

*Приложение 4.23.1 к ОПОП по специальности  
43.02.15 Поварское и кондитерское дело*

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ  
ЕН.02 Математика**

**для обучающихся специальности  
43.02.15 Поварское и кондитерское дело**

Магнитогорск, 2024

## **ОДОБРЕНО**

Предметной комиссией  
«Математических и естественнонаучных дисциплин»  
Председатель Е.С.Корытникова  
Протокол № 5 от «31»января 2024г

Методической комиссией МпК  
Протокол № 3 от «21» февраля 2024г.

### **Составитель:**

преподаватель отделения №1 "Общеобразовательной подготовки" Многопрофильного колледжа ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» Юлия Федоровна Сивилькаева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.02«Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 43.02.15 «Поварское и кондитерское дело» и овладению профессиональными компетенциями.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ .....	4
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	6
Практическое занятие №1 .....	6
Практическое занятие №2.....	8
Практическое занятие №3.....	12
Практическое занятие №4.....	14
Практическое занятие №5.....	18
Практическое занятие №6.....	22
Практическое занятие №7.....	23
Практическое занятие №9.....	28
Практическое занятие №10.....	30
Практическое занятие №11.....	32
Практическое занятие №12.....	34
Практическое занятие №13.....	36
Практическое занятие №14.....	39

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике)необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

**уметь:**

- У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- Уо01.03 определять этапы решения задачи;
- Уо01.08 реализовать составленный план;
- Уо02.03 планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию;
- Уо02.06 оформлять результаты поиска

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 1.4 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур полуфабрикатов с учетом потребностей различных категорий потребителей, видов и форм обслуживания;

ПК 2.8 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур горячих блюд, кулинарных изделий, закусок, в том числе авторских, брендовых, региональных с учетом потребностей различных категорий потребителей, видов и форм обслуживания;

ПК 3.7 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур холодных блюд, кулинарных изделий, закусок, в том числе авторских, брендовых, региональных с учетом потребностей различных категорий потребителей, видов и форм обслуживания;

ПК 4.6 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур холодных и горячих десертов, напитков, в том числе авторских, брендовых, региональных с учетом потребностей различных категорий потребителей, видов и форм обслуживания;

ПК 5.6 - Осуществлять разработку, адаптацию рецептур хлебобулочных, мучных кондитерских изделий, в том числе авторских, брендовых, региональных с учетом потребностей различных категорий потребителей;

ПК 6.2 - Осуществлять текущее планирование, координацию деятельности подчиненного персонала с учетом взаимодействия с другими подразделениями;

ПК 6.3 - Организовывать ресурсное обеспечение деятельности подчиненного персонала;

ПК 6.4 - Осуществлять организацию и контроль текущей деятельности подчиненного персонала.

**А также формированию общих компетенций:**

- ОК 01** Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам
- ОК 02** Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и

информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

## 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

### Тема 1.1 Предел функции. Непрерывность функции

#### Практическое занятие №1

#### Вычисление пределов

**Цель:** Научиться вычислять пределы функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

По выполнению задания технологической карты требуется вычислить пределы функций:

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

**Ход работы:**

Найти предел функции:

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$$

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right)^3 - 10 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = 2 \cdot 8 - 10 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 5 = -27$$

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке  $x = 3$ . Поэтому сначала преобразуем данную функцию. Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad \text{где } x_1 \text{ и } x_2 \text{ корни квадратного трехчлена.}$$

Корнями квадратного трехчлена  $3x^2 - 11x + 6$  являются числа  $\frac{2}{3}$  и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3(x - 3)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

А корни квадратного трехчлена  $2x^2 - 5x - 3$  равны  $\frac{1}{2}$  и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x - 3\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x - 3)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{2(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 3} x - 2}{2 \lim_{x \rightarrow 3} x + 1} = \frac{3 \cdot 3 - 2}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{7}{7} = 1 \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2}$$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к  $\infty$ , то получаем неопределенность вида  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ . Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя

на  $x^4$ . Тогда получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{11x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} - \frac{6x}{x^4} + \frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} - \frac{8x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{11}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{6 - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Умножим числитель и знаменатель дроби на  $\frac{1}{2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2} x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . Введем новую переменную:  $x = -3y$ ;  $x \rightarrow \infty$ ;  $y \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{-3y}\right)^{5 \cdot (-3y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15} = \frac{1}{e^{15}}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

## Тема 1.2 Основы дифференциального исчисления

### Практическое занятие №2

#### *Правила дифференцирования. Техника дифференцирования*

**Цель работы:** Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций.

#### **Выполнив работу, Вы будете уметь:**

У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;  
Уо02.03 планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию;  
Уо02.06 оформлять результаты поиска

#### **Материальное обеспечение :**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.  
Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

