

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**ЕН.01 Математика**

**для обучающихся специальности**

**22.02.01 Metallургия черных металлов**

Магнитогорск, 2023

## **ОДОБРЕНО**

Предметной комиссией  
«Математических и естественнонаучных дисциплин»  
Председатель Е.С.Корытникова  
Протокол № 6 от 25.01.2023.

Методической комиссией МпК

Протокол № 4 от 08.02.2023

## **Составитель:**

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК

Ю.Ф. Сивилькаева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01 «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 22.02.01 Металлургия черных металлов и овладению профессиональными компетенциями.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ .....	4
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ .....	5
Практическое занятие № 1 .....	5
Практическое занятие №2 .....	6
Практическое занятие №3 .....	8
Практическое занятие №4 .....	10
Практическое занятие №5 .....	11
Практическое занятие №6 .....	12
Практическое занятие №7 .....	14
Практическое занятие №8 .....	16
Практическое занятие №9 .....	18
Практическое занятие №10 .....	20
Практическое занятие № 11 .....	21
Практическое занятие № 12 .....	23
Практическое занятие № 13 .....	24
Практическое занятие № 14 .....	26
Практическое занятие № 15 .....	30
Практическое занятие № 16 .....	32
Практическое занятие № 17 .....	34
Практическое занятие №18 .....	38
Практическое занятие №19 .....	39
Практическое занятие № 20 .....	41
Практическое занятие № 21 .....	42
Практическое занятие № 22 .....	44
Практическое занятие № 23 .....	46
Практическое занятие № 24 .....	48

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

**уметь:**

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить операции над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решать системы линейных уравнений различными методами;

Содержание практических и лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 1.1. Осуществлять технологические операции по производству черных металлов.

ПК 1.2. Использовать системы автоматического управления технологическим процессом.

ПК 1.3. Эксплуатировать технологическое и подъемно-транспортное оборудование, обеспечивающее процесс производства черных металлов.

ПК 3.2. Участвовать в обеспечении и оценке экономической эффективности.

ПК 3.3. Оформлять результаты экспериментальной и исследовательской деятельности.

ОК 2. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 4. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

Выполнение обучающимися практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проективных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

## 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

### Тема 1.1 Комплексные числа

#### Практическое занятие № 1

#### Алгебраическая форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

**Цель работы:** Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У2 выполнять действия над комплексными числами;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Даны комплексные числа:  $z_1=(-3;-5)$ ,  $z_2=(-7,2;7,2)$ ,  $z_3=(2;6)$ .  
Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:

1)  $z_1 + z_2$ ;

2)  $z_2 - z_3$ ;

3)  $z_1/z_3$ ;

4)  $z_2 * z_3$ ;

5)  $z_1^5$ .

3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2} + \frac{1+4i}{1+3i} + i^{13}$$

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме  $z = a + bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ ;

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

**Ход работы:**

1. Даны комплексные числа:  $z_1=(7;1)$ ,  $z_2=(-1,5;1,5)$ ,  $z_3=(4;-3)$ .

Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид:  $z = a + bi$ , то числа в алгебраической форме будут записаны в виде:

$$z_1 = 7 + i; z_2 = -1,5 + 1,5i; z_3 = 4 - 3i.$$

2. Вычислить:

$$z_1 + z_2 = (7 - 1,5) + (1 + 1,5)i = 5,5 + 2,5i;$$

$$z_2 - z_3 = (-1,5 - 4) + (1,5 + 3)i = -5,5 + 4,5i;$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+4i+21i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1 + i;$$

$$z_2 \cdot z_3 = (-1,5 + 1,5i)(4 - 3i) = -6 + 4,5i + 6i - 4,5i^2 = -6 + 10,5i + 4,5 = -1,5 + 10,5i;$$

$$z_1^5 = (7 + i)^5 = ((7 + i)^2)^2(7 + i) = (49 + 14i + i^2)^2(7 + i) = (48 + 14i)^2(7 + i) = (2304 + 1344i + 196i^2)(7 + i) = 2304 + 1344i - 196 + 2108 + 1344i + i = 13412 + 11516i;$$

3. Вычислить:  $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2,1 - 2,7i;$$

- 1)  $\frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{-i-3-3i^2-9i}{-i^2+9} = \frac{-10i}{10} = -i$
- 2)  $\frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-9i^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1,1 - 1,7i$
- 3)  $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$
- 4)  $-i - 1,1 - 1,7i - 1 = -2,1 - 2,7i$

**Форма представления результата:** выполненная работа

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

## Тема 1.1 Комплексные числа

### Практическое занятие №2

#### Тригонометрическая форма комплексного числа. Переход от одной формы комплексных чисел к другой

**Цель:** Научиться записывать комплексные числа в тригонометрической форме, выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У2 выполнять действия над комплексными числами;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Даны комплексные числа:  $z_1=(-3;-5)$ ,  $z_2=(-7,2;7,2)$ ,  $z_3=(2;6)$ .

Записать эти числа в тригонометрической форме.

2. Вычислите:

1)  $z_2 \cdot z_3$ ;

2)  $\frac{z_1}{z_3}$ ;

3)  $z_1^2$ ;

4)  $\sqrt{z_2}$ ;

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

а)  $(3 \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}))^2$       б)  $\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$ .

**Краткие теоретические сведения:**

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ z^n &= r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \end{aligned}$$

Для извлечения корня  $n$ -й степени из комплексного числа в тригонометрической форме

$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$  используется формула :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } \sqrt[n]{r} - \text{ арифметический корень, } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме  $z = a + bi$ .

1) Модуль  $r = |z|$  однозначно определяется по формуле  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

2) Аргумент  $\varphi$  определяется из формул  $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ ,  $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ .

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить, в какой четверти находится точка (использовать геометрическую интерпретацию числа)  $z = a + bi$

- Решив уравнение  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ , получаем, что

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \text{ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,}$$

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi \text{ для внутренних точек 2 четверти,}$$

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi \text{ для внутренних точек 3 четверти.}$$

Если точка  $z$  лежит на действительной или мнимой оси, то  $\arg z$  можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме  $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$  или  $z = re^{i\varphi}$ .

#### Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2. Выполните заданные действия.

#### Ход работы:

Даны комплексные числа:  $z_1=(7;1)$ ,  $z_2=(-1,5;1,5)$ ,  $z_3=(4;-3)$ .

1. Записать числа  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  в тригонометрической форме.

