Приложение 4.21.1 к ОПОП по специальности
21.02.19 Землеустройство

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ОП.01 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

для обучающихся специальности
21.02.19 Землеустройство

Магнитогорск, 2024

ОДОБРЕНО

Предметно-цикловой комиссией
«Строительства и земельно-имущественных отношений»
Председатель Ю.Н. Заиченко
Протокол № 5 от 31.01.2024г.

Методической комиссией МпК

Протокол № 3 от 21.02.2024г.

Разработчик:
преподаватель отделения №1 "Общеобразовательной подготовки" Форыкина Е.В.
Многопрофильного колледжа ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математические методы решения прикладных профессиональных задач».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 21.02.19 Землеустройство и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Содержание практических и лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 1.1.3 Оценивает результаты полевых геодезических работ;

ПК 2.1.3 Проведение инвентаризации объекта в целях установления наличия изменения в планировке и техническом состоянии объекта;

ПК 3.4.1 Применяет методики и инструменты сбора информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5.3 Использует формулы для промежуточных расчетов при определении стоимостей.

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических и/или лабораторных работ по учебной дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся в рамках соответствующей темы, после освоения дидактических единиц, которые обеспечивают наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Матрицы и определители

Практическое занятие №1
Действия над матрицами

Цель: формирование умений выполнять операции над матрицами

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите: A+B; 2A; AB; BA.
3. Найти значение функции $f(x) = 4x^2 - 5x + 2$. Если $x = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. Найти значение функции $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$. Если $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы: 1.Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдем A^2, умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б) Найдем матрицу *3A*, умножив все элементы матрицы *A* на 3.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в**)** Найдем произведение 3АВ

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу С, складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2.Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимообратными.

3.Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 16 & -16 & -4 \\ 14 & -14 & -8 \end{pmatrix};$$

$c_{11} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 3;$

$c_{12} = -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2;$

$c_{13} = -3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 11;$

$c_{21} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 16;$

$c_{22} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) = -16;$

$c_{23} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -4;$

$c_{31} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 14;$

$c_{32} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) = -14;$

$c_{33} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -8.$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 & 2 \\ -11 & -10 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.1 Матрицы и определители

Практическое занятие №2

Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка

Цель: формирование умений вычислять определители

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислить определители:

2) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

2. Выполнить действия:

1) $3*\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Порядок выполнения работы:

1 Запишите определитель, определите какого он порядка.

2 Используя соответствующее определение, вычислите его значение.

Ход работы:

Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} .$$

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$

$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.1 Матрицы и определители

Практическое занятие №3

Нахождение обратной матрицы

Цель: формирование умений находить обратную матрицу

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислите обратную матрицу по отношению к данной матрице:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Порядок выполнения работы:

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы А ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы А и составить из них союзную матрицу A^*.

в) транспонировать матрицу A^* из алгебраических дополнений $\mathrm{A}^{*\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}\ A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}\ A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$

Ход работы:

Вычислите обратную матрицу по отношению к данной матрице:

1) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

Найдем определитель матрицы: $\Delta\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19 \neq 0$. Матрица невырожденная, значит, она имеет обратную.

$\mathrm{A}^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104$

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4$;

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13$.

Составим обратную матрицу:

$A^{-1} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы $|A| = 5 \neq 0$, т.е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

Находим матрицу A^T, транспонированную к A: $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T и составляем из них присоединенную матрицу A^*:

$A^T{}_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$; $A^T{}_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$; $A^T{}_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2$;

$A^T{}_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3$; $A^T{}_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$; $A^T{}_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1$;

$A^T{}_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$; $A^T{}_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2$; $A^T{}_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3$,

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам $A^{-1}A=AA^{-1}=E$:

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cdot 1+\frac{3}{5}\cdot 2+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 1 & \frac{1}{5}\cdot(-1)+\frac{3}{5}\cdot 1+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 1 & \frac{1}{5}\cdot 1+\frac{3}{5}\cdot 1+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 2 \\ \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot 1 & \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(-1)+\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 1 & \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 2 \\ \frac{1}{5}\cdot 1+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 2+\frac{3}{5}\cdot 1 & \frac{1}{5}\cdot(-1)+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 1+\frac{3}{5}\cdot 1 & \frac{1}{5}\cdot 1+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 1+\frac{3}{5}\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2.Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие №4

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Крамера

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Расчет стоимости недвижимости сводится к решению системы линейных уравнений, которую необходимо решить с помощью формул Крамера:

1) $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3=5 \\ 3x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 3x+3y-5z=-2 \\ x+y+2z=3 \\ 2x-y+7z=27 \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.

2.Запишите и вычислите определитель системы.

3.Вычислите определители каждой неизвестной.

4.Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Крамера.

1). Вычислить определитель матрицы A, составленной из коэффициентов системы линейных уравнений.

2). Составить матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, путем замены соответствующих столбцов столбцом свободных членов, и вычислить их определители.

3). Вычислить значения переменных по формулам Крамера: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$.

Примеры: Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-10) = 19$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 20 & 3 \end{vmatrix} = 33 + 100 = 133;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 20 \end{vmatrix} = 60 - 22 = 38.$

$x = \frac{133}{19} = 7;\ \ y = \frac{38}{19} = 2.$

Ответ: (7;2).

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

Вычислим определители каждой переменной:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$

Ответ: (2;-1;0).

3) $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 11, \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ 2x_3 = 8. \end{cases}$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов системы уравнений и вычислим ее определитель: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = 5 \neq 0$.

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц A_1, A_2, A_3, полученных из матрицы A, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$A_1=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 11 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=20;\ A_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix}=10;\ A_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}=5.$$

Теперь по формулам Крамера найдем значения переменных:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{20}{5}=4,\ x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{10}{5}=2,\ x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{5}{5}=1.$$

Ответ: (4; 2; 1).

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие №5

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений методом обратной матрицы

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание: Расчет стоимости недвижимости сводится к решению системы линейных уравнений, которую необходимо решить методом обратной матрицы:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.

2. Составьте матричное уравнение.

3. Вычислите обратную матрицу.

4. Найдите значения неизвестных.

5. Запишите ответ.

Ход работы:

Решить систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$.

Найдем

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19 \neq 0 \Rightarrow$обратная матрица есть.

$A^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решим уравнение:

$X = A^{-1}C = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -20 - 18 \\ -12 + 12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -38 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: (2; 0).

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$.

Найдем

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104$.

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4$;

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13$.

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -120+64+56 \\ -310-8-98 \\ 130-104+182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (0;4;-2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0+12-2=10 \\ 0-8+4=-4 \\ 0-4-10=-14 \end{cases}. \text{ (верно)}$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие №6

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений методом Гаусса

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание: Расчет стоимости недвижимости сводится к решению системы линейных уравнений, которую необходимо решить методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10 \\ x + 5y - 2z = -15 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Метод Гаусса является наиболее общим точным методом решения и исследования систем линейных уравнений. Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к ступенчатому виду, из которого все решения системы могут быть найдены непосредственно.

Элементарными преобразованиями системы являются:

- перестановка любых двух уравнений системы;
- умножение любого уравнения системы на число $\lambda \neq 0$;
- вычеркивание уравнения, у которого все коэффициенты и свободный член равны нулю;
- сложение двух уравнений системы.

Любое элементарное преобразование системы не меняет множество ее решений.

Чаще всего преобразования выполняются не с самой системой, а с ее расширенной матрицей, при этом элементарные преобразования системы легко превращаются в элементарные преобразования матрицы.

Пример1. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases} \begin{matrix} \\ (-2) \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ -5x_2 - 13x_3 = -18; \end{cases} \begin{matrix} \\ (-5) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ 22x_3 = 22; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3, \\ x_2 = \dfrac{-8 + 7x_3}{-1}, \\ x_3 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 1; 1).

Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad (-2) \quad (7) \quad (-2) \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 9 & -5 & 35 \end{array}\right) \quad (9) \quad (-5)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -20 & -40 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ -20x_3 = -40, \end{cases}$ которая имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (1; 5; 2).

Если система несовместна (т.е. составляющие её уравнения противоречивы и система не имеет решения), то в результате приведения к ступенчатому виду получается абсурдное равенство типа *1=0*. Обратно: если мы получили равенство *1=0* (вместо единицы в левой части может стоять любое число, не равное нулю), то система несовместна.

Пример2. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right) \quad (-2) \quad (-1) \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -4x_3 + 5x_4 = -4, \\ 0x_4 = -6. \end{cases}$ Третье уравнение системы не имеет решений, следовательно, система решений не имеет.

