Приложение 4.23.1 к ОПОП по специальности
09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ОП.02 Дискретная математика

для обучающихся специальности

09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Магнитогорск, 2024

ОДОБРЕНО

Предметно-цикловой комиссией
«Информатики и вычислительной техники»
Председатель Т.Б. Ремез
Протокол № 5 от31.01.2024

Методической комиссией МпК

Протокол №4 от «21» февраля 2024

.

Разработчик:
преподаватель отделения № 2 «Информационных технологий и транспорта» Многопрофильного колледжа ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» Елена Александровна Васильева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Дискретная математика».
Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы и овладению общими компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Дискретная математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

Уд 1 строить и анализировать дискретные модели;
Уд 2 анализировать логику высказываний и утверждений;
Уд 3 применять математический аппарат для построения и анализа алгоритмов;
Уо 01.03 определять этапы решения задачи;
Уо 01.04 составлять план действий;
Уо 01.08 выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы;
Уо 02.01 определять задачи для поиска информации;
Уо 02.02 определять необходимые источники информации;
Уо 02.04 структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации;
Уо 02.05 оценивать практическую значимость результатов поиска.

Содержание практических занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности. А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Дискретная математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Раздел 1. Основы теории множеств
Тема 1.1. Основы теории множеств

Практическое занятие № 1. Решение задач на определение мощности множества и подмножества
Практическое занятие № 2. Выполнение действий над множествами

Цель работы: формирование умений выполнять операции над множествами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции над множествами;
- решать задачи на выполнение теоретико-множественных операций.

Материальное обеспечение:

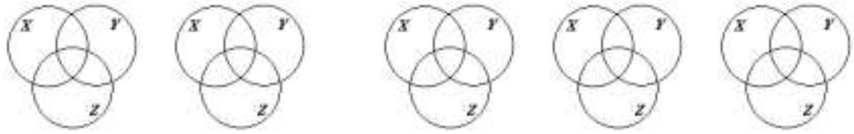
Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

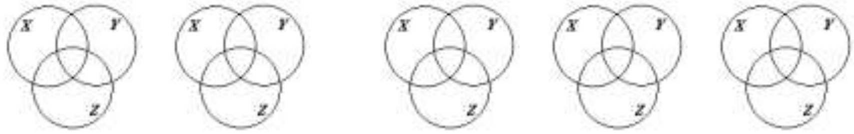
Задания:

1. Пусть даны множества *A={-3;-2;-1;0;1;2;3;7}*, *B={5;3;2;1;0;-2;-3}*, *C={-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4}*. Найдите множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cup C$, $B\cup C$ $A\setminus B$, $B\setminus A$.
2. Докажите следующие тождества: а) $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$; б) $(X\setminus Y)\cup Z=(X\setminus Y)\cap(Y\setminus Z)$.

а) левая часть равенства правая часть равенства



б) левая часть равенства правая часть равенства



3. Пусть *N*- множество натуральных чисел, *Z*- множество целых чисел, а множества *A*, *B*, и *C* определены в задании 1. Найдите $A\cup N,\ A\cap N,\ Z\cup C,\ (A\cap B)\cap N,\ A\setminus Z$.
4. Пусть *A* – множество параллелограммов, *B* – множество прямоугольников, *C* – множество ромбов, *D* – множество квадратов. Запишите результат операций: $A\cap B,\ B\cap C,\ A\cup B\cup C\cup D.$
5. Укажите пустые множества среди следующих: а) множество целых корней уравнения $x^2-16=0$; б) множество целых корней уравнения $x^2+16=0$.
6. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера- Венна множества *A, B, C*, если: а) $A\subset B, B\subset C$; б) $A\subset B,\ B\subset C,\ A\setminus B=\varnothing$; в) $A\cup B,\ \ B\cap C,\ \ A\subset B$; г) $A\cap B\neq\varnothing,\ \ A\cap C\neq\varnothing,\ \ B\cap C\neq\varnothing,\ \ A\cap B\cap C\neq\varnothing$.
7. Даны множества $A=\{x\in R\mid x^2+4=y\}$, $B=\{x\in R\mid x^2+y^2\leq 9\}$, $C=\{x\in R\mid x+2\leq y\}$. Найдите $A\cup B,\ A\cap B,\ A\cup C,\ A\cap C,\ B\cap C,\ A\setminus C,\ B\setminus A$.
8. Из цифр 1,2,3,4,5 составьте все двузначные числа. Как связано получившееся множество с декартовым произведением $A\times A,\ \ A=\{1,2,3,4,5\}$.

Краткие теоретические сведения

Одним из основных исходных понятий математики является понятие множества и его элементов. Множество состоит из элементов. Множества обозначаются большими латинскими буквами: A; B; C..., а их элементы - малыми буквами: a,b,c,…

Если a является элементом множества A или, что то же самое, a принадлежит множеству A, то применяют запись $a\in A$; в противном случае пишут $a\notin A$.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов. Если множества A и B не равны, то применяется запись $A \neq B$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, в противном случае множество называется бесконечным. Конечное множество, содержащее n элементов, называется n-множеством.

Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается $\varnothing$. Предположим, что все множества, являются подмножествами некоторого множества U, называемого универсальным множеством.

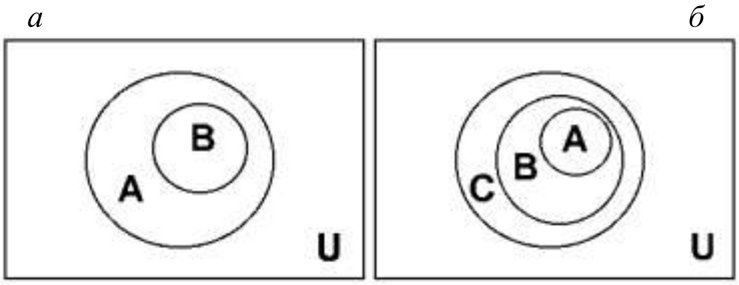


Рис 1.1

Если каждый элемент a множества B, $a \in B$, является элементом множества A, $a \in A$, то B называется подмножеством множества A (рис. 1.1, а). Этот факт записывается с помощью знака включения $\subseteq$ следующим образом: $B \subseteq A$.

Свойства включения

1. $A \subseteq A$;
2. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (рис. 1.1, б);
3. из двух включений $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$ следует, что $A=B$.

Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Если $B \subseteq A$ и при этом $B \neq A$, то этому соответствует запись $B \subset A$ и B называется собственным подмножеством A.

Для описания множества A, состоящего из элементов a1,a2,...,an,... обычно применяется запись A={a1,a2,...,an,...}, причём порядок элементов в фигурных скобках не имеет значения; обычно он определяется соображениями наглядности.

Пример. В записи множества первых n натуральных чисел Nn={1,2,...,n} удобно располагать числа в возрастающем порядке, хотя при этом надо иметь в виду, что

N3 ={1,2,3}={2,1,3}={3,2,1}.

Другой способ задания множества состоит в описании свойств, однозначно определяющих принадлежность элементов данному множеству. Такому способу задания множества соответствует запись:

A ={a/a обладает свойством P(a)}.

Пример. Множество чётных чисел M может быть задано так:

M={i / i - целое число, которое делится на 2 без остатка}.

В случае описания множества с помощью некоторого свойства необходимо следить за тем, чтобы каждый элемент был чётко определён. Так, например, недостаточно чётким является определение множества A как множества слов русского языка, если нет ссылки на один из толковых словарей.

Возможно также рекурсивное задание множества, при котором осуществляется последовательное описание элементов через предыдущие. Например, множество натуральных чисел рекурсивно можно задать так:

N={i / если целое $i \in N$, то $i+1 \in N$, $i \ge 1$}.

Операции над множествами

Объединением двух множеств A и B называется множество вида:

$A \cup B$ ={a / $a \in A$ или $a \in B$}(рис. 1.2, а).

Пересечением двух множеств A и B называется множество вида:

A∩B={a / a∈ A и a∈ B} (рис. 1.2, б).
Если множества A и B не имеют общих элементов, то A∩B=∅.