Решение:

1)  $z_1 = 7 + i$

$$|z_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

Число находится в первой четверти, значит

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \operatorname{arctg} 0,1429.$$

$$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8^\circ 8' + i\sin 8^\circ 8').$$

2)  $z_2 = -1,5 + 1,5i$

$$|z_2| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{2,25 + 2,25} = \sqrt{4,5} = 2,1$$

Число находится во второй четверти, значит  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ ;

$$z_2 = -1,5 + 1,5i = 2,1\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4}\right).$$

3)  $z_3 = 4 - 3i$

$$|z_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Число находится в четвертой четверти, значит

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-3}{4} = \operatorname{arctg}(-0,75) = -36^\circ 52'.$$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36^\circ 52' + i \sin(-36^\circ 52')).$$

2. Вычислите:

1)  $z_2 \cdot z_3$ ;

2)  $\frac{z_1}{z_3}$ ;

3)  $z_1^5$ ;

4)  $\sqrt{z_2}$ ;

Решение:

$$z_2 \cdot z_3 = 2,1 \cdot 5(\cos(135^\circ - 36^\circ 52') + i \sin(135^\circ - 36^\circ 52')) = 10,5(\cos 98^\circ 8' + i \sin 98^\circ 8');$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}(\cos(8^\circ 8' - (-36^\circ 52')) + i \sin(8^\circ 8' + 36^\circ 52')) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ);$$

$$z_1^5 = (5\sqrt{2})^5(\cos 5 \cdot 8^\circ 8' + i \sin 5 \cdot 8^\circ 8') = 12500\sqrt{2}(\cos 40^\circ 40' + i \sin 40^\circ 40');$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

В нашем примере  $n=2$ .

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2});$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2}) = \sqrt{2,1}(\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30');$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2}) = \sqrt{2,1}(\cos 247^\circ 30' + i \sin 247^\circ 30').$$

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$(2 \cdot (\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24}))^6 = 2^6 (\cos \frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{24} \cdot 6) = 64 (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = 64 (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i;$$

$$\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{24}{3}(\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) = 8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 8(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 4 + 4\sqrt{3}i;$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

### Практическое занятие №3

#### Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

**Цель работы:** Научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У2 выполнять действия над комплексными числами;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;



**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, конспекты лекций

**Задание:**

1. Даны комплексные числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = 5 \left( \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \quad \text{и} \quad z_2 = 8 \left( \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right).$$

Вычислите:  $z_1 \cdot z_2$ ;  $\frac{z_2}{z_1}$ ;  $z_1^3$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$

2. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$\text{a) } \left( 3 \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right)^3 \quad \text{b) } \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$$

**Краткие теоретические сведения:**

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  используется формула:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } \sqrt[n]{r} - \text{арифметический корень, } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

**Порядок выполнения работы:**

4. Запишите заданные в тригонометрической форме числа.
5. Используя конспект, выясните, как выполняются действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
6. Выполните заданные действия.

**Ход работы:**

Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} & \left( 2 \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right) \right)^6 = 2^6 \left( \cos \frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{24} \cdot 6 \right) = \\ & 1) \quad 64 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 64 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2) \quad \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{24}{3} (\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) = \\ & 8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 8 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 + 4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление  
Тема 2. 1 Теория пределов и непрерывность.

Практическое занятие №4

Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей

**Цель:** Научиться вычислять пределы функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

У1 анализировать сложные функции и строить их графики;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

Вычислить пределы функций:

1.  $\lim_{x \rightarrow -2} (-x^3 + 2x^2 - 4x - 1)$

2.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{3x^3+24}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+3x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x^2+10}{3x^3+4x^2-1}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x+1} \right)^x$

**Порядок выполнения работы:**

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

**Ход работы:**

Найти предел функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5) = 2(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 - 10(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = 16 - 40 - 8 + 5 = -27;$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке  $x = 3$ . Поэтому сначала преобразуем данную функцию.

Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_1 \text{ и } x_2 \text{ корни квадратного трехчлена.}$$

Корнями квадратного трехчлена  $3x^2 - 11x + 6$  являются числа  $\frac{2}{3}$  и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 3)$$

А корни квадратного трехчлена  $2x^2 - 5x - 3$  равны  $\frac{1}{2}$  и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3).$$

Возвращаясь к пределу, имеем:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x - \frac{2}{3})(x - 3)}{2(x + \frac{1}{2})(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \frac{9 - 2}{6 + 1} = \frac{7}{7} = 1.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2}$$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к  $\infty$ , то получаем неопределенность вида  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ . Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на  $x^4$ . Тогда получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{11x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} - \frac{6x}{x^4} + \frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} - \frac{8x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{11}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{6 - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Умножим числитель и знаменатель дроби на } \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2} x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел, формулу  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Введем новую переменную:  $x = -3y, x \rightarrow \infty; y \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{-3y}\right)^{-15y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

## Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление Тема 2. 1 Теория пределов и непрерывность.

### Практическое занятие №5

#### Первый замечательный предел. Второй замечательный предел

**Цель:** Научиться вычислять пределы функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

У1 анализировать сложные функции и строить их графики;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

Вычислить пределы функций:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

**Ход работы:**

Найти предел функции:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Умножим числитель и знаменатель дроби на  $\frac{1}{2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2} x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . Введем новую переменную:  $x = -3y; x \rightarrow \infty; y \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{-3y}\right)^{5 \cdot (-3y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15} = \frac{1}{e^{15}}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

**Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление**

**Тема 2. 1 Теория пределов и непрерывность.**

**Практическое занятие №6**

**Асимптоты функции. Точки разрыва**

**Цель:** Научиться находить точки разрыва функций, определять их род, находить асимптоты графиков функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

У1 анализировать сложные функции и строить их графики;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

**Задание:**

Исследовать функции на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род. Найти асимптоты функций.

1)  $y = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 9}$ ;

2)  $y = \frac{2x^2 - 4x - 30}{x^2 - 25}$ .

**Краткие теоретические сведения:**

**Точками разрыва функции** называются точки, в которых нарушается условие непрерывности функции.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва  $x_0$  называется *точкой разрыва первого рода* функции  $y = f(x)$ , если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т.е.

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$ . При этом: если  $A_1 = A_2$ , то точка  $x_0$  называется точкой устранимого разрыва; если  $A_1 \neq A_2$ , то точка  $x_0$  называется точкой конечного разрыва.

Точка разрыва  $x_0$  называется *точкой разрыва второго рода* функции  $y = f(x)$ , если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

**Асимптотой графика функции**  $y = f(x)$  называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки  $(x; f(x))$  до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая  $x = a$  называется *вертикальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из предельных значений  $\lim_{x \rightarrow a - 0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow a + 0} f(x)$  равно  $-\infty$  или  $+\infty$ .