Ответ: система несовместна.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

Решение. Запишем расширенную матрицу и выполним первый шаг гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Разделим третью строку на 3 и выполним второй ход гауссовых исключений:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует система уравнений: $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ -x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$

Из второго уравнения находим: $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$ и, подставив в первое уравнение, получим: $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$.

Итак, $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, x_3, x_4 – любые числа.

Ответ: система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1\,; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие №7

Решение систем линейных уравнений различными способами

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решите системы линейных уравнений :

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$ методом Крамера.

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$ матричным методом.

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ \qquad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - \qquad x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 6 \end{cases}$ методом Гаусса.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2. Примените для решения необходимый метод.
3. Выполните вычисления. Оформите решение в тетради.
4. Запишите ответ.

Ход работы:

1.Решите систему методом Крамера:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

2) Решите систему матричным методом :

$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$.

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13;$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26;$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -120+64+56 \\ -310-8-98 \\ 130-104+182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (0;4;-2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0+12-2=10 \\ 0-8+4=-4 \\ 0-4-10=-14 \end{cases}.$$ (верно)

3) Решите систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_4 = -4 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 2 \end{cases}.$$

Ответ: (8;6;4;2).

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1 Векторы. Прямоугольная и полярная системы координат.

Практическое занятие №8

Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве. Расстояние между точками. Угол между векторами.

Цель: формирование умений решать задачи по теории алгебры векторов на вычисление расстояний между точками и углов.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Дано: $\overline{a}=(3;-6;-1)$, $\overline{b}=(1;4;-5)$, $\overline{c}=(3;-4;12)$. Найти проекцию вектора $(\overline{a}+\overline{b})$ на вектор $\overline{c}$.

2. Даны вершины треугольника А (1; -1; 2), В (5; -6; 2) и С (1; 3; -1). Вычислите углы этого треугольника.

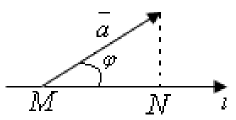
3. Даны векторы $\overline{a}=4\overline{i}+4\overline{k}$, $\overline{b}=-\overline{i}+3\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{c}=3\overline{i}+5\overline{j}$. Выполните следующие действия: а) вычислите смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $5\overline{c}$; б) найдите модуль векторного произведения $3\overline{c}$ *и* $\overline{b}$; в) вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $3\overline{b}$; г) проверьте, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось l называется число, обозначаемое $np_l\bar{a}$ и равное $|\bar{a}|\cos\varphi$, *где* $\varphi\in[0,\pi]$ – угол между вектором $\bar{a}$ и положительным направлением оси l.



$$np_l\bar{a} = MN,\ 0\le\varphi<\frac{\pi}{2}$$

$$np_l\bar{a} = -MN,\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi.$$

Вектор $\bar{a}=(x,y,z)$ может быть представлен в виде $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – единичные векторы (орты), совпадающие с направлением осей соответственно *Ox, Oy, Oz;* $|\bar{i}|+|\bar{j}|+|\bar{k}|=1.$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\bar{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \textit{или} \quad |\bar{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \qquad (1)$$

Линейные операции над векторами в координатной форме. Пусть вектор $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$, тогда

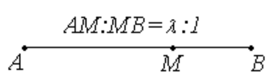
$$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2),$$
$$\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2),$$

а произведение вектора $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ на число λ есть вектор $\bar{f}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$.

Если даны точки $M(x_1,y_1,z_1)$ и $N(x_2,y_2,z_2)$, то вектор $\overline{MN}$ будет иметь координаты: $\overline{MN}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *коллинеарны* тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны: $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}.$

Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $A=(x_1,y_1,z_1)$ и $B=(x_2,y_2,z_2)$, а точка *M* определена условием *AM=λMB, λ>0.*



Тогда координаты *x, y, z* точки *M* определяются равенствами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частном случае *λ=1* и точка *M* будет серединой отрезка *AB*.

Скалярным произведением $(\bar{a},\bar{b})$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\bar{a},\bar{b}) = \bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$$

Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$.

Скалярное произведение $(\bar{a},\bar{b})$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$(\bar{a},\bar{b}) = \bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (2)$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*:*

$$(\bar{a},\bar{a}) = \bar{a}^{\,2} = |\bar{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \qquad (3)$$

Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (4)$$

Для двух ненулевых векторов $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *условие ортогональности* имеет вид: $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Примеры:

1) Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}$ = (-1; 0; 2) и $\vec{b}$ = (3; -4; 1).

Решение. Для нахождения проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, будем использовать формулу

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Подставляя в нее координаты векторов, получим:

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{-1\cdot 3 + 0\cdot(-4) + 2\cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{26}}{26}$$

Ответ. $Пр_{\vec{b}}\vec{a} = -\frac{\sqrt{26}}{26}$

2) Даны вершины треугольника A (1; -1; 2), B (5; -6; 2) и C (1; 3; -1). Вычислите углы этого треугольника.

$cosA = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$.

$\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (0; 4; -3)$.

$$cosA = \frac{4\cdot 0 + (-5)\cdot 4 + 0\cdot(-3)}{\sqrt{16 + 25 + 0}\cdot\sqrt{0 + 16 + 9}} = \frac{-20}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{25}} = \frac{-4}{\sqrt{41}} = -\frac{4\sqrt{41}}{41} \approx -0{,}6247$$

$A = \arccos(-0{,}6247) = 128{,}6°$.

$cosB = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$.

$\overrightarrow{BA} = (-4; 5; 0)$; $\overrightarrow{BC} = (-4; 9; -3)$.

$$cosB = \frac{-4 \cdot (-4) + 5 \cdot 9 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{16+25+0} \cdot \sqrt{16+81+9}} = \frac{61}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{106}} = \frac{61}{\sqrt{41 \cdot 106}} = \frac{61\sqrt{4346}}{4346} \approx 0{,}9253.$$

$B = \arccos(0{,}9253) = 22{,}3°$.

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1 Векторы. Прямоугольная и полярная системы координат.

Практическое занятие №9

Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.

Цель: формирование умений решать задачи по теории алгебры векторов на применение векторного и смешанного произведений.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны вершины треугольника A (1; -1; 2), B (5; -6; 2) и C (1; 3; -1). Найдите длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.
2. Даны три точки: A(-1;2;-1), B(0;4;1) и C(4;3;-3). Найти площадь треугольника ABC. Найти длину высоты, опущенной из вершины A.
3. Дана пирамида с вершинами A_1 (7; 2; 4), A_2 (7; -1; -2), A_3 (3; 3; 1), A_4 (-4; 2; 1). Найдите:

а) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

б) объем пирамиды;

в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

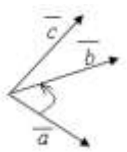
Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

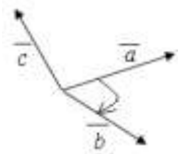
Ход работы:

Векторное произведение векторов

Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ с общим началом в точке O называется правой, если кратчайший поворот оси вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ со стороны вектора $\bar{c}$ осуществляется против часовой стрелки (рис. а). В противном случае тройка векторов называется левой (рис. б).



а



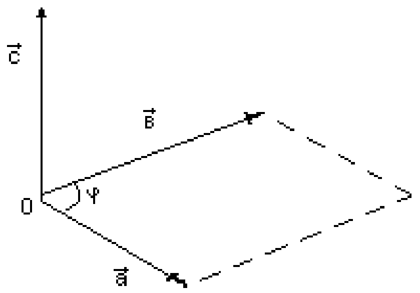
б

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обозначаемый $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, который удовлетворяет трем условиям:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a}, \bar{b})$;
2) $\bar{c} \perp \bar{a}, \ \bar{c} \perp \bar{b}$;
3) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – правая тройка векторов.

Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

$c \perp a$ $c \perp в$ Этот вектор перпендикулярен перемножаемым векторам (перпендикулярен плоскости параллелограмма), т.е и



Векторное произведение в координатной форме

$$\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ в_y & в_z \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ в_x & в_z \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ в_x & в_y \end{vmatrix}$$

Длина векторного произведения равна площади параллелограмма - удвоенного треугольника, а именно произведению сторон в виде векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенные от одной точки, на синус угла между ними $\sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

<u>Смешанное произведение векторов</u>

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется действительное число, равное скалярному произведению векторов $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ и $\vec{c}$, где $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ - векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Смешанное произведение векторов равно определителю матрицы третьего порядка, строками которой являются координаты умножаемых векторов, то есть

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Условие компланарности трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ имеет вид:

$$\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \text{ – компланарны} \Leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

Геометрический смысл смешанного произведения состоит в следующем. Смешанное произведение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах, если $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – правая тройка. Если же эта тройка левая, то смешанное произведение отрицательно и равно объему параллелепипеда с противоположным знаком:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{cases} V, & \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ – } \textit{правая тройка}; \\ -V, & \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ – } \textit{левая тройка}. \end{cases}$$

$V_{параллелепипеда} = \left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$.

Объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равняется $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда.

Получаем: $V_{тетраэдра} = \frac{1}{6} V_{параллелепипеда} = \frac{1}{6}\left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$.

1. Даны вершины треугольника A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1). Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

$$\overrightarrow{AB} = (4; -5;\ 0);\ \overrightarrow{AC} = (0;\ 4; -3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15i + 12j + 16k = (15;\ 12;\ 16)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{225 + 144 + 256} = \frac{25}{2}$$

$$С\ другой\ стороны:\ S_{ABC} = \frac{1}{2} h \cdot AC = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 9} \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{25}{2} = \frac{5}{2} h \Rightarrow h = 5$$

Ответ: 5

2. Даны три точки: A(-1;2;-1), B(0;4;1) и C(4;3;-3).
   Найти площадь треугольника ABC. Найти длину высоты, опущенной из вершины A.
   Решение:
   Среди формул для вычисления площади треугольника давайте выберем вот эту:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle A)$$

И, о чудо, видим произведение длин двух отрезков (что то же самое, что произведение длин двух векторов) на синус угла между ними. Что равно длине вектора-результата векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Найдем координаты этих векторов:

$$\overline{AB} = (0 - (-1); 4 - 2; 1 - (-1)) = (1; 2; 2)$$

$$\overline{AC} = (4 - (-1); 3 - 2; -3 - (-1)) = (5; 1; -2)$$

И вычислим площадь:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin(\angle A)=\frac{1}{2}\left|[AB;AC]\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 2\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\ i\begin{vmatrix} 2 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}\ \right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|\ i(-4-2)-j(-2-10)+k(1-10)\ \right|=\frac{1}{2}\left|-6i+12j-9k\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+12^2+(-9)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+144+81}=\frac{1}{2}\sqrt{261}$$

Площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2}\sqrt{261}$$

Найдем длину высоты, опущенной из вершины A.
Для этого вспомним формулы для вычисления площади треугольника. Например, ту, где говорится «площадь треугольника равна половине произведения высоты на основание».

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AH|\cdot|BC|.$$

Известны координаты точек B и C, т.е. можно вычислить длину стороны BC. Известна так же площадь треугольника. Подставим данные.

$$\frac{1}{2}\sqrt{261}=\frac{1}{2}|AH|\cdot\sqrt{(4-0)^2+(3-4)^2+(-3-1)^2}$$
$$\sqrt{261}=|AH|\cdot\sqrt{16+1+16}$$
$$\sqrt{261}=|AH|\cdot\sqrt{33}$$
$$|AH|=\sqrt{\frac{261}{33}}$$

Ответ: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{261}$; $|AH|=\sqrt{\frac{261}{33}}$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1 Векторы. Прямоугольная и полярная системы координат.

Практическое занятие №10

Решение задач на использование векторного и смешанного произведения для нахождения площадей и объемов

Цель: формирование умений решать задачи по теории алгебры векторов.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны вершины треугольника A(0;2;0), B(-2;5;0), C(-2;2;6). Найти его площадь.
2. Вычислить объём треугольной пирамиды, если даны её вершины $A(-2;-2;0), B(0;4;-1), C(1;2;1), D(-13;8;11)$

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Ход работы:

1.Даны вершины треугольника A(0;2;0), B(-2;5;0), C(-2;2;6). Найти его площадь.

Решение: Алгоритм решения, думаю, многие уже представляют. Сначала найдём векторы:

$\overline{AB} = (-2-0;\ 5-2;\ 0-0) = (-2;\ 3;\ 0);$

$\overline{AC} = (-2-0;\ 2-2;\ 6-0) = (-2;\ 0;\ 6).$

Затем векторное произведение:

$$\overline{N} = \left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\cdot\bar{k} =$$

$$= (18-0)\cdot\bar{i} - (-12-0)\cdot\bar{j} + (0+6)\cdot\bar{k} = 18\bar{i} + 12\bar{j} + 6\bar{k}$$

Вычислим его длину:
$$\left|\overline{N}\right| = \sqrt{18^2 + 12^2 + 6^2} = \sqrt{324 + 144 + 36} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}$$

Формулы площадей параллелограмма и треугольника, само собой, остаются те же самые:
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{N}\right| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{14} = 3\sqrt{14}$$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{14}$ ед^2. $\approx 11{,}22$ ед^2.

2.Вычислить объём треугольной пирамиды, если даны её вершины
$A(-2; -2; 0)$, $B(0; 4; -1)$, $C(1; 2; 1)$, $D(-13; 8; 11)$

Решение:

Сначала найдём векторы:
$$\overline{AB} = (0-(-2); 4-(-2); -1-0) = (2; 6; -1);$$
$$\overline{AC} = (1-(-2); 2-(-2); 1-0) = (3; 4; 1);$$
$$\overline{AD} = (-13-(-2); 8-(-2); 11-0) = (-11; 10; 11).$$

Вычислим смешанное произведение:
$$p = (\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -11 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -11 & 11 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -11 & 10 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (44 - 10) - 6 \cdot (33 + 11) - (30 + 44) = 68 - 264 - 74 = -270$$
(Определитель раскрыт по первой строке)

Вычислим объём треугольной пирамиды $ABCD$:
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |p| = \frac{1}{6} \cdot |-270| = 45$$

Ответ: $V_{ABCD} = 45$ ед^3.

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2 Линии на плоскости

Практическое занятие №11

Составление уравнений прямых и решение задач на взаимное расположение прямых на плоскости.

Цель: формирование умений составлять уравнения прямых, вычислять углы между прямыми.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями: а) $2x-y+3=0$ и $4x+8y+17=0$; б) $2x-y+3=0$ и $4x-8y-11=0$.

2. Даны вершины *A(4, 3), B(-3, -3), C(2, 7)* треугольника *ABC*. Найти: а) уравнение стороны *AB*; б) уравнение высоты *CH;* в) уравнение медианы *AM*; г) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*; е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Ход работы:

В декартовой прямоугольной системе координат *Oxy* на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени

$Ax+By+C=0$, где *A, B, C* – определенные числа, $A^2+B^2\neq 0$. И обратно, всякое уравнение вида $Ax+By+C=0$ определяет прямую на плоскости.

Данное уравнение называется *общим уравнением прямой* на плоскости, коэффициенты уравнения *A, B* определяют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой. Этот вектор называется *нормальным вектором* прямой.

Основные способы задания прямой на плоскости и соответствующие уравнения:

1. Прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$. В этом случае прямая описывается общим уравнением
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

2. Прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{S} = (m, n)$. В этом случае прямая задается *каноническим уравнением*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$$

где t – параметр, принимающий любые числовые значения.

3. Прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ с заданным углом наклона α, определяемым *угловым коэффициентом* $k = tg\alpha$ (рис. 1). В этом случае уравнение прямой имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

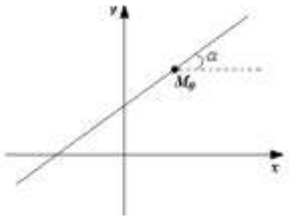


Рис. 1.

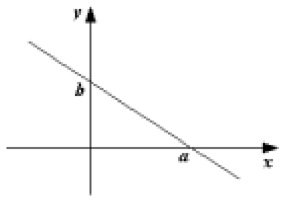


Рис. 2.

4. Прямая отсекает на координатных осях заданные отрезки (рис. 2). В этом случае используют *уравнение прямой в отрезках* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

5. Прямая задана углом наклона α, определяемым угловым коэффициентом $k = tg\alpha$, и отрезком b, отсекаемым на оси Oy. В этом случае используют *уравнение прямой с угловым коэффициентом* $y = kx + b$.

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Примеры :

1) Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями: а) $2x - y + 3 = 0$ и $4x + 8y + 17 = 0$.

Чтобы найти точку пересечения прямых, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 4x + 8y + 17 = 0 \end{cases}.$$

Решать систему можно любым методом. Решим, например методом подстановки.