а *б*

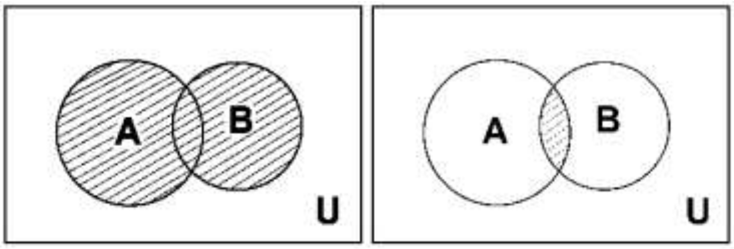


Рис 1.2

Свойства операций объединения и пересечения
Коммутативность:
1. A∪B = B∪A,
2. A∩B = B∩A;

Ассоциативность:
3. (A∪B)∪C = A∪(B∪C),
4. (A∩B)∩C = A∩(B∩C).

Объединение и пересечение связаны законами *дистрибутивности*:
5. A∩(B∪C)= (A∩B) ∪ (A∩C),
6. A∪(B∩C)= (A∪B) ∩ (A∪C).

По свойству 3 операции включения следует равенство правой и левой частей доказываемого равенства.
Для операции объединения множеств нейтральным является пустое множество ∅, а для операции пересечения множеств - универсальное множество U.
Разность множеств A и B определяется следующим образом:
A\B ={a / a∈A и a∉B} (рис. 1.3, а).
Разность не обладает свойством коммутативности; эта операция также не является и ассоциативной.
Пользуясь понятием универсального множества, можно определить дополнение $\overline{A}$ к множеству A, как разность вида: $\overline{A}$ = U \ A (рис. 1.3, б).
Пример. Пусть в качестве универсального множества выступает множество целых чисел Z и пусть A - это множество всех чётных чисел. Тогда $\overline{A}$ - это множество всех нечётных чисел.
Операции объединения, пересечения и дополнения множеств связаны между собой законами де Моргана:

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

Если a ∈ $\overline{A\cap B}$, то a ∉ A∩B. Это значит, что или a∈ $\overline{A}$, или a∈ $\overline{B}$, т.е. a∈ $\overline{A}\cup\overline{B}$. Следовательно, $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$.
С другой стороны, если a∈ $\overline{A}\cup\overline{B}$, то или a∈ $\overline{A}$, или a∈ $\overline{B}$. Это значит, что a∉ A∩ B, т.е. a ∈ $\overline{A\cap B}$. Таким образом, $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$.
Из этих двух включений следует первый закон де Моргана. Второй закон доказывается аналогичным образом.

а *б*

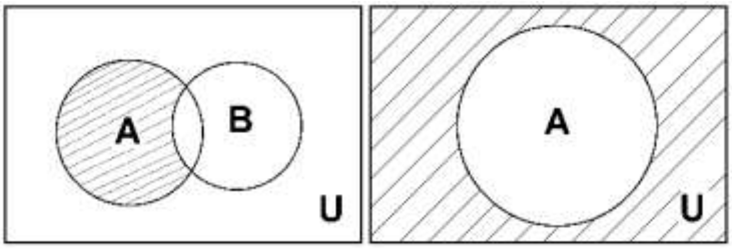


Рис 1.3

Примеры.

1. Найти $A\cup B; A\cap B; A\times B; B\times A; A\setminus B.$ $A=\{7;8;9\}; B=\{7;8;10\}$

Решение:

$A\cup B=\{7;8;9\}\cup\{7;8;10\}=\{7;8;9;10\}$

$A\cap B=\{7;8;9\}\cap\{7;8;10\}=\{7;8\}$

$A\times B=\{7;8;9\}\times\{7;8;10\}=\{(7;7);(7;8);(7;10);(8;7);(8;8);(8;10);(9;7);(9;8);(9;10)\}$

$B\times A=\{7;8;10\}\times\{7;8;9\}=\{(7;7);(7;8);(7;9);(8;7);(8;8);(8;10);(10;7);(10;8);(10;9)\}$

$A\setminus B=\{7;8;9\}\setminus\{7;8;10\}=\{9\}.$

2. Доказать равенство и записать двойственное ему:

$$(A\cup B)(B\cup C)(C\cup A)=ABC\cup AB\cup AC\cup BC$$

Решение:

Преобразуем левую часть:

$$(A\cup B)(B\cup C)(B\cup A)=\left(AB\cup C\right)(B\cup A)=AB\cup AB\cup CB\cup CA=$$

$$=ABC\cup AB\cup AC\cup BC$$

Таким образом, левая часть равна правой части, т.е. равенство верно.

Для того чтобы составить равенство, двойственное данному, пользуемся принципом двойственности. Заменим в данном равенстве знак $\cup$ на $\cap$ и наоборот. Чтобы не поменялся порядок действий, расставим скобки. Получим двойственное равенство:

$$AB\cup BC\cup CA=\left(A\cup B\cup C\right)\left(A\cup B\right)\left(A\cup C\right)\left(B\cup C\right)$$

Мощностью конечного множества называется количество его элементов.

Для конечного множества А через m (А) обозначим число элементов в множестве А.

Из определение следуют свойства:

1. m (A) + m ($\bar{A}$) = m (E)
2. A = B => m(A) = m(B)

Для любых конечных множеств справедливы так же утверждения:

1. m($A\cup B$)=m (A) + m (B) – m (A∩B)
2. m $(A\cup B\cup C)$ =m(A)+m(B)+m(C)–m(A∩B)-m(A∩C)–m(B∩C)–m(A∩B∩C).

Дано множество А.

Булеаном Р(А) множества А называется множество всех подмножеств данного множества.

Пример. $A=\{1,2,3\}$

$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

Даны множества A и B.
Прямым или декартовым произведением A×B множеств A и B называется множество упорядоченных пар вида *(x; y)*, в которых *x* принимает все значения из множества A, а *y* - все значения множества B.

Пример. $A = \{1,2,3\},\ B = \{a,b\}$

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

Решение задач с помощью кругов Эйлера

Этот способ решать задачи придумал в XVIII в. великий Леонард Эйлер.
Пример. В олимпиаде по математике приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек. По алгебре и геометрии решили 7 человек, по алгебре и тригонометрии – 9 человек. Ни одной задачи не решили 3 человека. Сколько учащихся решили все задачи? Сколько учащихся решили только две задачи? Сколько учащихся решили только одну задачу?
Решение:
Запишем коротко условие и покажем решение:
m (E)= 40;
m (A) = 20;
m (B) = 18;
m (C) = 18;
m (A∩B) = 7;
m (A∩C) = 8;
m (B∩C) = 9;
m (ABC) = 3 => m (ABC) = 40 – 3 = 37
Изобразим множества A, B, C (рис. 1.4).

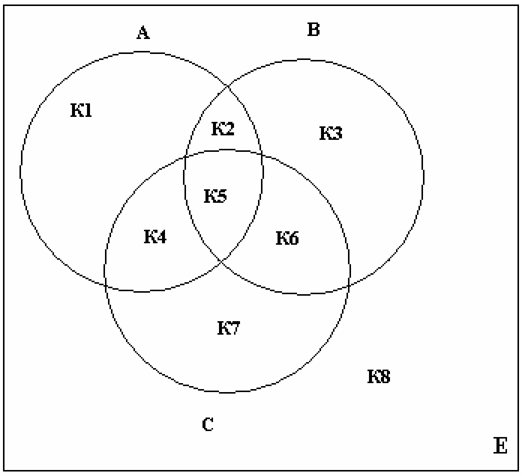


Рис 1.4
К1 – множество учеников, решивших только одну задачу по алгебре;
К2 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и геометрии;
К3 – множество учеников, решивших только задачу по геометрии;
К4 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и тригонометрии;
К5 – множество всех учеников, решивших все три задачи;
К6 – множество всех учеников, решивших только две задачи, по геометрии и тригонометрии;
К7 – множество всех учеников, решивших только задачу по тригонометрии;

К8 – множество всех учеников, не решивших ни одной задачи.
Используя свойство мощности множеств и рисунок можно выполнить вычисления:
$m(К5)=m(A\cap B\cap C)=m(ABC)-m(A)-m(B)-m(C)+m(A\cap B)+m(A\cap C)+m(B\cap C)$;
$m\ (К5) = 37-20-18-18+7+8+9=5$; $m\ (К2) = m\ (A\cap B) - m\ (К5) = 7-5=2$;
$m\ (К4) = m\ (A\cap C) - m\ (К5) = 8-5=3$; $m\ (К6) = m\ (B\cap C) - m\ (К5) = 9-5=4$;
$m\ (К1) = m\ (A) - m\ (К2) - m\ (К4) - m\ (К5) = 20-2-3-5=10$;
$m\ (К3) = m\ (B) - m\ (К2) - m\ (К6) - m\ (К5) = 18-2-4-5=7$;
$m\ (К7) = m\ (C) - m\ (К4) - m\ (К6) - m\ (К5) = 18-3-4-5 =6$;
$m\ (К2) + m\ (К4) + m\ (К6) = 2+3+4=9$ – число учеников решивших только две задачи;
$m\ (К1) + m\ (К3) + m\ (К7) = 10+7+6=23$ – число учеников решивших только одну задачу.
Ответ: 5 учеников решили три задачи; 9 учеников решили только по две задачи; 23 ученика решили только по одной задаче.