#### **Задание:**

**По выполнению задания технологической карты требуется найти значение производной данной функции в данной точке.**

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 1) $y = 2x^2 - 3x + 5, x = 0$                 | 16) $y = (x - 3x^2 + 5)^3, x = 0;$  |
| 2) $y = 7x^3 - 6 + 3x^2, x = 0;$              | 17) $y = (7x - 1 + 4x^3)^5, x = 0;$ |
| 3) $y = 12 - 3x^3 + 2x^2, x = 0;$             | 18) $y = (x^3 + 1)^2, x = 0;$       |
| 4) $y = x^3 - 4x^2 + x, x = 0;$               | 19) $y = (1 - 2x)^7, x = 0;$        |
| 5) $y = 21x + 3x^5 + 7x^2 - 5, x = 0;$        | 20) $y = (4x + 5x^2 - 7)^2, x = 0;$ |
| 6) $y = x^3 \cdot 3x^{0.5}, x = 1;$           | 21) $y = \sqrt{x + 1}, x = 0;$      |
| 7) $y = (x + 1) \cdot 2x^3, x = 1;$           | 22) $y = \sqrt{2x^2 + 3}, x = 0;$   |
| 8) $y = 4x \cdot (7x^2 + 5), x = 1;$          | 23) $y = \sqrt{4 - 7x^2}, x = 0;$   |
| 9) $y = (2x^2 + 3x) \cdot (x - 1), x = 1;$    | 24) $y = \sqrt{3x^3}, x = 1;$       |
| 10) $y = (6x - 3x^2) \cdot (x^2 + 2), x = 1;$ | 25) $y = \sqrt{2x^5}, x = 1;$       |
| 11) $y = \frac{x + 1}{x^2}, x = 1;$           | 26) $y = \frac{1}{x + 1}, x = 0;$   |
| 12) $y = \frac{x}{x - 1}, x = 0;$             | 27) $y = \frac{1}{3 - 2x}, x = 0;$  |

$$13) y = \frac{2x^2}{3x+5}, x=0;$$

$$14) y = \frac{7-2x}{x^3}, x=1;$$

$$15) y = \frac{7x}{3-2x^2}, x=0;$$

$$28) y = \frac{1}{4x-3x^2}, x=1;$$

$$29) y = \frac{1}{5x^3+3}, x=0;$$

$$30) y = \frac{1}{6-7x^2}, x=0.$$

### Найти производные сложных функций:

$$1. y = (5x^3 - 2x)^6$$

$$2. f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$3. f(x) = \arcsin 4x + \arccos^2 x$$

$$4. f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$$

$$5. f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

### Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

### Ход работы:

**Определение:** Производной функции  $f(x)$  ( $f'(x_0)$ ) в точке  $x_0$  называется число, к которому стремится разностное отношение  $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , стремящемся к нулю.

### Производные элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
$c - \text{const}$	0
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

### Правила дифференцирования

Если у функций  $f(x)$  и  $g(x)$  существуют производные, то

$$1) (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$2) (cf(x))' = c \cdot f'(x), \text{ где } c - \text{const}$$

$$3) (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$4) \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Найти производные функций:

$$1. g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент  $u = 1 - 4x^2$ . Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой  $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

$$2. f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции  $u = \frac{1}{2}x$ , для второй функции  $u = 2x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ ,  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' \\ &= \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

$$3. y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции  $u = 3x + 5x^2$ , для второй функции  $u = 3 + 10x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ ,  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \\ &= \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x) \ln 2} (3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} = \\ &= \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x) \ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}. \end{aligned}$$

$$4. f(x) = \arcsin \frac{3}{5}x + \arccos 5x$$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $(U + V)' = U' + V'$ .

$$f'(x) = \left( \arcsin \frac{3}{5}x \right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции  $u = \frac{3}{5}x$ , для второй функции  $u = 5x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  
 $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ;  $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left( \arcsin \frac{3}{5}x \right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}} \left( \frac{3}{5}x \right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} (5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$5. f(x) = \arccos \sqrt{1 - e^{2x}}$$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент  $u = \sqrt{1 - e^{2x}}$ . Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой  $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .

$$f'(x) = \left( \arccos \sqrt{1 - e^{2x}} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$$u = 1 - e^{2x}$$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\ f'(x) &= \left( \arccos \sqrt{1 - e^{2x}} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})' \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - 1 + e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' = -\frac{1}{e^x} \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} (-2e^x) \end{aligned}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 1.2 Основы дифференциального исчисления

### Практическое занятие №3

#### Вычисление производных сложных функций

**Цель:** Научиться находить производные сложных функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

- У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- Уо02.03 планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию;
- Уо02.06 оформлять результаты поиска

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

**Задание:**

По выполнению задания технологической карты требуется найти производные функций

1.  $y = (5x^3 - 2x)^6$
2.  $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3.  $f(x) = \arcsin 4x + \arccos^2 x$
4.  $f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

**Порядок выполнения работы:**

5. Определите вид функции. Если функция является сложной, то введите промежуточный аргумент.
6. Определите, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Примените соответствующее правило.
7. Используя таблицу производных, найдите производные функций.
8. Раскройте скобки и приведите подобные, если это упростит запись функции.

