2t^2 + 5t]_0^5 = 75 \text{ (м)}, \\ s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200 \text{ (м)}.$$

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью  $v = (39,2 - 9,8t)$  м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени  $t$ , когда  $v = 0$ , т.е.  $39,2 - 9,8t = 0$ , откуда  $t = 4$  с. По формуле (1) на ходим  $h = 78,4$

**Форма представления результата:** выполненное задание

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 4.1. Координаты и векторы

### Практическое занятие № 41

#### «Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве. Расстояние между точками»

**Цель работы:** Научиться применять теоретические знания при решении задач.

#### Выполнение работы способствует формированию:

ПРБ1 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Пру17 умение свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; оперировать понятиями: матрица  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ , определитель матрицы, геометрический смысл определителя.

#### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### Задание:

Решите задачи:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

1. Даны две точки:  $A(m; -n; 0)$  и  $B(p; -n; 2)$ . Разложите вектор  $\overrightarrow{AB}$  по векторам базиса и найдите его длину.

2. Даны векторы  $\vec{a} = p\vec{i} - \vec{j} + m\vec{k}$  и  $\vec{b} = n\vec{i} + p\vec{k}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b}$ .

3. Вычислите скалярное произведение векторов  $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$ , если  $\vec{a} = \{-m; n; p\}$  и  $\vec{b} = \{0; -p; n\}$ .

4. При каком значении «x» векторы  $\vec{a} = \{m; -n; x\}$  и  $\vec{b} = \{-2m; 2n; p\}$  будут коллинеарными?

**Порядок выполнения работы:**

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

**Ход работы:**

Задача № 1. Даны точки  $A(-3; 1; -1)$  и  $B(2; -4; 1)$ .

Разложите вектор  $\overrightarrow{AB}$  по векторам базиса и найдите его длину.

Решение.

1)  $\overrightarrow{AB} = \{2 - (-3); -4 - 1; 1 - (-1)\} = \{5; -5; 2\}$  - координаты вектора.

2) Разложим  $\overrightarrow{AB}$  по векторам базиса:

$$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}.$$

3) Длину  $|\overrightarrow{AB}|$  найдем по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}.$$

Задача № 2.

Даны векторы  $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ . Решение

$$\vec{a} = \{1; -3; 1\}.$$

$$\vec{b} = \{-2; 0; 1\}; \quad 2\vec{b} = \{-4; 0; 2\}.$$

$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = \{1; -3; 1\} - \{-4; 0; 2\} = \{1 - (-4); -3 - 0; 1 - 2\} = \{5; -3; -1\}.$$

Задача № 3

Вычислите скалярное произведение  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$ , если  $\vec{a} = \{1; 0; 3\}$  и  $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$ .

Решение

1) Найдём координаты  $2\vec{a}$ :

$$2\vec{a} = \{2; 0; 6\}$$

2). Найдём координаты  $2\vec{a} + \vec{b}$ :

$$2\vec{a} + \vec{b} = \{2; 0; 6\} + \{2; -1; 1\} = \{4; -1; 7\}.$$

3). Найдём скалярное произведение:

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 = 25.$$

Ответ: 25

Задача № 4.

4. При каком значении  $x$  векторы  $\vec{a} = \{4; -6; x\}$  и  $\vec{b} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 3\right\}$  будут коллинеарными?

Условие коллинеарности векторов:



$\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, если  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ .

Получим:

$$\frac{4}{-\frac{1}{2}} = \frac{-6}{\frac{3}{4}} = \frac{x}{3}.$$

$$-8 = \frac{x}{3}; x = -24.$$

Ответ:  $x = -24$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание.

#### **Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### **Тема 4.1. Координаты и векторы**

#### **Практическое занятие № 42**

#### **«Декартова система координат на плоскости. Уравнения прямой, окружности. Решение задач на расположение прямых на плоскости»**

**Цель работы:** Научиться применять теоретические знания при решении задач.

#### **Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ1 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

Пру17 умение свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; оперировать понятиями: матрица  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ , определитель матрицы, геометрический смысл определителя.

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

1. Найти точку пересечения прямых:  $mx - py + n = 0$  и  $x - y - p = 0$ .
2. Найдите острый угол между прямыми:  
 $mx + ny - p = 0$  и  $nx - py - m = 0$ .
3. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой  $px + y - m = 0$  и проходящей через точку  $A(-n; 1)$ .
4. Из точки  $A(m; -1)$  на прямую  $nx + py + 1 = 0$  опущен перпендикуляр. Составьте его уравнение.

**Порядок выполнения работы:**

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

**Ход работы:**

**Задача № 1**

Найти точку пересечения прямых:

$$2x + 3y - 12 = 0 \text{ и } x - y - 1 = 0.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0, & \begin{cases} 2(1 + y) + 3y - 12 = 0, \\ x = 1 + y; \end{cases} \\ x - y - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2y + 3y - 12 = 0, & \begin{cases} 5y = 10, \\ x = 1 + y; \end{cases} & \begin{cases} y = 2, \\ x = 3. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: точка  $M(3; 2)$ .

**Задача № 2**

Определить угол между прямыми, заданными уравнениями:

$$2x - 3y + 6 = 0 \text{ и } x + 5y - 2 = 0.$$

Решение

Найдем угловые коэффициенты этих прямых:

$$2x - 3y + 6 = 0; \quad x + 5y - 2 = 0$$

$$-3y = -2x - 6, \quad 5y = -x + 2,$$

$$y = \frac{2}{3}x + 6, \quad y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5},$$

$$k_1 = \frac{2}{3}, \quad k_2 = -\frac{1}{5}.$$

Подставим найденные значения  $k_1$  и  $k_2$  в формулу:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{1}{5} - \frac{2}{3}}{1 + (-\frac{1}{5}) \cdot \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = -1.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -1; \quad \varphi = 135^\circ.$$

Полученный угол между прямыми - тупой. Смежный с ним, будет острый, то есть  $\varphi_1 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ .

**Задача № 3**

1. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой  $5x + 3y - 7 = 0$  и проходящей через точку  $A(-2; 6)$ .

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку  $A(-2;6)$ .

$$y - 6 = k(x + 2)$$

Находим угловой коэффициент данной прямой:

$$3y = -5x + 7,$$

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}; \quad k_1 = -\frac{5}{3}.$$

Так как прямые параллельны, то  $k_2 = -\frac{5}{3}$  - угловой коэффициент искомой прямой.

Подставим найденное значение  $k_2 = -\frac{5}{3}$  в уравнение пучка прямых:

$$y - 6 = k(x + 2);$$

после преобразования получим:

$$5x + 3y - 8 = 0.$$

Задача № 4

Из точки  $A(-3;5)$  на прямую  $x - 2y + 3 = 0$  опущен перпендикуляр. Написать его уравнение.

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку  $A(-3; 5)$ .

$$y - 5 = k(x + 3).$$

Найдем угловой коэффициент  $k_1$  прямой  $x - 2y + 3 = 0$ ;

$$-2y = -x - 3;$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2};$$

$$k_1 = \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие перпендикулярности прямых:  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ , найдем уравнение искомой прямой

$$k_2 = -2.$$

$$y - 5 = -2(x + 3);$$

$$y + 2x + 1 = 0.$$

Ответ:  $y + 2x + 1 = 0$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем

выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

### Практическое занятие № 43

#### «Решение задач на параллельность прямой и плоскости»

**Цель работы:** Научиться решать задачи на параллельность прямой и плоскости, используя признак параллельности прямой и плоскости.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб1 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПРб9 умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;

ПРу1 умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

**Задача №1**

Точка К не лежит в плоскости квадрата ABCD. Точки М и Р - середины отрезков KB и KC.

1). Как расположены прямые AD и MP?

2). Вычислите длину отрезка MP, если сторона квадрата равна  $n$  см.