Задания для самостоятельного решения

Задача 1. В классе 35 учеников. Каждый из них пользуется хотя бы одним из видов городского транспорта: метро, автобусом и троллейбусом. Всеми тремя видами транспорта пользуются 6 учеников, метро и автобусом – 15 учеников, метро и троллейбусом – 13 учеников, троллейбусом и автобусом – 9 учеников. Сколько учеников пользуются только одним видом транспорта?
Задача 2. Каждый из 35 шестиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 человек берут книги в школьной библиотеке, 20 – в районной.
Сколько шестиклассников:1. Являются читателями обеих библиотек;2. Не являются читателями районной библиотеки;3. Не являются читателями школьной библиотеки; 4. Являются читателями только районной библиотеки;5. Являются читателями только школьной библиотеки?
Задача 3. Из сотрудников фирмы 16 побывали во Франции,10-в Италии,6-в Англии; в Англии и Италии-5; в Англии и Франции -6; во всех трех странах - 5 сотрудников. Сколько человек посетили и Италию, и Францию, если всего в фирме работают 19 человек, и каждый из них побывал хотя бы в одной из названных стран?
Задача 4. В трёх группах 70студентов. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 студентов из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько студентов не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько студентов заняты только спортом?
Задача 5. Часть жителей нашего дома выписывают только газету «Комсомольская правда», часть – только газету «Известия», а часть – и ту, и другую газету. Сколько процентов жителей дома выписывают обе газеты, если на газету «Комсомольская правда» из них подписаны 85%, а на «Известия» – 75%?

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.
2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;

- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Раздел 2. Математическая логика
Тема 2.1. Логика высказываний

Практическое занятие № 3. Выполнение тождественных преобразований высказываний

Цель работы: формирование умений упрощать логические выражения с помощью законов алгебры логики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Внимательно прочитайте теоретические сведения.

Разберите решение задач, приведенных ниже, и запишите их в тетрадь.

Решите задачи из раздела для самостоятельного решения.

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим законы, которым подчиняются логические функции.

Переместительный закон (закон коммутативности) для логического сложения и умножения соответственно:

$A \vee B = B \vee A,$ **(1)**

$A \& B = B \& A.$ **(2)**

Сочетательный закон (закон ассоциативности) для логического сложения и умножения соответственно:

$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C;$ **(3)**

$(A \& B) \& C = A \& (B \& C) = A \& B \& C.$ **(4)**

Сочетательный закон устанавливает, что, если формула содержит только дизъюнкции или только конъюнкции, то скобки можно опустить.

Распределительный закон (закон дистрибутивности) для логического сложения и умножения соответственно:

$(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C);$ **(5)**

$(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C).$ **(6)**

Закон инверсии (правило де Моргана) для логического сложения и умножения соответственно:

$\overline{A\vee B}=\overline{A}\ \&\ \overline{B}$; **(7)**

$\overline{A\&B}=\overline{A}\vee\overline{B}$. **(8)**

Законы инверсии справедливы для любого числа переменных.

Для преобразований логических выражений используют следующие легко доказываемые тождества:

$A\vee 0=A;$	**(9)**	$A\&1=A;$	**(10)**
$A\vee 1=1;$	**(11)**	$A\&0=0;$	**(12)**
$A\vee A=A;$	**(13)**	$A\&A=A;$	**(14)**
$A\vee\overline{A}=1;$	**(15)**	$A\&\overline{A}=0;$	**(16)**

$\overline{\overline{A}}=A$. **(17)**

Справедливость этих законов можно доказать с помощью таблиц истинности сложных логических связей, описываемых законом.

С помощью законов алгебры логики могут быть доказаны соотношения, получившие названия:

правила поглощения:

$A\vee(A\&B)=A;$ **(18)**

$A\&(A\vee B)=A;$ **(19)**

правила склеивания:

$(A\&B)\vee(\overline{A}\&B)=B;$ **(20)**

$(A\vee B)\&(\overline{A}\vee B)=B;$ **(21)**

закон Блейк - Порецкого:

$A\vee(\overline{A}\&B)=AVB.$ **(22)**

В алгебре логики все логические функции могут быть сведены путем логических преобразований к трем базовым: конъюнкции, дизъюнкции и инверсии.

1. Логическая операция – *импликация:* $A\to B=\overline{A}\ VB$.
2. Логическая операция – *эквивалентность:* $A\sim B=(\overline{A}\vee B)\&(A\vee\overline{B})$
3. Логическая операция–*сумма по модулю 2:* $A\oplus B=(A\vee B)\&(\overline{A}\vee\overline{B})$.
4. Логическая операция – *запрет:* $A\Delta B=A\&\overline{B}$.
5. Логическая операция – *«штрих Шеффера»:* $\overline{A}\,|\,B=A\&B$
6. Логическая операция – *«стрелка Пирса»:* $A\downarrow B=\overline{A\vee B}$.

Для доказательства этих соотношений достаточно построить таблицы истинности для правых частей и сравнить с таблицами, приведенными в определениях.

Пример. Выразить данные логические функции через элементарные операции: а) $F=\overline{(\overline{A}\to B)}\to C$; б) $F=\overline{(A\oplus C)}\downarrow\overline{B}$.

Решение. а) Преобразуем сначала вторую импликацию и воспользуемся тождеством (17), затем преобразуем первую импликацию и также воспользуемся тождеством (17):

$$F=\overline{(\overline{A}\to B)}\to C=\overline{\overline{(\overline{A}\to B)}}\vee C=(\overline{A}\to B)\vee C=\overline{\overline{A}}\vee B\vee C=A\vee B\vee C.$$

б) Преобразуем сначала операцию «стрелка Пирса», воспользуемся законом де Моргана (7) и тождеством (17), затем преобразуем операцию «сумма по модулю 2»:

$$F=\overline{(A\oplus C)}\downarrow\overline{B}=\overline{\overline{(A\oplus C)}\vee\overline{B}}=\overline{\overline{(A\oplus C)}}\&\overline{\overline{B}}=(A\oplus C)\&B=(A\vee C)\&(\overline{A}\vee\overline{C})\&B.$$

Используя законы логики, формулы склеивания и поглощения и свойства логических операций, можно сложную логическую функцию заменить более простой, но равносильной ей функцией.

Пример. Упростить логические выражения: а) $(A\&B)\vee(A\&\overline{B})$; б) $\overline{\overline{A}\&\overline{B}}\vee A$.

Решение. а) Воспользуемся правилом дистрибутивности (6) и вынесем за скобки A:

$(A\&B)\vee(A\&\overline{B})=A\&(B\vee\overline{B})$.

По тождеству (15) получаем $B\vee\overline{B}=1$, следовательно:

$A\&(B\vee\overline{B})=A\&1=A$.

б) Воспользуемся правилом де Моргана (8) и тождествами (17) и (13):

$$\overline{\overline{A}\&\overline{B}}\vee A=\overline{\overline{A}}\vee\overline{\overline{B}}\vee A=A\vee B\vee A=A\vee B.$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Постройте таблицы истинности для данных логических выражений.

Задание 2. Докажите с помощью таблиц истинности равносильность данных логических выражений.