**Замечание.** Прямая  $x = a$  не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке  $x = a$ . Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая  $y = b$  называется *горизонтальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из предельных значений  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  равно  $b$ .

**Замечание.** График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая  $y = kx + b$  называется *наклонной асимптотой* графика функции, если  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции  $y = f(x)$  существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$ , то функция имеет наклонную асимптоту  $y = kx + b$  при  $x \rightarrow \infty$ .

**Ход работы:**

Исследовать функцию на непрерывность. Найти асимптоты функции.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}$$

Область определения функции  $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Точка  $x = 1$  является точкой разрыва 2 рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[ \frac{1}{0} \right] = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[ \frac{1}{0} \right] = +\infty$$

Прямая  $x = 1$  – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид  $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

## Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

### Тема 2.2. Производная функции и ее приложения

#### Практическое занятие №7

#### Дифференцирование сложных функций.

**Цель:** Научиться находить производные сложных функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

- У1 анализировать сложные функции и строить их графики;
- У6 решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;
- Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

**Задание:**

Найти производные функций

1.  $y = (5x^3 - 2x)^6$
2.  $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3.  $f(x) = \arcsin 4x + \arccos^2 x$
4.  $f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
  1. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
  2. Используя таблицу производных, найти производные функций.
  3. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

**Ход работы:**

Найти производные функций:

1.  $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент  $u = 1 - 4x^2$ . Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой  $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2.  $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = \left(\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции  $u = \frac{1}{2}x$ , для второй функции  $u = 2x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ ,  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' = \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

$$3. y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом

дифференцирования  $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции  $u = 3x + 5x^2$ , для второй функции  $u = 3 + 10x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ ,  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ .

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x) \ln 2} (3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x) \ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

$$4. f(x) = \arcsin \frac{3}{5}x + \arccos 5x$$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $(U + V)' = U' + V'$ .

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции  $u = \frac{3}{5}x$ , для второй функции  $u = 5x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ;  $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}} \left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} (5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$5. f(x) = \arccos \sqrt{1 - e^{2x}}$$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент  $u = \sqrt{1 - e^{2x}}$ . Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой  $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент  $u = 1 - e^{2x}$ .

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' = -\frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} (-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

**Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление****Тема 2.2. Производная функции и ее приложения****Практическое занятие №8****Применение производной к исследованию функций**

**Цель работы:** Научиться исследовать функции и строить графики функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**Уметь:**

У1 анализировать сложные функции и строить их графики;

У6 решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1.  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ .

2.  $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ .

**Краткие теоретические сведения:**

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции  $D(y)$ .
2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при  $x = 0$  и при  $y = 0$ ).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

**Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной**

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции  $f'(x)$ .
3. Найти критические точки функции  $y = f(x)$ , т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная  $f'(x)$  обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции  $f(x)$  и знак производной  $f'(x)$  в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции  $y = f(x)$ .
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка  $x_0$  есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором  $f'(x) < 0$ , от промежутка, в котором  $f'(x) > 0$ , и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой  $x_0$ , знак производной не меняется, то в точке  $x_0$  функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.
7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.



### Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых  $f''(x) = 0$  или не существует.
3. Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

### Асимптоты.

**Асимптотой графика функции**  $y = f(x)$  называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки  $(x; f(x))$  до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая  $x = a$  называется **вертикальной асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из предельных значений  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  равно  $-\infty$  или  $+\infty$ .

**Замечание.** Прямая  $x = a$  не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке  $x = a$ . Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая  $y = b$  называется **горизонтальной асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из предельных значений  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  равно  $b$ .

**Замечание.** График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая  $y = kx + b$  называется **наклонной асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции  $y = f(x)$  существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$ , то функция имеет наклонную асимптоту  $y = kx + b$  при  $x \rightarrow \infty$ .

### Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

### Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}$$

1. Область определения функции  $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения  $x = 0$  получим  $y(0) = 0$ .

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка  $x = 0$  - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$$

$$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция ни четная, ни нечетная, неперiodическая.

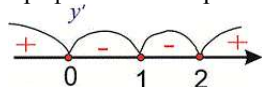
4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравняв ее к нулю, получим критические точки  $x = 0$ ;  $x = 2$ . Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности  $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$  и убывает  $(0; 1) \cup (1; 2)$ .

5. Точка  $x = 0$  точка локального максимума,  $x = 2$  - локального минимума. Найдем значение функции  $y_{\max} = 0$ ;  $y_{\min} = 2$ .

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x - 4)(2x - 2)^2 - (2x^2 - 4x) \cdot 2(2x - 2) \cdot 2}{(2x - 2)^4} = \frac{8}{(2x - 2)^3} = \frac{8}{8(x - 1)^3} = \frac{1}{(x - 1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая  $x = 1$  – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид  $y = kx + b$ .

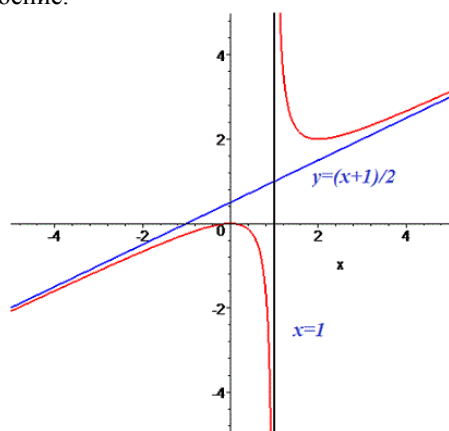
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x - 2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{2x - 2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x - 1)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

8. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по ним проводим построение.



**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

## Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

### Тема 2.2. Производная функции и ее приложения

#### Практическое занятие №9

#### Применение производной к решению задач профессиональной направленности

**Цель работы:** Научиться применять дифференциал для приближенного вычисления значений функции.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У1 анализировать сложные функции и строить их графики;

У6 решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Вычислить приближенные значения, используя дифференциал:

- 1)  $\ln 1,01$ ;
- 2)  $3,96^3$ ;
- 3)  $\sqrt{16,004}$ ;
- 4)  $\sqrt[3]{64,09}$ ;
- 5)  $\sqrt[4]{15,8}$ .

**Краткие теоретические сведения:**

Дифференциалом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется произведение производной функции в этой точке на дифференциал аргумента  $dx$ .