**Ход работы:**

Найти производные функций:

1.  $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент  $u = 1 - 4x^2$ . Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой  $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2.  $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = \left(\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции  $u = \frac{1}{2}x$ , для второй функции  $u = 2x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  
 $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ ,  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' \\ &= \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

$$3. y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции  $u = 3x + 5x^2$ , для второй функции  $u = 3 + 10x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ ,  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ .

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{1}{(3+10x) \ln 2} (3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{10}{(3+10x) \ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

/

$$4. f(x) = \arcsin \frac{3}{5}x + \arccos 5x$$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования  $(U + V)' = U' + V'$ .

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции  $u = \frac{3}{5}x$ , для второй функции  $u = 5x$ .

При дифференцировании используем следующие формулы:  
 $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ;  $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}} \left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} (5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$5. f(x) = \arccos \sqrt{1 - e^{2x}}$$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент  $u = \sqrt{1 - e^{2x}}$ . Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой  $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент  $u = 1 - e^{2x}$ .

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' = -\frac{1}{e^x 2\sqrt{1-e^{2x}}} (-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

## Тема 1.2 Основы дифференциального исчисления

### Практическое занятие №4

#### Исследование функций и построение графиков

**Цель работы:** Научиться исследовать функции и строить графики функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

- У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо02.03 планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию;  
Уо02.06 оформлять результаты поиска

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

По выполнению задания технологической карты требуется исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1.  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ .

2.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ .

**Порядок выполнения работы:**

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

**Ход работы:**

*Общая схема исследования функций.*

1. Найти область определения функции  $D(y)$ .
2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при  $x = 0$  и при  $y = 0$ ).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.
8. Найти область значений.

*Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной*

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции  $f'(x)$ .
3. Найти критические точки функции  $y = f(x)$ , т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная  $f'(x)$  обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции  $f(x)$  и знак производной  $f'(x)$  в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции  $y = f(x)$ .

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка  $x_0$  есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором  $f'(x) < 0$ , от промежутка, в котором  $f'(x) > 0$ , и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой  $x_0$ , знак производной не меняется, то в точке  $x_0$  функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

**Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:**

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых  $f''(x) = 0$  или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

### **Асимптоты.**

*Асимптотой графика функции  $y = f(x)$*  называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки  $(x; f(x))$  до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая  $x = a$  называется *вертикальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из предельных значений  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  равно  $-\infty$  или  $+\infty$ .

**Замечание.** Прямая  $x = a$  не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке  $x = a$ . Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая  $y = b$  называется *горизонтальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из предельных значений  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  равно  $b$ .

**Замечание.** График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая  $y = kx + b$  называется *наклонной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ ,

если  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции  $y = f(x)$  существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$ , то функция имеет наклонную асимптоту  $y = kx + b$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}$$

1. Область определения функции  $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения  $x = 0$  получим  $y(0) = 0$ .

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка  $x = 0$  - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$$

$$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

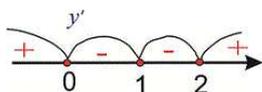
4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравняв ее к нулю, получим критические точки  $x = 0; x = 2$ . Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности  $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$  и убывает  $(0; 1) \cup (1; 2)$ .

5. Точка  $x = 0$  точка локального максимума,  $x = 2$  - локального минимума. Найдем значение функции  $y_{\max} = 0; y_{\min} = 2$ .

6. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2(2x-2) \cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая  $x = 1$  - вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид  $y = kx + b$ .

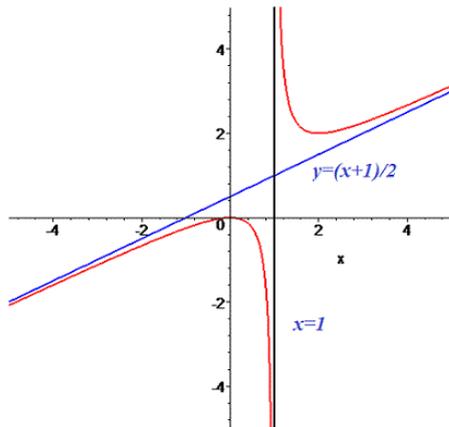
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

8. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по ним проводим построение.