№ п/п	Задание 1	Задание 2
1	$(A\to B)\to\overline{C}$	$(A\&B)\vee C$ и $(A\vee C)\&(B\vee C)$
2	$(A/B)/C$	$(A\vee B)\&C$ и $(A\&C)\vee(B\&C)$
3	$(A\downarrow B)\downarrow C$	$\overline{A\vee B\vee C}$ и $\overline{A}\&\overline{B}\&\overline{C}$
4	$(A\vee\overline{B})\&(\overline{A}\vee B)\vee C$	$\overline{A\&B\&C}$ и $\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}$
5	$(A\oplus B)\&C$	$\overline{\overline{A}\to B}\to C$ и $A\vee B\vee C$
6	$\left(\overline{B\&C\vee\overline{A}}\right)\&A$	$(A\vee B\vee C)\&\overline{A\vee\overline{B}\vee C}$ и $B\&\overline{A}\&\overline{C}$
7	$\left(\overline{B\&C}\vee\overline{A}\right)\&A$	$\overline{(A\oplus C)}\downarrow\overline{B}$ и $(A\vee C)\&\left(\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&B$
8	$(A\oplus\overline{B})\&(A\oplus\overline{C})$	$(A\vee B)\&A\&C$ и $(A\&\overline{B}\&C)\vee(A\&B\&C)$
9	$A\to\overline{B\to C}$	$(\overline{A}\vee\overline{B}\&C)\vee(\overline{A}\oplus\overline{B})$ и $(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C)\&(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C})$
10	$(A\&\overline{B}\vee\overline{A}\&B)\&C$	$(A\&B\&C)\vee(A\to\overline{B})$ и $\overline{A}\vee\overline{B}\vee C$

Задание 3. Выразите данные логические функции через элементарные операции.

Задание 4. Упростите логические выражения.

№ п/п	Задание 3	Задание 4
1	$(A\to B)\to\overline{C}$	$X\&\left(\overline{X}\&Y\vee Z\right)\&\left(X\vee\overline{Z}\right)$
2	$(A/B)\to\overline{C}$	$\left(\overline{X}\vee Y\right)\&\left(\overline{Y}\vee X\&Z\right)$
3	$(A\Delta B)\to C$	$X\&\left(Y\Leftrightarrow X\right)\&\left(\overline{X}\vee\overline{Z}\right)$
4	$\overline{\overline{A}\to B}\downarrow C$	$\left(X\to Y\right)\&X\&\overline{Y}$
5	$(A\oplus B)\&C$	$\left(\overline{X}\&Y\right)\to\left(Z\&X\right)$
6	$(A\oplus\overline{B})\&(A\to B)$	$\left(X\&Y\Leftrightarrow Z\right)\&X\&\overline{Z}$
7	$(\overline{\overline{A}\vee B})\downarrow C$	$\left(X\&Z\vee\overline{X}\&\overline{Y}\right)\&\left(Z\to Y\right)$
8	$(A\oplus\overline{B})\&(A\oplus\overline{C})$	$\left(X\vee Y\&\overline{Z}\vee\overline{X}\&\overline{Y}\&Z\right)\&X\&\overline{Y}$
9	$A\to\overline{B\to C}$	$\left(X\to Y\right)\&\left(Y\to X\right)$
10	$A\to\overline{B\downarrow C}$	$\left(X\&\overline{Y}\&Z\vee\overline{X}\&\overline{Z}\right)\&Y$

Задание 5. Докажите равносильность формул, проводя эквивалентные преобразования одной или обеих частей:

№ п/п **Задание 5**

1 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B \sim A \vee B$;

2 $\neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A) \sim \neg(A \Rightarrow B) \vee A \vee B$;

3 $\neg(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow A \sim (A \Leftrightarrow B) \wedge \neg A$;

4 $\neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg(A \Rightarrow B) \vee B \sim \neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$;

5 $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \sim (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

6 $(A \Rightarrow B) \wedge C \sim (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

Задание 6. Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно:

№ п/п	Задание 6
1	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \downarrow C)$;
2	$(A \wedge B) \Rightarrow (C \wedge \neg C \Rightarrow A \vee C)$;
3	$(A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$;
4	$(A \oplus B) \vee (A \oplus C)$;
5	$(A \downarrow B) \vee (B \wedge (B \Leftrightarrow B))$;
6	$(A \Rightarrow (B \wedge \neg C)) \wedge (A \Rightarrow C)$;
7	$(A \Rightarrow B) \vee (B \Leftrightarrow C)$;
8	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \mid C)$;
9	$(\neg B \Rightarrow \neg C)$;
10	$(A \wedge (B \vee \neg C)) \vee (\neg A \wedge B)$.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;

- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Тема 2.2. Логика предикатов

Практическое занятие № 4. Выполнение операций над предикатами
Практическое занятие № 5. Выполнение действий с двоичными векторами

Цель работы: формирование умений формализовывать предложения с помощью логики предикатов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- строить отрицания к предикатам;
- формализовывать предложения с помощью логики предикатов.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

Внимательно прочитайте теоретические сведения.

Разберите решение задач, приведенных ниже, и запишите их в тетрадь.

Решите задачи из раздела для самостоятельного решения.

1. Определите объект, свойство объекта, область значений, функцию отношения для данной области, терм для следующих высказываний:

а) людей под фамилиями Иванов, Петров, Сидоров очень много;

б) две различные точки не совпадают.

2. Введите одноместные предикаты на соответствующих областях и запишите при их помощи следующие высказывания в виде логики предикатов:

а) всякое натуральное число, делящееся на 12, делится на 2,4 и 6;

б) жители Швейцарии обязательно владеют или французским, или итальянским, или немецким языком;

в) функция, непрерывная на отрезке [0,1] сохраняет знак или принимает нулевое значение.

3. Введите предикаты на соответствующих областях и запишите при их помощи следующие высказывания в виде логики предикатов:

а) если а – корень уравнения от одной переменной с вещественными коэффициентами, то $\bar{a}$ также корень этого уравнения;

б) через две различные точки проходит одна единственная прямая;

в) каждый студент выполнил, по крайней мере, одну лабораторную работу;

г) если произведение натуральных чисел делится на простое число, то на него делится, по крайней мере, один из сомножителей.

Краткие теоретические сведения

В исчислении высказываний нет предметных переменных, то есть переменных, которые могут принимать нелогические значения, например, числовые. Для того чтобы в логические исчисления могли быть включены нелогические константы и переменные, вводится понятие предиката.

Определение. *N-местным предикатом* на множестве X называется n-местная функция из множества X^n во множество $\{0,1\}$.

<u>Примеры.</u> 1. Предикат $A(x) = "x \le 2"$ на множестве $X = R$ – одноместный.

2. Предикат $B(x,y) = "xy > 0"$ на множестве $X = R^2$ – двуместный.

Если $X = \{0,1\}$, то n -местный предикат представляет собой n -местную булеву функцию. Нульместный предикат представляет собой высказывание.

Для каждого предиката A областью истинности называется множество $Y = \{x \in X | A(x) = 1\}$, на котором предикат принимает значение 1.

<u>Примеры.</u> 1. Для предиката $A(x) = "x \le 2"$ на множестве $X = R$ область

истинности $Y = \{x \in R | x \leq 2\}$.

2. Для предиката $B(x, y) = "xy > 0"$ на множестве $X = R^2$ область истинности $Y = \{(x, y) \in R^2 | xy > 0\}$.

Поскольку множество значений любого предиката лежит во множестве $\{0,1\}$, то с предикатами можно производить все операции алгебры логики, и все известные свойства логических операций обобщаются для предикатов. Рассмотрим эти свойства (для удобства в свойствах записываются одноместные предикаты):

3. Коммутативность:

$P(x) \vee Q(x) = Q(x) \vee P(x)$, $P(x) \wedge Q(x) = Q(x) \wedge P(x)$.

2. Ассоциативность:

$P(x) \vee (Q(x) \vee R(x)) = (P(x) \vee Q(x)) \vee R(x)$,

$P(x) \wedge (Q(x) \wedge R(x)) = (P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(x)$.

3. Дистрибутивность:

$P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x)) = (P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x))$,

$P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x)) = (P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x))$.

4. Идемпотентность: $P(x) \vee P(x) = P(x)$, $P(x) \wedge P(x) = P(x)$.

5. Закон двойного отрицания: $\neg\neg P(x) = P(x)$.

6. Закон исключения третьего: $P(x) \vee \neg P(x) = 1$.

7. Закон противоречия: $P(x) \wedge \neg P(x) = 0$.

8. Законы де Моргана:

$\neg(P(x) \vee Q(x)) = \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$,

$\neg(P(x) \wedge Q(x)) = \neg P(x) \vee \neg Q(x)$.

9. Свойства операций с логическими константами:

$P(x) \vee 1 = 1$, $P(x) \vee 0 = P(x)$, $P(x) \wedge 1 = P(x)$, $P(x) \wedge 0 = 0$.

Здесь $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ – любые предикаты.

В то же время, для предикатов определены операции специального вида, которые называются *Кванторами*.

Символ $\forall$ называется *Квантором Всеобщности* (*Общности*).

Символ $\exists$ называется *Квантором существования*.