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

Формула для приближенного вычисления значения функции:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \Delta x = x - x_0.$$

При практическом применении формулы надо понимать, что погрешность приближенного значения будет тем меньше, чем меньше  $\Delta x$ . Кроме того, точка  $x_0$  должна быть «удобной» для вычисления значения функции в ней.

Ну и, разумеется, функция  $y = f(x)$  должна быть дифференцируемой в точке  $x_0$ .

**Порядок выполнения работы:**

1. Представьте аргумент в виде  $x_0 + \Delta x$ .
2. Примените формулу для вычисления приближенного значения функции.

**Ход работы:**

Вычислить приближенные значения, используя дифференциал:

- 1)  $1,01^{10}$

В качестве «удобной» точки возьмем  $x_0 = 1$ . Тогда приращение аргумента  $\Delta x = x - x_0 = 1,01 - 1 = 0,01$ .

$$f(x_0) = f(1) = 1^{10} = 1;$$

$$f'(x) = (x^{10})' = 10x^9; \quad f'(1) = 10.$$

Подставляя найденные значения в формулу, получим:

$$1,01^{10} = (1 + 0,01)^{10} \approx 1 + 10 \cdot 0,01 = 1 + 0,1 = 1,1.$$

- 2)  $\sqrt[3]{7,95}$

В качестве «удобной» точки возьмем  $x_0 = 8$ . Тогда приращение аргумента  $\Delta x = x - x_0 = 7,95 - 8 = -0,05$ .

$$f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2; \quad f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}};$$

$$f'(8) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}.$$

Подставляя найденные значения в формулу, получим:

$$\sqrt[3]{7,95} = \sqrt[3]{8 - 0,05} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot (-0,05) = 2 - \frac{1}{240} = 1 \frac{239}{240}.$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо

70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

**Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление**  
**Тема 2.3 Интеграл и его приложения**

**Практическое занятие №10**

**Нахождение неопределенных интегралов по таблице интегралов и методом замены**

**Цель работы:** Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У3 вычислять значения геометрических величин;

У6 решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

**Найдите неопределенные интегралы:**

1)  $\int (8x^4 - 6x^2 + 2x - 3) dx$

2)  $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$

3)  $\int \cos(10x - 5) dx$

4)  $\int 3^{4x^2} x dx$

5)  $\int \frac{5 dx}{25 + 16x^2}$

6)  $\int \frac{x^2 dx}{(1 - 2x^3)^2}$

7)  $\int \frac{2x^4 - 4x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

**Порядок выполнения работы:**

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернуться к старой переменной.

**Ход работы:** Найти интегралы:

1)  $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx &= \int \left( \frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) dx \\ &= \int \left( 6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2} \right) dx \\ &= 6 \int x^2 dx - 5 \int dx \\ &\quad + 3 \int \frac{dx}{x} + 4 \int x^{-2} dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3 \ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 - 5x + 3 \ln|x| - \frac{4}{x} + C \end{aligned}$$

2)  $\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4} = \left[ \begin{array}{l} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{dt}{3} \end{array} \right] = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5 \int t^{-4} dt = -5 \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

**Форма предоставления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

**Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление  
Тема 2.3 Интеграл и его приложения**

**Практическое занятие № 11**

**Нахождение неопределенных интегралов методом интегрирования по частям**

**Цель работы:** Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У3 вычислять значения геометрических величин;

У6 решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

- 1)  $\int (x^2 + 5x + 7) \cdot \ln x dx$ ;
- 2)  $\int e^{2x} \cos 3x dx$ ;
- 3)  $\int (x^2 + 4x + 3)e^{2x} dx$ .

**Порядок выполнения работы:**

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл нельзя найти другими способами, то примените формулу интегрирования по частям  $\int U dV = UV - \int V dU$ . Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей  $U$  и  $dV$ . Затем, после нахождения  $dU$  и  $V$ , используйте формулу интегрирования по частям.

Виды интегралов, берущихся по частям:

-Интегралы вида  $\int P(x)e^{kx} dx$ ,  $\int P(x)\sin kx dx$ ,  $\int P(x)\cos kx dx$ , где  $P(x)$ - многочлен,  $k$ - число.Удобно положить  $U = P(x)$ , а все остальные множители принять за  $dV$ .-Интегралы вида  $\int P(x)\arcsin x dx$ ,  $\int P(x)\arccos x dx$ ,  $\int P(x)\ln x dx$ ,  $\int P(x)\arctg x dx$   
 $\int P(x)\operatorname{arccctg} x dx$ .Удобно положить  $P(x) dx = dV$ , а остальные множители принять за  $U$ .- Интегралы вида  $\int e^{ax} \sin bx dx$ ,  $\int e^{ax} \cos bx dx$ , где  $a$  и  $b$  числа. За  $U$  можно принять функцию  $U = e^{ax}$ .**Ход работы:** Найти интегралы:

1)  $\int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому  $U = \ln x$ ,  $dV = (x^3 - 4x) dx$ .

$$dU = \frac{1}{x} dx, \quad V = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx = \ln x \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \frac{1}{x} dx =$$

$$\ln x \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left( \frac{x^3}{4} - 2x \right) dx = \ln x \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

2)  $\int (x^2 - 2x) \cos 4x dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому  $U = x^2 - 2x$ ,  $dV = \cos 4x dx$ .

$$dU = (2x - 2) dx, \quad V = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\int (x^2 - 2x) \cos 4x dx = (x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x (2x - 2) dx =$$

$$(x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \int \sin 4x (2x - 2) dx = \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} \int \sin 4x (x - 1) dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

 $U = x - 1$ ,  $dV = \sin 4x dx$ .

$$dU = dx, \quad V = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x$$

$$= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left( -\frac{1}{4} \cos 4x \right) - \int -\frac{1}{4} \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left( -\frac{1}{4} \cos 4x \right) + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8} ((x - 1) (\cos 4x)) - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x)\sin 4x + \frac{1}{8}((x - 1)(\cos 4x) - \frac{1}{32}\sin 4x) + C$$

**Форма предоставления результата:** выполненная работа

**Критерии оценки:**

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

**Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление  
Тема 2.3 Интеграл и его приложения**

**Практическое занятие № 12**

**Нахождение определенных интегралов различными методами**

**Цель работы:** Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования, вычислять приближенные значения определенных интегралов.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

- У3 вычислять значения геометрических величин;
- У6 решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;
- Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Вычислите определенные интегралы

2.  $\int_{-2}^3 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx$

3.  $\int_1^4 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

4.  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$

5.  $\int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$

7.  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin 2\frac{x}{3}}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям  $\int UdV = UV - \int VdU$ .

