Приложение 4.22.1 к ОПОП по специальности 23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

**для обучающихся специальности
23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям)**

Магнитогорск, 2024

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией «Математических и естественнонаучных дисциплин»	Методической комиссией МпК
Председатель Е. С. Корытникова	
Протокол № 5 от «31»января 2024г	Протокол №3 от «21» февраля 2024г.

Разработчик :
преподаватель отделения №1 "Общеобразовательной подготовки" Скачко М.П.
Многопрофильного колледжа ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям) и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

– вычислять значения геометрических величин;
– решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
– решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений.

Содержание практических занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональной компетенцией:***

ПК 2.2. Контролировать качество выполнения работ по техническому обслуживанию и ремонту подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования.

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

– обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
– формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
– формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения;
– выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся в рамках соответствующей темы, после освоения дидактических единиц, которые обеспечивают наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие №1
Дифференцирование сложных функций.

Цель работы: научиться находить производные сложных функций.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– определять этапы решения задачи
– находить производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных;
– находить производные сложных функций.
Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:
*Ток, проходящий через катушку с индуктивностью **L**, изменяется по закону **i (t)**.*
*Найти ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке в момент **t**, если индуктивность катушки определяется по формуле* $L=\frac{\Phi w}{i}$, *где **Ф** – магнитный поток, создаваемый катушкой, имеющей **w** витков, а среднее значении ЭДС самоиндукции за время **Δt** равно* $-w\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, *где **ΔФ** – изменение магнитного потока за это время .*

Найти производные функций
1. $y=(5x^3-2x)^6$
2. $f(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{4})$
3. $f(x)=arcsin4x+arccos^2x$
4. $f(x)=log_5(7x^4-5x^3+1)$
5. $f(x)=ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:
1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x)=(1-4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u=1-4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$

$$y'=10(1-4x^2)^9\cdot(1-4x^2)'=10\,(1-4x^2)^9(-8x)$$
$$=-80x(1-4x^2)^9$$

2. $f(x)=\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x)$$
$$\cdot (2x)' = \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(a^u)' = a^u lna \cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)\,ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$
$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)\,ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

/

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных   обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования$(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
$(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент
$u = 1 - e^{2x}$
Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})'$$
$$= -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x)$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.1 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 2
Применение производной к исследованию функций.

Цель работы: научиться исследовать функции с помощью производной и строить графики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
– определять промежутки монотонности функций с помощью производной;
– находить экстремумы функции;
– проводить исследование функции по общей схеме;
– строить графики функций, используя проведенное исследование.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

Через алюминиевую шину прямоугольного сечения длины **l** пропускают ток силой 160А и плотностью $1\frac{A}{мм^2}$. Чтобы шина не перегрелась, теплоотдача должна быть как можно больше, т.е. шина должна иметь боковую поверхность. Найти размеры сечения шины, при которых боковая поверхность шины максимальна, если по конструктивным соображениям требуется, чтобы толщина шины заключалась в пределах от 4 до 8 мм.

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функцииD (y).
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат (при x = 0 и при y = 0).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

<u>Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной</u>

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную .
2. Находим точки, в которых $f''(x)=0$ или не существует.
3. Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = y_0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ равно y_0 .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.

2. Построить график функции.

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

1. Область определения функции $D(y): (-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. При подстановке значения $x=0$ получим $y(0) = \frac{0}{2(0-1)} = 0$.

Такую же точку получим если приравняем функцию к нулю. Точка $x=0$- единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\frac{x^2}{2(x+1)};$$

$$y(-x)\neq y(x),\quad y(-x)\neq -y(x).$$

Итак функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции $y'=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$

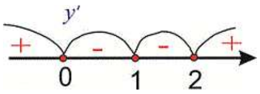
Приравнивая ее к нулю получим точки подозрительные на экстремум $x=0, x=2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения

$$y'(-1)=\frac{-1(-1-2)}{2(-1-1)^2}=\frac{1}{4}>0;\; y'(0.5)=\frac{0.5(0.5-2)}{2(0.5-1)^2}=-1.5<0;$$

$$y'(1.5)=\frac{1.5(1.5-2)}{2(1.5-1)^2}=-1.5<0;\; y'(3)=\frac{3(3-2)}{2(3-1)^2}=\frac{3}{8}>0.$$

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty;0),(2;+\infty)$ и убывает $(0;1),(1;2)$.

Точка $x=0$ – точка локального максимума, $x=2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{\max}=0,\; y_{\min}=\frac{2^2}{2(2-1)}=2.$

5. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

6. Точка $x=1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$.

Находим нужные границы

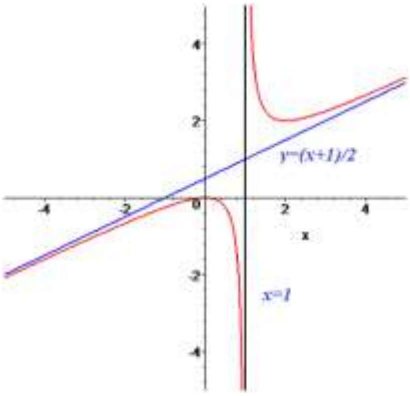
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}==\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

Конечный вид прямой следующий

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

7. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 3
Методы вычисления неопределенных интегралов. Метод замены.

Цель: научиться интегрировать функции, используя метод замены переменной.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- вычислять значения геометрических величин;
-решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
На зажимах цепи действует одиночный импульс напряжения. Требуется с помощью интеграла Дюамеля определить переходный ток в одной из ветвей заданной цепи, возникающий при действии импульса напряжения и рассчитанного переходного тока.

Найти неопределенные интегралы, используя метод замены переменной:

а) $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$;

б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$;

г) $\int \sqrt[5]{3x+2}dx$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным.

Ход работы:

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *y = f (x)* в промежутке *[a ; b],* если в любой точке этого промежутка её производная равна *f (x).*

Отыскание первообразной функции по заданной её производной *f (x)* или по дифференциалу *f (x) dx*есть действие, обратное дифференцированию - интегрирование.

При нахождении неопределенных интегралов используют свойства интегралов и таблицу.

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$ гдеC – произвольное число;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)d(x)$, где α – некоторое число;

5) интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$;

2. $\int dx = x + C$;

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;

11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$

$-a < x < a,\ a > 0;$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

6. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0$;

14. $\int e^x dx = e^x + C$;

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(x)$ – функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример. Найти интегралы:

1) $\int \frac{15x^2dx}{(1-x^5)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

2) $\int (2x^3+1)^5 x^2dx$

$$\int (2x^3+1)^5 x^2dx = \left| \begin{matrix} t = 2x^3+1 \\ dt = 6x^2dx \\ \frac{dt}{6} = x^2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{6}\int t^5dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^6}{6} + C = \frac{(2x^3+1)^6}{36} + C;$$

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 4
Применение формулы Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона – Лейбница
- структурировать получаемую информацию

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

1. 1. $\int_2^4 (x^3 - 3x)dx$.

2. $\int_0^1 (2x + e^x)dx$

.

3. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

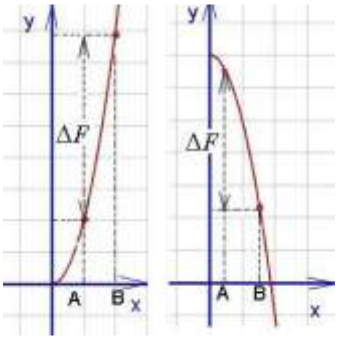
Порядок выполнения работы:

Экспериментально установлено, что продуктивность труда работника приближенно выражается формулой: f(t)= -0,0033t^2 -0,089t+ 20,96, где t- рабочее время в часах. Вычислить объем выпуска продукции за квартал, считая рабочий день 8-часовым, а количество рабочих дней в квартале- 62.

1. Найти первообразную подынтегральной функции.
2. Воспользоваться формулой Ньютона- Лейбница.
3. В случае непосредственного интегрирования найти приращение первообразной.

Ход работы:

Определённым интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись



$$\int_a^b f(x)dx.$$

Как видно на графиках внизу (приращение первообразной функции обозначено ΔF), **определённый интеграл может быть как положительным, так и отрицательным числом** (Вычисляется как разность между значением первообразной в верхнем пределе и её же значением в нижнем пределе, т. е. как $F(b)$ - $F(a)$).

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования.

Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница.

Разность $F(b) – F(a)$ кратко записывают так:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Поэтому формулу Ньютона-Лейбница будем записывать и так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Докажем, что определённый интеграл не зависит от того, какая первообразная подынтегральной функции взята при его вычислении. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ – произвольные первообразные подынтегральной функции. Так как это первообразные одной и той же функции, то они отличаются на постоянное слагаемое: $\Phi(x) = F(x) + C$. Поэтому

$$\Phi(b) - \Phi(a) =$$
$$= \left[F(b) + C\right] - \left[F(a) + C\right] = F(b) - F(a).$$

Тем самым установлено, что на отрезке $[a, b]$ приращения всех первообразных функции $f(x)$ совпадают.

Таким образом, для вычисления определённого интеграла необходимо найти любую первообразную подынтегральной функции, т.е. сначала следует найти неопределённый интеграл. Постоянная C из последующих вычислений исключается. Затем применяется формула Ньютона-Лейбница: в первообразную функцию подставляется значение верхнего предела b, далее - значение нижнего предела a и вычисляется разность $F(b)$ - $F(a)$. Полученное число и будет определённым интегралом..

При $a = b$ по определению принимается

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Пример 1**.** Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\ dx.$$

Решение: сначала найдём неопределённый интеграл:

$$\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{1/3}dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к первообразной

$$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$$

(при $C = 0$), получим

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\ dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}\bullet 8\sqrt[3]{8} - 0 = 12.$$

Однако при вычислении определённого интеграла лучше не находить отдельно первообразную, а сразу записывать интеграл в виде (39).

Пример 2. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 e^{2x}dx.$$

<u>Решение</u>: используя формулу

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,$$

получим

$$\int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1).$$

Свойства определённого интеграла

1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю*, т.е.

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0.$$

2. *Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования,* т.е.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

4. *Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\,dx\right] =$$

$$= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b \varphi(x)\ dx - \int_a^b \psi(x)\ dx.$$

5. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям*, т.е. если

$c \in [a,b]$,

то

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

6. *При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак*, т.е.

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Пример 3. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right)dx.$$

Решение : используя теоремы 4 и 3, а при нахождении первообразных – табличные интегралы (7) и (6), получим

$$\int_1^2\left(\frac{4}{x}-5x^4+2\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=4\int_1^2\frac{dx}{x}-5\int_1^2 x^4dx+2\int_1^2\sqrt{x}\;dx=$$

$$=4\ln|x|\Big|_1^2-5\frac{x^5}{5}\Big|_1^2+2\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2=$$

$$=4(\ln 2-\ln 1)-\left(2^5-1^5\right)+\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\sqrt{1}\right)=$$

$$=4\ln 2+\frac{8}{3}\sqrt{2}-32\frac{1}{3}.$$

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 5

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять этапы решения задачи
- вычислять значения геометрических величин
- выполнять точные расчеты площадей фигур неправильной формы

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Вычислите количество электричества, протекшего по проводу за промежуток времени [3:4], если сила тока задается формулой $I(t)=3t^2-2t$

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

a) $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 1, x = 4$;

b) $y = \ln x, y = 0,\ x = 1, x = e$;

c) $y^2 = x^3; x = 4$.

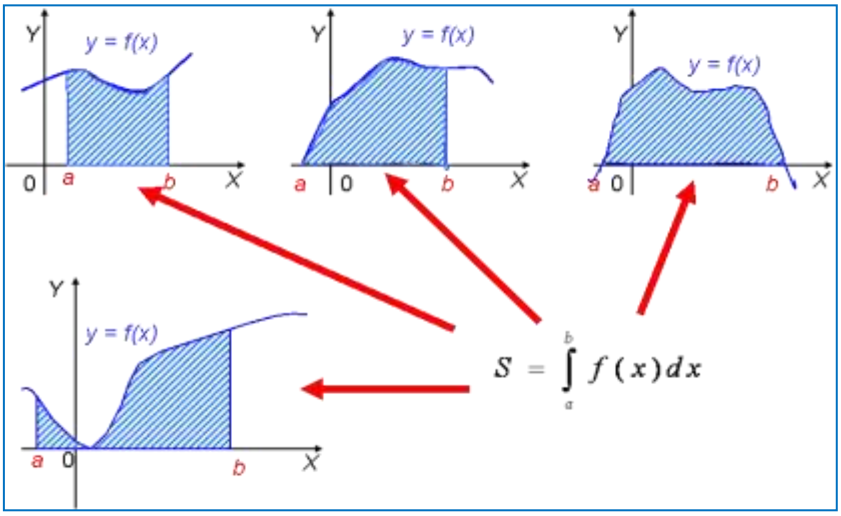
Порядок выполнения работы:

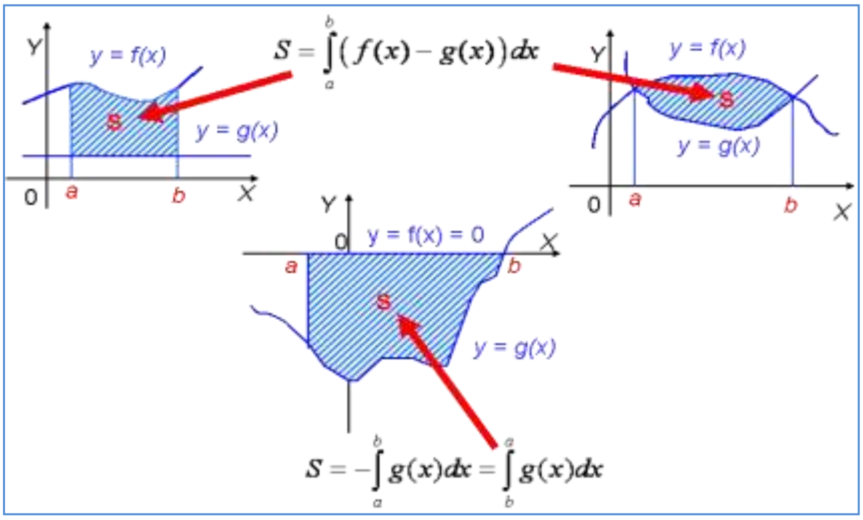
1 . Прочитать задачу и определить способ ее решения.

2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.

3. Записать ответ.

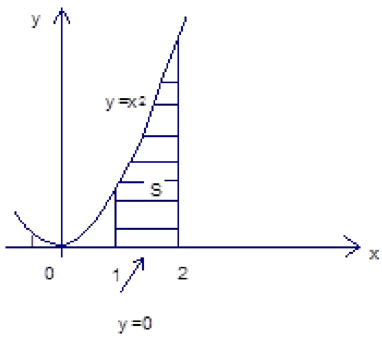
Ход работы:





Пример 1.
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2.$

Решение. Построим фигуру на координатной плоскости. Вот искомая площадь:



$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:

Пределы интегрирования $a = 1, b = 2, f(x) = x^2$.

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}.$$

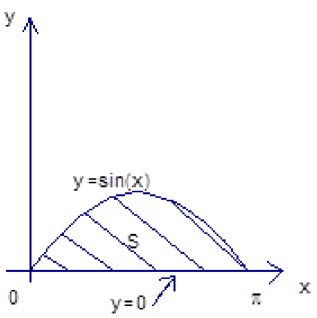
Ответ: $\frac{7}{3}$

Пример 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x\,, y = 0, x = 0,\ x = \pi.$

Решение: Построим фигуру на координатной плоскости.

Фигура, ограниченная линиями $y = \sin x\,, y = 0, x = 0,\ x = \pi$



Формула та же самая: $S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

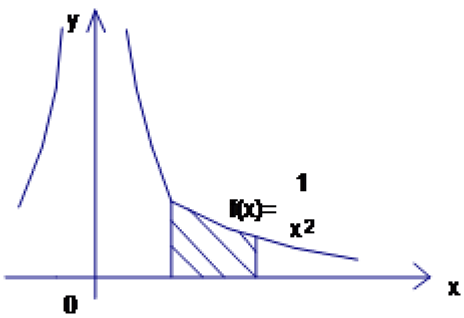
В нашем случае $a = 0, b = \pi, f(x) = \sin x$. Итак, надо найти определенный интеграл

$S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = (-\cos x)|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0)$=-(-1)+1=1+1=2.

Искомая площадь найдена, и ответ получен.

Ответ: 2

Пример 3. ***Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1,\ x = 2.$



Решение. Построим фигуру на координатной плоскости.

Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1,\ x = 2$

Формула для площади та же самая: $S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

В нашем случае $a = 1, b = 2, f(x) = \frac{1}{x^2}$

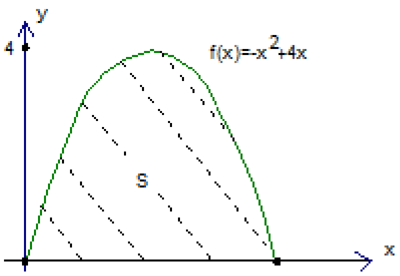
$S = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{(-1)}\,|_1^2 = -\frac{1}{x}\,|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$

Пример 4. ***Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y = -x^2 + 4x, y = 0.$

Решение. Схематически изобразим параболу $y = -x^2 + 4x$. Корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

Парабола $y = -x^2 + 4x$



Применим известную формулу $S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

И применим ее для данной функции $y = -x^2 + 4x$ и пределов интегрирования

$a = 0, b = 4.$

$S = \int_0^4(-x^2 + 4x)dx = (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2)|_0^4 = (-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2)|_0^4 = (-\frac{4^3}{3} + 2*4^3) - 0 = \frac{-64+96}{3} = \frac{32}{3}$. Искомая площадь найдена. $S = \frac{32}{3}$.

Ответ: $\frac{32}{3}$

В предыдущих задачах площадь образовывалась с помощью разных кривых, но эта площадь находилась над осью x. В следующей задаче наоборот.

Пример 5. ***Случай, если фигура находится под осью: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y = \sin x, y = 0, x\epsilon[\pi, 2\pi]$.

Решение. Посмотрим, что это за фигура. График $y = \sin x$ в пределах от π до 2π расположен под осью Ox.

1. Сначала вычисляем определенный интеграл от π до 2π от подынтегральной функции $y = \sin x$.

Надо найти первообразную.

По таблице первообразных: $\int \sin x dx = -\cos x + c$.

$S = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = (-\cos x)|_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi)$=-1-1=-2.

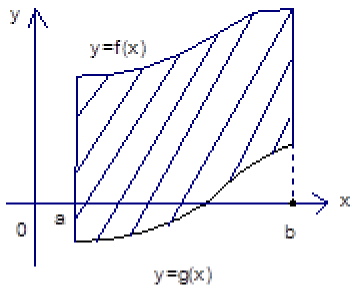
2. Для того чтобы найти площадь, надо взять модуль $S = |-2|$=2.

Ответ: 2.

Пример 6**.** *Общий случай для нахождения площади плоской фигуры, ограниченной двумя кривыми***.**

Следующее усложнение – искомая площадь расположена между двумя кривыми. А именно: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = f(x), y = g(x), x = a, x = b, g(x) \le f(x)$.

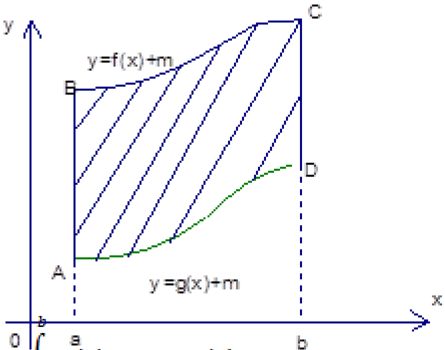


Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b, g(x) \le f(x)$

Решение. Итак, площадь образуют 2 кривые, одна из них может находиться под осью Ox.

Каким образом мы будем решать эту задачу?

Во-первых, мы можем сдвинуть фигуру на такое положительное m, что площадь находится над осью x.



Сдвиг фигуры, затем мы возьмем соответствующий определенный интеграл и найдем площадь. Искомая площадь равна разности двух площадей.

Площадь под верхней кривой $y = f(x)$ минус площадь под нижней кривой $y = g(x)$.

Каждую из площадей мы умеем находить.

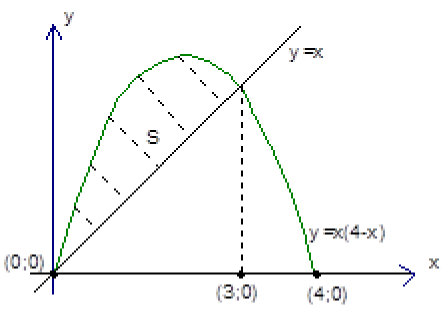
$$S = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)\,dx = \int_a^b (f(x) + m - g(x) - m)dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Пример 6. ***Найти площадь фигуры, ограниченную линиями***

$y = -x^2 + 4x$ и $y = x$.

Решение. Для начала построим графики этих линий и поймем, где та площадь, которую нам надо искать. График квадратичной функции – парабола. Корни – 0, 4, ветви вниз. График прямой $y = x$ – биссектриса первого координатного угла. Вот площадь, которую надо найти: Но для этого сначала надо найти точки пересечения и решить стандартную задачу.



1. Находим точки пересечения. Для этого решаем систему:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = x \end{cases}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно x:

$-x^2 + 4x = x$

$x^2 - 3x = 0$

$x = 0, x = 3$

Мы нашли *x*, то есть, пределы интегрирования. Это первое важное действие. Теперь стандартное действие:

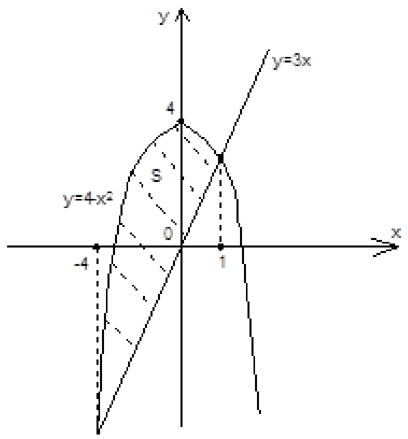
2. $S = \int_0^3(-x^2 + 4x - x)dx = \int_0^3(-x^2 + 3x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big|_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3*3}{2}\right) - 0 == 27\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 27\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{9}{2}$

Ответ: 4,5

Пример 7. *Случай, когда часть площади плоской фигуры лежит под осью.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = 4 - x^2, y = 3x$

<u>Решение.</u> Сначала построим графики, посмотрим, какую площадь нам нужно найти. Первая функция – парабола, ветви вниз. График второй функции – прямая линия. Есть две точки пересечения, их придется найти, а именно взять пределы интегрирования, и тогда будем решать задачу по знакомому нам плану.



Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2, y = 3x$

Первое действие – найти пределы интегрирования и второе – найти площадь.

Пределы интегрирования найдем из системы $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x \end{cases}$.

$3x = 4 - x^2$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$x = -4, x = 1$

То есть, пределы интегрирования найдены.

$S = \int_{-4}^1(4 - x^2 - 3x)dx = 4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\Big|_{-4}^1 = \left(4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(-16 + \frac{64}{3} - \frac{3*16}{2}\right) =$

$= (4 + 16 + 24) - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{44*6 - 65*2 - 3*3}{6} = \frac{164 - 139}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$

Ответ: $20\frac{5}{6}$

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическое занятие № 6
Физические приложения определенного интеграла.

Цель работы: научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

Задание:

1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.
2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.
3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?
4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.
5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е . $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что dS = v(t)dt. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$

Пусть материальная точка перемещается вдоль оси ох под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно оси. Тогда работа, произведённая силой F при перемещении точки из положения $x = a$ в положение $x = b\ (a < b)$ вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

Вычисление работы с помощью определённого интеграла.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка М движется по прямой в направлении оси OX. Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки М из положения $x = x_1$ в положение $x = x_2$.

1) Если сила постоянна $f(x) = C$, то работа выражается следующим образом $A = C(x_2 - x_1)$.
2) Если сила переменная величина, то $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила Р давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле:

$P = 9{,}81\gamma hS$ (4), где γ – плотность жидкости.

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\, dx \ (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то a=0 и формула (5) примет вид

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\, dx \ (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\, dx = 9{,}81\gamma y \int_a^b x\, dx = 9{,}81\gamma y \frac{x^2}{2} \int_a^b = 9{,}81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Пример 1. Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела v(t) = 10t + 2 (м/с).

Решение: Если v(t)=10t+2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2)\, dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (м).$$

Ответ. S = 88 (м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно,F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0{,}05} 10000x\, dx = 5000x^2\Big|_0^{0{,}05} = 12{,}5 \ (Дж).$$

Пример 3. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/$м^3$. Следовательно,

$$P = 9810 \int_a^b xy\, dx = 9810 \int_a^b x\, dx = 9810 \frac{x^2}{2}\Big|_{0{,}5}^{2{,}5} = 9810 \frac{2{,}5^2 - 0{,}5^2}{2} = 29430 \ (H).$$

Выполнить задания:

1. Найти работу производимую при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия её на 0,005 м нужно приложить силу в 10 Н.

Ответ: 0,9 Дж.

2. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3 Н. Найти работу, которую надо произвести, чтобы растянуть эту пружину на 0,05 м

Ответ: 0,075 Дж.

3. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0;3]$, если плотность задается функцией $\rho(x) = x^4 - 3x$, равна …

4. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

Ответ: 125 Дж.

5. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины на 15 см, если известно, что для сжатия пружины на 1 см необходима сила в 30 Н.

Ответ: 33,75 Дж.

6. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины а 0,08 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна Сида в 25 Н.

Ответ: 8 Дж.

7. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t^2 - t + 1$ (м/с). Найти путь, пройденный за первые 3 с.

Ответ: 16,5 м.

8. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t + a$ (м/с). найти значение параметра a, если известно, что за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ (с) тело прошло путь длиной 40 м.

Ответ: $a = 18$.

9. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 12t - t^2$ (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала пути, до его остановки.

Указание: в моменты начала и остановки скорость тела равна нулю.

Ответ: 288 м.

10. Найти путь, пройденный точкой за третью секунду, зная скорость её прямолинейного движения $v(t) = 3t^2 - 2t - 3$ (м/с).

Ответ: 11 м.

11. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. одно тело двигалось со скоростью $v_1(t) = 3t^2 + 2t$ (м/с), другое со скоростью $v_2(t) = 2t$ (м/с). определить расстояние между телами через 2 секунды.

Ответ: 8м.

12. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0;2]$, если плотность задается функцией $\rho(x) = 6x^2 - 3x$, равна …

13. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (3t^2 + 8t)$. Тогда путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = 1$ до $t = 4$, равен …

14. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой $v(t) = (12t - 3t^2)$ (м/с). Тогда длина пути, пройденного телом от начала его движения до остановки, равна …

Пример 4.1. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

По закону Гука упругая сила F, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т.е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. По условию сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м, т.е. $100 = k \cdot 0{,}01 \Rightarrow k = 10000$. Тогда $F = kx = 10000x$.

Вычислим работу:

$$A=\int_0^{0,05}10000xdx=10000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,05}=5000x^2\Big|_0^{0,05}=5000\cdot 0,05^2=12,5 \text{ (Дж)}$$

Определённый интеграл применяют для вычисления пути S прямолинейного движения.

Путь S, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t=a$ до $t=b$, равен определённому интегралу от скорости $v(t)$:

$$S=\int_a^b v(t)dt$$

Пример 4.2. Вычислить путь, пройденный точкой за 4 секунды от начала движения, если скорость точки $v=2t+4$ (м/с).

По условию: $v(t)=2t+4, a=0, b=4$.

Тогда $S=\int_0^4(2t+4)dt=2\frac{t^2}{2}\Big|_0^4+4t\Big|_0^4=4^2+4\cdot 4=32$ (м/с).

Пример 4.3. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0;6]$, если плотность задается функцией $\rho(x)=2x^2+3$, равна …

В качестве модели стержня принимается отрезок $[a;b]$ на оси OX, длина которого совпадает с длиной стержня и в каждой точке которого задано значение плотности $\rho(x)$. Тогда массу стержня можно вычислить по формуле $m=\int_a^b \rho(x)dx$.

Используя условие задачи, получим $m=\int_0^6(2x^2+3)dx=\left(\frac{2x^3}{3}+3x\right)\Big|_0^6=\frac{2\cdot 6^3}{3}+18=$ $=144+18=162.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1. Элементы комбинаторики.

Практическое занятие № 7
Решение задач на основные понятия комбинаторики

Цель работы: осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:
1. В соревнованиях участвует команда электриков из10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из бригады электриков, которая состоит из 12 человек, необходимо выбрать 3 человека на устранение аварии. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На полке шкафа выставлены 8 журналов различных направлений учета. Сколько способов имеется для расстановки этих журналов в разном порядке?

Порядок выполнения работы:
1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1.Правило сложения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами, а другой элемент $B - n$ способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов(либо A, либо B) можно осуществить $m+n$ способами.

2.Правило умножения. Если некоторый элемент А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача1. При формировании экипажа космического корабля имеется:10 претендентов на пост командира,20 претендентов на пост бортинженера,25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Решение. По правилу суммы существует 10+20+25=55способов выбора одной из кандидатур.

Задача2.В столовой предлагают два различных первых : a_1 и a_2 ;три различных вторых блюда: b_1, b_2, b_3 и два различных десерта: c_1 и c_2 . Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

Решение. Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует $2 \times 3 \times 2 = 12$ способов выбрать обед из трех блюд.

3. Подмножества n- множеств(соединения).

Для нахождения $k-$подмножеств некоторого $n-$множества нужно выбрать k из n его элементов (поэтому часто говорят о *выборке* k элементов из $n-$элементов). Про выбранные k из n различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из n элементов по k. *Соединение*-собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений: ***перестановки, размещения, сочетания.***

Перестановки.

Перестановками из $n-$элементов называются такие соединения из $n-$элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n\,!$

Размещения.

Размещениями из $n-$элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных $n-$элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем , и другим.

Обозначение $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из $n-$элементов по $n-$элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

Сочетания.

Сочетаниями из n- элементов по mназываются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1.Возможных цифр всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2.Формула размещений имеет вид: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4\,, m = 10$.

3. Производим расчёт : $A_{10}^4 = \frac{10\,!}{(10-4)\,!}$=$\frac{10!}{6!}$=$\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$=$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

3 . Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!}$=$\frac{10!}{3!7!}$=$\frac{7!\cdot8\cdot9\cdot10}{3\cdot2\cdot1\cdot7!}$ =120.

3.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

1.По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2.Формула перестановок из n –элементов имеет вид: $P_n = n!$ В нашем случае n =4.

3.Произведём расчёт: P_4 =4!=4$\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$=24.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 8
Числовые характеристики выборки

Цель работы: рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.
Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– находить статистические характеристики выборки
– оформлять результаты поиска
Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.
Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$

4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p$	p_2	$2p$	p	$2p$	$2p$

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4.Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x	2	4	6	8	10	12	14
n	p_2	$2p$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени;p_2= числу букв в Вашей фамилии;p_3= числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

1 Прочитав условие предложенной задачи , по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2.Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик. выборки.

Ход работы:

1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	1	1
n_i	3	1	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12\,;\; w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40\,;\, w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28\,;\, w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20\,.$$

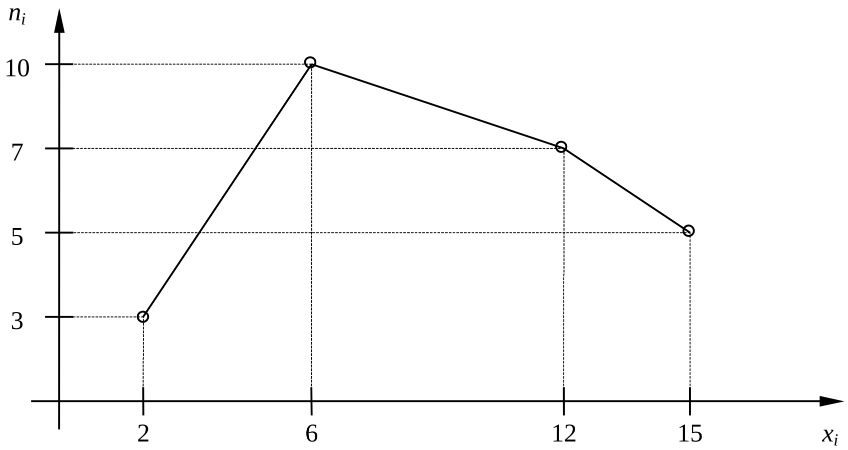
Следовательно,

x_i	2	6	12	15
w_i	0,1	0,4	0,2	0,2

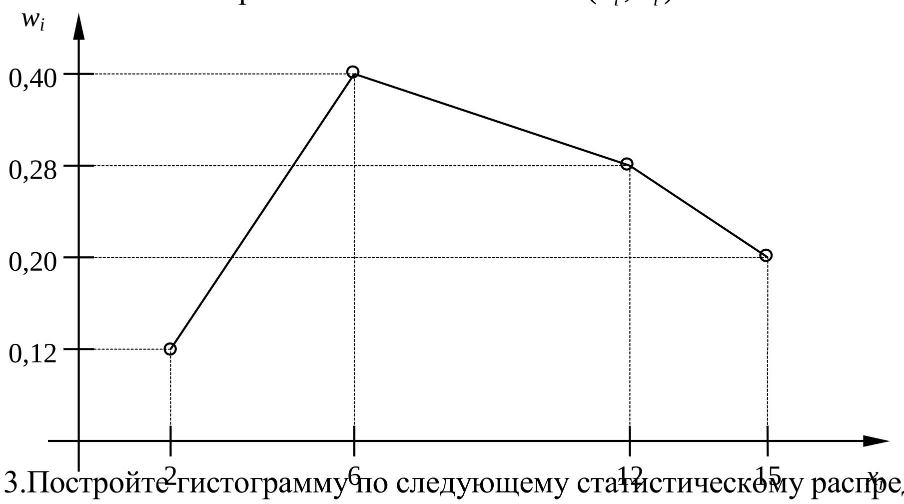
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

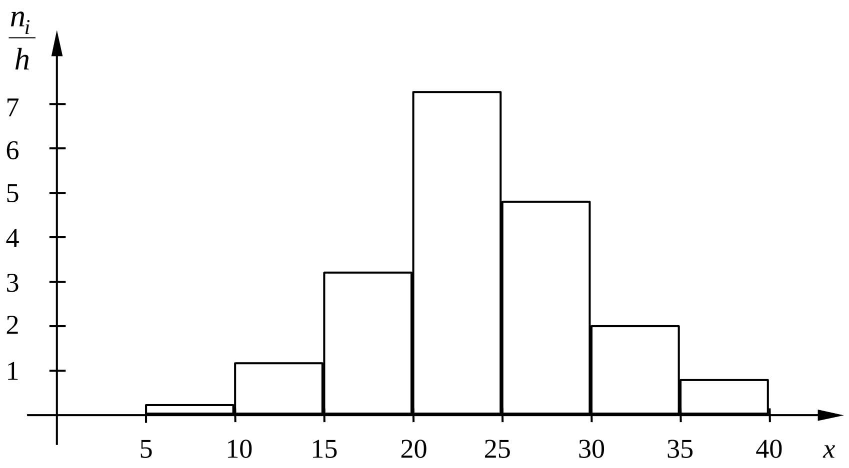
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_{\Gamma} = \overline{X^2_{\Gamma}} - \left(\overline{X}_{\Gamma}\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2_{\Gamma}} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_Г = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_Г = \sqrt{D_Г} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4{,}5.$$

Размах вариации R: в примере $x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$, поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1{,}82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11{,}45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.