Пусть дана запись $\forall x A$ (или $\exists x A$). Переменная x называется *Переменной в кванторе*, а A –*Областью действия квантора.*

Имеют место эквивалентности:

$\exists x_i A = \neg\forall x_i \neg A$, $\forall x_i A = \neg\exists x_i \neg A$.

$\neg\exists x_i A = \forall x_i \neg A$, $\neg\forall x_i A = \exists x_i \neg A$.

Предикат называется *Тождественно истинным* (*Тождественно ложным*), если при всех возможных значениях переменных он принимает значение 1(0).

Справедливы эквивалентности:

$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$, $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$.

Разноименные кванторы можно переставлять только следующим образом:

$\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y) \to \forall x \exists y P(x,y)$.

Обратные формулы неверны.

Пример. Очевидно, что высказывание $\forall x \exists y (x + y = 0)$ ($X = R$) истинно. Поменяем кванторы местами. Получим высказывание $\exists y \forall x (x + y = 0)$, которое является ложным.

Выражения с кванторами можно преобразовывать следующим образом:

$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$, $\exists x (P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.

Справедливы эквивалентности:

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) = \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) =$$
$$= \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)).$$
$$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) = \exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) = \exists x (P(x) \wedge \exists y Q(y)) =$$
$$= \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y)).$$

Имеют место формулы:

$\forall x (P(x) \wedge C) = \forall x P(x) \wedge C$, $\exists x (P(x) \vee C) = \exists x P(x) \vee C$,

$\forall x (P(x) \vee C) = \forall x P(x) \vee C$, $\exists x (P(x) \wedge C) = \exists x P(x) \wedge C$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1

Определите, какие из следующих предложений истинные, а какие ложные, считая предметной областью множество действительных чисел R:

1. $\forall x \exists y(x + y = 9)$;
2. $\exists x \exists y(x + y = 9)$;
3. $\exists x \forall y(x + y = 9)$;
4. $\forall x \forall y(x + y = 9)$;
5. $\forall x(((x > 1) \vee (x < 2)) \Leftrightarrow (x = x))$;
6. $\forall x((x^2 > x) \Leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0)))$;
7. $\forall a((\exists x(ax = 1)) \Leftrightarrow (a = 0))$;
8. $\forall a \exists b \forall x(x^2 + ax + b > 0)$;
9. $\exists b \forall a \exists x(x^2 + ax + b = 0)$;
10. $\forall b \exists a \forall x(x^2 + ax + b > 0)$;
11. $\exists a \forall b \exists x(x^2 + ax + b = 0)$.

Задание 2

Из следующих предикатов с помощью кванторов постройте всевозможные предложения (как первые четыре предложения предыдущей задачи) и определите их истинностные значения, считая предметной областью множество R :

1. $x^2 + y^2 = 16$;
2. $(x^2 + 1 = 0) \Rightarrow (x = 1)$;
3. $x < y$;
4. $x^2 = 25$.

Задание 3

Определите и изобразите на R множества истинности следующих одноместных предикатов:

1. $|x + 4| < 3$;
2. $(x > 1) \wedge (x < 1)$;
3. $\cos(x) > 1$;
4. $(x > 1) \vee (x < 1)$;
5. $x^2 + 9 > 0$;
6. $(x > 1) \Rightarrow (x < 1)$;
7. $(x^2 > 9) \Leftrightarrow (x > 3)$;

8. $(x > 1) \Leftrightarrow x < 1)$.

Задание 4

Определите и изобразите на действительной плоскости множества истинности следующих двуместных предикатов:

1. $(x \geq 0) \wedge (y\ 0)$;
2. $(|x| = |y|) \vee (xy > 0)$;
3. $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$;
4. $(|x| > 2) \Rightarrow (|x| < 3)$;
5. $(x \geq 0) \Rightarrow (y \leq 0)$;
6. $(x2 > 0) \Rightarrow (x2 - 2x - 3 > 0)$;
7. $(x \geq 0) \Leftrightarrow (y \leq 0)$;
8. $(x^2 + y^2 > 1) \Rightarrow (xy < 0)$.

Задание 5

Запишите определения следующих предикатов в виде формул, принимая в качестве предметной области множество натуральных чисел и используя предикатный символ =, функциональные символы + и·:

1. $d(x, y) \Leftrightarrow$ x делится на y ;
2. $D0\ (x, y, z) \Leftrightarrow$ z является общим делителем x и y ;
3. $D(x, y, z) \Leftrightarrow$ z является наибольшим общим делителем x и y ;
4. $P\ (x) \Leftrightarrow$ x простое число .

Задание 6

Запишите следующие утверждения в виде формул (при условиях предыдущей задачи):

1. если числа x и y делятся на z, то их сумма тоже делится на z ;
2. если x делится на y и y делится на z, то x делится на z ;
3. сумма двух чисел, имеющих разную четность, нечетна ;
4. остаток от деления x на 5 равен 2 ;
5. если произведение двух чисел делится на простое число, то на него делится хотя бы один из сомножителей

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;

- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Раздел 3. Основы комбинаторики
Тема 3.1. Конечные множества и комбинаторика

Практическое занятие № 6. Решение практических задач на число сочетаний и размещений
Практическое занятие № 7. Определение биномиальных коэффициентов

Цель: сформировать умение решать задачи с использованием формул комбинаторики: перестановок, размещений и сочетаний.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять стандартные методы и модели к решению комбинаторных задач;
- решать задачи с использованием формул комбинаторики;
- анализировать задачу и выделять её составные части;
- составлять план действия;
- реализовать составленный план;
- оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника);
- определять необходимые источники информации;
- структурировать получаемую информацию;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке;
- понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые);
- участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Внимательно прочитайте теоретические сведения.

Разберите решение задач, приведенных ниже, и запишите их в тетрадь.

Решите задачи из раздела для самостоятельного решения.

Краткие теоретические сведения

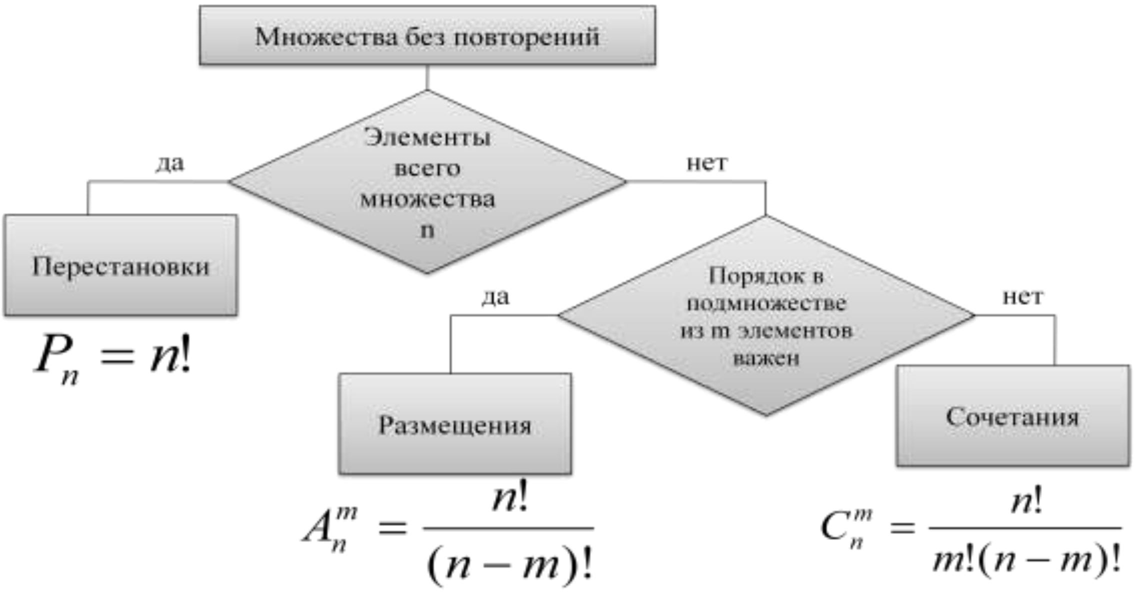
Комбинаторика — один из разделов дискретной математики, изучающий способы подсчета числа элементов в конечных множествах, который приобрел большое значение в связи с использованием его в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, вычислительной технике, кибернетике.

Множества без повторений

Множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются ***перестановками*** этих элементов: $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, $0! = 1$.

Размещениями называют множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Сочетаниями из n различных элементов по m называют множества, содержащие m элементов из числа n заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, где $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$.