**Ход работы:**

- 1)  $\int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5)dx = 4 \int_{-1}^3 x^3 dx - 3 \int_{-1}^3 x^2 dx + 2 \int_{-1}^3 x dx + 5 \int_{-1}^3 dx = x^4 - x^3 + x^2 + 5x \Big|_{-1}^3 = 3^4 - 3^3 + 3^2 + 5 \cdot 3 - (-1^4 + 1^3 - 1^2 + 5 \cdot (-1)) = 81 - 27 + 9 + 15 + 2 = 80$
- 2)  $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+(\frac{5}{2}x)^2} = \left[ \begin{array}{l} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctg t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \left[ \begin{array}{l} \cos x = t \\ d\cos x = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = \cos 0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{array} \right] = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2 \cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

## Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление Тема 3.3 Интеграл и его приложения

### Практическое занятие № 13

#### Нахождение площадей фигур и объемов тел

**Цель работы:** научиться применять интегрирование для решения задач геометрии.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У3 вычислять значения геометрических величин;

У6 решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:**



Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а)  $y = x^2 + 1, y = 0, x = 1, x = 4;$

б)  $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e;$

в)  $y^2 = x^3; x = 4.$

**Краткие теоретические сведения:**

*Геометрический смысл определенного интеграла*

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е.  $f(x) > 0$  при  $x \in [a; b]$ . Фигура, образованная линиями  $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$ , называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

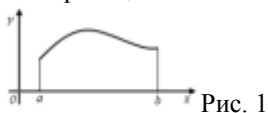


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция  $f(x)$  неотрицательна на отрезке  $[a; b]$ , то площадь  $S$  под кривой  $y = f(x)$  на  $[a; b]$  (рис. 2) численно равна определенному интегралу от  $f(x)$  на данном отрезке:  $S = \int_a^b f(x)dx$  (геометрический смысл определенного интеграла).

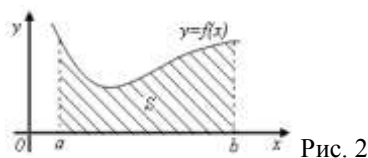


Рис. 2

2. Если функция  $f(x)$  – неположительная на отрезке  $[a; b]$ , то площадь  $S$  под кривой  $y = f(x)$  на  $[a; b]$  (рис. 3) равна определенному интегралу от  $f(x)$  на  $[a; b]$ , взятому со знаком «минус»:  $S = -\int_a^b f(x)dx$ .

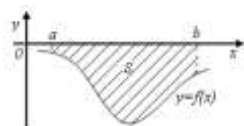


Рис. 3

3. Если функция  $f_2(x) \geq f_1(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , то площадь  $S$  фигуры, заключенной между кривыми  $y = f_2(x)$  и  $y = f_1(x)$  на  $[a; b]$  (рис. 4) определяется формулой  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$ .

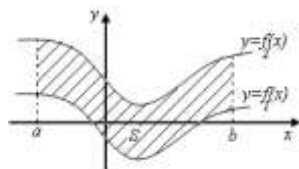


Рис. 4

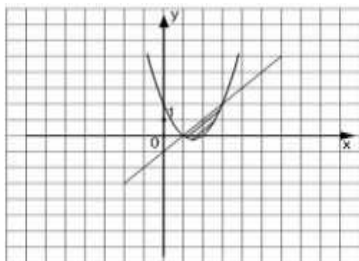
**Порядок выполнения работы:**

1. Изобразите фигуру на координатной плоскости;
2. Определите, является ли фигура криволинейной трапецией.
3. Вычислите площадь фигуры.

**Ход работы:**

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^2 - 3x + 2$  и  $y = x - 1$ .

Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение  $x^2 - 3x + 2 = x - 1$ . Корнями этого уравнения являются числа  $x = 1$  и  $x = 3$ , следовательно, они и являются пределами интегрирования.



Значит, площадь фигуры равна:

$$S = \int_1^3 (x - 1) dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{x^2}{2} - x - \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^3 = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 - \left( \frac{27}{3} - \frac{3 \cdot 9}{2} + 6 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) = 1 \frac{1}{3}$$

Получили, что площадь фигуры равна  $1 \frac{1}{3}$  (кв. ед.)

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

**Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление  
Тема 3.3 Интеграл и его приложения**

**Практическое занятие № 14**

**Применение определенных интегралов к решению прикладных задач**

**Цель работы:** научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

УЗ вычислять значения геометрических величин;

У6 решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;  
 Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;  
 Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:**

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

**Задание:**

1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения  $v = 18t - 6t^2$ .
2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения  $v = 3t^2 - 2t - 3$ .
3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?
4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.
5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

**Краткие теоретические сведения:**

**Путь, пройденный телом**

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью  $v=v(t)$ . Найдем путь  $S$ , пройденный ею за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ .

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е.

$$v(t) = \frac{dS}{dt}. \text{ Отсюда следует, что } dS = v(t)dt.$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Интегрируя полученное равенство в пределах от  $t_1$  до  $t_2$ , получаем

Пусть материальная точка перемещается вдоль оси  $ox$  под действием переменной силы  $F = F(x)$ , направленной параллельно оси. Тогда работа, произведённая силой  $F$  при перемещении точки из положения  $x = a$  в положение  $x = b$  ( $a < b$ ) вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

**Вычисление работы с помощью определённого интеграла.**

Пусть под действием некоторой силы  $f(x)$  материальная точка  $M$  движется по прямой в направлении оси  $OX$ . Требуется найти работу, произведённую силой  $f(x)$  при перемещении точки  $M$  из положения  $x = x_1$  в положение  $x = x_2$ .

- 1) Если сила постоянна  $f(x) = C$ , то работа выражается следующим образом  $A = C(x_2 - x_1)$ .

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

- 2) Если сила переменная величина, то

**Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.**

Из физики известно, что сила  $P$  давления жидкости на горизонтально расположенную площадку  $S$ , глубина погружения которой равна  $h$ , определяется по формуле:

$$P = 9,81\gamma hS \quad (4), \text{ где } \gamma - \text{плотность жидкости.}$$

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy dx \quad (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то  $a=0$  и формула (5) примет вид

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy dx \quad (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины  $x$  погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy \, dx = 9,81\gamma y \int_a^b x \, dx = 9,81\gamma y \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = 9,81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

**Порядок выполнения работы:**

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

**Ход работы:**

**Пример 1.** Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела  $v(t) = 10t + 2$  (м/с).

Решение: Если  $v(t) = 10t + 2$  (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ( $t=0$ ) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2) \, dt = 5t^2 \Big|_0^4 + 2t \Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \text{ (м)}.$$

Ответ:  $S = 88$  (м).