Задача №2

Основание AD трапеции ABCD находится на плоскости P, а основание BC отстоит от нее на  $p$  см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до плоскости P, если  $\frac{DA}{CB} = \frac{n+1}{n}$ .

Задача №3

Плоскость P пересекает стороны AB и AC треугольника в точках  $B_1$  и  $C_1$  соответственно.  $B_1C_1$  параллельна BC и равна  $p$  см, а  $AC_1 : C_1C = m : n$ . Найдите BC.

### Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

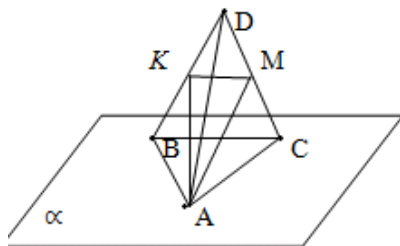
При решении задач на эту тему используется определение параллельных прямой и плоскости, признак параллельности прямой и плоскости, а также ваши знания из планиметрии.

### Ход работы:

Задача №1

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. K и M – середины отрезков BD и CD.

- 1) Имеют ли общие точки прямая KM и плоскость, в которой лежат точки A, B и C?
- 2) Вычислите периметр треугольника AKM, если расстояние между каждой парой данных точек равно 8 см.



Дано:  $\alpha$ ,  $A \in \alpha$ ,  $B \in \alpha$ ,  $C \in \alpha$ ,

$BK=KD$ ,  $CM=MD$ ,

$AB=AC=BC=AD=BD=CD=8$  см

1) пересекаются ли KM и  $\alpha$

2) Найти  $P_{AKM}$

Решение:

1) Точка K является серединой отрезка BD, точка M- середина отрезка CD. Значит отрезок KM - средняя линия треугольника BCD.

По свойству средней линии треугольника  $KM \parallel BC$ ,  $KM = \frac{1}{2} BC$ . Следовательно, отрезок KM параллелен прямой, лежащей в плоскости. По признаку параллельности прямой и плоскости, отрезок KM и плоскость параллельны, т.е. не пересекаются.

$$2) P_{AKM} = AK + AM + KM$$

$$KM = \frac{1}{2} BC \quad KM = 4 \text{ см.}$$

Рассмотрим треугольники ACD и ABD:  $AC=AD=AB=CD=BD$ , т.е. ACD и ABD- равные равносторонние треугольники, а отрезки AM и AK- медианы и высоты этих треугольников. Найдём эти отрезки:

$$AK = AM = \sqrt{AC^2 - MC^2}$$

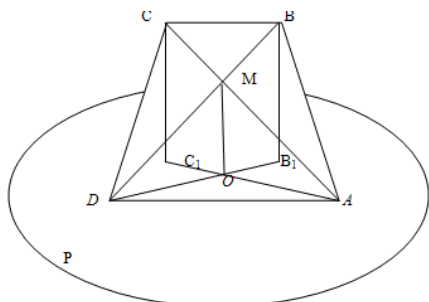
$$MC = 4 \text{ см.}$$

$$AK = AM = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ см}$$

$$P_{AKM} = 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 8\sqrt{3} \text{ см}$$

### Задача № 2

Основание  $AD$  трапеции  $ABCD$  находится на плоскости  $P$ , а основание  $BC$  отстоит от нее на  $5$  см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до плоскости  $P$ , если  $\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3}$ .



Дано:

$ABCD$  – трапеция,  
 $\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3}$ ,  $BB_1 = 5$  см,  $BB_1 \perp P$

Найти: расстояние от  $M$  до плоскости  $P$

Решение

1) Из точки  $M$  проведем к плоскости  $P$  перпендикуляр  $OM$ . Следовательно,  $OM$  – расстояние от  $M$  до плоскости  $P$ .

2) Рассмотрим  $\triangle ADM$  и  $\triangle CBM$

$\angle BMC = \angle DMC$  как вертикальные

$\angle CBM = \angle ADM$  как накрестлежащие при параллельных прямых  $BC$  и  $AD$  и секущей  $BD$ .

Значит,  $\triangle ADM$  и  $\triangle CBM$  подобны и  $\frac{DA}{CB} = \frac{DM}{BM} = \frac{AM}{CM}$ .

$$\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{DA}{CB} = \frac{DM}{BM} = \frac{AM}{CM} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{DM}{BM} = \frac{7}{3} \Rightarrow DM = \frac{7}{10} BD, BM = \frac{3}{10} BD$$

3) Рассмотрим  $\triangle BB_1D$  и  $\triangle MOD$

$\angle D$  – общий,  $\angle BB_1D = \angle MOD = 90^\circ \Rightarrow \triangle BB_1D \sim \triangle MOD$

$$\frac{BB_1}{MO} = \frac{BD}{MD}$$

$$\frac{BB_1}{MO} = \frac{BD}{\frac{7}{10} BD} = \frac{10}{7}$$

$$MO = \frac{7}{10} BD$$

$$MO = \frac{7}{10} \cdot 5 = 3,5 \text{ см.}$$

Ответ:  $3,5$  см.

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

### Практическое занятие № 44

#### «Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости»

**Цель работы:** Научиться использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трех перпендикулярах при решении задач.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР61 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПР69 умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;

ПРу1 умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРу15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

**Задача №1**

Дан ромб ABCD. Из точки пересечения его диагоналей проведен отрезок OF, так, что  $AF = CF$ ,  $BF = DF$ . Докажите, что OF перпендикулярен плоскости ромба, отрезок AC перпендикулярен плоскости BDF.

### Задача №2

Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ .  $AC = BC = n$  см,  $AB = m + 5$  см. Из вершины угла  $C$  проведен к плоскости перпендикуляр  $CD$ , равный  $p$  см. Найдите расстояние от точки  $D$  до стороны  $AB$ .

### Задача №3

Точки  $A$  и  $B$  лежат в плоскости  $\alpha$ ,  $M$  – такая точка в пространстве, для которой  $AM = m$ ,  $BM = n$  и ортогональная проекция на плоскость  $\alpha$  отрезка  $BM$  в три раза больше ортогональной проекции на эту плоскость отрезка  $AM$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\alpha$ .

### Задача №4

Высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , опущенная на гипотенузу, равна  $p$  см. Из вершины  $C$  прямого угла восстановлен к плоскости треугольника  $ABC$  перпендикуляр  $CM$ , причем  $CM = m + n$  см. Найдите расстояние от точки  $M$  до гипотенузы  $AB$ .

### Порядок выполнения работы:

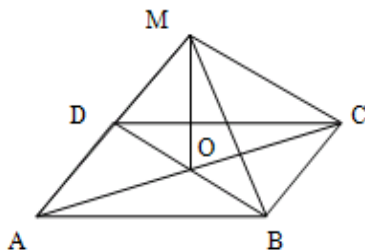
1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение перпендикулярных прямой и плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о трех перпендикулярах, а также ваши знания из планиметрии

### Ход работы:

#### Задача 1

Из точки пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  проведен отрезок  $OM$  так, что  $MA = MC$ ,  $MB = MD$ . Докажите, что отрезок  $OM$  перпендикулярен плоскости параллелограмма.



Дано:

$ABCD$  - параллелограмм

$AC \cap BD = O$

$MA = MC, MB = MD$

Доказать:  $OM \perp (ABCD)$

#### Доказательство

1) Рассмотрим треугольники  $AOM$  и  $COM$ .  $OM$  - общая сторона,  $MA = MC$  по условию,  $AO = OC$  по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е.  $\triangle AOM = \triangle COM$ . Следовательно,  $\angle AOM = \angle COM$ .

Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по  $90^\circ$ , т.е.  $OM \perp AC$ .

2) Рассмотрим треугольники  $BOM$  и  $DOM$ .  $OM$  - общая сторона,  $MB = MD$  по условию,  $BO = OD$  по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е.  $\triangle BOM = \triangle DOM$ . Следовательно,  $\angle BOM = \angle DOM$ .

Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по  $90^\circ$ , т.е.  $OM \perp BD$ .

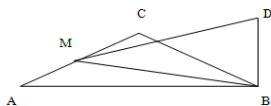
3)  $\left. \begin{array}{l} OM \perp AC \\ OM \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow OM \perp (ABCD)$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

#### Задача 2

Стороны треугольника 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла этого треугольника



проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Найдите расстояние от его концов до большей стороны.



Дано:

$$\triangle ABC, AB = 10 \text{ см}, BC = 17 \text{ см}, AC = 21 \text{ см}$$

$$BD \perp (ABC), BD = 15 \text{ см}$$

Найти расстояние от B и D до AC

Решение

1) Дополнительное построение: проведем  $BM \perp AC$ .

Значит,  $BM$ - расстояние от B до AC.

$$\left. \begin{array}{l} DM - \text{наклонная} \\ BM \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow DM \perp AC \Rightarrow DM - \text{расстояние от } D \text{ до } AC.$$

2) Для того, чтобы найти высоту  $BM$  треугольника  $ABC$ , вычислим сначала его площадь, используя формулу Герона  $S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24 \text{ см}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{24 \cdot (24 - 10) \cdot (24 - 17) \cdot (24 - 21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84 \text{ см}^2$$

3) Запишем формулу для вычисления площади  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah$

Применим эту формулу к нашему треугольнику:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM$ .

Выразим из этой формулы  $BM$ :  $BM = \frac{2S_{ABC}}{AC}$

$$BM = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8 \text{ см}$$

4) Рассмотрим треугольник  $BDM$ - прямоугольный, т.к.  $BD \perp (ABC)$ .

По теореме Пифагора найдем  $DM$ :

$$DM^2 = BD^2 + BM^2$$

$$DM^2 = 15^2 + 8^2 = 289$$

$$DM = \sqrt{289} = 17 \text{ см}$$

Ответ: расстояния от концов перпендикуляра до стороны  $AC$  равны 8 см и 17 см.

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

### Практическое занятие № 45

#### «Решение задач на применение теорем о трёх перпендикулярах»

**Цель работы:** Научиться использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трех перпендикулярах при решении задач.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб1 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПРб9 умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;

ПРб12 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПРу1 умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

- m- количество букв в имени
- n- количество букв в фамилии
- p- месяц рождения

**Задача №1**

Дан ромб ABCD. Из точки пересечения его диагоналей проведен отрезок OF, так, что  $AF = CF$ ,  $BF = DF$ . Докажите, что OF перпендикулярен плоскости ромба, отрезок AC перпендикулярен плоскости BDF.

**Задача №2**

Дан равнобедренный треугольник ABC.  $AC = BC = n$  см,  $AB = m + 5$  см. Из вершины угла C проведен к плоскости перпендикуляр CD, равный  $\sqrt{p}$  см. Найдите расстояние от точки D до стороны

AB.

#### Задача №3

Точки  $A$  и  $B$  лежат в плоскости  $\alpha$ ,  $M$  – такая точка в пространстве, для которой  $AM = m$ ,  $BM = n$  и ортогональная проекция на плоскость  $\alpha$  отрезка  $BM$  в три раза больше ортогональной проекции на эту плоскость отрезка  $AM$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\alpha$ .

#### Задача №4

Высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , опущенная на гипотенузу, равна  $p$  см. Из вершины  $C$  прямого угла восставлен к плоскости треугольника  $ABC$  перпендикуляр  $CM$ , причем  $CM = m + n$  см. Найдите расстояние от точки  $M$  до гипотенузы  $AB$ .

#### Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение перпендикулярных прямой и плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о трех перпендикулярах, а также ваши знания из планиметрии

#### Ход работы:

##### Задача

Высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , опущенная на гипотенузу, равна 9.6. Из вершины  $C$  прямого угла восставлен к плоскости треугольника  $ABC$  перпендикуляр  $CM$ , причем  $CM = 28$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до гипотенузы  $AB$ .

##### Решение

Примените теорему о трех перпендикулярах.

Пусть  $CK$  - высота данного прямоугольного треугольника. Тогда  $MK$  - наклонная к плоскости треугольника  $ABC$ , а  $CK$  - ортогональная проекция этой наклонной на плоскость треугольника  $ABC$ . Так как  $CK \perp AB$ , то по теореме о трех перпендикулярах  $MK \perp AB$ . Значит, длина отрезка  $MK$  равна расстоянию от точки  $M$  до прямой  $AB$ . Из прямоугольного треугольника  $MCK$  по теореме Пифагора находим, что

$$MK = \sqrt{CK^2 + CM^2} = \sqrt{9.6^2 + 28^2} = 29.6.$$

Ответ: расстояние от точки  $M$  до гипотенузы  $AB$  равно 29.6.

**Форма представления результата:** выполненное задание.

#### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

## Практическое занятие № 46

### «Решение задач на параллельность плоскостей»

**Цель работы:** Научиться использовать признак параллельности плоскостей и свойства параллельных плоскостей при решении задач.

#### Выполнение работы способствует формированию:

ПРб1 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПРб9 умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;

ПРу1 умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения.

#### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

#### Задача № 1

Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной  $m + n$  см. Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно  $p$  см.

#### Задача № 2

Плоскости М и Р параллельны. Из точек А и В плоскости М проведены к плоскости Р

наклонные  $AC = m + n$  см и  $BD = m + n - 3$  см. Проекция наклонной  $AC$  на одну из плоскостей равна  $m$  см. Чему равна проекция наклонной  $BD$ ?

Задача №3

Между двумя параллельными плоскостями  $P$  и  $Q$  проведены отрезки  $AC$  и  $BD$  (точки  $A$  и  $B$  лежат в плоскости  $P$ ),  $AC = m + n + p$  дм,  $BD = m + n$  дм, разность проекций  $AC$  и  $BD$  на одну из плоскостей равна  $m$  дм. Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.

### Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

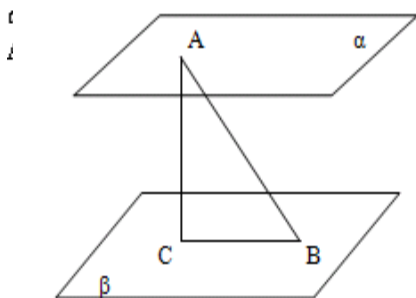
При решении задач на эту тему используется определение параллельных плоскостей, признак параллельности плоскостей, теоремы о параллельных плоскостях, а также ваши знания из планиметрии

### Ход работы:

Задача № 1

Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной 10 м. Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно 8 м.

Дано:



Найти проекции  $AC$

Решение

1) Так как плоскости параллельны, то расстояние между ними - это перпендикуляр  $AC$ . Построим проекцию отрезка  $AB$  на плоскость  $\beta$ . Это отрезок  $BC$ .

2) Рассмотрим треугольник  $ABC$ - прямоугольный.

По теореме Пифагора  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

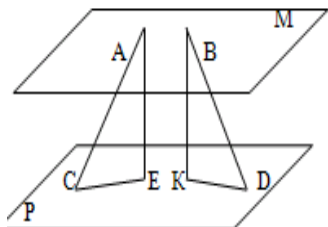
$$AC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$AC = 6 \text{ см.}$$

Так как плоскости параллельны, то проекции отрезка на эти плоскости будут равны.

Задача № 2

Плоскости  $M$  и  $P$  параллельны. Из точек  $A$  и  $B$  плоскости  $M$  проведены к плоскости  $P$  наклонные  $AC = 37$  см и  $BD = 125$  см. Проекция наклонной  $AC$  на одну из плоскостей равна 12 см. Чему равна проекция наклонной  $BD$ ?



Дано:  $M \parallel P, A \in M, B \in M$

$AC = 37$  см,  $BD = 125$  см

$AE \perp P, BK \perp P, CE = 12$  см

Найти: KD

Решение

1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.

По теореме Пифагора  $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 \quad AE^2 = 37^2 - 12^2 = 1369 - 144 = 1225$$

$$AE = 35 \text{ см.}$$

2) Рассмотрим треугольник VKD- прямоугольный.

По теореме Пифагора  $VD^2 = KD^2 + VK^2$

$$KD^2 = VD^2 - VK^2 \quad AE = VK, \text{ как расстояния между параллельными плоскостями.}$$

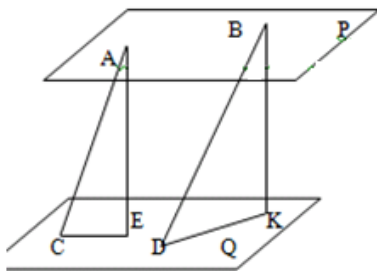
$$KD^2 = 125^2 - 35^2 = 15625 - 1225 = 14400$$

$$KD = 120 \text{ см.}$$

Ответ: проекция VD равна 120 см.

Задача №3

Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P), AC=13 см, BD=15 см, сумма проекций AC и BD на одну из плоскостей равна 14 см. Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.



Дано:  $Q \parallel P, A \in P, B \in P$   
 $AC = 13 \text{ см}, BD = 15 \text{ см}$   
 $AE \perp Q, BK \perp Q, CE + DK = 14 \text{ см}$   
Найти: CE, AE, DK

Решение

1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.

По теореме Пифагора  $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$$AE^2 = AC^2 - CE^2$$

Пусть  $CE = x$ , тогда  $DK = 14 - x$ .

$$AE^2 = 169 - x^2$$

2) Рассмотрим треугольник BDK- прямоугольный.

По теореме Пифагора  $BD^2 = BK^2 + DK^2$

$$BK^2 = BD^2 - DK^2$$

$$BK^2 = 225 - (14 - x)^2 = 225 - 196 + 28x - x^2 = 29 + 28x - x^2$$

$AE = BK$ , как расстояния между параллельными плоскостями

Значит,

$$169 - x^2 = 29 + 28x - x^2$$

$$28x = 140$$

$$x = 5$$

$$CE = 5 \text{ см}, DK = 14 - 5 = 9 \text{ см}$$

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ см}$$

Ответ: расстояние между плоскостями 12 см, проекции наклонных 5 см и 9 см.

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

### Практическое занятие № 47

#### «Решение задач на двугранные углы»

**Цель работы:** Научиться решать задачи на применение понятий угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, угла между плоскостями.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб1 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПРб9 умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;

ПРб12 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПРу1 умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси

или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

Пру15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

- m- количество букв в имени
- n- количество букв в фамилии
- p- месяц рождения

1) Из точки А вне плоскости проведены к плоскости перпендикуляр АВ = n см и наклонные АС и АМ, образующие с плоскостью углы 30°. Найдите угол между наклонными прямой. Найдите СМ.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны n см и n + m см. Определите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30° с плоскостью треугольника.

3) Точки А и В лежат на ребре прямого двугранного угла. АА<sub>1</sub> и ВВ<sub>1</sub>- перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях, причем АВ = m см, АА<sub>1</sub> = n + m см, ВВ<sub>1</sub> = n – 1 см. Найдите А<sub>1</sub>В<sub>1</sub>.

**Порядок выполнения работы**

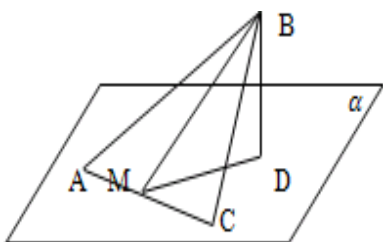
1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используются определения угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, линейного угла двугранного угла, а также ваши знания из планиметрии.

**Ход работы:**

**Задача 1**

Дан треугольник АВС со сторонами АВ=9 см, ВС= 6 см и АС= 5 см. Через меньшую сторону проходит плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол 45°. Найдите расстояние между плоскостью и вершиной В.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = 9$  см  
 $BC = 6$  см,  $AC = 5$  см  
 $AC \in \alpha$ ,  $\alpha = 45^\circ$

Найти: Расстояние от В до  $\alpha$



Решение

1) Дополнительное построение: проведем  $BD \perp \alpha \Rightarrow BD$  – расстояние от  $B$  до плоскости  $\alpha$ .

$BM \perp AC \Rightarrow DM \perp AC$  по теореме о трех перпендикулярах.

Значит,  $\angle BMD$  – линейный угол двугранного угла,  $\angle BMD = 45^\circ$ .

2) В треугольнике  $ABC$  найдем высоту  $BM$ .

Сначала вычислим площадь треугольника по формуле Герона:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$p = \frac{9+6+5}{2} = 10 \text{ см}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5} = 10\sqrt{2} \text{ см}^2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM \Rightarrow BM = \frac{2S_{ABC}}{AC}$$

$$BM = \frac{2 \cdot 10\sqrt{2}}{5} = 4\sqrt{2} \text{ см}$$

3) Рассмотрим треугольник  $BMD$  – прямоугольный по построению.

$$\frac{BD}{BM} = \sin \angle BMD$$

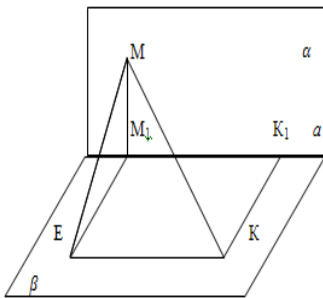
$$BD = BM \sin \angle BMD$$

$$BD = 4\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \text{ см.}$$

Ответ: расстояние от  $B$  до плоскости  $4$  см.

Задача 2

Концы отрезка  $MK$  лежат на гранях прямого двугранного угла.  $MM_1$  и  $KK_1$  – перпендикуляры к ребру, причем  $MK=13$  см,  $MM_1=12$  см,  $M_1K_1=3$  см. Найдите  $KK_1$ .



Дано:  $\angle \alpha \beta = 90^\circ$

$MK = 13$  см,  $MM_1 = 12$  см,  $M_1K_1 = 3$  см

$MM_1 \perp \alpha$ ,  $KK_1 \perp \alpha$

Найти:  $KK_1$

Решение

1) Построим линейный угол двугранного угла. Для этого через точку  $M_1$  проведем отрезок  $M_1E$ , параллельный и равный  $KK_1$ .

$KK_1 \perp \alpha$ , следовательно,  $M_1E \perp \alpha$ .

$\angle MM_1E$  – линейный угол двугранного угла, значит  $\angle MM_1E = 90^\circ$ .

2) Рассмотрим  $\triangle MEK$

$ME$  – наклонная к плоскости  $\beta$ ,  $EM_1$  – ее проекция на эту плоскость,  $EM_1 \perp EK$  (т.к.  $EM_1K_1K$  – прямоугольник по построению). Следовательно,  $ME \perp EK$  (по теореме о трех перпендикулярах) и  $\triangle MEK$  – прямоугольный.

По теореме Пифагора  $MK^2 = ME^2 + EK^2$

$$ME^2 = MK^2 - EK^2 \quad EK = M_1K_1 = 3 \text{ см}$$

$$ME^2 = 13^2 - 3^2 = 169 - 9 = 160$$

$$ME = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ см}$$

3) Рассмотрим  $\triangle MM_1K$  – прямоугольный, т.к.  $\angle MM_1E = 90^\circ$ .

По теореме Пифагора  $ME^2 = MM_1^2 + M_1E^2$

$$M_1E^2 = ME^2 - MM_1^2$$

$$M_1E^2 = 160 - 144 = 16$$

$$M_1E = 4 \text{ см.}$$

Значит,  $KK_1=4$  см.

Ответ:  $KK_1=4$  см.

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

#### Практическое занятие № 48

#### «Решение задач на параллелепипед и куб»

**Цель работы:** Научиться решать задачи с параллелепипедом и кубом

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПРБ11 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПРБ12 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПРБ14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения,

цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРy15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

ПРy16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

ПРy19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

1. Ребро куба равно 6 см. Найти его объем и площадь полной поверхности.

2. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания 12 см, а боковое ребро 15 см.

Найти площадь диагонального сечения.

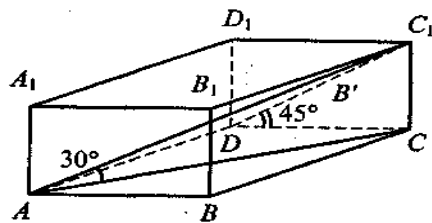
#### **Порядок выполнения работы:**

- 1) Выполнить чертеж
- 2) Записать кратко условие задачи
- 3) Оформить решение задачи

#### **Ход работы:**

**Задача 1:** Угол между диагональю  $AC$ , прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , и плоскостью основания  $ABCD$  равен  $30^\circ$ , а диагональ боковой грани  $DC$ , наклонена к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Высота параллелепипеда равна 3 см. Найдите его объем.

#### **Решение:**



$$\angle C_1DC = \angle DC_1C = 45^\circ \Rightarrow DC = CC_1 = 3$$

$$AC_1 = 2CC_1 = 6$$

$$AC = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

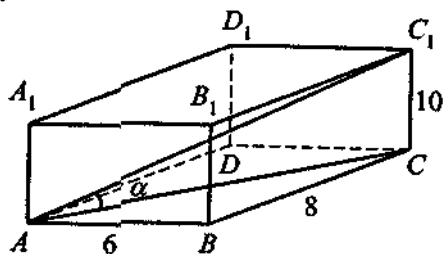
$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{27 - 9} = 3\sqrt{2}$$

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = AB \cdot BC \cdot CC_1 = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 = 27\sqrt{2}$$

Ответ:  $27\sqrt{2}$  см<sup>3</sup>.

**Задача 2:** Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 м и 8 м, боковое ребро равно 10 м. Найдите угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

**Решение:**



$$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$AC = CC_1 \Rightarrow \triangle ACC_1$  равнобедренный, а значит  $\alpha = 45^\circ$ .

Ответ:  $45^\circ$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

#### Практическое занятие № 49

#### «Решение задач на призму»

**Цель работы:** Научиться решать задачи с призмой

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПРб11 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПРб12 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПРб14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРу15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

ПРу16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

ПРу19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

### Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

### Задание:

1. Основание прямой призмы - треугольник, стороны которого равны 4 м, боковое ребро призмы равно 8 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2. Основание прямой призмы – параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и углом между ними  $60^\circ$ . Высота призмы 12 см. Найдите полную поверхность и объем.

**Многогранником** называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Общие стороны смежных многоугольников называют **ребрами** многогранника. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, называются его **гранями**. Грани многогранника, сходящиеся в одной точке, образуют многогранный угол; вершины таких многогранных углов называются **вершинами** многогранника. Прямые, соединяющие две какие-нибудь вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

**Призма** – многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани – параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания – правильные многоугольники.

**Площадью полной поверхности** призмы называется сумма площадей всех ее граней, а **площадью боковой поверхности** призмы – сумма площадей ее боковых граней.

$$S_{\text{пол}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

**Площадь боковой поверхности** прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

$$S_{\text{бок}} = P \cdot h$$

**Объем прямой призмы** равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

### Порядок выполнения работы:

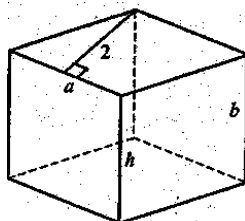
- 1) Выполнить чертеж
- 2) Записать кратко условие задачи
- 3) Оформить решение задачи

### Ход работы:

**Задача 1:** Основание прямой призмы - ромб с высотой 2 дм. Площадь боковой поверхности призмы равна  $96 \text{ дм}^2$ , а площадь полной поверхности равна  $128 \text{ дм}^2$ . Найдите высоту призмы.

### Решение

Обозначим сторону основания  $a$ , а боковое ребро  $b$ . Разницу между площадью полной поверхности призмы и площадью боковой поверхности призмы — это удвоенная площадь основания призмы.



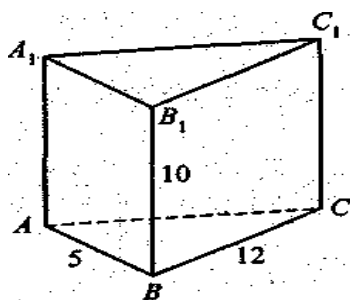
$$S_{\text{осн}} = 2a \Rightarrow 2a = 128 - 96 = 32 \Rightarrow a = 16$$

$$S_{\text{бок}} = 4ah = 96 \Rightarrow h = \frac{24}{a} = 1,5 \text{ (дм)}$$

Ответ: 1,5 дм.

**Задача 2:** Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 м и 12 м, боковое ребро призмы равно 10 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.

**Решение**



$$AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\triangle ABC} + S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{AA_1C_1C}$$

$$S = 2 \cdot 0,5 \cdot 5 \cdot 12 + 5 \cdot 10 + 12 \cdot 10 + 13 \cdot 10 = 60 + 300 = 360 \text{ м}^2$$

Ответ: 360 м<sup>2</sup>.

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

#### Практическое занятие № 50

#### «Решение задач на пирамиду»

**Цель работы:** Научиться решать задачи с пирамидой

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПР611 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПР612 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПР614 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

ПРy14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРy15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

ПРy16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

ПРy19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

1. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой 4 см, а диагональ основания 8 см.

2. Найти полную поверхность прямой пирамиды, в основании, которой лежит равнобедренный треугольник с основанием 5 см и боковыми сторонами 6 см. Боковые ребра пирамиды 12 см.

**Пирамида** – это многогранник, составленный из  $n$ -угольника и  $n$  треугольников.

Многоугольник - **основание** пирамиды, треугольники - **боковые грани** с общей вершиной, называемой **вершиной пирамиды**. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на ее



основание, называется **высотой пирамиды**.

Площадь полной поверхности пирамиды:  $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

Объем пирамиды:

### **Правильная пирамида**

Пирамида называется **правильной**, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой**.

**Площадь боковой поверхности правильной пирамиды** равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot \ell$$

**Площадь полной поверхности правильной пирамиды:**

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + \frac{1}{2} P \cdot l$$

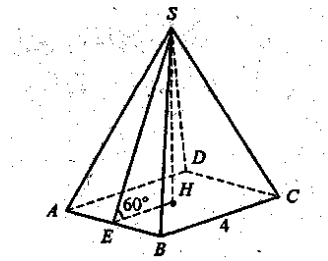
### **Порядок выполнения работы:**

- 1) Выполнить чертеж
- 2) Записать кратко условие задачи
- 3) Оформить решение.

### **Ход работы:**

**Задача 1:** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а апофема образует с плоскостью основания угол в  $60^\circ$ . Найдите площадь полной поверхности пирамиды

**Решение:**



$$EH = \frac{1}{2} BC = 2$$

$$\angle ESH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow SE = 2EH = 4$$

$$S_{\text{полн}} = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} AB + AB^2 = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4^2 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$$

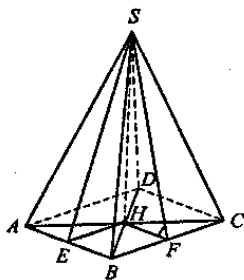
Ответ: 48 см<sup>2</sup>.

**Задача 2:** Основание пирамиды — ромб, диагонали которого равны 30 см и 40 см. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, образуют с высотой пирамиды углы, равные  $30^\circ$ . Найдите объем пирамиды.

**Решение:**

$$AC = 40 \Rightarrow AH = HC = 20$$

$$BD = 30 \Rightarrow BH = HD = 15$$



$$AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

$$HE = \frac{1}{2}BC = 12,5$$

$$SE = 2HE = 25$$

$$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} = \sqrt{25^2 - \frac{25^2}{4}} = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ:  $2500\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>.

**Форма представления результата:** выполненное задание

#### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

#### Практическое занятие № 51

##### «Решение задач на вычисление объемов и поверхностей многогранников»

**Цель работы:** Научится решать задачи на сечения многогранников

#### Выполнение работы способствует формированию:

ПРБ10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПРБ11 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПРБ12 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПРБ14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в

искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРу15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

ПРу16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

ПРу19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

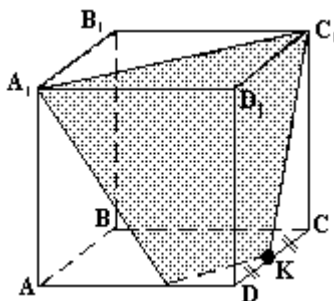
1. Определите вид и найдите периметр сечения куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через ребро  $A_1 D_1$  и середину ребра  $BB_1$ , если длина ребра куба равна 8 см.
2. Определите вид и найдите периметр сечения куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $D$  и середину ребра  $CC_1$ , если длина ребра куба равна 4 см.

#### **Порядок выполнения работы:**

- 1) Выполнить чертеж
- 2) Записать кратко условие задачи
- 3) Оформить решение задачи

#### **Ход работы:**

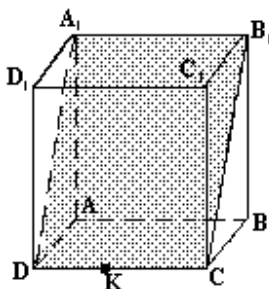
**Задача 1:** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что сечение куба плоскостью  $A_1 C_1 K$ , где точка  $K$  - середина  $DC$  - трапеция.



**Решение:**  $MK \parallel A_1C_1$ , потому что  $(A_1D_1C_1)$  параллельна  $(ADC)$ , а  $MK$  и  $A_1C_1$  - линии пересечения этих плоскостей.  $MK \parallel A_1C_1$ ,  $A_1M \neq C_1K$ ,  $MK \neq A_1C_1$ , значит  $MA_1C_1K$  - трапеция.

**Задача 2:**

Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Докажите, что сечение куба плоскостью  $A_1B_1K$  - параллелограмм.



**Решение:**  $(AA_1B_1) \parallel (DD_1C)$ , то  $A_1B_1 \parallel DC$  и  $A_1B_1 = DC$ .  $(AA_1D_1) \parallel (BB_1C_1)$ , то  $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ , значит  $A_1B_1CK$  - параллелограмм.

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

### Практическое занятие № 52

#### «Решение задач на цилиндр»

**Цель работы:** Научиться решать задачи с цилиндром

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного

параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПРб11 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПРб12 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПРб14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРу15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

ПРу16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

ПРу19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

1. Объем цилиндра  $120 \text{ см}^2$ , его высота 3,6 см.

Найти радиус цилиндра.

2. Высота цилиндра 12 см, радиус основания 10 см. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.

**Цилиндр** – тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

Круги называются **основаниями цилиндра**, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей этих кругов – **образующими цилиндра**. У цилиндра основания равны и параллельны и образующие также равны и параллельны между собой.

**Осью цилиндра** называется прямая, проходящая через центры оснований, параллельная образующим.

**Боковая поверхность цилиндра** – это поверхность, полученная от вращения стороны прямоугольника, параллельной оси цилиндра.

**Высотой** цилиндра называется расстояние между основаниями цилиндра. **Радиусом** цилиндра называется радиус его основания.

**Цилиндр** называется **прямым**, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Площадь боковой поверхности:  $S_{бок} = 2\pi Rh$ ;

Площадь полной поверхности:

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi Rh + 2\pi R^2;$$

$$S_{полн} = 2\pi R(h + R)$$

Объем цилиндра:  $V = \pi R^2 h$ .

*Сечение цилиндра* – фигура полученная в пересечении цилиндра плоскостью.

Сечение, проходящее через ось цилиндра, называется *осевым сечением* и представляет собой прямоугольник.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом.

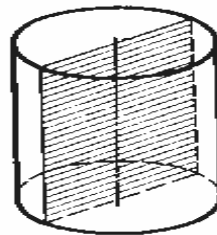
#### Порядок выполнения работы:

- 1) Выполнить чертеж
- 2) Записать кратко условие задачи

#### Ход работы:

Задача 1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого  $Q$ . Найдите площадь основания цилиндра.

Решение:

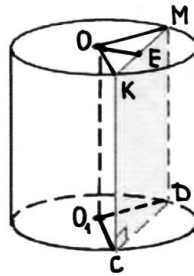


Сторона квадрата равна  $\sqrt{Q}$ . Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания

равна 
$$\pi \left( \frac{\sqrt{Q}}{2} \right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$$

Ответ:  $S_{осн.цил.} = \frac{\pi Q}{4}$

Задача 2. Высота цилиндра 6см, радиус основания 5см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4см от нее.



**Решение:**

$$S_{\text{сеч.}} = KM \times KC,$$

$$OE = 4 \text{ см}, \quad KC = 6 \text{ см}.$$

Треугольник ОКМ – равнобедренный ( $OK = OM = R = 5 \text{ см}$ ),  
треугольник ОКЕ – прямоугольный.

Из треугольника ОКЕ, по теореме Пифагора:

$$EK = \sqrt{OK^2 - OE^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3,$$

$$KM = 2EK = 2 \times 3 = 6,$$

$$S_{\text{сеч.}} = 6 \times 6 = 36 \text{ см}^2.$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{сеч.}} = 36 \text{ см}^2.$$

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

### Практическое занятие № 53

#### «Решение задач на конус»

**Цель работы:** Научиться решать задачи на конус

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРБ10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПР611 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПР612 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПР614 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

ПРy14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРy15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

ПРy16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

ПРy19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

1. Найти полную поверхность конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$  и равна 12 см. А радиус основания 8 см.

2. Найти площадь осевого сечения конуса, если образующая равна 15 см, а радиус основания 4 см.

Рассмотрим окружность с центром в точке  $O$  и прямую  $OP$ , перпендикулярную к плоскости этой окружности. Каждую точку окружности соединим с точкой  $P$  отрезком. Поверхность, образованная этими отрезками, называется **конической**, а сами отрезки – **образующими конуса**.

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, называется **конусом** (рис. 2.2).



Коническая поверхность – **боковая поверхность** конуса, круг – **основание** конуса, точка Р – **вершина** конуса, образующие конической поверхности – **образующие** конуса. Все образующие конуса равны друг другу. Прямая ОР, проходящая через центр основания и вершину конуса, называется **осью** конуса. Ось конуса перпендикулярна к плоскости основания. Отрезок ОР называется **высотой** конуса.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то полученное сечение называется **осевым сечением**.

Проведём секущую плоскость перпендикулярно к оси конуса. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется **усечённым конусом**. (Изобразите усечённый конус самостоятельно. Постройте образующую, высоту.)

**Площадь боковой поверхности** конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

$$S_{бок} = \pi r l$$

**Площадь полной поверхности** конуса равна сумме площади боковой поверхности и площади основания.

$$S_{полн} = \pi r(l + r)$$

**Площадь боковой поверхности усечённого конуса** равна произведению полусуммы длин оснований на образующую.

**Объём конуса** равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

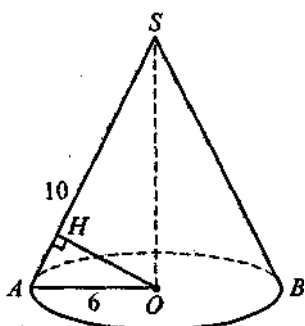
**Порядок выполнения работы:**

- 1) Выполнить чертеж
- 2) Записать кратко условие задачи

**Ход работы:**

**Задача 1:** Площадь боковой поверхности конуса равна  $60 \text{ дм}^2$ , а радиус основания равен 6 м. Найдите расстояние от центра основания до образующей конуса.

**Решение:**



$$S_{бок} = \pi r l = 60\pi \Rightarrow r l = 60$$

$$r = 6 \Rightarrow l = \frac{60}{r} = 10.$$

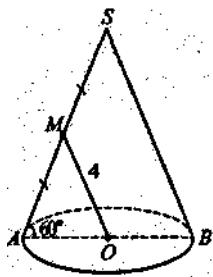
$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2} OH \cdot AS = 5OH = 24 \Rightarrow OH = \frac{24}{5}$$

**Задача 2:** Расстояние от центра основания конуса до середины образующей равно 4 см, а угол наклона образующей конуса к плоскости основания равен  $60^\circ$ . Найдите площадь осевого сечения конуса.



$SA = SB \Rightarrow \angle SBA = 60^\circ$   
 $\angle ASB = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$ ,  
 то есть  $\triangle SAB$  равносторонний.

$$\triangle AMO \sim \triangle ASB \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{AM}{AS} = \frac{1}{2}$$

$$SB = 2MO = 8$$

$$S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ:  $16\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

**Форма представления результата:** выполненное задание.

#### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

#### Практическое занятие № 54

#### «Решение задач на шар и сферу»

**Цель работы:** Научиться решать задачи на шар и сферу

#### Выполнение работы способствует формированию:

ПРБ10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПРБ11 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПРБ12 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПРБ14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в

искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

ПРy14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРy15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

ПРy16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

ПРy19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

#### **Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

#### **Задание:**

1. Расстояние от центра шара до секущей плоскости равно 8 м, а радиус сечения плоскостью равен 6 м. Найдите радиус шара и объем.

2. Объем шара  $125\pi \text{ м}^3$ . Найдите площадь сферы.

**Сферой** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Данная точка называется **центром сферы**, а данное расстояние – **радиусом сферы**. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, называется **диаметром**. Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**.

Шар можно получить при вращении полукруга вокруг диаметра. Границей шара служит сфера.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью** к сфере. Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Сечение шара, проходящее через центр, называется **большим кругом**, не проходящее – **малым кругом**. Центр большого круга совпадает с центром шара, а центр малого круга является основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость этого круга.

Сечения, равноотстоящие от центра, равны.

Радиус окружности, полученной при пересечении сферы радиуса  $R$  плоскостью, удаленной от центра сферы на  $d$ , равен  $\sqrt{R^2 - d^2}$ .

**Площадь поверхности сферы** равна учетверенной площади большого круга:  $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$ .

**Объем шара:**  $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

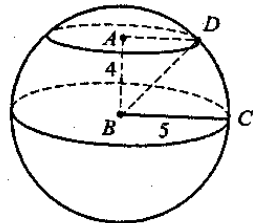
**Порядок выполнения работы:**

- 1) Выполнить чертеж
- 2) Записать кратко условие задачи

**Ход работы:**

**Задача 1:** Площадь сферы равна  $100\pi \text{ м}^2$ . Расстояние от центра сферы до секущей плоскости равно 4 м. Найдите радиус сечения.

**Решение:**

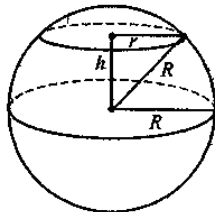


$$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (м)}$$

Ответ: 3 м.

**Задача 2:** Площади сечения шара плоскостью равна  $16\pi \text{ м}^2$ , а площадь параллельного ему сечения, проходящего через центр шара, равна  $25\pi \text{ м}^2$ . Найти расстояние между плоскостями сечений.



$$\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r^2 = 16, r = 4 \text{ м.}$$

$$\pi R^2 = 25\pi \Rightarrow R^2 = 25, R = 5 \text{ м.}$$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ (м)}$$

Ответ: 3 м

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены

2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

### Практическое занятие № 55

#### «Решение задач на комбинации геометрических тел»

**Цель работы:** Научиться решать задачи на комбинацию геометрических тел

#### **Выполнение работы способствует формированию:**

ПР610 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПР611 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПР612 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПР614 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

ПРy14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРy15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между

плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

ПРy16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

ПРy19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

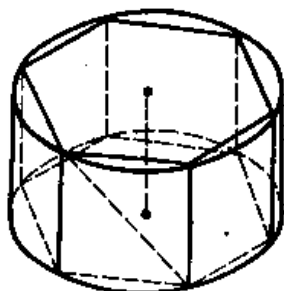
1. В цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях основания. Найдите сторону квадрата, если высота цилиндра равна 2см, а радиус основания равен 7см.

**Порядок выполнения работы:**

- 1)Выполнить чертеж
- 2)Записать кратко условие задачи

**Ход работы:**

Задача. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите отношения объема призмы к объему цилиндра.



**Решение:**

$$\frac{V_{\text{призм}}}{V_{\text{цил.}}} = \frac{S_{\text{осн.}} \times h}{\pi R^2 \times h} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\pi R^2}$$

$$a_6 = R$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{V_{\text{призм}}}{V_{\text{цил.}}} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

Ответ:  $\frac{V_{\text{призм}}}{V_{\text{цил.}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$  .

**Форма представления результата:** выполненное задание.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

### **Тема 4.3 Многогранники и круглые тела**

#### **Практическое занятие № 56**

##### **«Решение задач на комбинации геометрических тел»**

**Цель работы:** Научиться решать задачи на комбинацию геометрических тел

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПРб11 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПРб12 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПРб14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

ПРу14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения,

в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

ПРу15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

ПРу16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

ПРу19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

1. В цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях основания. Найдите сторону квадрата, если высота цилиндра равна 2см, а радиус основания равен 7см.

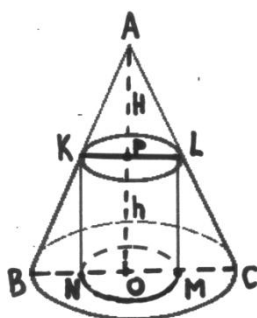
**Порядок выполнения работы:**

- 1)Выполнить чертеж
- 2)Записать кратко условие задачи

**Ход работы:**

Задача Найдите радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в конус, радиус основания которого равен 3.

**Решение:**



Обозначим через h и r высоту и радиус основания цилиндра, вписанного в конус с вершиной A. Рассмотрим осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник ABC с высотой AO = H и основанием BC = 2 · 3 = 6 (рис.2). Плоскость ABC пересекает цилиндр, вписанный в конус, по его осевому сечению – прямоугольнику KLMN, где точки K и L лежат соответственно на отрезках AB и AC, а точки M и N – на отрезке BC, причём KL = 2r, KN = LM = h. Пусть P – точка пересечения AO и KL. Треугольник APL подобен треугольнику AOC, поэтому

$$\frac{AP}{AO} = \frac{PL}{OC}, \text{ или } \frac{H-h}{H} = \frac{r}{3}$$



откуда  $h = H\left(1 - \frac{r}{3}\right)$ . Пусть  $V(r)$  – объем цилиндра, где  $0 < r < 3$ . Тогда

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi H r^2 \left(1 - \frac{r}{3}\right) = \pi H \left(r^2 - \frac{r^3}{3}\right)$$

Найдем наибольшее значение функции  $V(r)$  на промежутке  $(0;3)$ .

$$V'(r) = H(2r - r^2) = Hr(2 - r).$$

Промежутку  $(0;3)$  принадлежит единственный корень ( $r = 2$ ) полученного уравнения. Если  $0 < r < 2$ , то  $V'(r) > 0$ . Поэтому на промежутке  $(0;2)$  функция  $V(r)$  возрастает. Если  $2 < r < 3$ , то  $V'(r) < 0$ . Поэтому на промежутке  $(2;3)$  функция  $V(r)$  убывает. Значит, в точке  $r = 2$  функция  $V(r)$  имеет максимум. Следовательно, радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в данный конус, равен 2.

Ответ:  $r = 2$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Раздел 5 Теория вероятностей и математическая статистика

### Тема 5.1. Элементы комбинаторики

#### Практическое занятие № 57

##### «Решение комбинаторных задач. Размещения, сочетания и перестановки»

**Цель работы:** Научиться отличать сочетания от размещений, применять формулы для вычисления всех выборок без повторений.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПР68 умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

ПРу4 умение свободно оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач.

## Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

### Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

### Порядок выполнения работы

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберите соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

### Ход работы:

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

Возможных цифр всего десять (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0). Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой (1,4,5,7 ≠ 2,4,5,7), либо порядком набора одинаковых цифр (1,4,5,7 ≠ 4,5,7,1), поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2. Формула размещений имеет вид:  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ . В нашем случае  $n = 4$ ,  $m = 10$ .

Производим расчёт:  $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

3. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

Формула сочетаний имеет вид:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . В нашем случае  $n=10$ ,  $m=3$ .

Производим расчёт:  $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$ .

4. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,9 (цифры не повторяются)?

Решение.

По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

Формула перестановок из  $n$  – элементов имеет вид:  $P_n = n!$ . В нашем случае  $n = 4$ .

Произведём расчёт:  $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём

выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## **Тема 5.2. Теория вероятностей и элементы математической статистики**

### **Практическое занятие № 58**

#### **«Классическое определение вероятности. Свойства вероятностей, теорема о сумме вероятностей. Вычисление вероятностей»**

**Цель работы:** научиться находить вероятности событий, используя классическое определение вероятности

#### **Выполнение работы способствует формированию:**

ПРб7 умение оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств

ПРб8 умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

ПРу12 умение оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками;

ПРу13 умение находить вероятности событий с использованием графических методов; применять для решения задач формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; оценивать вероятности реальных событий; умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений; умение использовать свойства изученных распределений для решения задач; знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

ПРу18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера.

#### **Задание:**

1. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?

2. В книге 300 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь номер, кратный 5?

3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее - получить в сумме 7 или 8?

### Порядок выполнения работы

1. Определите событие  $A$ , вероятность которого нужно вычислить.
2. Прочитайте общее число ( $n$ ) возможных исходов.
3. Прочитайте число исходов ( $m$ ), благоприятствующих наступлению события  $A$ .
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события.  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

### Ход работы:

1. В урне 10 одинаковых по размеру и весу шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлечённый шар окажется голубым?

Решение.

1. Событие  $A$  - «Извлечённый шар оказался голубым».
2. число  $n=10$
3. число  $m=6$
4.  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0,6$

2. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение.

1. Событие  $A$  - «На взятой карточке число . кратное 5».
2. число  $n=30$
3. число  $m=6$  (числа 5, 10, 15, 20, 25, 30)
4.  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{30} = 0,2$ .

3. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) букв Событие  $A$  - «На взятой карточке число . кратное 5».

Решение.

1. Событие  $A$  - «Наугад выбранная буква будет гласной».
2. число  $n=12$  (-число букв в слове)
3. число  $m=5$  (буквы : *и, е, е, и, а* )
4.  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{12} \approx 0,417$
5. число  $m=7$  (буквы : *д, ф, ф, р, н, и, л* )
6. Событие  $B$  - «Наугад выбранная буква будет согласной».
7. число  $n=12$  (-число букв в слове)
8.  $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{7}{12} \approx 0,583$
9. Событие  $C$  - «Наугад выбранная буква будет буквой ч».
10. число  $n=12$  (-число букв в слове)
11. число  $m=0$  (такой буквы нет в данном слове)
12.  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{12} = 0$ .

**Форма представления результата:** выполненное задание

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все

записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 6.1. Основы теории множеств

### Практическое занятие № 59

#### «Способы задания множеств. Операции над множествами»

**Цель работы:** научиться выполнять операции над множествами.

**Выполнение работы способствует формированию:**

ПРy2 умение оперировать понятиями: множество, подмножество, операции над множествами; умение использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений и при решении задач, в том числе из других учебных предметов.

**Задание:**

1. Даны множества

$$A = \{m, n, k\},$$

$$B = \{m, n, k, l, p\},$$

$$C = \{m, n, k, l\}.$$

Выполнить следующие действия  $A \cap B \cup C$ .

2. Даны множества:

$$A = \{b, c, d, e\},$$

$$B = \{d, e, l\},$$

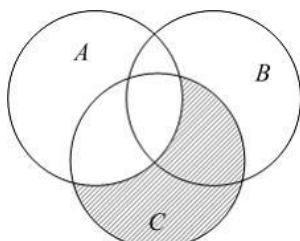
$$C = \{b, d, e, l\},$$

$$D = \{c, l\},$$

$$E = \{b, c\}.$$

Выполнить следующие действия  $C/A \cup B$

3. Пусть на рисунке изображены множества  $A, B$  и  $C$ .



Какому множеству соответствует заштрихованная область?

4. Найти прямое произведение множеств  $A = \{a; b\}$ ,  $B = \{1; 3; 5\}$

**Порядок выполнения работы**

1. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы.
2. Решить задания в тетради

**Ход работы:**

1. Даны множества:

$$A = \{m, n, k, p\},$$

$$B = \{k, p, l\},$$

$$C = \{m, n, k, p, l\},$$

$$D = \{k, p\},$$

$$E = \{m, n\}.$$

Выполнить следующие действия  $A \cap B \cup C$ .

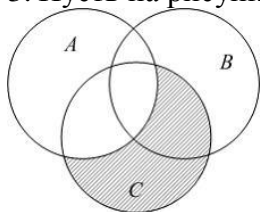
2. Даны множества  $A = \{a, b, c, d, e\}$  и  $B = \{c, d, e, g, k\}$ .

Найти множество  $B \setminus A$ .

Разностью множеств  $B$  и  $A$  называется множество  $C$ , которое состоит из всех элементов множества  $B$ , не принадлежащих множеству  $A$ . Элементы  $a$  и  $b$  принадлежат множеству  $B$ , но не принадлежат множеству  $A$ .

Тогда  $B \setminus A = \{g, k\}$ .

3. Пусть на рисунке изображены множества  $A, B$  и  $C$ .



Какому множеству соответствует заштрихованная область?

Каждая точка заштрихованной области принадлежит множеству  $C$ , но не принадлежит множеству  $A$ , значит, по определению разности двух множеств заштрихованная область есть множество, равное  $C \setminus A$ .

3. Дано множество  $A = \{3, 12, 18, 10\}$ . Из множества упорядоченных пар декартова произведения  $A \times A$ , выбрано подмножество  $P$ .

Пара  $(x, y) \in P$ , если числа  $x$  и  $y$  при делении на 5 дают равные остатки.

Чему равно количество пар, принадлежащих отношению  $P$ ?

Найдем остатки от деления элементов множества  $A$  на 5.

$$3 = 0 \cdot 5 + 3, \text{ остаток равен } 3.$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2, \text{ остаток равен } 2.$$

$18 = 3 \cdot 5 + 3$ , остаток равен 3.

$10 = 2 \cdot 5 + 0$ , остаток равен 0.

Одинаковые остатки при делении на 5 дают числа 3 и 18.

Значит, заданному отношению принадлежат пары (3; 18) и (18; 3).

Но пары (3; 3) и (18; 18) также принадлежат отношению  $\rho$ , так как числа 3 и 3; 18 и 18 при делении на 5 дают одинаковые остатки. Количество всех пар, принадлежащих данному отношению, равно 4.

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.