Множества с повторениями

Перестановки с повторениями

$$\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Размещения с повторениями

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Сочетания с повторениями

$$\overline{C_n^m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m$$

Правила сложения и умножения

Правило сложения. Если одно действие можно выполнить m способами, а другое n способами, и они взаимно исключают друг друга, то выполнить одно любое из этих действий можно $(n + m)$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Примеры решения задач

Размещения без повторений

Задача 1. Сколько можно составить телефонных номеров из 6 цифр каждый, так чтобы все цифры были различны?

Решение. Это пример задачи на размещение без повторений. Размещаются здесь 10 цифр по 6. А варианты, при которых одинаковые цифры стоят в разном порядке считаются разными. Значит, ответ на задачу будет:

$$A_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!} = 151200$$

.

Задача 2. Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

Решение. Два юноши не могут одновременно пригласить одну и ту же девушку. И варианты, при которых одни и те же девушки танцуют с разными юношами, считаются разными, поэтому:

$$A_{6}^{4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Возможно 360 вариантов.

Перестановки без повторений

Задача 3. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4,5, если цифры в числе не повторяются?

Решение.

1) Найдем количество всех перестановок из этих цифр: P_6=6!=720.
2) 0 не может стоять впереди числа, поэтому от этого числа необходимо отнять количество перестановок, при котором 0 стоит впереди. А это P_5=5!=120.

P_6-P_5=720-120=600.

Сочетания без повторений

Задача 4. Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр.

Решение. Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможно $C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$ вариантов.

Задача 5. У одного человека 7 книг по математике, а у второго – 9. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги.

Решение:

Так как порядок следования книг не имеет значения, то выбор двух книг - сочетание. Первый человек может выбрать 2 книги $C_{7}^{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ способами. Второй человек может выбрать 2 книги $C_{9}^{2} = \frac{9!}{(9-2)! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ способами. Значит всего по правилу произведения возможно $21 \cdot 36$=756 вариантов.

Задача 6. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Решение: Первый игрок делает выбор из 28 костей. Второй из 28–7=21 кости, третий из 14, а четвертый игрок забирает оставшиеся кости. Следовательно, возможно $C_{28}^{7} \cdot C_{21}^{7} \cdot C_{14}^{7}$.

Размещения и сочетания с повторениями

Задача 7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Так как порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то это будут размещения с повторениями из пяти элементов по три, а их число равно $\overline{A_{5}^{3}} = 5^3 = 125$.

Задача 8. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных.

Решение. Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пирожные в коробку. Покупки будут различными, если они отличаются количеством купленных пирожных хотя бы одного сорта. Следовательно, количество различных покупок равно числу сочетаний четырех видов пирожных по семь: $\overline{C_4^7}=\frac{(7+4-1)!}{7!(4-1)!}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=120$.

Задача 9. Обезьяну посадили за пишущую машинку с 45 клавишами, определить число попыток, необходимых для того, чтобы она наверняка напечатала первую строку романа Л.Н. Толстого «Анна Каренина», если строка содержит 52 знака и повторений не будет?

Решение. Порядок букв имеет значение. Буквы могут повторяться. Значит, всего есть $\overline{A_{45}^{52}}=45^{52}$ вариантов.

Перестановки с повторениями

Задача 10. Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

Решение. Всего букв 6. Из них одинаковы: n1 (а)=3, n2(н)=2, n3 (с)=1. Следовательно, число различных перестановок равно $P_6(3,2,1)=\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}=60$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи».

Ответ: 2520

2. Имеется пять различных стульев и семь рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев.

Ответ: 16807

3. На памятные сувениры в «Поле Чудес» спонсоры предлагают кофеварки, утюги, телефонные аппараты, духи. Сколькими способами 9 участников игры могут получить эти сувениры? Сколькими способами могут быть выбраны 9 предметов для участников игры?

Ответ: 4^9, 220

4. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы на одна из них не могла бить другую?

Ответ: 40320

5. Сколько может быть случая выбора 2 карандашей и 3 ручек из пяти различных карандашей и шести различных ручек?

Ответ:200

6. В течение 30 дней сентября было 12 дождливых дней, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, а один день был и дождливым, и ветреным, и холодным. В течение скольких дней в сентябре стояла хорошая погода.

Ответ: 15

7. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

Ответ: 480, 437

8. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?

Ответ: 9

9. Сколько существует четных пятизначных чисел, начинающихся нечетной цифрой?

Ответ: 25000

10. В книжный магазин поступили романы Ф. Купера «Прерия», «Зверобой», «Шпион», «Пионеры», «Следопыт» по одинаковой цене. Сколькими способами библиотека может закупить 17 книг на выбранный чек?

Ответ: 2985

Форма представления результата:

Решение задач, оформленное в тетради.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Тема 3.2. Вероятность

Практическое занятие № 8. Определение вероятности событий

Цель: сформировать умение решать задачи на вычисление вероятности с использованием формул комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач;
- анализировать задачу и выделять её составные части;
- составлять план действия;
- реализовать составленный план;
- оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника);
- определять необходимые источники информации;
- структурировать получаемую информацию;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке;
- понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые);
- участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

Разберите решение задач, приведенных ниже, и запишите их в тетрадь.

Решите задачи из раздела для самостоятельного решения.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число, кратное трём.

Решение: Число всех элементарных событий $n = 6$, число элементарных событий, благоприятствующих данному событию A, $m = 2$ (это выпадение 3 или 6), значит, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$.

В следующих двух примерах мы используем комбинаторные понятия (сочетания и перестановки), разобранные выше.

Задача 2. В урне находится 7 шаров, из которых 4 белых и 3 черных. Из урны наугад вынимается три шара. Найти вероятность того, что два шара будут белыми, а один – чёрным.

Решение: Число всех элементарных событий $n = C_7^3 = 35$, число элементарных событий, благоприятствующих данному событию A, $m = C_4^2 C_3^1 = 18$, значит, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$ (по поводу нахождения n и m см. аналогичную задачу в примере 7).

Задача 3. На книжной полке случайно размещаются 8 книг, из которых 5 – по математике и 3 – по физике. Найти вероятность того, что слева будут все книги по математике, а справа – все книги по физике.

Решение: Число всех элементарных событий $n = P_8 = 8!$, число элементарных событий, благоприятствующих данному событию A, $m = P_5 P_3 = 5!3!$, значит, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5!3!}{8!} = \frac{1}{56}$.

Задачи для самостоятельного решения

Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число не содержит ни одной двойки?

2. Отряд учащихся из 25 человек участвует в военизированной игре. В отряде 5 следопытов и 4 связиста. В разведку надо направить четырех человек. Какова вероятность того, что в разведгруппу будут включены 2 связиста и 2 следопыта, если включение в разведгруппу равновероятно для любого ученика?

3. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на этих карточках, равна десяти?

4. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяются 5 человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой 10 юношей и 2 девушки. Найдите вероятность того, что в число дежурных войдут обе девушки.

5. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 билета на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных билетов два окажутся на места первого ряда?

6. Билет в партер стоит 50 коп., на бельэтаж — 40 коп. и на ярус — 30 коп. Найдите вероятность того, что взятые наудачу два билета стоят вместе не дороже 80 коп.

7. На один ряд из семи мест случайным образом рассаживаются 7 учеников. Найдите вероятность того, что 3 определенных ученика окажутся рядом.

8. Из букв слова событие, составленного с помощью разрезной азбуки, извлекаются наудачу и складываются друг за другом в порядке их извлечения 3 карточки (буквы). Какова вероятность получить при этом слово быт?

9. Из пяти видов открыток, имеющихся в автомате, наудачу выбираются 3 открытки. Какова вероятность того, что все отобранные открытки будут разные?

10. Во время спортивной игры по команде ведущего «становись!» 10 учеников в случайном порядке образовали строй в одну шеренгу. Какова вероятность того, что ученики А и В окажутся отделенными друг от друга тремя учениками?

Примеры решения задач

Задача 1. В урне находятся 6 белых и 5 чёрных шаров. Найти вероятность того, что из пяти случайно взятых шаров

а) не больше двух белых;

б) хотя бы один белый.

Решение. а). Событие A – не больше двух белых шаров – равно сумме трёх попарно несовместимых событий A_0, A_1, A_2 – белых шаров соответственно ни одного, один, два: $A = A_0 + A_1 + A_2$. Значит, по теореме сложения для несовместных событий $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_6^0 C_5^5}{C_{11}^5} + \frac{C_6^1 C_5^4}{C_{11}^5} + \frac{C_6^2 C_5^3}{C_{11}^5} =$

$\frac{1}{462} + \frac{30}{462} + \frac{150}{462} = \frac{181}{462}$ (по поводу вычисления данных вероятностей см. аналогичную задачу в примере 12).