**Пример 2.** Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению  $x$ , т.е.  $F = kx$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила  $F = 100$  Н растягивает пружину на  $x = 0,01$  м; следовательно,  $100 = k \cdot 0,01$ , откуда  $k = 10000$ ; следовательно,  $F = 10000x$ .

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x \, dx = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12,5 \text{ (Дж)}.$$

**Пример 3.** В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь  $y = 1$ ,  $a = 0,5$ ,  $b = 2 + 0,5 = 2,5$  (м),  $\gamma = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Следовательно,

$$P = 9810 \int_a^b xy \, dx = 9810 \int_a^b x \, dx = 9810 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,5}^{2,5} = 9810 \frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430 \text{ (Н)}.$$

**Выполнить задания:**

1. Найти работу производимую при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия её на 0,005 м нужно приложить силу в 10 Н.  
Ответ: 0,9 Дж.
2. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3 Н. Найти работу, которую надо произвести, чтобы растянуть эту пружину на 0,05 м  
Ответ: 0,075 Дж.
3. Масса стержня, расположенного на отрезке  $[0;3]$ , если плотность задается функцией  $\rho(x) = x^4 - 3x$ , равна ...
4. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м  
Ответ: 125 Дж.
5. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины на 15 см, если известно, что для сжатия пружины на 1 см необходима сила в 30 Н.  
Ответ: 33,75 Дж.
6. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины а 0,08 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна Сиды в 25 Н.  
Ответ: 8 Дж.
7. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = 2t^2 - t + 1$  (м/с). Найти путь, пройденный за первые 3 с.  
Ответ: 16,5 м.
8. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = 2t + a$  (м/с). найти значение параметра  $a$ , если известно, что за промежутки времени от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 2$  (с) тело прошло путь длиной 40 м.  
Ответ:  $a = 18$ .
9. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = 12t - t^2$  (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала пути, до его остановки.  
Указание: в моменты начала и остановки скорость тела равна нулю.

Ответ: 288 м.

10. Найти путь, пройденный точкой за третью секунду, зная скорость её прямолинейного движения  $v(t) = 3t^2 - 2t - 3$  (м/с).

Ответ: 11 м.

11. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. одно тело двигалось со скоростью  $v_1(t) = 3t^2 + 2t$  (м/с), другое со скоростью  $v_2(t) = 2t$  (м/с). определить расстояние между телами через 2 секунды.

Ответ: 8 м.

12. Масса стержня, расположенного на отрезке  $[0; 2]$ , если плотность задается функцией  $\rho(x) = 6x^2 - 3x$ , равна ...

13. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = (3t^2 + 8t)$ . Тогда путь, пройденный телом за промежуток времени от  $t = 1$  до  $t = 4$ , равен ...

14. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой  $v(t) = (12t - 3t^2)$  (м/с). Тогда длина пути, пройденного телом от начала его движения до остановки, равна ...

**Пример 4.1.** Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

По закону Гука упругая сила  $F$ , растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению  $x$ , т.е.  $F = kx$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности. По условию сила  $F = 100$  Н растягивает пружину на  $x = 0,01$  м, т.е.  $100 = k \cdot 0,01 \Rightarrow k = 10000$ . Тогда  $F = kx = 10000x$ .

Вычислим работу:

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 10000 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 5000 \cdot 0,05^2 = 12,5 \text{ (Дж)}$$

Определённый интеграл применяют для вычисления пути  $S$  прямолинейного движения.

Путь  $S$ , пройденный материальной точкой за промежуток времени от  $t = a$  до  $t = b$ , равен определённому интегралу от скорости  $v(t)$ :

$$S = \int_a^b v(t) dt$$

**Пример 4.2.** Вычислить путь, пройденный точкой за 4 секунды от начала движения, если скорость точки  $v = 2t + 4$  (м/с).

По условию:  $v(t) = 2t + 4, a = 0, b = 4$ .

$$\text{Тогда } S = \int_0^4 (2t + 4) dt = 2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 + 4t \Big|_0^4 = 4^2 + 4 \cdot 4 = 32 \text{ (м/с)}.$$

**Пример 4.3.** Масса стержня, расположенного на отрезке  $[0; 6]$ , если плотность задается функцией  $\rho(x) = 2x^2 + 3$ , равна ...

В качестве модели стержня принимается отрезок  $[a; b]$  на оси  $Ox$ , длина которого совпадает с длиной стержня и в каждой точке которого задано значение плотности  $\rho(x)$ . Тогда массу стержня можно вычислить по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

$$m = \int_0^6 (2x^2 + 3) dx = \left( \frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_0^6 = \frac{2 \cdot 6^3}{3} + 18 =$$

Используя условие задачи, получим  $= 144 + 18 = 162$ .

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

### Раздел 3. Элементы теории вероятностей и математической статистики

#### Тема 3.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики

#### Практическое занятие № 15

#### Решение комбинаторных задач

**Цель работы:** Осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У5 решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

**Краткие теоретические сведения:**

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

**1.Правило сложения.** Если некоторый элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а другой элемент  $B - n$  способами, исключаящими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов( либо  $A$ , либо  $B$  ) можно осуществить  $m + n$  способами.

**2.Правило умножения.** Если некоторый элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами и если после каждого такого выбора элемент  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор пары элементов  $( A, B )$  в указанном порядке можно осуществить  $m \cdot n$  способами.

**Задача1.** При формировании экипажа космического корабля имеется:10 претендентов на пост командира,20 претендентов на пост бортинженера,25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

**Решение.** По правилу суммы существует  $10+20+25=55$ способов выбора одной из кандидатур.

**Задача2.**В столовой предлагают два различных первых :  $a_1$  и  $a_2$  ;три различных вторых блюда:  $b_1, b_2, b_3$  и два различных десерта:  $c_1$  и  $c_2$  . Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

**Решение.** Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует  $2 \times 3 \times 2 = 12$  способов выбрать обед из трех блюд.