**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

**Тема 1.3 Неопределённый и определённый интеграл**

**Практическое занятие №5**

*Вычисление неопределённых интегралов*

**Цель работы:** Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

- У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- Уо01.03 определять этапы решения задачи;
- Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

**Найдите неопределенные интегралы:**

1)  $\int (8x^4 - 6x^2 + 2x - 3) dx$

2)  $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$

3)  $\int \cos(10x - 5) dx$

4)  $\int 3^{4x^2} x dx$

5)  $\int \frac{5dx}{25 + 16x^2}$

6)  $\int \frac{x^2 dx}{(1 - 2x^3)^2}$

7)  $\int \frac{2x^4 - 4x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

**Порядок выполнения работы:**

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, приведите интеграл к табличным формулам. Проинтегрируйте.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то введите новую переменную, найдите ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Найдите полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернитесь к старой переменной.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то примените формулу интегрирования по частям  $\int U dV = UV - \int V dU$ . Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей  $U$  и  $dV$ . Затем, после нахождения  $dU$  и  $V$ , используйте формулу интегрирования по частям.

-Интегралы вида  $\int P(x)e^{kx} dx$ ,  $\int P(x)\sin kx dx$ ,  $\int P(x)\cos kx dx$ , где  $P(x)$ - многочлен,  $k$ - число.

Удобно положить  $U = P(x)$ , а все остальные множители принять за  $dV$ .

-Интегралы вида  $\int P(x)\arcsin x dx$ ,  $\int P(x)\arccos x dx$ ,  $\int P(x)\ln x dx$ ,  $\int P(x)\arctg x dx$   
 $\int P(x)\text{arcctg} x dx$ .

Удобно положить  $P(x)dx = dV$ , а остальные множители принять за  $U$ .

- Интегралы вида  $\int e^{ax}\sin bx dx$ ,  $\int e^{ax}\cos bx dx$ , где  $a$  и  $b$  числа. За  $U$  можно принять функцию  $U = e^{ax}$ .

**Ход работы:** Найти интегралы:

$$1) \int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx$$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx &= \int \left( \frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) dx \\ &= \int \left( 6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2} \right) dx \\ &= 6 \int x^2 dx - 5 \int dx \\ &+ 3 \int \frac{dx}{x} + 4 \int x^{-2} dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3 \ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 - 5x + 3 \ln|x| - \frac{4}{x} + C \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4} = \left[ \begin{array}{l} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{dt}{3} \end{array} \right] = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5 \int t^{-4} dt = -5 \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

$$3) \int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому  $U = \ln x$ ,  $dV = (x^3 - 4x)dx$ .

$$dU = \frac{1}{x} dx, \quad V = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx = \ln x \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \frac{1}{x} dx =$$

$$\ln x \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left( \frac{x^3}{4} - 2x \right) dx = \ln x \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

4)  $\int (x^2 - 2x) \cos 4x dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому  $U = x^2 - 2x$ ,  $dV = \cos 4x dx$ .

$$dU = (2x - 2) dx, \quad V = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\int (x^2 - 2x) \cos 4x dx = (x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x (2x - 2) dx =$$

$$(x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \int \sin 4x (2x - 2) dx = \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} \int \sin 4x (x - 1) dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$$U = x - 1, \quad dV = \sin 4x dx.$$

$$dU = dx, \quad V = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x$$

$$= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left( -\frac{1}{4} \cos 4x \right) - \int -\frac{1}{4} \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left( -\frac{1}{4} \cos 4x \right) + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8} ((x - 1) (\cos 4x) - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8} ((x - 1) (\cos 4x) - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

**Форма предоставления результата:** выполненная работа

**Критерии оценки:**

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

### Тема 1.3 Неопределённый и определённый интеграл

#### Практическое занятие №6

#### Вычисление определённых интегралов

**Цель работы:** Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Вычислите определенные интегралы:

1.  $\int_{-2}^3 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx$

1.  $\int_1^4 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

2.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$

3.  $\int_{-2}^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

4.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$

5.  $\int_3^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^{\frac{2}{3}} x}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то необходимо вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

**Ход работы:**

$$1) \int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5) dx$$

$$\int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5) dx = 4 \int_{-1}^3 x^3 dx - 3 \int_{-1}^3 x^2 dx + 2 \int_{-1}^3 x dx + 5 \int_{-1}^3 dx = x^4 - x^3 + x^2 + 5x \Big|_{-1}^3 =$$

$$2) 3^4 - 3^3 + 3^2 + 5 \cdot 3 - (1 + 1 + 1 - 5) = 81 - 27 + 9 + 15 + 2 = 80$$

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+(\frac{5}{2}x)^2} = \left[ \begin{array}{l} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctg t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \left[ \begin{array}{l} \cos x = t \\ d\cos x = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = \cos 0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{array} \right] = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2 \cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

**Форма представления результата:** выполненная работа

**Критерии оценки:**

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

### Тема 1.3 Неопределённый и определённый интеграл

#### Практическое занятие №7

#### Вычисление площадей фигур и объёмов тел

**Цель работы:** Научиться вычислять площади фигур и объёмы тел, используя

определенные интегралы

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- Уо01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- Уо01.03 определять этапы решения задачи;
- Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

a)  $y = -x^2 + 4, y = 0$

b)  $y = x^2, y = x^3$

c)  $y = e^x, y = e^{-x}, y = 4$

2. Вычислить объем тела

$y = x^2, y = 1, \text{ вокруг оси } OY$

**Порядок выполнения работы:**

- 1) построить графики функций
- 2) найти область, ограниченную этими графиками
- 3) составит определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

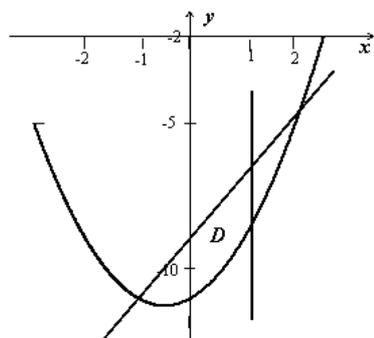
**Ход работы:**

Пример 1: Найти площадь области **D**, ограниченной кривыми  $y = x^2 + x + 11, y = 2x - 9$ , при условии,

$x \leq 1$

$$D: \begin{cases} y = x^2 + x - 11, \\ y = 2x - 9, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение  $x^2 + x + 11 = 2x - 9$  имеет два корня:  $x = -1$  и  $x = 2$ . Подходящий корень -  $x = -1$ . Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой  $x = 1$ , крайняя левая точка -  $x = -1$ , поэтому



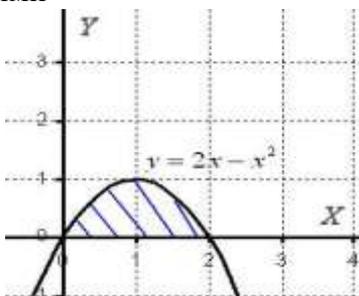
$$S(D) = \int_{-1}^1 [(2x-9) - (x^2+x-11)] dx = \int_{-1}^1 (2-x^2+x) dx = \left( 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = \left( 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left( -2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{10}{3}.$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части .

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $OX$ .

**Решение:** Как и в задаче на нахождение площади, решение начинается с чертежа плоской фигуры. То есть, на плоскости  $XOY$  необходимо построить фигуру, ограниченную линиями  $y = 2x - x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси  $OX$ . В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси  $OX$ .

**Объем тела вращения можно вычислить по формуле:**

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx =$$

$$= \pi \cdot \left( \frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left( \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

$$V = \frac{16\pi}{15} \text{ ед}^3 \approx 3,35 \text{ ед}^3.$$

**Ответ:**

**Форма представления результата:** выполненное задание

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 2.1 Матрицы и определители

### Практическое занятие №8 Действия с матрицами

**Цель работы:** Научиться выполнять действия над матрицами.

**Выполнив работу, Вы будете:**

*уметь:*

У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Найти матрицу  $C = A^2 + 3AB$ , где  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .
2. Выяснить, является ли матрица  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$  обратной к матрице  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ .
3. Даны матрицы:  $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ . Найдите:  $A+B$ ;  $2A$ ;  $AB$ ;  $BA$ .

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

**Ход работы:**

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами:

1. Сложение.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

### 3. Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в  $i$ -той строке в  $k$ -том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов  $i$ -той строки первой матрицы на соответствующие элементы  $k$ -того столбца второй.

1. Найти матрицу  $C = A^2 + 3AB$ , если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдем  $A^2$ , умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б) Найдем матрицу  $3A$ , умножив все элементы матрицы  $A$  на 3.

$$3A = 3 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в) Найдем произведение  $3AB$

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу  $C$ , складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Найдем произведение  $A \cdot A^{-1}$  и  $A^{-1} \cdot A$ :

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимнообратными.

3. Даны матрицы:  $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Найдите:  $A+B$ ;  $2A$ ;  $AB$ ;  $BA$ .

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 16 & -16 & -4 \\ 14 & -14 & -8 \end{pmatrix};$$

$$c_{11} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 3;$$

$$c_{12} = -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2;$$

$$c_{13} = -3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 11;$$

$$c_{21} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 16;$$

$$c_{22} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) = -16;$$

$$c_{23} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -4;$$

$$c_{31} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 14;$$

$$c_{32} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) = -14;$$

$$c_{33} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -8.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 & 2 \\ -11 & -10 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Форма предоставления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

## Тема 2.1 Матрицы и определители

### Практическое занятие №9

#### *Вычисление определителей второго и третьего порядка*

**Цель работы:** научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

- У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- Уо01.03 определять этапы решения задачи;
- Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

**Порядок выполнения работы:**

- 1 Запишите определитель, определите какого он порядка.
- 2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

**Ход работы:**

Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} .$$

Минором некоторого элемента  $a_{ij}$  определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$$

$$= 48 - 39 = 9$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$$

$$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3A_{11} + (-1)A_{21} + 0A_{31} + 1A_{41} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 122$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

## Тема 2.2 Системы линейных уравнений

### Практическое занятие №10

#### Решение систем уравнений методом Крамера

**Цель работы:** научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$$

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите систему уравнений.

2. Запишите и вычислите определитель системы.

3. Вычислите определители каждой неизвестной.

4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

**Ход работы:**

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: 
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель  $\Delta_1$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. 
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определитель  $\Delta_2$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется

определителем системы:  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель  $\Delta_1$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель  $\Delta_2$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель  $\Delta_3$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

## Тема 2.2 Системы линейных уравнений

### Практическое занятие №11

#### Решение систем уравнений методом Гаусса

**Цель работы:** научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

У1. решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить системы линейных уравнений:

$$1. \begin{cases} 3x - 2y + z = 10 \\ x + 5y - 2z = -15 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

**Ход работы:**

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;

- умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;

-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Рассмотрим пример:

1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

$$2) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_4 = -4 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 6, \\ x_3 = 4, \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Ответ : (8;6;4;2).

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

### Тема 3.1 Основы теории вероятностей

#### Практическое занятие №12

#### *Решение задач на основные понятия комбинаторики*

**Цель работы:** осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?

2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.

3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

**Ход работы**

1. Определите вид выборки без повторения.

2. Выберите соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.

3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

**1.Правило сложения.** Если некоторый элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а другой элемент  $B$  –  $n$  способами, исключаящими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов ( либо  $A$ , либо  $B$  ) можно осуществить  $m + n$  способами.

**2.Правило умножения.** Если некоторый элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами и если после каждого такого выбора элемент  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор пары элементов (  $A, B$  ) в указанном порядке можно осуществить  $m \cdot n$  способами.

**Задача1.** При формировании экипажа космического корабля имеется: 10 претендентов на пост командира, 20 претендентов на пост бортинженера, 25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

**Решение.** По правилу суммы существует  $10+20+25=55$  способов выбора одной из кандидатур.

**Задача2.** В столовой предлагают два различных первых :  $a_1$  и  $a_2$ ; три различных вторых блюда:  $b_1, b_2, b_3$  и два различных десерта:  $c_1$  и  $c_2$ . Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

**Решение.** Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует  $2 \times 3 \times 2 = 12$  способов выбрать обед из трех блюд.

### **3. Подмножества $n$ - множеств (соединения).**

Для нахождения  $k$  – подмножеств некоторого  $n$  – множества нужно выбрать  $k$  из  $n$  его элементов (поэтому часто говорят о *выборке  $k$  элементов из  $n$  – элементов*). Про выбранные  $k$  из  $n$  различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из  $n$  элементов по  $k$ . *Соединение*-собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все  $n$  элементов или только часть их, различают три вида соединений: **перестановки, размещения, сочетания.**

#### **Перестановки.**

Перестановками из  $n$  – элементов называются такие соединения из  $n$  – элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение:  $P_n = n!$

#### **Размещения.**

Размещениями из  $n$  – элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит  $m$  элементов, выбранных из числа данных  $n$  – элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем, и другим.

Обозначение  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из  $n$  – элементов по  $n$  – элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

#### **Сочетания.**

Сочетаниями из  $n$ - элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

### **Порядок выполнения работы:**

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберите соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1. Возможных цифр всего десять (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0). Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой (1,4,5,7 ≠ 2,4,5,7), либо порядком набора одинаковых цифр (1,4,5,7 ≠ 4,5,7,1), поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2. Формула размещений имеет вид:  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ . В нашем случае  $n = 4, m = 10$ .

3. Производим расчёт:  $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . В нашем случае  $n=10, m=3$ .

3. Производим расчёт:  $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$ .

3. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,9 (цифры не повторяются)?

Решение.

1. По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2. Формула перестановок из  $n$ -элементов имеет вид:  $P_n = n!$ . В нашем случае  $n = 4$ .

3. Произведём расчёт:  $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

**Форма представления результата:** выполненная работа.

### Критерии оценки:

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

## Тема 3.1 Основы теории вероятностей

### Практическое занятие №13

#### Решение задач на вычисление вероятности

**Цель работы:** Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

## Выполнив работу, Вы будете:

### уметь:

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, конспекты лекций.

### Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?

3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

### Порядок выполнения работы:

1. Определите событие  $A$ , вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число ( $n$ ) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов ( $m$ ), благоприятствующих наступлению события  $A$ .
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

### Ход работы:

**Вероятностью события**  $A$  называется отношение числа  $m$  случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий.

Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается  $P(A)$  и вычисляется по формуле:  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1:  $0 \leq P(A) \leq 1$

При решении задач на вычисление вероятности применяются формулы для подсчета числа комбинаций из данных элементов:

- число перестановок вычисляется по формуле:  $P_n = n!$

- число размещений из  $n$  элементов по  $m$  элементов в каждом вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  элементов в каждом вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Надежность каждого элемента системы электроснабжения можно характеризовать вероятностью рабочего состояния  $p$  и вероятностью отказа  $q$ . Если не учитывать плановые простои (ремонт), то можно считать, что элементы в любой момент времени находятся в одном из этих состояний. Тогда сумма вероятностей этих состояний равна  $1: p + q = 1$ .

Для группы из двух элементов возможны следующие сочетания:

1. оба элемента в рабочем состоянии;
2. первый элемент в вынужденном простое, второй в рабочем состоянии;
3. первый элемент в рабочем состоянии, второй в вынужденном простое;
4. оба элемента в вынужденном простое.

Вероятности этих состояний можно найти, воспользовавшись теоремой умножения вероятностей.

Так при **последовательном соединении двух элементов** с надежностью каждого  $p_1$  и  $p_2$  надежность всей схемы определяется как  $P = p_1 \cdot p_2$

Другими словами **схема работает, если работают оба элемента. При отказе одного (любого) из них схема работать не будет (ток через цепь не пойдет).**

Вероятность отказа для **последовательного соединения**

$$P = 1 - q_1 q_2 \text{ (для двух элементов).}$$

$$P = 1 - q_1 q_2 \cdot \dots \cdot q_n \text{ (для } n \text{ -элементов).}$$

При **параллельном соединении двух элементов** с надежностью каждого  $p_1$  и  $p_2$  надежность всей схемы определяется как  $P = p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot q_2 + p_2 q_1$

Пользуясь формулой для вероятности появления хотя бы одного события, надежность схемы параллельного соединения записывают в виде  $P = 1 - q_1 q_2$ .

Другими словами **схема работает, если работают оба элемента, но также она работает, если выйдет из строя и какой либо один из элементов.**

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня, что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение:

Событие  $A$  - «номер набран верно».

Число  $n$  - общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр (элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720. \text{ Итак, } n=720$$

Число  $m=1$ , т.к. только один набор из трёх цифр является нужным. Значит,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$$

2. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение:

Событие  $A$  - «оба шара окажутся чёрными».

Число  $n$ -общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев  $n$  равно числу сочетаний из 20 элементов

$$(12+8) \text{ по два: } n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{1 \cdot 2 \cdot 18!} = 190.$$

Число случаев  $m$ , благоприятствующих событию  $A$ , равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два:  $n = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{1 \cdot 2 \cdot 6!} = 28$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0,147$$

3. На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О, М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК?

Решение: Событие  $A$  - «получится слово ЗАМОК».

Число  $n$ -общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев  $n$  равно числу перестановок из 5 элементов (букв):  $n = P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ .

Число случаев  $m$ , благоприятствующих событию  $A$ , равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определенном порядке. А эти буквы различны.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

#### **Критерии оценки:**

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

## **Тема 3.2 Основы математической статистики**

### **Практическое занятие №14**

#### ***Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы***

**Цель работы:** Формирование умения составлять статистическое распределение выборки.

**Выполнив работу, Вы будете уметь:**

Уо01.03 определять этапы решения задачи;

Уо01.08 реализовать составленный план;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

$x_i$	2	4	7	8	9	12
$n_i$	$p_1^2$	$2p_2$	$p_2$	$p_2^2$	$p_3$	$3p_3$

1. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, $n_i$
1	3 – 5	$p_1$
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	$p_1^2$
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	$p_1+p_2$

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

$x_i$	5	10	15	20	25	30	35
$N_i$	$p_1$	$3p_1$	$p_2$	$2p_2$	$p_2^2$	$2p_3$	$2p_3^2$

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

$x_i$	2	4	6	8	10	12	14
$n_i$	$p_2$	$2p_2$	$p_1$	$p_1^2$	$p_3$	$2p_3$	$p_2+p_3$

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание:  $p_1 =$  числу букв в Вашем имени;  $p_2 =$  числу букв в Вашей фамилии;  $p_3 =$  числу букв в имени Вашего отца.

**Порядок выполнения работы:**

1 Прочитав условие предложенной задачи, по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2 Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик выборки.

**Ход работы:**

1. Задано распределение частот выборки:

$x_i$	2	6	12	15
$n_i$	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле  $w_i = \frac{n_i}{n}$ :

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0,12; w_2 = \frac{10}{25} = 0,40; w_3 = \frac{7}{25} = 0,28; w_4 = \frac{5}{25} = 0,20.$$

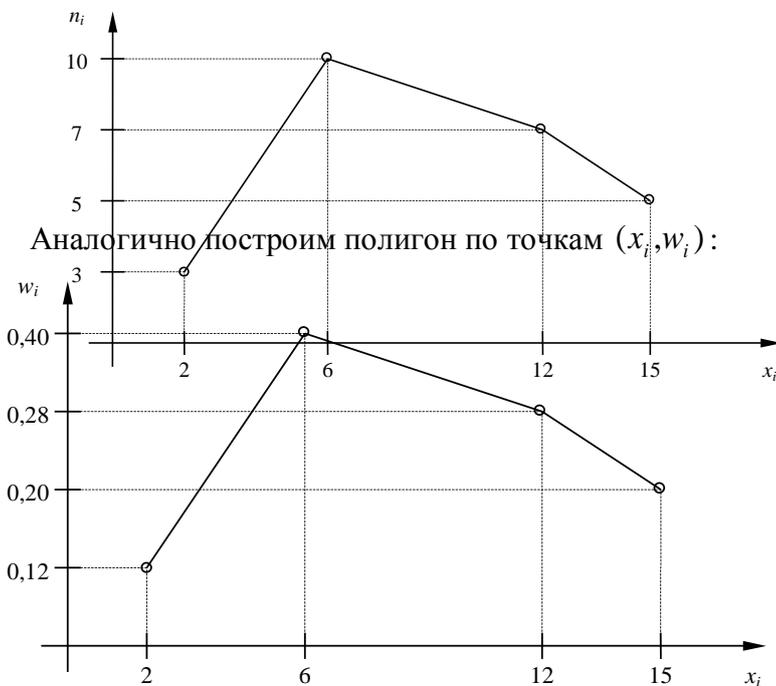
Следовательно,

$x_i$	2	6	12	15
$w_i$	0,12	0,40	0,28	0,20

Контроль:  $0,12 + 0,40 + 0,28 + 0,20 = 1.$

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами  $(x_i, n_i)$  и соединив их отрезками, получим полигон частот:



3. Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной $h=5$	Сумма частот вариант $n_i$
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

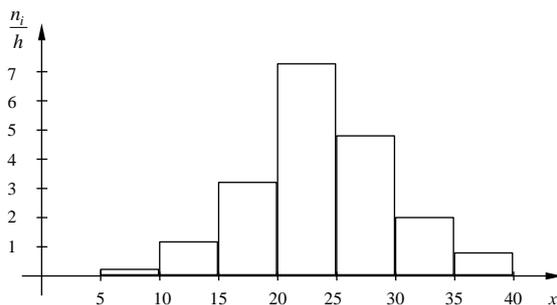
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта $x_i$	2	4	5	6
частота $N_i$	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\bar{X}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу  $D_{\Gamma} = \overline{X^2}_{\Gamma} - (\bar{X}_{\Gamma})^2$ .

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17,8.$$

$$\text{Таким образом, } D_{\Gamma} = 17,8 - 4^2 = 1,8.$$

$$\text{Генеральное стандартное отклонение: } \sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} = \sqrt{1,8} \cong 1,34.$$

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода  $Mo$  : наибольшая частота

$$M_o = 10.$$

Медиана  $Me$ : вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4,5.$$

Размах вариации  $R$ : в примере  $x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$ , поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

$x_i$	1	2	3	4	5
$n_i$	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\bar{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1,82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11,45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - (\bar{X}_B)^2 = 11,45 - 1,82^2 \cong 8,14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8,14} \cong 2,85.$$

6. . Определите мощность какого из множеств  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  или  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  больше.

Решение. Понятие мощности конечных множеств позволяет сравнивать их по количеству элементов. Так, если  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , а  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ , то  $m(A) = 5$ , а  $m(B) = 4$  и потому  $m(A) > m(B)$ .

7. Пусть  $A$  есть отрезок  $[1, 3]$ ,  $B$  - отрезок  $[2, 4]$ ; тогда объединением  $A \cup B$  будет отрезок  $[1, 4]$ , пересечением  $A \cap B$  - отрезок  $[2, 3]$ , разностью  $A \setminus B$  - полуинтервал  $[1, 2)$ ,  $B \setminus A$  - полуинтервал  $(3, 4]$ .

8. Пусть  $A$  есть множество прямоугольников,  $B$  - множество всех ромбов на плоскости. Тогда  $A \cap B$  есть множество всех квадратов,  $A \setminus B$  - множество прямоугольников с неравными сторонами,  $B \setminus A$  - множество всех ромбов с неравными углами.

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Критерии оценки:**

**Оценка "отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

**Оценка "хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но

допущены 2-3 недочета.

**Оценка "удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

**Оценка "неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.