б). Для нахождения вероятности события B – хотя бы один белый шар – неудобно использовать теорему сложения, т. к. пришлось бы подсчитывать вероятности пяти событий. Поэтому воспользуемся теоремой 5, которая сводит вычисление $P(B)$ к вычислению вероятности противоположного события $\overline{B}$ – ни одного белого шара, т. е. все шары чёрные:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_5^5}{C_{11}^5} = 1 - \frac{1}{462} = \frac{461}{462}.$$

Задача 2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,6 второго – 0,8. Найти вероятности попадания

а) обоих стрелков;

б) ровно одного стрелка;

в) хотя бы одного стрелка.

Решение. Обозначим через A и B события – попал в мишень первый и, соответственно, второй стрелок. Заметим, что эти события *независимы*. Заметим также, что и противоположные события (промахи стрелков) – независимы. С помощью известных нам операций над событиями выразим через A и B события, вероятности которых являются искомыми.

а). Очевидно, интересующее нас событие есть AB. Тогда по теореме умножения для независимых событий $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

б). Интересующее нас событие есть $A\overline{B} + \overline{A}B$. Слагаемые в этой сумме – несовместные события, а сомножители в каждом произведении – независимые. Тогда по теоремам сложения для несовместных событий и умножения для независимых событий $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}44$.

в). Интересующее нас событие есть $A + B$. По теореме сложения (для двух произвольных событий)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}92.$$

Заметим, что противоположным событием к $A + B$ является $\overline{A}\,\overline{B}$ (ни один не попал). Тогда искомую вероятность можно найти и через противоположное событие:

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}92.$$

Задача 3. Телеграфное сообщение состоит из сигналов "точка" и "тире". Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сигналов "точка" и 1/3 сигналов "тире". Известно, что среди передаваемых сигналов "точка" и "тире" встречаются в соотношении 5:3. Определить вероятность того, что переданный сигнал искажён.

Решение: Рассмотрим следующие события: A – сигнал искажён (вероятность которого является искомой), H_1 – передан сигнал "точка", H_2 – передан сигнал "тире" (две гипотезы, образующие полную группу, т. к. они несовместны и одна из них обязательно имеет место). По условию $P(H_1):P(H_2)=5:3$ и $P(H_1)+P(H_2)=1$, поэтому $P(H_1)=\frac{5}{8}$ и $P(H_2)=\frac{3}{8}$. Известные вероятности того, что сигналы "точка" и "тире" искажаются, выступают как условные вероятности интересующего нас события при справедливости гипотез: $P_{H_1}(A)=2/5,\ P_{H_2}(A)=1/3.$ Вероятность события A находим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{8}.$$

В условиях применения формулы полной вероятности рассмотрим следующую задачу: чему равна условная вероятность гипотезы H_i, если событие A произошло? Ответ даётся следующей *формулой Байеса*:

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Продолжение задачи 3. Пусть переданный сигнал искажён. Чему равна вероятность того, что была передана "точка"?

Решение: Искомая вероятность вычисляется по формуле Байеса:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбивает 10 очков, равна 0,4; 9 очков – 0,3 и 8 или меньше очков – 0,3. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.
2. В клуб принесли в корзине 9 рыжих и 11 серых котят. Сначала вынимают одного котенка, затем другого, не возвращая первого обратно. Какова вероятность того, что котята разного цвета?
3. В одном ящике 6 синих и 11 зеленых шаров, а в другом – 7 синих и 9 зеленых шаров. Из каждого ящика взяли по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара синие?
4. В коробке 4 белых и 5 черных футболок. Наугад вытаскивают две футболки. Найти вероятность того, что одна футболка белая, другая – черная?
5. В урне находятся 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Извлекают один шар, а затем другой. Найти вероятность того, что первый шар черный, а второй – синий.
6. В специализированную больницу поступает в среднем 50% больных с заболеванием А, 30% - с заболеванием В, 20% - с заболеванием С. Вероятность полного излечения болезни А равна 0.7, для болезней В и С эти вероятности равны соответственно 0.8 и 0.9. Какой процент пациентов, полностью излечившихся по окончании курса лечения?
7. На трех дочерей Нину, Еву и Айгуль в семье возложена обязанность мыть посуду. Нина выполняет 40% всей работы, а остальные 60% работы Ева и Айгуль делят поровну. С вероятностью 0.02 Нина может разбить по крайней мере одну тарелку; для Евы и Айгуль эта вероятность равна соответственно 0.03 и 0.04. Родители не знают, кто мыл посуду вечером, но они слышали звон разбитой посуды. Чья очередь мыть посуду в этот вечер наиболее вероятна?
8. Один властелин, которому его звездочет наскучил своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи очень добрым повелителем, он решил дать звездочету шанс и предложить ему распределить по двум урнам четыре шара: два белых и два черных.

Палач выбирает одну из урн и извлекает из нее один шар. Если шар будет черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен разместить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность спасения?
9. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы для них равны соответственно 0.6, 0.7, 0.8. Найти вероятность того, что отказал один элемент, а два другие - исправны.
10. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо. Вероятности отказа каждого из элементов равны соответственно 0.1, 0.15, 0.2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Форма представления результата:

Решение задач, оформленное в тетради.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Тема 3.3. Комбинаторный анализ

Практическое занятие № 9. Вывод рекуррентных формул

Цель работы: формирование умений представлять функции в рекурсивной формуле.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- представлять функции в рекурсивной формуле.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Напишите рекурсивную функцию, проверяющую правильность расстановки скобок в строке. При правильной расстановке выполняются условия:

а) количество открывающих и закрывающих скобок равно;

б) внутри любой пары открывающая – соответствующая закрывающая скобка, скобки расставлены правильно.

Примеры неправильной расстановки:)(, ())(, ())(() и т.п.

2. В строке могут присутствовать скобки как круглые, так и квадратные скобки. Каждой открывающей скобке соответствует закрывающая того же типа (круглой – круглая, квадратной- квадратная). Напишите рекурсивную функцию, проверяющую правильность расстановки скобок в этом случае.

Пример неправильной расстановки: ([ )].

3. Число правильных скобочных структур длины 6 равно 5: ()()(), (())(), ()(()), ((())), (()()). Напишите рекурсивную программу генерации всех правильных скобочных структур длины 2n.

Указание: Правильная скобочная структура минимальной длины «()». Структуры большей длины получаются из структур меньшей длины, двумя способами:

а) если меньшую структуру взять в скобки;

б) если две меньших структуры записать последовательно.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их в тетради.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Раздел 4. Основы теории графов

Тема 4.1. Графы

Тема 4.2. Деревья

Практическое занятие № 10. Определение свойств графов

Практическое занятие № 11. Построение бинарного дерева поиска для структур данных

Цель работы: изучение законов распределения непрерывной случайной величины; научится решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи на нахождение числовых характеристик случайной величины.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Краткие теоретические сведения

Графом G = (V, X) называется пара двух конечных множеств: множество точек V и множество линий X, соединяющих некоторые пары точек.

Точки называются **вершинами**, или **узлами**, графа, линии – **ребрами** графа. Примеры графов приведены на рис.1. Подсчитаем сколько ребер и вершин у каждого из графов, изображенных на рис. 1.

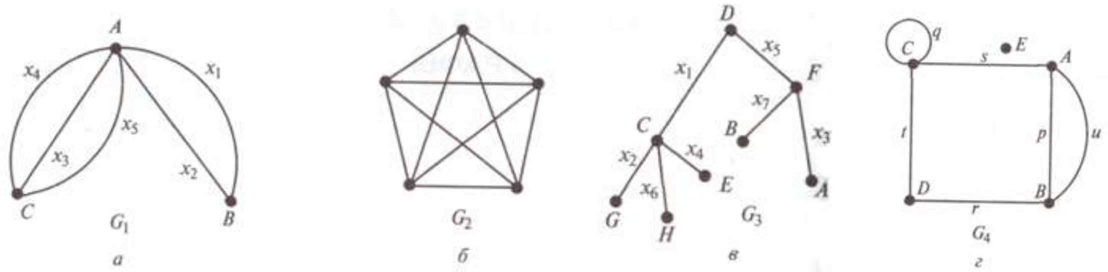


Рис. 1. Примеры графов: *а* – со смежными вершинами; *б* – полный; *в* – со смежными ребрами; *г* – с петлей

Если ребро графа G соединяет две его вершины, то говорят, что это ребро им **инцидентно**. Две вершины графа называются **смежными**, если существует инцидентное им ребро: на рис. 1*, а* смежными являются вершины A и B, A и C. Если граф G имеет ребро, у которого начало и конец совпадают, то это ребро называется **петлей**. На рис. 1, *г* петля — q(C, C). Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую вершину. На рис. 1, *в* смежными являются, например, ребра x_1 и x_2 с общей вершиной C.

Граф может иметь ребра с одинаковыми парами. Такие ребра называются **кратными**, или **параллельными**. На рис. 1, *а* кратными являются, например, ребра x_1 (A, B), x_2 (A, B). Вершинам A и C инцидентны ребра x_3, x_4, x_5. Количество одинаковых пар называется **кратностью** ребра. На рис. 1, *а* ребро AC имеет кратность, равную 3, а ребро AB— кратность, равную 2. Число ребер, инцидентных вершине A, называется **степенью** этой вершины и обозначается deg(A) (от англ. *degree* — степень). Если вершине инцидентна петля, она дает вклад в степень, равный двум, так как оба конца приходят в эту вершину.

На рис. 1, *в* вершина A имеет степень, равную 1, вершина C— 4, вершина D — 2. Записывается это в виде: deg (A) = 1, deg (C) =4, deg (D) = 2. Граф G4 (рис. 1, *г*) содержит пять вершин V= {A, B, C, D, E} и шесть ребер X={p, q, r, s, t, u}.

Вершина графа, имеющая степень, равную нулю, называется **изолированной**. Граф, состоящий из изолированных вершин, называется **нуль-графом**. Для нуль-графа X=Ø. Вершина графа, имеющая степень, равную 1, называется **висячей**. На рис. 1, *г* вершина E — изолированная: deg (E) = 0, а вершины A, B, E, G, H на рис. 1, *в* — висячие.

Граф G называется **полным**, если любые две его различные вершины соединены одним и только одним ребром.

Существуют различные способы задания графа: геометрический (рисунки, схемы, диаграммы), простое перечисление вершин и ребер, табличный. Человеку удобно работать с графом-рисунком, т.к. он может легко установить связь между вершинами в наглядном виде с помощью ребер, изображаемых непрерывными линиями. Для машинной обработки удобнее задать граф в алгебраической форме – перечислением (списком) вершин и ребер.

Одним из самых распространенных способов задания графа является **матричный способ.** Пусть дан граф G = (V, X), где V= {V_1, V_2, …, V_n} – вершины, а X={ X_1, X_2, …, X_n} – ребра графа.

Матрицей инцидентности B(G) неориентированного графа G с n вершинами и m ребрами называется матрица размерности $n \times m$, элементы которой определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } V_i \text{ инцидентна ребру } X_j, \\ 0, \text{в противном случае или если } X_j \text{ - петля.} \end{cases}$$

Очевидно, что в каждом столбце матрицы инцидентности должно быть только два ненулевых числа, т.к. ребро инцидентно двум вершинам. Число ненулевых элементов каждой строки – степень соответствующей вершины.

Но в математике удобнее работать с квадратными матрицами, т.к. для них хорошо разработан соответствующий алгебраический аппарат.

Матрицей смежности A(G) неориентированного графа G называется матрица размерности $n \times n$, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } V_i \text{ и } V_j \text{ смежны}, \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку для неориентированного графа ребра (V_i, V_j), и (V_j, V_i) одновременно принадлежат или не принадлежат графу, т.к. символизируют одно и тоже ребро, то $a_{ij}=a_{ji}$. Матрица смежности неориентированного графа является симметрической и не меняется при транспонировании.

Хотя формально каждая вершина всегда смежна сама с собой, в матрице смежности мы будем ставить $a_{kk} = 0$, если у нее нет петли, и $a_{kk} = 1$, если есть одна петля. Итак, если граф имеет матрицу смежности и не имеет петель, на главной диагонали у него всегда стоят нули.

Расстоянием $d(V_i, V_j)$ между вершинами V_i и V_j в неориентированном графе G называется наименьшее число ребер, соединяющих эти вершины. **Условный радиус** графа G относительно вершины V_i определяется формулой:

$$r(V_i) = \max_{V_j \in V(G)} d(V_i, V_j) .$$

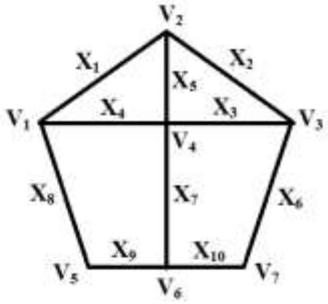
Здесь $V(G)$ – это множество вершин графа G .

Радиус графа G определяется как наименьший из условных радиусов графа, а **центр графа** составляют вершины, условные радиусы графа относительно которых совпадают с радиусом графа.

Задание.

Рассмотрим граф G, изображенный на рисунке. Найдем для него:

1) таблицу степеней вершин;
2) матрицу смежности;
3) матрицу инцидентности;
4) таблицу расстояний в графе;
5) определить радиус и центр графа.



Решение.

1. Таблица степеней вершин данного графа имеет вид:

V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
deg (V_i)	3	3	3	4	2	3	2

2. Составим таблицу смежности, а затем по ней матрицу смежности.

V_i	V_j						
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
V_2	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
V_3	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*
V_4	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*
V_5	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
V_6	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*
V_7	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Составим таблицу инцидентности, а затем по ней матрицу инцидентности.

V_i	X_j									
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
V_1	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
V_2	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
V_3	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
V_4	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
V_5	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
V_6	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*
V_7	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Для данного графа таблица расстояний и условных радиусов вершин имеет вид:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	$r(V_i)$
V_1	0	1	2	1	1	2	3	3
V_2	1	0	1	1	2	2	2	2
V_3	2	1	0	1	3	2	1	3
V_4	1	1	1	0	2	1	2	2
V_5	1	2	3	2	0	1	2	3
V_6	2	2	2	1	1	0	1	2
V_7	3	2	1	2	2	1	0	3

5. Радиус графа G r(G)=2, следовательно, центр графа – это множество вершин $\{V_2, V_4, V_6\}$.

Задание для самостоятельной работы

В таблице для каждого варианта заданы декартовы координаты вершин графа и перечислены ребра графа. Граф неориентирован. Следует построить граф на плоскости *xOy* и найти:

1) таблицу степеней вершин;
2) матрицу смежности;
3) матрицу инцидентности;
4) таблицу расстояний в графе;
5) определить радиус и центр графа.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
Вариант 1	(1;3)	(3;5)	(6;5)	(2;2)	(3;3)	(1;0)	(3;0)	(6;2)
$(V_1;V_2), (V_2;V_5), (V_2;V_3), (V_2;V_4), (V_1;V_6), (V_2;V_7), (V_6;V_7)$								
Вариант 2	(4;6)	(2;4)	(4;4)	(6;4)	(2;0)	(4;1)	(6;0)	(9;2)
$(V_1;V_2), (V_2;V_5), (V_2;V_3), (V_1;V_4), (V_4;V_7), (V_6;V_7), (V_1;V_3), (V_3;V_4), (V_5;V_6), (V_3;V_6)$								
Вариант 3	(2;3)	(2;6)	(3;7)	(3;5)	(5;6)	(5;4)	(6;6)	(4;1)
$(V_1;V_2), (V_2;V_3), (V_4;V_6), (V_3;V_4), (V_5;V_6), (V_3;V_5)$ $(V_5;V_7)$								
Вариант 4	(1;1)	(2;2)	(2;4)	(2;5)	(3;5)	(5;5)	(3;2)	(5;2)
$(V_1;V_2), (V_2;V_3), (V_5;V_6), (V_3;V_5), (V_6;V_8), (V_2;V_7), (V_7;V_8), (V_5;V_7)$								
Вариант 5	(1;4)	(3;5)	(5;4)	(1;2)	(5;2)	(1;0)	(5;0)	(7;1)
$(V_1;V_2), (V_2;V_4), (V_2;V_5), (V_2;V_3), (V_4;V_5), (V_6;V_7), (V_5;V_7), (V_4;V_6)$								

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания в тетради.

2. Получить у преподавателя задания для самостоятельной работы и решить их.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.