### 3. Подмножества $n$ - множества(соединения).

Для нахождения  $k$  – подмножеств некоторого  $n$  – множества нужно выбрать  $k$  из  $n$  его элементов (поэтому часто говорят о *выборке*  $k$  элементов из  $n$  – элементов). Про выбранные  $k$  из  $n$  различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из  $n$  элементов по  $k$  .*Соединение*-собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все  $n$  элементов или только часть их, различают три вида соединений: **перестановки, размещения, сочетания.**

#### **Перестановки.**

Перестановками из  $n$  – элементов называются такие соединения из  $n$  – элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение:  $P_n = n !$

#### **Размещения.**

Размещениями из  $n$  – элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит  $m$  элементов, выбранных из числа данных  $n$  – элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем , и другим.

Обозначение  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из  $n$  – элементов по  $n$  – элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

#### **Сочетания.**

Сочетаниями из  $n$ - элементов по  $m$  называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

#### **Порядок выполнения работы:**

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберите соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

**Ход работы:**

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1. Возможных цифр всего десять (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0). Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой (1,4,5,7 ≠ 2,4,5,7), либо порядком набора одинаковых цифр (1,4,5,7 ≠ 4,5,7,1), поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2. Формула размещений имеет вид:  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ . В нашем случае  $n = 4, m = 10$ .

3. Производим расчёт:  $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . В нашем случае  $n=10, m=3$ .

3. Производим расчёт:  $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$ .

3. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4 (9 цифры не повторяются)?

Решение.

1. По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2. Формула перестановок из  $n$  – элементов имеет вид:  $P_n = n!$  В нашем случае  $n = 4$ .

3. Произведём расчёт:  $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

### Раздел 3. Элементы теории вероятностей и математической статистики

#### Тема 3.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики

#### Практическое занятие № 16

**Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики**

**Цель работы:** Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У5 решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**



1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?

3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлено слово ПРАЗДНИК?

### Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события  $A$  называется отношение числа  $m$  случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается  $P(A)$  и вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1:  $0 \leq P(A) \leq 1$

### Порядок выполнения работы:

1. Определите событие  $A$ , вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число( $n$ ) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов( $m$ ), благоприятствующих наступлению события  $A$ .
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события.  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

**Ход работы:** 1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня, что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие  $A$ -«номер набран верно».
2. Число  $n$ -общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле  $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720$ . Итак,  $n=720$

3. Число  $m=1$ , т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.

4.  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие  $A$ -«оба шара окажутся чёрными».
2. Число  $n$ -общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев  $n$  равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два:  $n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{1 \cdot 2 \cdot 18!} = 190$ .

3. Число случаев  $m$ , благоприятствующих событию  $A$ , равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два:  $n = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{1 \cdot 2 \cdot 6!} = 28$

4.  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0,147$

2. На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ЗАМОК ?

Решение.

1. Событие  $A$ -«получится слово ЗАМОК».
2. Число  $n$ -общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев  $n$  равно числу перестановок из 5 элементов (букв):  $n = P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ .

3. Число случаев  $m$ , благоприятствующих событию  $A$ , равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.

4.  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

**Раздел 3. Элементы теории вероятностей и математической статистики**  
**Тема 3.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики**

**Практическое занятие № 17**

**Выборка. Числовые характеристики выборки. Генеральная совокупность и выборочная совокупность. Определение статистических распределений**

**Цель работы:** Рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У5 решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

$x_i$	2	4	7	8	9	12
$n_i$	$p_1^2$	$2p_2$	$p_2$	$p_2^2$	$p_3$	$3p_3$

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, $n_i$
1	3 – 5	$p_1$
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	$p_1^2$
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	$p_1+p_2$

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

$x_i$	5	10	15	20	25	30	35
$N_i$	$p_1$	$3p_1$	$p_2$	$2p_2$	$p_2^2$	$2p_3$	$2p_3^2$

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

$x_i$	2	4	6	8	10	12	14
$n_i$	$p_2$	$2p_2$	$p_1$	$p_1^2$	$p_3$	$2p_3$	$p_2+p_3$

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание:  $p_1$  = числу букв в Вашем имени;  $p_2$  = числу букв в Вашей фамилии;  $p_3$  = числу букв в имени Вашего отца.

**Краткие теоретические сведения** в полном объеме имеются в лекции.

**Порядок выполнения работы:**

- 1 Прочитав условие предложенной задачи, по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.
2. Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.
- 3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик. выборки.

**Ход работы: 1.** Задано распределение частот выборки:

$x_i$	2	6	12	15
$n_i$	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле  $w_i = \frac{n_i}{n}$ :

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0,12; w_2 = \frac{10}{25} = 0,40; w_3 = \frac{7}{25} = 0,28; w_4 = \frac{5}{25} = 0,20.$$

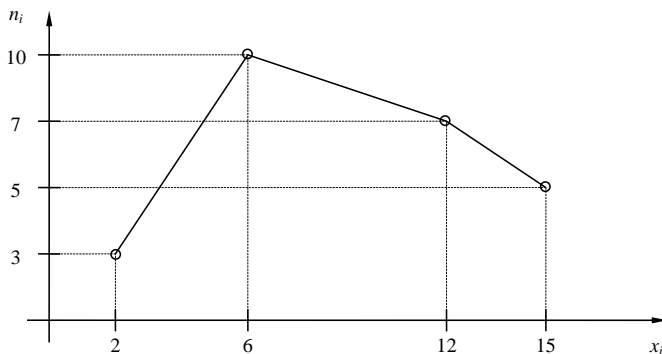
Следовательно,

$x_i$	2	6	12	15
$w_i$	0,12	0,40	0,28	0,20

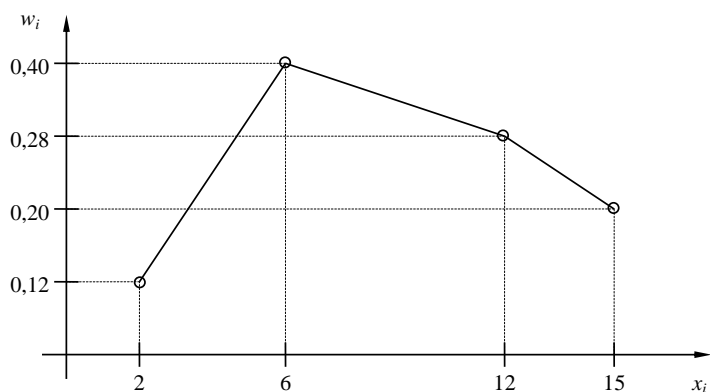
Контроль:  $0,12 + 0,40 + 0,28 + 0,20 = 1$ .