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 4x + 8(2x + 3) + 17 = 0 \end{cases}.$$

$4x + 8(2x + 3) + 17 = 0;$

$4x + 16x + 24 + 17 = 0;$

$20x = -41;$

$x = -\frac{41}{20};$

$\begin{cases} x = -\frac{41}{20} \\ y = 2 \cdot \left(-\frac{41}{20}\right) + 3 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = -\frac{41}{20} \\ y = -\frac{11}{10} \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = -2\frac{1}{20} \\ y = -1\frac{1}{10} \end{cases}.$

2) Даны вершины *A(4, 3), B(-3, -3), C(2, 7)* треугольника *ABC*. Найти:

а)уравнение стороны *AB*

$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3};$

$\frac{x-4}{-7} = \frac{y-3}{-6};$

$-6(x-4) = -7(y-3);$

$-6x + 24 + 7y - 21 = 0;$

$-6x + 7y + 3 = 0.$

б) уравнение высоты *CH;*

$-6x + 7y + 3 = 0$- уравнение стороны AB.

Найдем угловой коэффициент стороны AB: $y = \frac{6}{7}x - \frac{3}{7}; \quad k = \frac{6}{7}$.

Значит, угловой коэффициент *CH*: $k = -\frac{7}{6}.$

$y = -\frac{7}{6}(x-2) + 7.$

$y = -\frac{7}{6}x + \frac{7}{3} + 7.$

$\frac{7}{6}x + y - \frac{28}{3} = 0.$

$7x + 6y - 56 = 0.$

в) уравнение медианы *AM*

Найдем координаты середины отрезка BC: $M(\frac{-3+2}{2}; \frac{-3+7}{2}).$

$M(-0{,}5; 2).$

$\frac{x+0{,}5}{4+0{,}5} = \frac{y-2}{3-2};$

$\frac{x+0{,}5}{4{,}5} = \frac{y-2}{1};$

$x + 0{,}5 = 4{,}5y - 9;$

$x - 4{,}5y + 9{,}5 = 0;$

$2x - 9y + 19 = 0.$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2 Линии на плоскости

Практическое занятие №12,13

Решение задач на составление уравнений кривых второго порядка. Построение кривых второго порядка.

Цель: формирование умений составлять уравнения кривых 2-го порядка, находить параметры кривых второго порядка.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(6;-1)$ с центром в точке пересечения прямых $3x-4y-5=0$ и $4x+3y-15=0$.
2. Составить уравнение эллипса, если эксцентриситет равен 0,6 , а расстояние между фокусами, расположенными на оси ординат, равно 6. Постройте эллипс, найдите вершины и фокусы.
3. Составьте уравнение гиперболы, если известны координаты фокусов и эксцентриситет: $F_1(0;2\sqrt{2})$; $F_2(0;-2\sqrt{2})$; $\varepsilon=1{,}5$. Постройте эту гиперболу.
4. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Оу и проходящей через точки пересечения прямой $y-x=0$ и окружности $x^2+y^2-4y=0$.

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Общее уравнение кривых второго порядка имеет вид

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, в котором *A, B* и *C* не равны нулю одновременно, т.е. $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Эллипс и окружность

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта величина больше расстояния $2c$ между фокусами.

Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy – перпендикуляр к оси Ox, проходящий через середину отрезка F_1F_2 (рис. 1), то уравнение эллипса примет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Это уравнение называют *каноническим уравнением эллипса*. При этом a – большая полуось эллипса, b – его малая полуось, $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса.

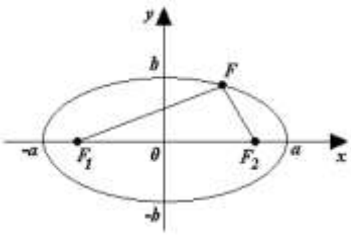


Рис. 1.

Отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$ называется *эксцентриситетом эллипса*.

При $a<b$ уравнение также задает эллипс, но у такого эллипса фокусы расположены на оси Oy, параметр b задает большую полуось, а a – малую полуось. Параметр c, равный половине расстояния между фокусами, можно найти по формуле $c=\sqrt{b^2-a^2}$, а эксцентриситет – по формуле $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

При $a=b$ уравнение задает окружность с центром в начале координат и радиусом a.

Окружность радиуса R с центром в точке $C(x_0,y_0)$ задается уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта величина меньше расстояния $2c$ между фокусами.

Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy – перпендикуляр к оси Ox, проходящий через середину отрезка F_1F_2 (рис. 2), то уравнение гиперболы примет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Это уравнение называют *каноническим уравнением гиперболы*. При этом a – действительная полуось гиперболы, b – его мнимая полуось, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса.

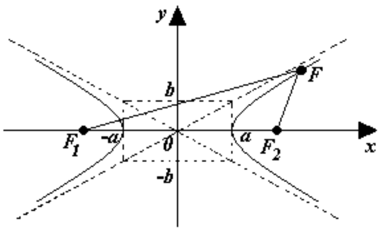


Рис. 2.

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$, к которым гипербола неограниченно приближается на бесконечности, представляют собой асимптоты гиперболы.

Уравнение $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, определяет гиперболу, но у этой гиперболы фокусы расположены на оси Oy, параметр b есть действительная полуось, параметр a – мнимая полуось, а эксцентриситет вычисляется по формуле $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокус перпендикулярно директрисе, а за ось Oy – прямую, проходящую через середину перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису (рис. 3), то уравнение параболы примет вид $y^2 = 2px$, где p – расстояние от фокуса до директрисы. Это уравнение называют *каноническим уравнением параболы*. При этом $x = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы, а фокус $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

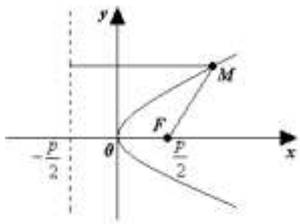


Рис. 3.

Уравнение $x^2 = 2py$ задает параболу, симметричную относительно оси Oy. В этом случае директриса параболы $y = -\frac{p}{2}$, а фокус $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

Примеры:

1. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(6; -1)$ с центром в точке пересечения прямых $3x - 4y - 5 = 0$ и $4x + 3y - 15 = 0$.

Сначала найдем координаты центра окружности. Для этого составим и решим систему уравнений: $\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0; \\ 4x + 3y - 15 = 0. \end{cases}$

Решаем методом сложения, умножая уравнения на 3 и 4 соответственно:

$$\begin{cases} 9x - 12y - 15 = 0; \\ 16x + 12y - 60 = 0 \end{cases}.$$

Складывая почленно уравнения, получим следующее уравнение: $25x - 75 = 0$.

$25x = 75;$

$x = 3.$

$$\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0; \\ x = 3 \end{cases}. \quad \begin{cases} x = 3; \\ y = 1 \end{cases}.$$

Следовательно, центр окружности находится в точке с координатами (3;1).

Уравнение окружности имеет вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Знаем координаты центра окружности и точки, через которую проходит окружность. Подставим их в уравнение и найдем радиус окружности.

$(6 - 3)^2 + (-1 - 1)^2 = R^2$.

$R^2 = 9 + 4 = 13$.

Получим уравнение окружности: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$.

2. Составить уравнение эллипса, если эксцентриситет равен 0,6 , а расстояние между фокусами, расположенными на оси абсцисс, равно 6. Постройте эллипс, найдите вершины и фокусы.
   $\varepsilon = 0{,}6, \ \varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}6.$
   $F_1F_2 = 6, \ \ 2c = 6; \ \ c = 3.$
   $a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{3}{0{,}6} = 5.$
   $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16.$
   $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$
3. Составьте уравнение гиперболы, если известны координаты фокусов и эксцентриситет: $F_1\left(0; 2\sqrt{2}\right); \ F_2\left(0; -2\sqrt{2}\right); \ \varepsilon = 1{,}5.$
   $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3}{2}; \ \ b = \frac{2}{3}c = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$
   $a^2 = c^2 - b^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 8 - \frac{32}{9} = \frac{40}{9}.$
   $b^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}.$
   $\frac{9y^2}{32} - \frac{9x^2}{40} = 1.$

4. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Оу и проходящей через точки пересечения прямой $y - x = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

$\begin{cases} y - x = 0; \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$;

$x^2 + x^2 - 4x = 0;$

$2x^2 - 4x = 0;$

$2x(x-2) = 0;\ \ x_1 = 0;\ x_2 = 2.$

$y_1 = 0;\ \ y_2 = 2.$

Так как парабола симметрична относительно оси ординат, то уравнения могут быть: $x^2 = 2py$ или $x^2 = -2py$.

Мы нашли координаты точек, принадлежащих параболе. По этим координатам видим, что ветви направлены вверх, значит, уравнение имеет вид $x^2 = 2py$.

Найдем параметр p:

$x^2 = 2py.$

$2^2 = 2p \cdot 2;\ \ 4 = 4p; p = 1.$

$x^2 = 2y$ – уравнение искомой параболы.

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Комплексные числа

Практическое занятие №14

Алгебраическая форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель: формирование умений выполнения действий с комплексными числами в алгебраической форме.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: z_1= (7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).
   Записать эти числа в алгебраической форме.
2. Вычислить:
   1) $z_1 + z_2$;
   2) $z_2 - z_3$;
   3) $\frac{z_1}{z_3}$;
   4) $z_2 \cdot z_3$;
   5) z_1^5;
3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Ход работы:

1. Даны комплексные числа: z_1= (7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).

Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение: Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид: $z = a + bi$, то числа в алгебраической форме будут записаны в виде:

$z_1 = 7 + i$; $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$; $z_3 = 4 - 3i$.

2. Вычислить:

$z_1 + z_2 = (7 - 1{,}5) + (1 + 1{,}5)i = 5{,}5 + 2{,}5i$;

$z_2 - z_3 = (-1{,}5 - 4) + (1{,}5 + 3)i = -5{,}5 + 4{,}5i$;

$\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+4i+21i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1 + i$;

$z_2 \cdot z_3 = (-1{,}5 + 1{,}5i)(4 - 3i) = -6 + 4{,}5i + 6i - 4{,}5i^2 = -6 + 10{,}5i + 4{,}5 = -1{,}5 + 10{,}5i$;

$z_1^5 = (7 + i)^5 = ((7 + i)^2)^2(7 + i) = (49 + 14i + i^2)^2(7 + i) = (48 + 14i)^2(7 + i) = (2304 + 1344i + 196i^2)(7 + i) = (2304 + 1344i - 196)(7 + i) = (2108 + 1344i)(7 + i) = 13412 + 11516i$;

3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2{,}1 - 2{,}7i;$$

1) $\frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{-i-3-3i^2-9i}{-i^2+9} = \frac{-10i}{10} = -i$
2) $\frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-9i^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1{,}1 - 1{,}7i$
3) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$
4) $-i - 1{,}1 - 1{,}7i - 1 = -2{,}1 - 2{,}7i$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Комплексные числа

Практическое занятие №15

Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Цель: формирование умений выполнения действий с комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1) Даны комплексные числа в тригонометрической форме: $z_1 = 4\,(cos92° + isin92°)$, $z_2 = 16(cos88° + isin\,88°)$.

Вычислите: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$; ${z_1}^3$; $\sqrt[4]{z_2}$.

Порядок выполнения работы:

1.Запишите задание.

2.Выполните необходимые действия.

Ход работы:

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n(cosn\varphi + isin\,n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $\mathrm{z = r(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)}$ используется формула :

$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot (cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Даны комплексные числа в тригонометрической форме: $z_1 = 4\,(cos92° + isin92°)$, $z_2 = 16(cos88° + isin\,88°)$.

$z_1 \cdot z_2 = 4\,(cos92° + isin92°) \cdot 16(cos88° + isin\,88°) = 64(\cos(92° + 88°) + isin\,(92° + 88°) =$ $64cos180°+isin180°=64-1+i\cdot0=-64.$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{16(cos88° + isin\,88°)}{4\,(cos92° + isin92°)} = 4(\cos(88° - 92°) + isin(88° - 92°)) = 4(\cos(-4°) + isin(-8°))$$

$${z_1}^3 = (4\,(cos92° + isin92°))^3 = 4^3(\cos(92° \cdot 3) + i\sin(92° \cdot 3)) = 64(\cos 276° + isin276°)$$

$\sqrt[4]{z_2} = \omega_k = \sqrt[4]{16}(cos\frac{88°+360°k}{4} + isin\frac{88°+360°k}{4}.$

$\omega_0 = 2(cos22° + isin22°);$

$\omega_1 = 2\left(cos\frac{88°+360°}{4} + isin\frac{88°+360°}{4}\right) = 2(cos112° + sin112°);$

$\omega_2 = 2\left(cos\frac{88°+360°\cdot 2}{4} + isin\frac{88°+360°\cdot 2}{4}\right) = 2(cos202° + sin202°);$

$\omega_3 = 2\left(cos\frac{88°+360°\cdot 3}{4} + isin\frac{88°+360°\cdot 3}{4}\right) = 2(cos292° + sin292°).$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Комплексные числа

Практическое занятие №16

Переход из одной формы комплексных чисел к другой.

Цель: формирование умений выполнения действий с комплексными числами в алгебраической и тригонометрических формах, умений переводить комплексные числа из одной формы в другую.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Даны комплексные числа: z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).

1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.
2. Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;
2) $\frac{z_1}{z_3}$;
3) z_1^5;
4) $\sqrt{z_2}$;

3.Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:
1) $(2\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right))^6$;   2) $\frac{24(\cos 75° + i\sin 75°)}{3(\cos 30° + i\sin 30°)}$

Порядок выполнения работы:

1.Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2.Выполните необходимые действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).
1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.
Решение:
1) $z_1 = 7 + i$
$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,
Число находится в первой четверти, значит
$\varphi = arctg\,\frac{1}{7} = arctg\,0{,}1429$.
$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + i\sin 8°8')$.
2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$
$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}1$
Число находится во второй четверти, значит $\varphi = arctg\,\frac{b}{a} + \pi = arctg\,(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;
$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = 2{,}1(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\,\frac{3\pi}{4})$.
3) $z_3 = 4 - 3i$

$|z_3| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Число находится в четвертой четверти, значит
$\varphi = arctg\,\frac{-3}{4} = arctg\,(-0{,}75) = -36°52'$.

$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52') + i\sin(-36°52')$.

2. Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;
2) $\frac{z_1}{z_3}$;
3) z_1^5;

4) $\sqrt{z_2}$;

Решение:

$$z_2 \cdot z_3 = 2{,}1 \cdot 5\left(\cos\left(135^\circ - 36^\circ 52'\right) + i\sin\left(135^\circ - 36^\circ 52'\right)\right) = 10{,}5(\cos 98^\circ 8' + i\sin 98^\circ 8');$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}\left(\cos\left(8^\circ 8' - \left(-36^\circ 52'\right)\right) + i\sin\left(8^\circ 8' + 36^\circ 52'\right)\right) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ);$$

$$z_1^5 = \left(5\sqrt{2}\right)^5\left(\cos 5 \cdot 8^\circ 8' + i\sin 5 \cdot 8^\circ 8'\right) = 12500\sqrt{2}(\cos 40^\circ 40' + i\sin 40^\circ 40');$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

В нашем примере n=2.

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} + i\sin\frac{135^\circ + 360^\circ k}{2}\right);$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} + i\sin\frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 67^\circ 30' + i\sin 67^\circ 30');$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} + i\sin\frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 247^\circ 30' + i\sin 247^\circ 30')$$

4. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$\left(2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right)\right)^6 = 2^6\left(\cos\frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i\sin\frac{5\pi}{24} \cdot 6\right) = 64\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$$

$$\frac{24(\cos 75^0 + i\sin 75^0)}{3(\cos 15^0 + i\sin 15^0)} = \frac{24}{3}(\cos(75^\circ - 15^\circ) + i\sin(75^\circ - 15^\circ)) = 8(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.1 Функция. Предел функции

Практическое занятие №17

Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей

Цель: формирование умений вычислять пределы функций.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$
4. $\lim_{x\to 4}\frac{2x^3-54x}{x^2+x+1}$;
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{12x^5-3x^3+2x}{x^3+3x^2-1}$

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

1) $\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to 2}(2x^3-10x^2-4x+5)$$
$$=2\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3-10\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-4\lim_{x\to 2}x+5=2\cdot 8-10\cdot 4-4\cdot 2+5=-27$$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке $x=3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию.

Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2-11x+6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$$3x^2-11x+6=3(x-3)(x-\frac{2}{3})$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2-5x-3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2-5x-3=2(x-3)(x+\frac{1}{2})$$

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)(x-\frac{2}{3})}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})}{2(x+\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1}=\frac{3\lim_{x\to 3}x-2}{2\lim_{x\to 3}x+1}=\frac{3\cdot 3-2}{2\cdot 3+1}=\frac{7}{7}=1$$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞, то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x^3}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}-\frac{6x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4}-\frac{8x^2}{x^4}+\frac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}+\frac{10}{x^4}}{6-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0}{6}=0$$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$. Введем новую переменную: $x = -3y; x \to \infty; y \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{5\cdot(-3y)} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15} = \frac{1}{e^{15}}$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.1 Функция. Предел функции

Практическое занятие №18

Первый замечательный предел. Второй замечательный предел

Цель: формирование умений вычислять замечательные пределы функций.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислите пределы функций:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{\sin 3x}$;
2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin^2 2x}$;

3) $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x^3}{1-\cos^2 x}$;

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}$;

5) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{6n}$;

6) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{4n}\right)^{n^2}$.

Порядок выполнения работы:

1)Запишите задание.

2) Определите вид предела.

3) Примените формулы замечательных пределов, вычислите значение предела.

Ход работы:

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число e): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Для того что бы избавиться от неопределенности вида (1^∞). необходимо выделить целую часть дроби (которая должна быть равна 1) в выражении, стоящем под знаком предела ,которое представляет собой степенно-показательную функцию. Неопределенность устраняется при помощи выделения второго замечательного предела.

Например:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}(1+0)^\infty=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k*\frac{k}{x}}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k=\ell^k.$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n=(1^\infty)=\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^{\frac{4}{n}*n}}=\ell^{\frac{4}{n}*n}=\ell^4;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{n+2}=(1^\infty)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{\frac{4n}{3}}\right]^{\frac{3}{4n}(n+2)}=\ell^{\frac{3(n+2)}{4n}}=\ell^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n}}=\ell^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{4n}{n}}}=$
$\ell^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+0}{4}}=\ell^{\frac{3}{4}};$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}$;Данный предел можно вычислить двумя способами:

1 способ:

Разделим числитель на знаменатель выделив целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x+3 \\ x-2 \end{array} & \frac{x-2}{1} \\ \hline 5 & \end{array} \Rightarrow \frac{x+3}{x-2}=1+\frac{5}{x-2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5}{x-2}*x}=\ell^{\frac{5x}{x-2}}=\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{x-2}}=$$

$$\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}}=\ell^{\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-0}}=\ell^{5};$$

2 способ:

Поделив числитель и знаменатель дроби на x, сведем данный предел к частному пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}}=\frac{\ell^{3}}{\ell^{-2}}=\ell^{5}.$$

. 4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Введем новую переменную: $x=-3y; x\to\infty; y\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{5\cdot(-3y)}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y}=e^{-15}=\frac{1}{e^{15}}$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.1 Функция. Предел функции

Практическое занятие №19

Асимптоты функции. Точки разрыва

Цель: формирование умений проводить исследование функций на непрерывность, находить точки разрыва, составлять уравнения асимптот.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Исследовать функции на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род. Найти асимптоты функций:

1) $y = \frac{x^2}{2x-2}$

2) $y = \frac{2x^2+3}{x^2-9}$;

3) $y = \frac{2x^2-4x-30}{x^2-25}$.

Порядок выполнения работы:

1. Найти область определения функции и выявить точки разрыва.

2. Найти асимптоты функции.

Ход работы:

Непрерывность функции определяется в точках, принадлежащих области определения функции. Пусть функция *f(x)* определена в окрестности точки x_0. Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0, если:

1) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ функции *f(x)* в точке x_0;

2) этот предел равен значению функции в точке x_0.

Иначе говоря, *f* непрерывна в точке $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (1)

Непрерывность функции *f(x)* в точке x_0 означает, что в этой точке существуют односторонние пределы, равные значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)\,, \qquad (2)$$

где $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ – правосторонний предел функции f в точке x_0; $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ – левосторонний предел функции f в точке x_0; $f(x_0)$ – значение функции f в точке x_0.

Если условия (1) или (2) в точке x_0 не выполняются, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0–0)$, причем не все три числа $f(x_0+0)$, $f(x_0–0)$, $f(x_0)$ равны между собой, то x_0 называют *точкой разрыва первого рода*.

Если в точке разрыва x_0 хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0–0)$ не существует или бесконечен, то x_0 называют *точкой разрыва второго рода*.

Пример:
Исследовать функцию на непрерывность. Найти асимптоты функции.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

Область определения функции $D(f) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$

Точка $x = 1$ является точкой разрыва 2 рода, т.к.

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = -\infty \qquad \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$$

Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.2. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие №20

Дифференцирование сложных функций.

Цель: формирование умений вычислять производные сложных функций.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид функции. Если функция является сложной, то введите промежуточный аргумент.
2. Определите, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Примените соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найдите производные функций.
4. Раскройте скобки и приведите подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1-4x^2)^9 \cdot (1-4x^2)' = 10\,(1-4x^2)^9(-8x) = -80x(1-4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin\frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin\frac{1}{2}x(\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin\frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin\frac{1}{2}x(\cos 2x)'$$
$$= \cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin\frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2\sin\frac{1}{2}x \cdot \sin 2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{1}{(3+10x)\ln 2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} \ln 2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{10}{(3+10x)\ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

4.

$f(x) = \arcsin\frac{3}{5}x + \arccos 5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'.$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' =$$
$$-\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.2. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие №21

Применение производной к исследованию функций.

Цель: формирование умений исследования функций и построения графиков.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.

2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$.

$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$.

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

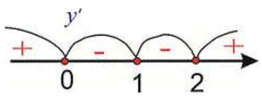
4.Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5.Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max} = 0; y_{min} = 2$.

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2 - 4x) \cdot 2(2x-2) \cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

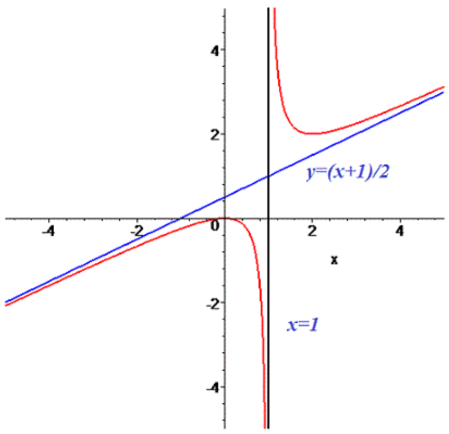
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

8.На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.2. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие №22

Применение производной к решению задач профессиональной направленности

Цель: формирование умений решать прикладные задачи на применение производной.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Прибыль фирмы зависит от объема производства x (ед.) и определяется как $y = -x^3 + 21x^2 - 72x - 150$. Найти объем производства, при котором прибыль фирмы будет максимальной.
2. Оборот предприятия за истекший год описывается через функцию $U(t) = 0{,}15t^3 - 2t^2 + 200$, где t –месяцы, U-миллионы. Исследуйте оборот предприятия.
3. Проектному дорожно-строительному бюро необходимо рассчитать размеры прямоугольной парковки для велосипедов наибольшей площади, которую следует разместить в треугольник поверхности земли.

Порядок выполнения работы:

Ход работы:

1. Прибыль фирмы зависит от объема производства x (ед.) и определяется как $y = -x^3 + 21x^2 - 72x - 150$. Найти объем производства, при котором прибыль фирмы будет максимальной.

   Решение:

   Прибыль фирмы определяется функцией $y = -x^3 + 21x^2 - 72x - 150$.

   $y' = (-x^3 + 21x^2 - 72x - 150)' = -3x^2 + 42x - 72$.

   $y' = 0;\ -3x^2 + 42x - 72 = 0$.

   $x_1 = 2;\ x_2 = 12$. _ 2 + 12 _

   Точкой максимума является $x = 12$. Значит,

   $y_{max} = y(12) = -12^3 + 21 \cdot 12^2 - 72 \cdot 12 - 150 = 282$.

   Прибыль фирмы будет максимальной.

2.Оборот предприятия за истекший год описывается через функцию $U(t) = 0{,}15t^3 - 2t^2 + 200$, где t –месяцы, U-миллионы. Исследуйте оборот предприятия.

Решение.

Исследуем оборот предприятия с помощью производной: $U'(t) = 0{,}45t^2 - 2t$

Момент наименьшего оборота при $U'(t) = 0$, т.е. при t=8,9.

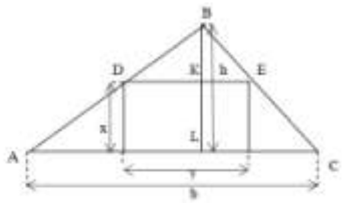
Наименьший оборот был на девятом месяце.

Первая производная показывает экстремальное изменение оборота.

Из $U''(t) = 0$ следует t=4,4.Так как $U'''(t) = 0$, то на пятом месяце имеется сильное снижение оборота. Точки перегиба важны в экономике, так как именно по ним можно определить, в какой конкретно момент произошло изменение.

Так, например, по решению предложенной задачи можно сделать выводы: В начале исследуемого периода у предприятия было снижение оборота. Предприятие пыталось выйти из этого состояния и для этого использовало определенные средства. На пятом месяце (точка перегиба) что-то было предпринято и предприятие стало выходить из кризиса, а на девятом месяце стало набирать обороты.

3.Проектному дорожно-строительному бюро необходимо рассчитать размеры прямоугольной парковки для велосипедов наибольшей площади, которую следует разместить в треугольник поверхности земли.



Обозначим высоту KL искомого прямоугольника через x, основание DE через y. Тогда площадь его $S = xy$. Переменные x и y не являются независимыми, они связаны некоторым соотношением. Действительно, из подобия треугольников DBE и ABC, учитывая, что высоты из BK и BL пропорциональны основаниям DE и AC, имеем:$\frac{BK}{BL} = \frac{DE}{AC}$, или так как BK=h-x, DE=y, BL=h, AC=b, следовательно, $\frac{h-x}{h} = \frac{y}{b}$. Отсюда $y = \frac{b}{h}(h-x)$.

$S = \frac{b}{h}(h-x)x = \frac{b}{h}(hx - x^2)$.

Ищем максимум этой функции. Дифференцируя, получим $S' = \frac{b}{h}(h-2x)$

Приравнивая производную к нулю, получим $\frac{b}{h}(h-x) = 0$ или $x = \frac{h}{2}$

Легко видеть, что это значение x действительно даст максимум функции S. В самом деле, при нахождении второй производной, получим $S'' = \frac{-2b}{h} < 0$.

Следовательно, при x=h/2 площадь S имеет максимум, причем $S_{max} = \frac{bh}{4}$.

Таким образом, площадь наибольшего прямоугольника под парковку велосипедов, равна половине площади этого треугольника.

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.3.

Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №23

Нахождение неопределенных интегралов по таблице интегралов и методом замены.

Цель: формирование умений вычислять неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования и заменой переменной.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1) $\int (8x^4 - 6x^2 + 2x - 3)dx$
2) $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2} dx$
3) $\int \cos(10x - 5)\, dx$
4) $\int 3^{4x^2} x dx$
5) $\int \frac{5dx}{25+16x^2}$
6) $\int \frac{x^2dx}{(1-2x^3)^2}$
7) $\int \frac{2x^4-4x^2-3x-1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, приведите интеграл к табличным формулам. Проинтегрируйте.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то введите новую переменную, найдите ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Найдите полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернитесь к старой переменной.

Ход работы:

Найти интегралы:

1) $\int \frac{6x^4-5x^2+3x+4}{x^2}dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx$$
$$= \int \left(\frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right) dx$$
$$= \int \left(6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2}\right) dx$$
$$= 6\int x^2 dx - 5\int dx$$
$$+ 3\int \frac{dx}{x} + 4\int x^{-2} dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3\ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 - 5x + 3\ln|x| - \frac{4}{x} + C$$

2) $\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1 - x^3 = t \\ d(1 - x^3) = dt \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\dfrac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5\int t^{-4} dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.3.

Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №24

Нахождение неопределенных интегралов методом интегрирования по частям

Цель: формирование умений вычислять неопределённые интегралы, используя метод интегрирования по частям.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int (x^2+5x+7)lnxdx$;
2) $\int e^{2x} cos3x\, dx$;
3) $\int (x^2+4x+3)e^{2x} dx$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл нельзя найти методами непосредственного интегрирования или подстановки, то примените формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dV. Затем, после нахождения dU и V, используйте формулу интегрирования по частям.

   -Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где $P(x)$- многочлен, k- число.

   Удобно положить $U = P(x)$,а все остальные множители принять за dV.

   -Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$

$\int P(x)arcctgxdx$. Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U.

- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx$, $\int e^{ax}cosbxdx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы:

3) $\int (x^3 - 4x)lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx,\ dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int\left(\frac{x^3}{4} - 2x\right)dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

4) $\int (x^2 - 2x)cos4xdx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x,\ dV = cos4xdx$.

$$dU = (2x - 2)dx, \qquad V = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x$$

$$\int (x^2 - 2x)\cos 4x\, dx = (x^2 - 2x)\frac{1}{4}sin4x - \int \frac{1}{4}sin4x(2x - 2)dx =$$

$$(x^2 - 2x)\frac{1}{4}sin4x - \frac{1}{4}\int sin4x(2x - 2)dx = \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}\int sin4x(x - 1)dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x - 1,\ dV = sin4xdx$.

$$dU = dx, \qquad V = \int sin4xdx = -\frac{1}{4}cos4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}((x - 1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int -\frac{1}{4}cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x - \frac{1}{2}((x - 1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) + \frac{1}{4}\int cos4xdx =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x + \frac{1}{8}((x - 1)(cos4x) - \frac{1}{8}\int cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x)sin4x + \frac{1}{8}((x - 1)(cos4x) - \frac{1}{32}sin4x + C$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №25

Нахождение определенных интегралов различными методами

Цель: формирование умений вычислять определённые интегралы.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_{-2}^{3}(4x^3+3x^2+2x+1)dx$

1. $\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$
2. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$
3. $\int_{-2}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}e^{sinx}\,cosxdx$
5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{dx}{sin^2\frac{x}{3}}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то необходимо вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

Ход работы:

1) $\int_{-1}^{3}(4x^3-3x^2+2x+5)dx$

$$\int_{-1}^{3}(4x^3-3x^2+2x+5)dx=4\int_{-1}^{3}x^3dx-3\int_{-1}^{3}x^2dx+2\int_{-1}^{3}xdx+5\int_{-1}^{3}dx=x^4-x^3+x^2+5x|_{-1}^{3}=$$
$$3^4-3^3+3^2+5\cdot3-(1+1+1-5)=81-27+9+15+2=80$$

2) $\int_0^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2}=\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2}==\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}x=t\\ \frac{5}{2}dx=dt\\ dx=\frac{2}{5}dt\\ x_H=0\ \ t_H=0\\ x_B=0{,}4\ \ t_B=1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt|_0^1=\frac{1}{2}(arctg1-arctg0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^3x}=\begin{bmatrix}cosx=t\\ dcosx=dt\\ -sinxdx=dt\\ sinxdx=-dt\\ x_H=0\ t_H=cos0=1\\ x_B=\frac{\pi}{3}\quad t_B=cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\int_1^{0,5}\frac{-dt}{t^3}=-\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5}=\frac{1}{2t^2}|_1^{0,5}=\frac{1}{2\cdot0{,}25}-\frac{1}{2}=2-0{,}5=1{,}5$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №26

Нахождение площадей фигур и объемов тел.

Цель: формирование умений находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Земельный участок имеет форму фигуры, ограниченной линиями. Вычислите площадь этой фигуры.

1) $y = 2x^3; y = 0; x = 0; x = 3$
2) $y = 2x^2; y = 0; x = 1; x = 3$.
3) $y = 2x; y = 0; x = 1; x = 3$.
4) $y = e^x; y = 0; x = 0; x = 2$.
5) $y = x^3; y = x^2; x = 1; x = 2$.

Порядок выполнения работы:

1. Изобразите фигуру на координатной плоскости;
2. Определите, является ли фигура криволинейной трапецией. Если не является, то определите, как ее можно представить в виде комбинации криволинейных трапеций.
3. Вычислите площадь фигуры.

Ход работы:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x)>0$ при $x\in[a;b]$. Фигура, образованная линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

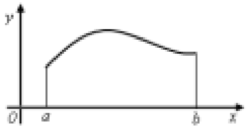


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S=\int\limits_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

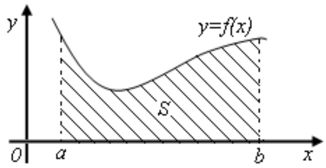


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a;b]$, то площадь S под кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$.

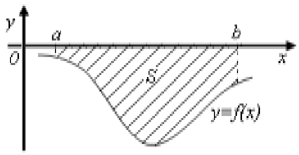


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x)\geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S=\int\limits_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$.

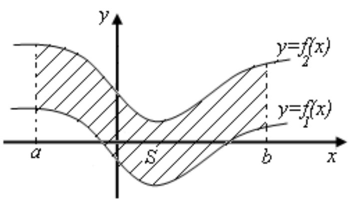
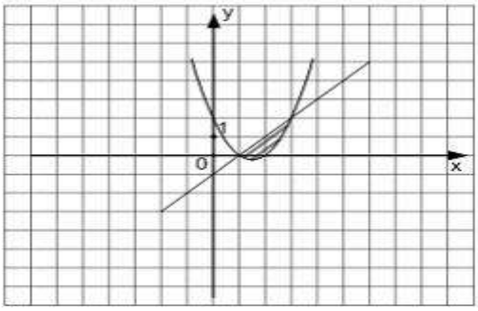


Рис. 4

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2-3x+2$ и $y=x-1$.

Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2-3x+2=x-1$. Корнями этого уравнения являются числа $x=1$ и $x=3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования.



Значит, площадь фигуры равна:

$$S=\int_1^3(x-1)dx-\int_1^3(x^2-3x+2)dx=\frac{x^2}{2}-x-(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x)=4{,}5-3-0{,}5+1-\left(\frac{27}{3}-3\cdot4{,}5+6-\frac{1}{3}+1{,}5-2\right)=1\frac{1}{3}\ (\text{кв. ед.})$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №27

Применение определенных интегралов к решению прикладных задач.

Цель: формирование умений решать задачи на применение определенных интегралов.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.
2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.
3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?
4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.
5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Пример 1. Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела v(t) = 10t + 2 (м/с).

Решение: Если v(t)=10t+2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2)dt = 5t^2 + 2t|_0^4 = 80 + 8 = 88 \text{ (м)}$$

Ответ. S = 88 (м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно, F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 5000x^2|_0^{0,05} = 12,5 \text{ (Дж)}$$

Пример 3. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/м^3. Следовательно,

$$P = 9810 \int_a^b xy\, dx = 9810 \int_a^b x\, dx = 9810 \frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5} = 9810 \frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430 \ (H).$$

Пример 4.

Масса стержня, расположенного на отрезке$[0; 6]$, если плотность задается функцией $\rho(x) = 2x^2 + 3$, равна …

В качестве модели стержня принимается отрезок $[a; b]$ на оси ОХ, длина которого совпадает с длиной стержня и в каждой точке которого задано значение плотности $\rho(x)$.

Тогда массу стержня можно вычислить по формуле $m = \int_a^b \rho(x)dx$. Используя условие задачи, получим :

$$m = \int_0^6 \left(2x^2 + 3\right)dx = \left(\frac{2x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_0^6 = \frac{2 \cdot 6^3}{3} + 18 =$$

$$= 144 + 18 = 162.$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

- Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5.1 События, комбинаторика, вероятность

Практическое занятие №28

Решение комбинаторных задач

Цель: формирование умений решать задачи на подсчет числа комбинаций.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. У риелтора в работе находится 15 объектов. Сколькими способами можно выбрать 4 объекта?
2. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов?
3. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
4. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1.Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2.Формула размещений имеет вид: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

В нашем случае $n = 4, m = 10$.

Производим расчёт $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{6!\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{6!} = 7\cdot8\cdot9\cdot10 = 5040$

3.Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

Формула сочетаний имеет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

В нашем случае n=10, m=3.

Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{7!8\cdot 9\cdot 10}{6\cdot 7!} = 120$

4.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

Формула перестановок из n–элементов имеет вид:$P_n = n!$ В нашем случае n =4.

Произведём расчёт:.$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5.1 События, комбинаторика, вероятность

Практическое занятие №29

Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики.

Цель: формирование умений решать задачи на вычисление вероятности случайных событий.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

2. Имеется 15 земельных участков, среди которых 10 находятся в одном районе. Специалист наудачу выбрал 3 участка. Какова вероятность того, что выбранные участки оказались в одном районе?

3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A)=\frac{m}{n}$.

Ход работы:

1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие А-«номер набран верно».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле$A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}$=$\frac{7!\cdot8\cdot9\cdot10}{7!}$=720. Итак, n=720
3. Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{720}$.

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие А-«оба шара окажутся чёрными».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: n= $C_{20}^2=\frac{20!}{2!(20-2)!}$=$\frac{20!}{2!\cdot18!}$=$\frac{20\cdot19\cdot18!}{1\cdot2\cdot18!}$=190.

3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!}$=$\frac{8!}{2!\cdot 6!}$=$\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!}$=28

4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

3.На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК ?

Решение.

1. Событие А-«получится слово ЗАМОК».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов (букв): n=$P_5 = 5!$=5·4· $3 \cdot 2 \cdot 1$=120.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5.2 Основные понятия мат. статистики. Выборочные ряды распределения.

Практическое занятие №30

Анализ, обработка и графическое предоставление данных.

Цель: формирование умений проводить анализ статистической информации, составлять выборки, находить их характеристики.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

.

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

.

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

.

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2= числу букв в Вашей фамилии; p_3 = числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

1 Прочитав условие предложенной задачи , по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2.Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик. выборки.

Ход работы:

1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

.

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12\,;\ w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40\,;\ w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28\,;\ w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20.$$

Следовательно,

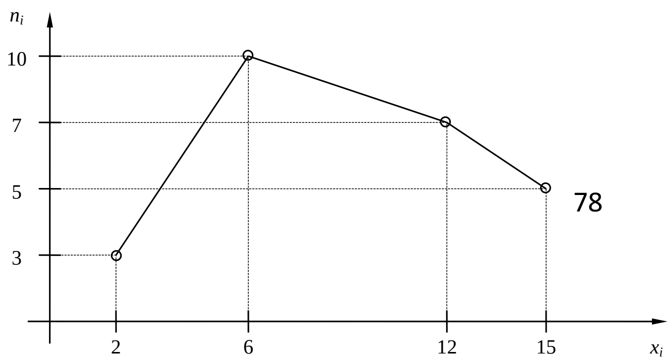
x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

.

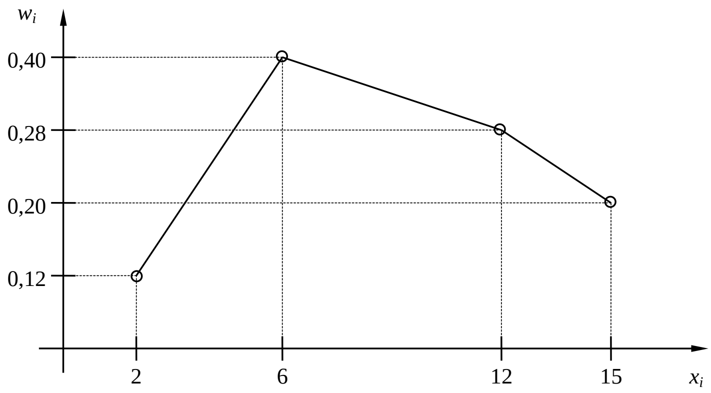
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

2. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

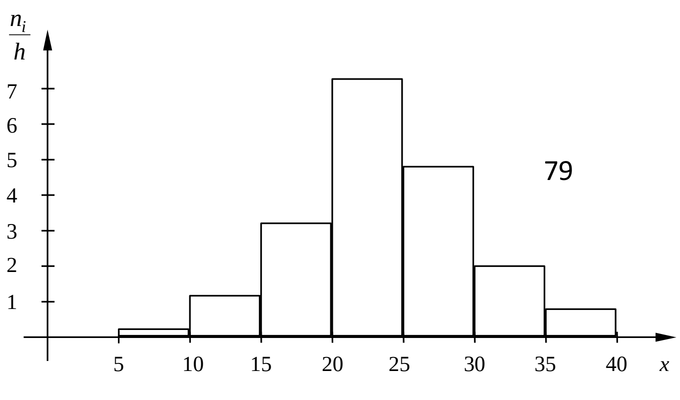
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_Г = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_Г = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_Г = \overline{X_г^2} - (\overline{X}_Г)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_Г^2} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_Г = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_Г = \sqrt{D_Г} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4{,}5.$$

Размах вариации R: в примере

$x_{max} = 6; x_{min} = 2$,

поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1{,}82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11,45 \cdot$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11,45 - 1,82^2 \cong 8,14 \cdot$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8,14} \cong 2,85.$$

Форма представления результата: работа должна быть представлена в виде выполненных вычислений.

Критерии оценки:

– Оценка «отлично» выставляется, если все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
– Оценка «хорошо» выставляется, если все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
– Оценка «удовлетворительно» выставляется, если большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
– Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.