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами  $(x_i, n_i)$  и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам  $(x_i, w_i)$ :



3. Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной $h=5$	Сумма частот вариант $n_i$
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

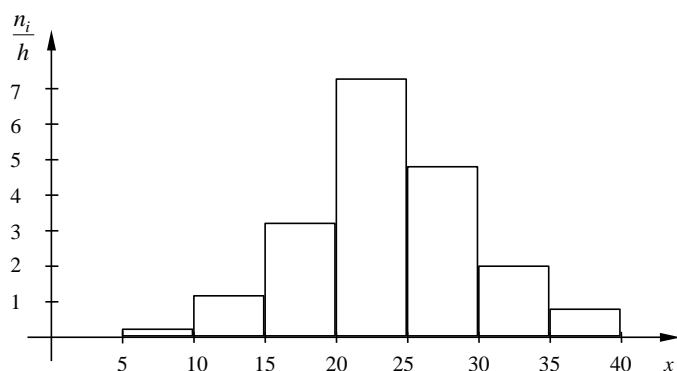
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта $x_i$	2	4	5	6
частота $N_i$	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\bar{X}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу  $D_{\Gamma} = \overline{X^2} - (\bar{X}_{\Gamma})^2$ . Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17,8.$$

Таким образом,  $D_{\Gamma} = 17,8 - 4^2 = 1,8$ .

Генеральное стандартное отклонение:  $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} = \sqrt{1,8} \cong 1,34$ .

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода  $Mo$  : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана  $Me$  : вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4,5.$$

Размах вариации  $R$ : в примере

$$x_{\max} = 6; x_{\min} = 2,$$

поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	1	2	3	4	5
$n_i$	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\bar{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1,82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2}_B = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11,45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X^2}_B - (\bar{X}_B)^2 = 11,45 - 1,82^2 \cong 8,14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8,14} \cong 2,85.$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

## Тема 4.1. Матрицы и определители

### Практическое занятие №18

#### Действия с матрицами

**Цель работы:** Научиться выполнять действия над матрицами.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У4 производить операции над матрицами и определителями;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Найти матрицу  $C = A^2 + 3AB$ , где  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .
2. Выяснить, является ли матрица  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$  обратной к матрице  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

**Краткие теоретические сведения:**

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами:

1. Сложение.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в  $i$ -той строке в  $k$ -том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов  $i$ -той строки первой матрицы на соответствующие элементы  $k$ -того столбца второй.

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

**Ход работы:**

1. Найти матрицу  $C = A^2 + 3AB$ , если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдем  $A^2$ , умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б) Найдем матрицу  $3A$ , умножив все элементы матрицы  $A$  на 3.

$$3A = 3 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в) Найдем произведение  $3AB$

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу  $C$ , складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Найдем произведение  $A \cdot A^{-1}$  и  $A^{-1} \cdot A$ :

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимобратными.

**Форма предоставления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

**Тема 4.1. Матрицы и определители****Практическое занятие №19****Вычисление определителей второго и третьего порядков**

**Цель работы:** научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У4 производить операции над матрицами и определителями;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

**Краткие теоретические сведения:**

Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

**Порядок выполнения работы:**

- 1 Запишите определитель, определите какого он порядка.
- 2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

**Ход работы:**

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$$

$$= 48 - 39 = 9$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$$
$$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно



## Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

### Практическое занятие № 20

#### Решение систем линейных уравнений методом Крамера

**Цель работы:** научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У7 решать системы линейных уравнений различными методами;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$$

**Краткие теоретические сведения:**

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель  $\Delta_1$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель  $\Delta_2$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель  $\Delta_1$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель  $\Delta_2$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель  $\Delta_3$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера:  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ;  $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ ;  $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите систему уравнений.
2. Запишите и вычислите определитель системы.
3. Вычислите определители каждой неизвестной.
4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

**Ход работы:**

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2; -1; 0).

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

**Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.**

**Практическое занятие № 21**

**Нахождение обратной матрицы**

**Цель работы:** Научиться находить обратную матрицу.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У7 решать системы линейных уравнений различными методами;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Найти обратную матрицу к данной:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

**Краткие теоретические сведения:**

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно  $A^{-1} \cdot B$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы A ( $\Delta A \neq 0$ );

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A и составить из них союзную матрицу  $A^*$ .

в) транспонировать матрицу  $A^*$  из алгебраических дополнений  $A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$

г) найти обратную матрицу:  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицу  $A^{-1}$  на матрицу B, состоящую из свободных членов.

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

**Ход работы:**

Пусть задана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

### Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

#### Практическое занятие № 22

#### Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

**Цель работы:** Научиться решать системы линейных уравнений матричным способом.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У7 решать системы линейных уравнений различными методами;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить систему линейных уравнений:

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$$

**Краткие теоретические сведения:**

Пусть задана система линейных уравнений:



$$A^{-1} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -120 + 64 + 56 \\ -310 - 8 - 98 \\ 130 - 104 + 182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (0;4;-2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0 + 12 - 2 = 10 \\ 0 - 8 + 4 = -4 \text{ . (верно)} \\ 0 - 4 - 10 = -14 \end{cases}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

## Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

### Практическое занятие № 23

#### Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

**Цель работы:** научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У7 решать системы линейных уравнений различными методами;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить системы линейных уравнений:

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

**Краткие теоретические сведения:**

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;
- умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;
- прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

#### Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

#### Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений
--	---

	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

## Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

### Практическое занятие № 24

#### Решение систем линейных уравнений различными способами

**Цель работы:** Научиться решать системы линейных уравнений различными методами.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У7 решать системы линейных уравнений различными методами;

Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;

Уо 04.01 организовывать работу коллектива и команды;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$$

**Краткие теоретические сведения:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

Чтобы решить систему методом Крамера, составим определитель из коэффициентов при неизвестных.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Этот определитель называется определителем системы:

Составим определители каждой неизвестной. Определитель  $\Delta_1$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель  $\Delta_2$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель  $\Delta_3$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.



$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера:

Для решения системы методом Гаусса используйте алгоритм:

- 1) Запишите систему линейных уравнений.
- 2) Составьте расширенную матрицу.
- 3) Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
- 4) По ступенчатой матрице составьте систему.
- 5) Последовательно найдите значения всех неизвестных.
- 6) Запишите ответ.

Для решения системы матричным методом:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

- а) вычислить определитель матрицы  $A$  ( $\Delta A \neq 0$ );
- б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы  $A$ ;
- в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

- г) найти обратную матрицу:

Чтобы найти неизвестную матрицу  $X$ , нужно умножить обратную матрицу  $A^{-1}$  на матрицу  $B$ , состоящую из свободных членов.

4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно