МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

А. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы

- Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные векторы направлений; x, y, z- координаты точки.

- Средняя скорость перемещения

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \Delta\mathbf{r}/\Delta t,$$

где $\Delta\mathbf{r}$ – вектор перемещения точки за интервал времени Δt.

Средняя скорость движения

$$\langle v \rangle = \Delta s/\Delta t,$$

где Δs – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

- Мгновенная скорость материальной точки

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

где $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$ - проекции вектора скорости на оси координат.

- Модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

- Среднее ускорение материальной точки

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \Delta\mathbf{v}/\Delta t,$$

где $\Delta\mathbf{v}$ - приращение вектора скорости материальной точки за интервал времени Δt..

- Мгновенное ускорение материальной точки

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

где $a_x = d\,v_x/dt$, $a_y = d\,v_y/dt$, $a_z = d\,v_z/dt$ - проекции вектора ускорения на оси координат.

- Проекции вектора ускорения на касательную и нормаль к траектории

$$a_\tau = dv/dt, \quad a_n = v^2/R,$$

где v – *модуль* вектора скорости точки; R – радиус кривизны траектории в данной точке.

- Модуль вектора ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

- Путь, пройденный точкой

$$s = \int_0^t v dt,$$

где v - *модуль* вектора скорости точки.

- Угловая скорость и угловое ускорение абсолютно твердого тела

$$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\varphi}/dt, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt,$$

где $d\boldsymbol{\varphi}$ - вектор угла поворота абсолютно твердого тела относительно оси вращения ($d\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - аксиальные векторы, направленные вдоль оси вращения).

- Связь между линейными и угловыми величинами при вращении абсолютно твердого тела:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \qquad a_n = \omega^2 R, \qquad a_\tau = \varepsilon R,$$

где **r** - радиус-вектор рассматриваемой точки абсолютно твердого тела относительно произвольной точки на оси вращения; R - расстояние от оси вращения до этой точки.

А - 1

Радиус-вектор частицы изменяется по закону $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Найти: 1) вектор скорости **v**; 2) вектор ускорения **a**; 3) *модуль* вектора скорости v в момент времени t = 2 с; 4) путь, пройденный телом за первые 10 с.

Решение

По определению:

1) вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$;

2) вектор ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = 2\mathbf{i}$.

3) Так как $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$, то модуль вектора скорости $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

В нашем случае $v_x = 2t; v_y = 2$, поэтому, при t = 2 с,

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}46 \text{ м/с}.$$

4) По определению пути $s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$, где $t_1 = 0$, $t_2 = 10$ с, а $v = 2\sqrt{t^2 + 1}$,

тогда путь за первые 10 с

$$s = \int_0^{10} 2\sqrt{t^2+1}dt = 2\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right)\Bigg|_0^{10} \approx 103.5 \text{ м}.$$

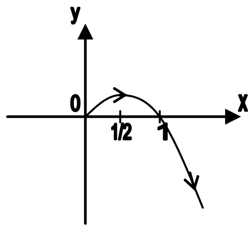
А - 2

Точка движется в плоскости XOY по закону: $x = 2t$; $y = 3t(1 – 2t)$. Найти: 1) уравнение траектории $y = f(x)$ и изобразить ее графически; 2) вектор скорости **v**; 3) ускорения **a** в зависимости от времени; 4)момент времени t_0, в который вектор ускорения **a** составляет угол $\pi/4$ с вектором скорости **v**.

Решение

1) Запишем зависимость x и y от t и исключим время t

$$\begin{cases} x = 2t; \\ y = 3t(1-2t). \end{cases}$$



Из первого уравнения $t = x/2$, тогда

$$y = 3x(1-x)/2 = -1{,}5x^2 + 1{,}5x,$$

т.е. траектория движения – парабола.
Начало движения в т. О (при t=0 – x=0, y=0).
С увеличением времени координата x растет, а координата y при $t > 0{,}5$ и $x > 1$ – отрицательна.

2) Вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$, где $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ - проекции вектора скорости на оси координат.
В нашем случае $v_x = dx/dt = 2$, $v_y = dy/dt = (3-12t)$, вектор скорости

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + (3 - 12t)\mathbf{j} .$$

3) Вектор ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$,
где $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ - проекции вектора ускорения на оси координат. В нашем случае $a_x = dv_x/dt = 0$, $a_y = dv_y/dt = -12$(м/с^2).

Поэтому $\mathbf{a} = -12\mathbf{j}$, а модуль $a = 12$ м/с^2.

4) Момент времени t_0 найдем из скалярного произведения **v** и **a**

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v\cdot a\cdot\cos\alpha = v_x a_x + v_y a_y.$$

По условию $\alpha=\pi/4$, модули скорости и ускорения равны по определению

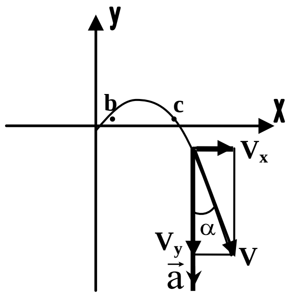
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \text{ и } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} .$$

Тогда $\sqrt{4+(3-12t_0)^2}\cdot 12\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} = (3-12t_0)\cdot(-12)$,

откуда $4 + (3 - 12t_0)^2 = 2\cdot(12t_0 - 3)^2$ или $2 = \pm(12t_0 - 3)$.
Решение последнего уравнения дает два значения для t_0

$$t_{01} = (5/12)\ \text{с и}\ t_{02} = (1/12)\ \text{с}.$$

Первому – соответствует точка **c** на нисходящей части траектории, где угол между векторами **v** и **a** равен $\alpha=\pi/4$, что совпадает с условием задачи.



Второе значение – лишнее. Его появление обусловлено возведением в квадрат и последующим извлечением квадратного корня при решении исходного уравнения. Этому моменту времени соответствует точка **b** на восходящей части траектории, где угол между векторами **V** и **a** равен $\alpha=3\pi/4$.

А - 3

Точка движется так, что вектор её скорости **V** меняется со временем по закону $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ (м/с). Найти:1) модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ за первые 2 с её движения; 2) модуль скорости в момент времени t=2 с.

Решение

1) Так как вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, то $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ и

$$\Delta\mathbf{r} = \int_0^t (\mathbf{v})\,dt = \int_0^t (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})dt = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

Модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}| = ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2)^{1/2} = (t^2 + t^4 + t^6)^{1/2}$,

при t=2 с $|\Delta\mathbf{r}| = (4 + 16 + 64)^{1/2} = 9{,}1$ м.

2) Модуль вектора скорости $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$.

При t=2 с $|\mathbf{v}| = (1 + 16 + 144)^{1/2} \approx 12{,}7$ м/с.

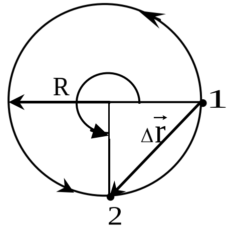
А - 4

За промежуток времени t=10 с частица прошла 3/4 окружности радиусом R=160 см. Найти: 1) среднюю скорость движения $\langle v\rangle$; 2)модуль средней скорости перемещения $|\langle \mathbf{v}\rangle|$; 3) модуль среднего вектора полного ускорения $|\langle \mathbf{a}\rangle|$, если частица двигалась из состояния покоя с постоянным тангенциальным ускорением a_τ.

Решение

1) По определению средняя скорость движения $\langle V\rangle = S/\tau$,
где S - путь, пройденный телом за время τ. В нашем случае $S=3\pi R/2$, а $\tau = t = 10$ с, тогда

$$\langle v\rangle = S/\tau = 3\cdot 3{,}14\cdot 1{,}6/2\cdot 10 \approx 0{,}75 \text{ (м/с)}.$$



2) По определению средняя скорость перемещения

$$\langle \mathbf{v}\rangle = \Delta\mathbf{r}/\tau,$$

где $\Delta\mathbf{r}$ – вектор перемещения тела за время τ.
Модуль средней скорости перемещения
$|\langle \mathbf{v}\rangle| = |\Delta\mathbf{r}|/\tau$. Из рисунка $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{2}\,R$.
Тогда $|\langle \mathbf{v}\rangle| = |\Delta\mathbf{r}|/\tau = \sqrt{2}\,R/\tau = 1{,}4\cdot 1{,}6/10 \approx 0{,}22$ (м/с).
3) По определению средний вектор полного ускорения $\langle \mathbf{a}\rangle = \Delta\mathbf{V}/\tau$,
где $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ - изменение вектора скорости за время τ.

Модуль среднего вектора полного ускорения

$$|\langle \mathbf{a}\rangle| = |\Delta\mathbf{v}|/\tau = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|/\tau = V_2/\tau \text{ (по условию } V_1=0).$$

Так как по условию тангенциальное ускорение a_τ = const, то модуль $V_2 = a_\tau\cdot\tau$; пройденный частицей путь $S = a_\tau\cdot\tau^2/2$, откуда $a_\tau = 2S/\tau^2$. Тогда $|\langle \mathbf{a}\rangle| = V_2/\tau = a_\tau\cdot\tau/\tau = a_\tau = 2S/\tau^2 = 3\pi R/\tau^2 = 3\cdot 3{,}14\cdot 1{,}6/100 \approx 0{,}15$ (м/с^2).

А - 5

Твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону

$$\varphi = 6t - 2t^3 \text{ (рад)}.$$

Найти: 1) среднюю угловую скорость $\langle\omega\rangle$ как функцию от t; 2) среднее значение углового ускорения в промежутке времени от 0 до остановки; 3)угловое ускорение в момент остановки; 4) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии r=0,2 м от оси вращения в момент времени t=0,5 с.

Решение

1) По определению средняя скорость вращения

$$\langle\omega\rangle = \Delta\varphi/\Delta t = (\varphi_t - \varphi_0)/t.$$

По условию задачи $\varphi_t = 6t - 2t^3$; $\varphi_0 = 0$, поэтому $\langle\omega\rangle = (6 - 2t^2)$ рад/с.

2) По определению среднее ускорение

$$\langle\varepsilon\rangle = \Delta\omega/\Delta t\ ,$$

где $\Delta\omega$ - изменение угловой скорости за время $\Delta t = t_{ост} - t_0 = t_{ост}$.
Момент остановки $t_{ост}$ найдем из условия $\omega_{мгн} = 0$.
По определению

$$\omega_{мгн} = d\varphi/dt\ .$$

В нашем случае

$$\omega_{мгн} = d\varphi/dt = 6 - 6t^2 = 0,$$

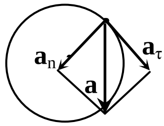
откуда $t_{ост} = 1$с, а $\langle\varepsilon\rangle = (\omega_{ост} - \omega_0)/t_{ост} = (0 - 6)/1 = -6$ (рад/с^2).
3) По определению угловое ускорение

$$\varepsilon = d\omega/dt = -12t\ .$$

В момент остановки ($t_{ост} = 1$ с) ускорение равно $\varepsilon_{ост} = -12$ рад/с^2.
4) Полное ускорение находится как векторная сумма двух взаимно перпендикулярных ускорений: тангенциального и нормального ($\mathbf{a}_\tau$ и $\mathbf{a}_n$), связанных с угловыми характеристиками вращательного движения следующим образом:

$$\mathbf{a}_\tau = \varepsilon R\cdot\boldsymbol{\tau} \text{ и } \mathbf{a}_n = \omega^2 R\cdot\mathbf{n},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ единичные векторы касательной и нормали к траектории движения точки.
Модуль полного ускорения



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2} =$$

$$= \sqrt{(-12\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2)^2 + ((6 - 6\cdot 0{,}5^2)\cdot 0{,}2)^2} = 4{,}2(м/с^2).$$

А - 6

Точка движется в плоскости XOY по закону

$$x = 5\sin\omega t; \quad y = 5(1\text{-}\cos\omega t).$$

Найти: 1) путь, пройденный телом за 6 с; 2) угол между векторами скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{a}$; 3) траекторию движения y=f(x).

Решение

1) Путь, пройденный точкой $s = \int v dt$, где v- *модуль* вектора скорости точки, определяемый как $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

По условию задачи $x = 5\sin\omega t$; $y = 5(1\text{-}\cos\omega t)$, поэтому

$$v_x = dx/dt = 5\omega\cos\omega t;\ \ v_y = dy/dt = 5\omega\sin\omega t;$$

$$v = \sqrt{(5\omega\cos\omega t)^2 + (5\omega\sin\omega t)^2} = 5\omega \text{ (м/с)}.$$

Тогда путь, пройденный телом за 6 с

$$S = \int_0^t 5\omega dt = 5\omega t\Big|_0^6 = 30\omega \text{ (м/с)}.$$

2) Для нахождения угла между векторами скорости **v** и ускорения **a** воспользуемся скалярным произведением векторов **V** и **a.**

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v\cdot a\cos\varphi, \text{ откуда } \cos\varphi = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})/(v\cdot a).$$

В координатном представлении скалярное произведение

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v_x a_x + v_y a_y,$$

где $a_x = dV_x/dt = -5\omega^2\sin\omega t$; $a_y = 5\omega^2\cos\omega t$.

Модуль вектора ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5\omega^2$.

При подстановке в формулу для $\cos\varphi$ получим

$$\cos\varphi = \frac{-25\omega^3\sin\omega t\cos\omega t + 25\omega^3\sin\omega t\cos\omega t}{5\omega\cdot 5\omega^2} = 0.$$

Поэтому $\varphi = \pi/2$.

3)Чтобы найти траекторию движения материальной точки, выразим из уравнений движения $\sin\omega t = x/5$ и $\cos\omega t = 1 - y/5$.

Возведя в квадрат полученные уравнения и сложив их почленно, получим траекторию движения

$$x^2/25 + (1 - y/5)^2 = 1 \text{ или } x^2 + (5 - y)^2 = 25.$$

Траектория движения - окружность.

Б. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы

- Основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона)

$$d\mathbf{p}/dt = \Sigma\,\mathbf{F}_i \quad \text{или} \quad m\mathbf{a} = \Sigma\,\mathbf{F}_i,$$

где $\Sigma\,\mathbf{F}_i$ - геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; m – масса; **a** - ускорение и $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ - импульс материальной точки (частицы).

- Работа и мощность силы **F**

$$A = \int \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int F_s\, ds; \quad P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F_s \cdot v,$$

где $F_s = F\cdot\cos\alpha$ – проекция силы **F** на направление вектора перемещения $d\mathbf{r}$; α – угол между направлениями вектора силы **F** и вектора перемещения $d\mathbf{r}$; ds – модуль вектора перемещения $d\mathbf{r}$; **v** и v – вектор скорости частицы и его модуль.

- Приращение кинетической энергии частицы

$$T_2 - T_1 = A,$$

где $T = mv^2/2$ - кинетическая энергия частицы; A – работа ***результирующей всех сил***, действующих на частицу.

- Работа консервативных сил поля равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле $A = U_1 - U_2$.
- Механическая энергия частицы

$$E = T + U .$$

- Потенциальная энергия:

а) упругодеформированной пружины

$$U = k\, x^2 /2 ,$$

где k – жесткость пружины; x – абсолютная деформация;

б) гравитационного взаимодействия

$$U = - \gamma(m_1 \cdot m_2/r),$$

где γ – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между ними (тела рассматриваются как материальные точки);

в) тела массы m, находящегося в однородном поле силы тяжести

$$U = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения (напряженность гравитационного поля); h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой.

- Закон изменения импульса системы частиц

$$d(\Sigma\, \mathbf{p}_i) /dt = \mathbf{F}_\Sigma ,$$

где $\mathbf{p}_i$ - импульс одной из частиц системы; $\mathbf{F}_\Sigma = \Sigma \mathbf{F}_j$ - результирующая всех ***внешних*** сил $\mathbf{F}_j$.

- Момент силы **F** , действующей на тело, относительно оси вращения *z*

$$M_z = F_\perp l,$$

где $F_{\perp}$ - проекция силы **F** на плоскость, перпендикулярную оси вращения z; l – плечо силы **F** (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

- Момент инерции тела относительно произвольной оси вращения

$$I = \int r^2\, dm,$$

где r – расстояние элемента тела массы dm от оси вращения.

- Момент импульса тела, вращающегося вокруг оси симметрии

$$\mathbf{L} = I\, \boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения тела, имеющего момент инерции I относительно этой оси.

- Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$\mathbf{M}\, dt = d\,\mathbf{L} = d\,(I\, \boldsymbol{\omega}),$$

где **M** – результирующий момент сил, действующих на тело в течение промежутка времени dt.

- Работа и мощность момента силы

$$A = \int \mathbf{M}\, d\boldsymbol{\varphi}; \qquad P = \mathbf{M}\boldsymbol{\omega},$$

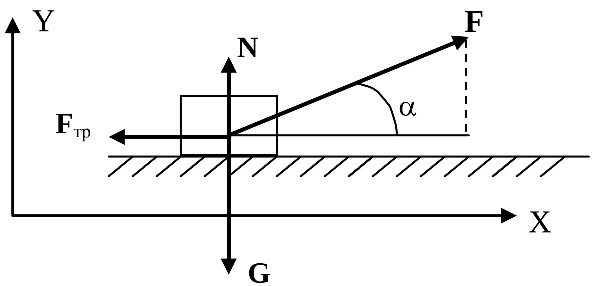
где $d\boldsymbol{\varphi}$ - вектор угла поворота; $\boldsymbol{\omega}$ - вектор угловой скорости тела.

Б - 1

Брусок массой m = 5 кг тянут по горизонтальной поверхности, прикладывая силу F = 20 Н под углом α = 30° к горизонту. При этом брусок за время τ = 2 с изменил свою скорость от v_0=2,4 м/с до v=7,8 м/с, двигаясь равноускоренно. Найти коэффициент трения μ бруска о поверхность.

Решение

Изобразим силы, действующие на брусок, и оси координат



Запишем II закон Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{F}.$$

Спроецируем это уравнение на оси X и Y:

OX $\qquad ma = F\cos\alpha - F_{тр};$

OY $\qquad 0 = N - mg + F\sin\alpha.$

Так как $F_{тр} = \mu N$, а $a = (v - v_0)/t$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} m\dfrac{v - v_0}{t} = F\cos\alpha - \mu N; \\ N + F\sin\alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Выразим N из второго уравнения

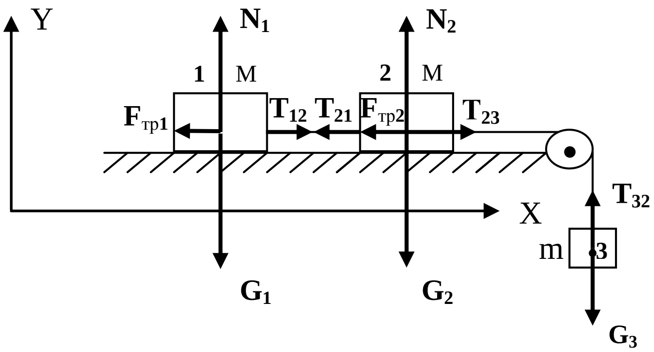
$$N = mg - F\sin\alpha.$$

Тогда, подставив N в первое уравнение и решив его относительно μ, получим

$$\mu = \frac{F\cos\alpha - m\dfrac{v - v_0}{t}}{mg - F\sin\alpha} = \frac{20 \cdot \cos 30^\circ - 5\dfrac{7{,}8 - 2{,}4}{2}}{5 \cdot 9{,}8 - 20\sin 30^\circ} = 0{,}1.$$

Б - 2

По горизонтальной поверхности движутся два тела (1 и 2) одинаковой массы M = 2 кг, соединенные нитью между собой и с телом 3 массы m = 1,5 кг. Нити, связывающие тела, нерастяжимы и невесомы. Коэффициенты трения между телами 1 и 2 и поверхностью – $\mu_1 = 0{,}1$ и $\mu_2 = 0{,}15$. Найти: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) натяжение нити между телами 1 и 2; 3) натяжение нити, на которой висит тело массы m; 4) давление на ось блока.



Решение

Силы, действующие на каждое из трех тел, показаны на рисунке в условии задачи.

Запишем II закон Ньютона для каждого тела

$$\begin{cases} M\mathbf{a_1} = \mathbf{G_1}+\mathbf{N_1}+\mathbf{F}_{тр1}+\mathbf{T_{12}}; \\ M\mathbf{a_2} = \mathbf{G_2}+\mathbf{N_2}+\mathbf{F}_{тр2}+\mathbf{T_{21}}+\mathbf{T_{23}}; \\ m\mathbf{a_3} = \mathbf{G_3}+\mathbf{T_{32}}. \end{cases}$$

Так как нити и блок невесомы, то по III закону Ньютона

$$|\mathbf{T_{12}}| = |\mathbf{T_{21}}| = T_1, \text{ и } |\mathbf{T_{23}}| = |\mathbf{T_{32}}| = T_2.$$

Так как нити нерастяжимы, то

$$|\mathbf{a_1}| = |\mathbf{a_2}| = |\mathbf{a_3}| = a .$$

Спроецируем эти уравнения на оси X и Y:

$$OX \begin{cases} Ma = T_1 - F_{тр1}; \\ Ma = T_2 - T_1 - F_{тр2}. \end{cases} \qquad OY \begin{cases} 0 = N_1 - G_1; \\ 0 = N_2 - G_2; \\ -ma = T_2 - G , \end{cases}$$

где $G_1 = G_2 = Mg$; $G = mg$; $F_{тр1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 Mg$; $F_{тр2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 Mg$.

Тогда система трех уравнений примет вид

$$\begin{cases} T_1 - \mu_1 Mg = Ma; \\ T_2 - T_1 - \mu_2 Mg = Ma; \\ mg - T_2 = ma. \end{cases}$$

1) После сложения уравнений получим выражение для определения ускорения системы трех тел

$$a = g\frac{m - (\mu_1 + \mu_2)M}{2M + m} = 9{,}8\frac{1{,}5 - (0{,}1 + 0{,}15)\cdot 2}{4 + 1{,}5} \approx 1{,}8\ (м/с^2).$$

2) Натяжение нити между телами 1 и 2

$$T_1 = M(a + \mu_1 g) = 2(1{,}8 + 0{,}1\cdot 9{,}8) = 5{,}56\ (Н).$$

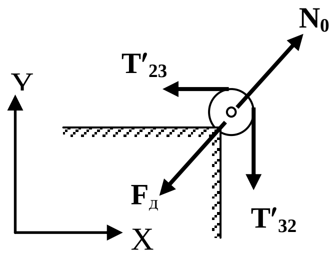
3) Натяжение нити между телами 2 и 3

$$T_2 = m(g - a) = 1{,}5(9{,}8 - 1{,}8) = 12\ (Н).$$

4) Для нахождения силы давления на ось блока учтем, что

$$\mathbf{T'_{23}} + \mathbf{T'_{32}} + \mathbf{N_0} = 0,$$

где $\mathbf{T'_{23}}, \mathbf{T'_{32}}$ – силы, действующие на блок со стороны нитей; $\mathbf{N_0}$ – сила давления оси на блок, равная по модулю и противоположно направленная силе давления $\mathbf{F}_д$ блока на ось блока (по III закону Ньютона).



Поскольку $T'_{23} = T_{23}$ и $T'_{32} = T_{32}$ (по III закону Ньютона), но $T_{23} = T_{32} = T_2$, то в проекциях на оси X и Y получим:

OX $\quad - T_2 + N_0 \cos 45° = 0;$

OY $\quad -T_2 + N_0 \sin 45° = 0.$

Откуда $\quad N_0 = \sqrt{2}\, T_2.$

Поэтому

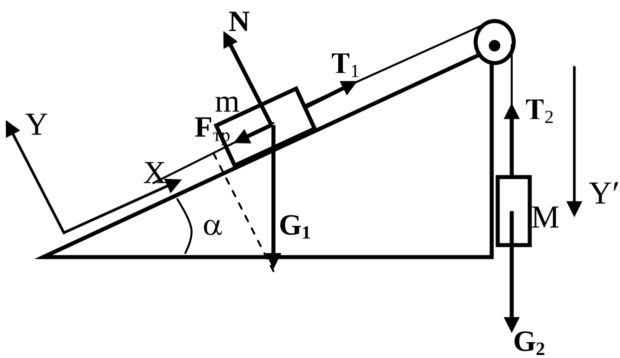
$$F_д = N_0 \approx 1{,}41 \cdot 12 = 16{,}82 \text{ (Н)}.$$

Б - 3

Грузы массой m и M связаны невесомой и нерастяжимой нитью. Угол наклона плоскости к горизонту равен α. Коэффициент трения груза m о плоскость равен μ.. Найти ускорение груза M.

Решение

Покажем силы, действующие на тела, и запишем II закон Ньютона для каждого тела



$$\mathbf{F}_{тр} + \mathbf{N} + \mathbf{G_1} + \mathbf{T_1} = m\mathbf{a_1}.$$
$$\mathbf{G_2} + \mathbf{T_2} = M\mathbf{a_2}.$$

Спроецируем первое уравнение на оси X и Y, а второе – на ось Y′. Учитывая, что $|\mathbf{a_1}| = |\mathbf{a_2}| = a$ (нить нерастяжима), а $|\mathbf{T_1}| = |\mathbf{T_2}| = T$ (нить и блок невесомы), получим

$$\begin{cases} -F_{тр} - mg\sin\alpha + T = ma; \\ N - mg\cos\alpha = 0; \\ Mg - T = Ma; \end{cases} \qquad F_{тр} = N\mu = \mu mg\cos\alpha,$$

так как $N = mg\cos\alpha$.

После подстановки $F_{тр}$ в первое уравнение, получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} ma = -\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha + T; \\ Ma = Mg - T, \end{cases}$$

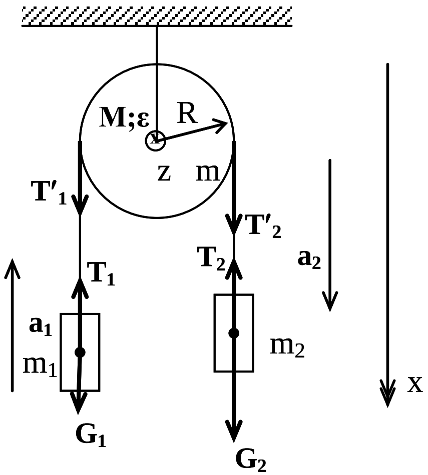
откуда
$$a = \frac{Mg - mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{m + M}.$$

Б - 4

Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу m = 80 г, перекинута тонкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1=100 г и m_2 = 200 г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением и массой нити пренебречь.

Решение

На рисунке показаны силы, действующие на движущиеся тела. При этом тела с массами m_1 и m_2 движутся поступательно, диск вращается вокруг неподвижной оси z.



Запишем основные законы динамики поступательного и вращательного движения

$$\begin{cases} \mathbf{G_1} + \mathbf{T_1} = m_1\mathbf{a_1}; \\ \mathbf{G_2} + \mathbf{T_2} = m_2\mathbf{a_2}; \\ \mathbf{M_1} + \mathbf{M_2} = I\boldsymbol{\varepsilon}. \end{cases}$$

Так как, по условию, нити нерастяжимы, то модули ускорений

$$a_1 = a_2 = a.$$

Согласно третьему закону Ньютона и условию переноса сил натяжения вдоль механических связей к месту их закрепления, модули сил $T_1 = T'_1$, $T_2 = T'_2$.

Тогда в проекциях на оси X и Z получим систему трех уравнений

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a; \\ m_2 g - T_2 = m_2 a; \\ T_2 R - T_1 R = I_z \varepsilon. \end{cases}$$

Натяжения T_1 и T_2 выразим из первых двух уравнений

$$T_1 = m_1(a+g);$$

$$T_2 = m_2(g-a).$$

Полученные выражения подставим в третье уравнение

$$R(m_2(g-a) - m_1(a+g)) = I_z \varepsilon.$$

Момент инерции диска относительно оси Z $I_z = \frac{1}{2} mR^2$; угловое ускорение $\varepsilon = \frac{a}{R}$.

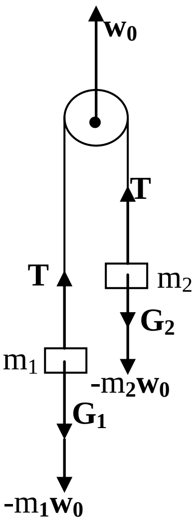
После подстановки в последнее уравнение, имеем

$$m_2 g - m_2 a - m_1 a - m_1 g = ma/2,$$

откуда

$$a = g(m_2 - m_1)/(m_2 + m_1 + m/2) = 9{,}8 \cdot 0{,}1/0{,}34 = 2{,}88 \text{ м/с}^2.$$

Силы инерции



Б - 5

Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы с массами m_1 и m_2. Кабина начинает подниматься с ускорением $\mathbf{w_0}$. Пренебрегая трением, массами блока и нити, найти ускорение груза m_1 относительно кабины, а также относительно шахты лифта.

Решение

Рассмотрим движение тел относительно кабины лифта.

Кабина является неинерциальной системой отсчета, так как движется с ускорением $\mathbf{w_0}$ относительно шахты. В неинерциальной системе отсчета на каждое тело действует сила инерции

$$\mathbf{F_i} = -m\mathbf{w_0}.$$

Запишем II закон Ньютона для тел m_1 и m_2

$$m_1\mathbf{a_1} = \mathbf{G_1} + \mathbf{T_1} + \mathbf{F_{i\,1}};$$

$$m_2\mathbf{a_2} = \mathbf{G_2} + \mathbf{T_2} + \mathbf{F_{i\,2}}.$$

Вследствие нерастяжимости нити ускорения тел равны по модулю и направлены противоположно друг другу

$$\mathbf{a_1} = -\,\mathbf{a_2}.$$

Вследствие невесомости блока силы натяжения нитей равны друг другу:

$$\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2} = \mathbf{T}.$$

Силу тяжести **G** можно выразить как произведение массы тела m на напряженность гравитационного поля **g** (численно равной ускорению свободного падения).

С учетом всех указанных обстоятельств система уравнений примет вид

$$m_1a = m_1g + T - m_1w_0;$$

$$-m_2a = m_2\,g + T - m_2w_0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим ускорение первого тела относительно кабины лифта

$$a = (m_1 - m_2)(g - w_0)/(m_1 + m_2).$$

Ускорение первого тела относительно шахты лифта равно

$$a' = a + w_0 = ((m_1 - m_2)g + 2m_2w_0)/(m_1 + m_2).$$

В. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ, ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Основные формулы

• Если в системе тел действуют только консервативные силы (силы, работа которых зависит только от начального и конечного положений тел и не зависит от формы пути), то полная механическая энергия системы остается постоянной

$$E_{мех} = \Sigma\, T_i + \Sigma\, U_i = const,$$

где T_i и U_i – кинетическая и потенциальная энергии одной из частиц системы.

• Если система тел является замкнутой, т.е. сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то суммарный импульс системы тел остается постоянным

$$\mathbf{P}_\Sigma = \Sigma\, m_i\, \mathbf{v}_i = \Sigma\, \mathbf{p}_i = \mathrm{const},$$

где $\mathbf{p}_i = m_i\, \mathbf{v}_i$ - импульс одной из частиц системы.

• Если суммарный момент внешних сил, действующих на систему тел, равен нулю, то суммарный момент импульса системы тел остается постоянным

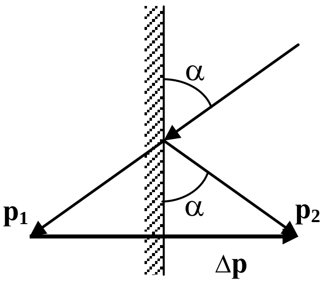
$$\mathbf{L}_\Sigma = \Sigma\, \mathbf{L}_i = \Sigma\, (I\, \boldsymbol{\omega})_i = \mathrm{const},$$

где $\mathbf{L}_i = (I\, \boldsymbol{\omega})_i$ – момент импульса одного из тел системы.

В - 1

Шарик массой m = 100 г ударился о стенку со скоростью v = 5 м/с и отскочил от нее с той же скоростью. Определить импульс, полученный стенкой, если до удара шарик двигался под углом $\alpha = 60°$ к плоскости стенки.

Решение



Изменение импульса шарика произошло при взаимодействии его со стенкой. По третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{сш} = -\mathbf{F}_{шс}$. По второму закону Ньютона $\mathbf{F}=\Delta\mathbf{p}/\Delta t$, поэтому $\Delta\mathbf{p}_{стенки} = -\Delta\mathbf{p}_{шарика}$. Иными словами импульс, полученный стенкой, равен изменению импульса шарика с обратным знаком.

Найдем изменение импульса шарика:

$$\Delta\mathbf{p}_{шарика} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}.$$

Импульс $\Delta\mathbf{p}_{стенки}$, переданный стенке, направлен в сторону, противоположную $\Delta\mathbf{p}_{шарика}$, а его модуль равен $|\Delta\mathbf{p}_{шарика}|$.

Из рисунка следует

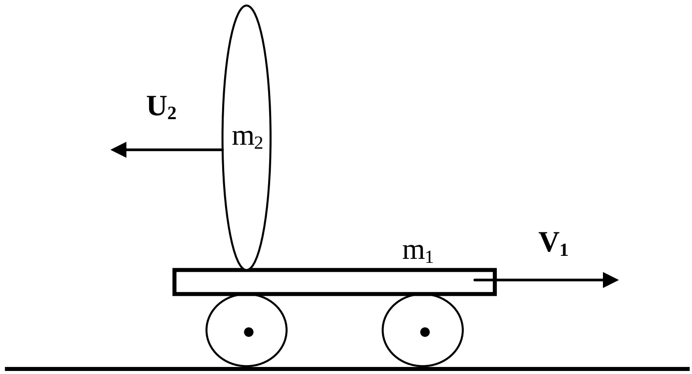
$$|\Delta\mathbf{p}_{стенки}| = 2\, p \sin\alpha = 2\, m\, V \sin\alpha = 2\cdot 0{,}1\cdot 5\cdot 0{,}86 = 0{,}86 \text{ кг·м/с}.$$

В - 2

На тележке, свободно двигающейся горизонтально со скоростью V_1=3 м/с, находится человек. Человек прыгает в сторону, противоположную направлению движения тележки. После прыжка скорость тележки стала равной U_1 = 4 м/с. Определить горизонтальную составляющую скорости U_{2X} человека при прыжке относительно тележки. Масса тележки $m_1 = 210$ кг, масса человека $m_2 = 70$ кг.

Решение

Так как сумма сил, действующих на тела системы человек – тележка, равна нулю, то система человек – тележка замкнута, поэтому импульс системы сохраняется. В результате прыжка человек отрывается от тележки и система перестаёт быть замкнутой, поскольку теперь сила тяжести, действующая на человека, ничем не скомпенсирована. Однако сумма горизонтальных проекций всех действующих сил остаётся равной нулю и, следовательно, горизонтальная проекция импульса системы продолжает сохраняться.



До взаимодействия горизонтальная проекция импульса системы человек – тележка равна

$$P_{1X} = (m_1 + m_2)\,V_1;$$

после взаимодействия –

$$P_{2X} = m_1U_1 + m_2(U_1 - U_{2X}).$$

Так как $P_{1X} = P_{2X}$, т.е. $(m_1 + m_2)\,V_1 = m_1\,U_1 + m_2\,(U_1 - U_{2X})$, то

$$U_{2X} = (m_1 + m_2)(U_1 - V_1)/m_2\ .$$

После подстановки числовых данных получим

$$U_{2X} = (210 + 70)\cdot(4 - 3)/70 = 4 \text{ м/с}\ .$$

В - 3

Горизонтально расположенная платформа, имеющая форму диска, может вращаться вокруг вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол φ повернётся платформа, если человек пойдёт вдоль края платформы и, обойдя её, вернётся в исходную точку? Масса платформы M=240 кг, масса человека m=60 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Решение

На систему человек – диск действуют сила тяжести и реакция опоры. Моменты этих сил относительно вертикальной оси Z равны нулю, поэтому проекция момента импульса L_Z системы на ось Z сохраняется. Первоначально $(L_Z)_1 = 0$, так как система человек – диск покоится.

Если человек пойдёт по краю платформы со скоростью V относительно диска, он приобретёт момент импульса относительно диска $(L_Z)_{чел} = mVR$. В то же самое время диск приобретёт момент импульса $(L_Z)_Д = I\omega$ относительно неподвижной оси, где I – момент инерции диска, ω- его угловая скорость.

Для системы человек – диск закон сохранения L_Z относительно неподвижной оси примет вид

$$0 = I\omega + mR(V + \omega R),$$

где $(V + \omega R)$ – линейная скорость человека относительно оси вращения диска.

Момент инерции диска $I = MR^2/2$, скорость человека относительно края платформы $V = 2\pi R/t$, где t – время обхода человеком платформы.

После подстановки I и V и преобразований получим

$$MR^2\omega/2 + mR^2\omega = -(2m/t)\,\pi\, R^2,$$

откуда $$\omega = -2\pi\, m/(M/2 + m)\cdot t.$$

Так как угловая скорость вращения платформы $\omega = \varphi/t$, то

$$\varphi = -2\pi m/(M/2 + m) = -2\pi\cdot 60/(240/2 + 60) = -2\pi/3.$$

Минус означает, что поворот осуществляется в сторону, противоположную ходу человека.

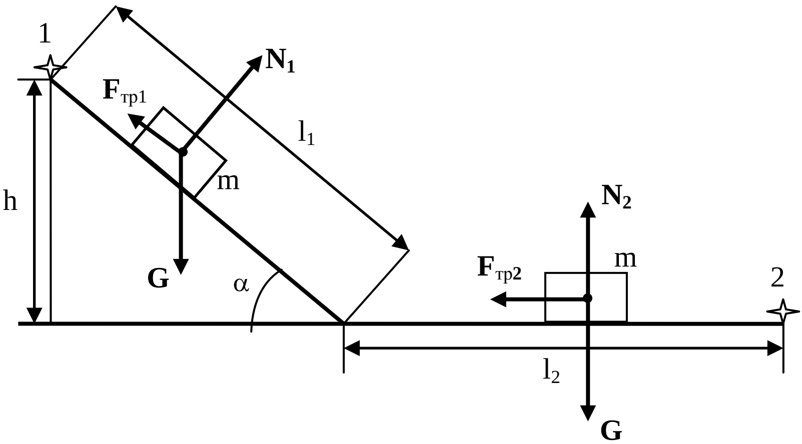
В - 4

Брусок скользит с наклонной плоскости длиной l_1=42 см и высотой h=7 см и далее по горизонтальной плоскости на расстояние l_2=142 см, после чего останавливается. Определить коэффициент трения, считая его везде одинаковым.

Решение

Закон изменения механической энергии утверждает, что изменение полной энергии тела равно работе диссипативных сил, действующих на него.

Примем уровень горизонтальной плоскости соответствующим нулевой потенциальной энергии.



Так как тело остановилось в т. 2, то $E_2 = 0$; энергия в начальном положении 1 – $E_1 = mgh$. Поэтому изменение энергии

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -mgh.$$

$$\Delta E = A_{дисс};\quad A_{дисс} = -F_{тр1}\, l_1 - F_{тр2}\, l_2;$$

$$F_{тр1} = \mu N_1 = \mu\, mg\cos\alpha;$$

$$F_{тр2} = \mu N_2 = \mu\, mg\,.$$

После подстановки всех величин в закон изменения энергии, получим

$$mgh = \mu\, mg\, l_1\cos\alpha + \mu\, mg\, l_2\,,\ \text{где}\ l_1\cos\alpha = (l_1^2 - h^2)^{1/2},$$

$$\text{откуда}\ \mu = h/((l_1^2 - h^2)^{1/2} + l_2) = 0{,}038.$$

В - 5

Шар массой $m_1 = 5$ кг движется со скоростью $V_1 = 1$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 2$ кг. Определить скорости U_1 и U_2 шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

Решение

Для нахождения скоростей шаров после удара применим закон сохранения импульса и механической энергии.

$$\begin{cases} m_1\mathbf{V}_1 = m_1\mathbf{U}_1 + m_2\mathbf{U}_2; \\ \dfrac{m_1V_1^2}{2} = \dfrac{m_1U_1^2}{2} + \dfrac{m_2U_2^2}{2}\,. \end{cases}$$

После преобразования имеем

$$\begin{cases} m_1(V_1 - U_1) = m_2 U_2; \\ m_1(V_1^2 - U_1^2) = m_2 U_2^2. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим соотношение между скоростями

$$V_1 + U_1 = U_2.$$

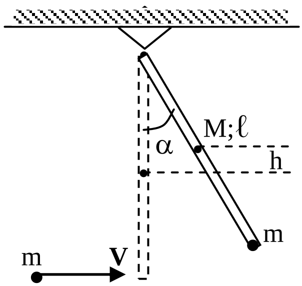
Если заменить в первом уравнении U_2, то получим уравнение для нахождения U_1.

$$U_1 = \frac{V_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}.$$

Вычисления дают результаты $U_1 = \frac{1(5-2)}{5+2} = 0{,}43$ м/с; $U_2 = 1{,}43$ м/с.

В - 6

Однородный стержень длиной $\ell = 1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец ударяет пуля массой m=7 г, летящая перпендикулярно стержню и его оси вращения, и застревает в нем. Определить массу M стержня, если в результате попадания пули он отклонился на угол $\alpha = 60^0$. Принять скорость пули V=360 м/с. Считать M»m.



Решение

При ударе выполняется закон сохранения момента импульса относительно оси вращения, т.е.

$$m \cdot V \cdot \ell = I_{ст} \cdot \omega \text{ (при M»m).}$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через конец стержня,

$$I_{ст} = M \cdot \ell^2/3,$$

поэтому угловая скорость стержня после удара станет равна

$$\omega = \frac{3mV}{M\ell}.$$

Кинетическая энергия стержня переходит в потенциальную энергию в поле силы тяжести, т.е.

$$\frac{I_{ст}\omega^2}{2} = Mgh,$$

где h – высота поднятия центра тяжести стержня.
Из рисунка видно, что

$$h = \ell(1-\cos\alpha)/2.$$

После подстановки получим

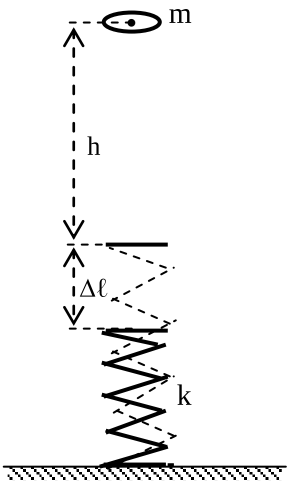
$$M = mV\sqrt{\frac{3}{\ell g(1-\cos\alpha)}}.$$

Вычисления. $M = 7\cdot 10^{-3}\cdot 360\sqrt{\frac{3}{1\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5}} = 1{,}97$ кг.

В - 7

Если на верхний конец вертикально расположенной спиральной пружины положить груз, то пружина сожмется на $\Delta\ell_0$=3 мм. На сколько сожмет пружину тот же груз, упавший на неё с высоты h=8 см?

Решение



При падении с высоты h, тело, сжимая пружину, опустится дополнительно на $\Delta\ell$. Потенциальная энергия тела в гравитационном поле перейдет в энергию упруго деформированной пружины

$$mg(h+\Delta\ell) = k(\Delta\ell)^2/2.$$

В положении равновесия сила тяжести компенсируется силой упругости, т.е.

$$mg = k\Delta\ell_0,$$

где k – коэффициент жесткости пружины.

Заменяя в первом равенстве mg его значением из второго равенства, получим

$$k\Delta\ell_0\,(h+\Delta\ell) = k(\Delta\ell)^2/2,$$

откуда $(\Delta\ell)^2 - 2\Delta\ell_0\,(\Delta\ell) - 2\Delta\ell_0\,h = 0.$

Решая данное уравнение относительно $\Delta\ell$, получим два корня

$$\Delta\ell_{1,2} = \Delta\ell_0 \pm ((\Delta\ell_0)^2 + 2\Delta\ell_0\,h)^{1/2}.$$

Условию задачи соответствует значение $\Delta\ell>0$, откуда

$$\Delta\ell = 3 + (9 + 2\cdot 3\cdot 80)^{1/2} \approx 25 \text{ мм} = 25\cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Г. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Основные формулы

- Уравнение гармонических колебаний и его решение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \ ,$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \ \text{ или } x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где x – смещение колеблющейся точки относительно положения равновесия; A, ω_0, φ_0 - соответственно амплитуда, собственная угловая частота и начальная фаза колебаний; $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент времени t .

- Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармоническое колебание,

$$v = dx/dt = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \ a = d^2x/dt^2 = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

- Период малых колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} \ ,$$

где L = I / (ma) – приведенная длина физического маятника; I – момент инерции колеблющегося тела относительно оси вращения; a – расстояние от центра масс маятника до оси вращения.

- Уравнение затухающих колебаний и его решение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0;$$

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A_0 - начальная амплитуда; $\beta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - круговая частота; $\theta = \frac{\pi}{\lambda}$ - добротность; $\lambda = \beta T$ - логарифмический декремент затухания.

- Уравнение вынужденных колебаний и его решение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t \ .$$

$$x = A\cos(\omega t - \varphi).$$

$$a = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \varphi\beta^2\omega^2}}.$$

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

- Резонансная круговая частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ .$$

Г - 1

Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\ Sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ так, что в начальный момент времени смещение x_0=4 см, а скорость V_0=10 см/с. Определить амплитуду А и начальную фазу φ_0 колебаний, если их период Т=2 с.

Решение

Уравнение колебания $x(t) = A\ Sin(\omega_0\ t + \varphi_0)$, где $x(t)$ – смещение в любой момент времени t, поэтому смещение в момент времени t=0 будет иметь вид $x_0 = A \sin \varphi_0$.

Скорость материальной точки V есть производная от смещения x(t) по времени t, т.е.

$$V = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

При t=0, $V = V_0 = A\omega_0 \cos\varphi_0$. Круговая частота $\omega_0 = 2\pi/T$, поэтому

$$V_0 = A(2\pi/T) \cos\varphi_0.$$

Для нахождения амплитуды А выразим $\sin\varphi_0$ и $\cos\varphi_0$.

$$\begin{cases} \sin\varphi_0 = x_0/A; \\ \cos\varphi_0 = V_0 \cdot T/(2\pi A). \end{cases}$$

После возведения в квадрат каждого уравнения и их сложения, получаем уравнение относительно амплитуды А.

$$1 = \frac{x_0{}^2}{A^2} + \frac{V_0{}^2 \cdot T^2}{4\pi^2 \cdot A^2}, \text{ откуда}$$

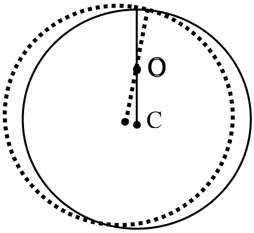
$$A = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot {x_0}^2 + {V_0}^2 \cdot T^2}{4\pi^2}} = \frac{\sqrt{4\pi^2 \cdot 16 + 100 \cdot 4}}{2\pi} = 5\,(\text{см}).$$

$$\varphi_0 = \arcsin(x_0/A) = \arcsin(4/5) \approx 53{,}1^\circ.$$

Г - 2

Определить период малых гармонических колебаний диска радиусом R=40 см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

Решение



Для нахождения периода колебаний физического маятника воспользуемся формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

где a = R/2 – расстояние от оси вращения O до центра тяжести диска C; $I = mR^2/2 + ma^2$ – момент инерции диска относительно данной оси вращения (по теореме Штейнера).

После подстановки a и I в формулу периода, имеем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5R + 0{,}25R}{0{,}5g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}4}{0{,}5 \cdot 9{,}8}} = 1{,}55\ \text{с}.$$

Г - 3

Гиря массой 0,5 кг подвешена к пружине, жёсткость которой k=32 Н/м, и совершает затухающие колебания. Определить их период в двух случаях: 1) амплитуда уменьшилась в два раза за время, в течение которого произошло 88 колебаний; 2) за время двух колебаний амплитуда уменьшилась в 20 раз.

Решение

Период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{32}{0{,}5}} = 8\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ - частота собственных колебаний.

Закон изменения амплитуды колебаний от времени

$$A = A_0 e^{-\beta t} \text{ или } \ln\frac{A_0}{A} = \beta t.$$

Учтём, что t=NT, тогда $\ln\frac{A_0}{A} = \beta NT$, откуда $\beta = \frac{\ln A_0/A}{NT}$.

Подставим β в формулу периода колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\ln A_0/A}{NT}\right)^2}}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и выразим период затухающих колебаний

$$T = \frac{\sqrt{4\pi^2 - \left(\frac{\ln A_0/A}{N}\right)^2}}{\omega_0}.$$

Произведем вычисления

$$T_1 = \frac{\sqrt{4\cdot 3{,}14^2 + \left(\frac{\ln 2}{88}\right)^2}}{8} = 0{,}78\,\text{с};$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{4\cdot 3{,}14^2 + \left(\frac{\ln 20}{2}\right)^2}}{8} = 0{,}81\,\text{с}.$$

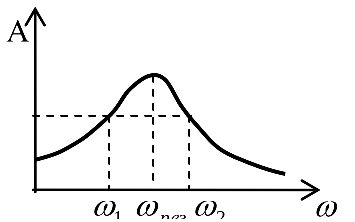
При вычислении T_1 величиной $\left(\frac{\ln 2}{88}\right)^2$ можно пренебречь ввиду её малости по сравнению с $4\pi^2$.

Г - 4

Амплитуды смещения вынужденных колебаний при частотах ω_1=400 рад/с и ω_2=600 рад/с равны между собой. Найти частоту, при которой амплитуда смещения максимальна.

Решение

Резонансная частота определяется формулой



$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

где ω_0 - собственная частота;

β - коэффициент затухания.

Условие равенства амплитуд

$$\frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}} = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_2^2}},$$

где f - характеристика вынуждающей силы.

Возведем обе части в квадрат и проведем преобразования.

$$\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_1^2 + \omega_1^4 + 4\beta^2\omega_1^2 = \omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_2^2 + \omega_2^4 + 4\beta^2\omega_2^2,$$

получим

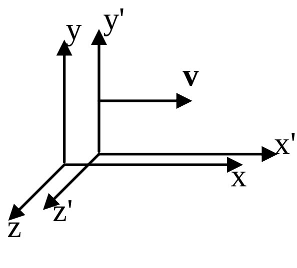
$$\omega_0^2 - 2\beta^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2},$$

откуда

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{400^2 + 600^2}{2}} = 5{,}1\cdot 10^2\ рад/с.$$

Д. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Основные формулы



В специальной теории относительности рассматриваются только инерциальные системы отсчета. Во всех задачах считается, что движение системы отсчета К$^{/}$ со скоростью v, относительно системы отсчета К, происходит вдоль общей оси *x,x*$^{/}$, а оси *y,y*$^{/}$ и *z,z*$^{/}$ параллельны. Система отсчета К условно принята за неподвижную.

- Релятивистское сокращение длины стержня

$$l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}\ ,$$

где l_0 – длина стержня в системе отсчета $K^{/}$, относительно которой стержень покоится (собственная длина). Стержень параллелен оси $x^{/}$; l – длина стержня, измеренная в системе К, относительно которой он движется со скоростью v; с – скорость света.

- Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\ ,$$

где Δt_0 – интервал времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы отсчета $K^{/}$, измеренный по часам этой системы (собственное время движущихся часов); Δt - интервал времени, измеренный по часам системы К.

- Релятивистский импульс

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\ ,$$

где m - релятивистская масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\ ,$$

m_0 – масса покоя.

- Полная энергия релятивистской частицы

$$E = mc^2 = m_0\, c^2 + T\ ,$$

где Т – кинетическая энергия частицы; $m_0\, c^2 = E_0$ – энергия покоя.

- Связь полной энергии с импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = p^2\, c^2 + m_0^2\, c^4\ .$$

- Связь кинетической энергии с импульсом релятивистской частицы

$$p^2\, c^2 = T(T + 2\, m_0\, c^2)\ .$$

Д - 1

Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95% скорости света. Во сколько раз его релятивистская масса больше массы покоя? Во сколько раз его кинетическая энергия больше энергии покоя?

Решение

Зависимость релятивистской массы тела m от скорости V его движения даётся уравнением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

а зависимость кинетической энергии тела E от скорости V его движения уравнением

$$T = E_0[(1 - (v/c)^2)^{-1/2} - 1],$$

где m_0 - масса покоя тела (частицы); E_0 - энергия покоя тела; c- скорость света ($c = 3\cdot10^8$ м/с), $V=0{,}95\cdot c$.

Отсюда определим искомые отношения:

$$m/m_0 = (1 - (0{,}95)^2)^{-1/2} = 3{,}2 \text{ раза;}$$

$$T/E_0 =[(1 - (v/c)^2)^{-1/2} - 1] = 3{,}2 - 1 = 2{,}2 \text{ раза.}$$

Е. МОЛЕКУЛЯРНОЕ СТРОЕНИЕ ВЕЩЕСТВА. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАЗА. ПРОЦЕССЫ

Основные формулы

- Количество вещества тела (число молей)

$$\nu = N / N_A \;,$$

где N – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т.п.), составляющих тело ($N=\nu N_A=(m/\mu)N_A$); N_A – число Авогадро.

- Молярная масса вещества

$$\mu = m / \nu \qquad \text{или} \qquad \mu = m_0 N_A,$$

где m – масса однородного тела; m_0 – масса структурного элемента этого тела.

- Молярная масса смеси газов

$$\mu_{см} = \Sigma\, m_i / \Sigma \nu_i \;,$$

где m_i - масса *i*-го компонента смеси; ν_I – число молей (количество вещества) *i*-го компонента смеси.

• Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева)

$$PV = \nu RT \qquad \text{или} \qquad PV = (m/\mu)\, RT,$$

где P – давление газа; V – его объем; T – термодинамическая температура; R – молярная газовая постоянная; $\nu = (m/\mu)$ – число молей вещества.

• Опытные газовые законы:

а) закон Бойля-Мариотта (изотермический процесс –T = const, m = const)

$$P\,V = \text{const};$$

б) закон Гей-Люссака (изобарный процесс – P = const, m = const)

$$V/T = \text{const};$$

в) закон Шарля (изохорный процесс – V = const, m = const)

$$P/T = \text{const}.$$

• Закон Дальтона

$$P_{см} = \Sigma\, P_i\,,$$

где $P_{см}$ – давление смеси газов; P_i – парциальное давление *i*-го компонента смеси.

• Наиболее вероятная, средняя и средняя квадратичная скорости молекул:

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}\,; \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\,;$$

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}\,,$$

где k – постоянная Больцмана; m_0 – масса молекулы; $R = kN_A$ – универсальная газовая постоянная; μ – молярная масса; N_A– число Авогадро.

Е - 1

В баллоне объёмом V=15 л находится аргон при температуре $T_1 = 300$ К и под давлением $P_1 = 600$ кПа. Когда из баллона было взято некоторое количество газа, давление в баллоне понизилось до $P_2 = 400$ кПа, а температура установилась T_2=360 К. Определить массу Δm аргона, взятого из баллона; плотность аргона ρ_2 при температуре T_2.

Решение

1) Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, применив его к начальному и конечному состояниям газа

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu}RT_1 \quad \text{и} \quad P_2V = \frac{m_2}{\mu}RT_2 \quad ,$$

где m_1 и m_2 – массы аргона, соответственно в начальном и конечном состояниях; μ – молярная масса газа; R –газовая постоянная. Тогда

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{V\mu}{R}\cdot\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right).$$

Проведём вычисления

$$\Delta m = \frac{15\cdot 10^{-3}\cdot 40\cdot 10^{-3}}{8{,}31}\cdot\left(\frac{6\cdot 10^5}{300} - \frac{4\cdot 10^5}{260}\right) = 0{,}033\,\text{кг}\,.$$

2) По определению, плотность вещества – это масса, содержащаяся в единице объёма, т.е.

$$\rho = m/V = P\mu/RT, \text{ откуда}$$

$$\rho_2 = \frac{P_2\mu}{RT_2} = \frac{4\cdot 10^5\cdot 40\cdot 10^{-3}}{8{,}31\cdot 260} = 7{,}4\,\text{кг/м}^3.$$

Е - 2

Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения $<E_п>$ и среднее значение суммарной кинетической энергии молекулы водяного пара $<E>$ при температуре T = 600 К. Найти также кинетическую энергию W поступательного движения всех молекул пара, содержащего количество вещества ν=1 кмоль.

Решение

Молекула воды (H_2O) - трёхатомная, т.е. число степеней свободы i=6, из них поступательному движению соответствуют 3 степени свободы. Поэтому средняя энергия, обусловленная поступательным движением молекулы водяного пара, равна

$$< E_п > = \frac{3}{2}kT = 1{,}5\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 600 = 1{,}24\cdot 10^{-20}\,\text{Дж}.$$

Так как общее число степеней свободы молекулы известно (i=6), найдём среднее значение её полной кинетической энергии

$$< E > = \frac{6}{2}kT = 2{,}48\cdot 10^{-20}\,\text{Дж}.$$

Число всех молекул вещества

$$N = N_A \nu ,$$

где N_A- число Авогадро; ν - количество молей вещества.

Кинетическая энергия W поступательного движения всех молекул пара

$$W = \langle E_п \rangle N = \langle E_п \rangle N_A \nu = 1{,}24 \cdot 10^{-20} 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 10^3 = 7{,}46 \text{ МДж}.$$

Ж. ТЕРМОДИНАМИКА

Основные формулы

- Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A ,$$

где Q – теплота, сообщенная термодинамической системе; ΔU – изменение внутренней энергии системы; A – работа, совершенная системой против внешних сил.

- Средняя кинетическая энергия:

а) приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$\langle E_i \rangle = (1/2)\, kT;$$

б) поступательного движения молекул

$$\langle E_{пост} \rangle = (3/2)\, kT;$$

в) приходящаяся на все степени свободы (суммарная энергия молекулы)

$$\langle E_{полн} \rangle = (i/2)\, kT,$$

где i – число степеней свободы (i = 3 – для одноатомного газа, i = 5 – для двухатомного газа, i = 6 – для многоатомного газа).

- Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N \langle E_{полн} \rangle = N (i/2)\, kT = (i/2)\, (m/\mu)\, RT,$$

где N – полное число молекул газа, $R = N_A \cdot k$ – молярная газовая постоянная.

- Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = (m/\mu)\, C_v\, \Delta T,$$

где $C_v = (i/2)\, R$ – молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме.

- Работа, совершаемая газом

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV .$$

- Уравнения адиабатного процесса (процесса, происходящего без теплообмена с окружающей средой)

$$P V^{\gamma} = const \quad \text{или} \quad T V^{\gamma - 1} = const \quad \text{или} \quad T^{\gamma} P^{1 - \gamma} = const,$$

где $\gamma = C_p / C_v = (i + 2) / i$ – показатель адиабаты; $C_p = (i + 2) R /2$ – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.

- Изменение энтропии

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} ,$$

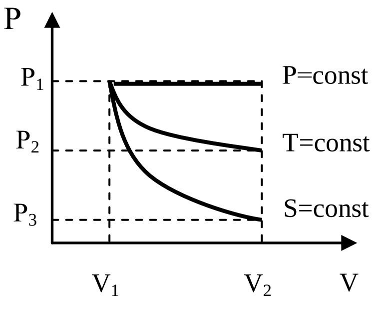
где A и B – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состояниям системы. В равновесном процессе интегрирование не зависит от пути перехода из A в B.

Ж - 1

Азот объёмом V_1=10 л находится под давлением P=1 атм. Найти изменение давления, работу расширения, изменение внутренней энергии при увеличении объёма азота до V_2=20 л: а) изобарически; б) изотермически; в) адиабатически.

Записать первое начало термодинамики для этих процессов.

Решение



Решение задачи удобно начинать с графического изображения зависимости давления газа от его объёма P=f(V).Работа любого процесса определяется $A = \int_{v_1}^{v_2} PdV$ и равна площади, ограниченной кривой P(V), крайними ординатами и осью абсцисс.

1. Изобарический процесс (P=const)

Работа расширения

$$A = P\left(V_2 - V_1\right) = 10^5\left(2 \cdot 10^{-2} - 10^{-2}\right) = 1000 \text{ Дж.}$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\cdot C_V\left(T_2 - T_1\right).$$

Так как $C_V=(i/2)R$ – молярная теплоёмкость при постоянном объёме; m/μ – число молей; i – число степеней свободы ($i=5$ для молекулы азота)

и $$P\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T = A\text{, то}$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{i}{2}P\left(V_2 - V_1\right) = \frac{5}{2}A = 2{,}5\cdot 10^3\ \text{Дж.}$$

Согласно первому началу термодинамики, теплота Q, передающаяся газу, равна сумме изменения внутренней энергии ΔU и работе A, поэтому

$$Q = A + \Delta U = 1000 + 2500 = 3500\ \text{Дж.}$$

2. Изотермический процесс (T=const)

Из уравнения Бойля-Мариотта

$$P_1V_1 = P_2V_2\text{, поэтому}$$

$$P_2 = P_1V_1/V_2 = 10^5\cdot 10^{-2}/2\cdot 10^{-2} = 0{,}5\cdot 10^5\ \text{Па.}$$

Изменение давления $\Delta P = P_2 - P_1 = -0{,}5\cdot 10^5$ Па.

Работа газа при изотермическом процессе

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\frac{m}{\mu}RT}{V}dV = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} =$$

$$= P_1V_2\ln\frac{V_2}{V_1} = 10^5\cdot 10^{-2}\ln 2 = 690\ \text{Дж.}$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\cdot\frac{i}{2}R\Delta T.\ \text{Так как } \Delta T=0\text{, то и } \Delta U=0.$$

Первое начало для изотермического процесса будет иметь вид

$$Q = A.$$

3. Адиабатический процесс (процесс, идущий без теплообмена – Q=0)

Давление газа и объём при адиабатическом процессе связаны уравнением Пуассона $P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} = const$, где $\gamma = C_p/C_v = (i + 2)/i = (5+2)/5 = 1{,}4$.

Для нашей задачи

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 10^5 \cdot (0{,}5)^{1{,}4} = 0{,}38 \cdot 10^5 \text{Па};$$

$$-\Delta P = P_1 - P_2 = 10^5 - 0{,}38 \cdot 10^5 = 0{,}62 \cdot 10^5 \text{Па}.$$

Работа при адиабатическом расширении $A = -\Delta U$, так как Q = 0.

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2).$$

T_1 и T_2 выразим из уравнения Менделеева-Клапейрона.

$$\frac{m}{\mu} T_1 = \frac{P_1 V_1}{R}; \qquad \frac{m}{\mu} T_2 = \frac{P_2 V_2}{R}.$$

$$A = \frac{C_V}{R}\left(P_1 V_1 - P_2 V_2\right) = \frac{i}{2} \cdot \left(P_1 V_1 - P_2 V_2\right) =$$

$$= \frac{5}{2}(10^5 \cdot 10^{-2} - 0{,}38 \cdot 10^5 2 \cdot 10^{-2}) = 600 \text{ Дж.}$$

Ж - 2

С идеальным двухатомным газом в количестве $\nu=2$ моля проводили следующие процессы: 1) изохорически нагрели так, что абсолютная температура увеличилась в 2 раза; 2) изобарически охладили до первоначальной температуры; 3) изотермически сжали так, что объём уменьшился в 2 раза; 4) адиабатически расширили от температуры T_1 до T_2. Найти изменение энтропии в этих процессах.

Решение

Изменение энтропии определяется формулой

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T},$$

где δQ – бесконечно малое количество теплоты.

1) При изохорическом процессе V=const

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_V dT,$$

где $\dfrac{m}{\mu} = 2$ – количество молей; $C_V = \dfrac{i}{2}R$ - молярная теплоёмкость;
i – число степеней свободы молекулы (i=5 для двухатомной молекулы).

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\frac{m}{\mu}C_V}{T} dT = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_2}{T_1} = 2\frac{5}{2}8{,}31\ln 2 = 28{,}6 \text{ Дж/К}.$$

2) При изобарическом процессе P=const

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_P dT,$$

где $C_P = \dfrac{i+2}{2}R$ – молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

$$\Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\frac{m}{\mu}C_P}{T} dT = \frac{m}{\mu} C_P \ln\frac{T_2}{T_1} = 2\frac{7}{2}8{,}31\ln 2 = 40 \text{ Дж/К}.$$

3) При изотермическом процессе T=const

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = (m/\mu)RT\ln(V_2/V_1).$$

$$\Delta S_3 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T} = \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1} = 2\cdot 8{,}31\cdot \ln 2 = 11{,}5 \text{ Дж/К}.$$

4) При адиабатном процессе δQ=0 и ΔS=0.

Ж - 3

Найти изменение ΔS энтропии при превращении льда (t= –20^0С) массой m=10 г в пар ($t_п$=100^0С).

Решение

Изменение энтропии при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

При переходе из одного агрегатного состояния в другое, общее изменение энтропии складывается из её изменений в отдельных процессах.

При нагревании льда от T до T_0 (T_0- температура плавления)

$$\Delta S_1 = \int_T^{T_0} \frac{mC_л dT}{T} = mC_л \ln\frac{T_0}{T},$$

где $C_л$=2,1 кДж/кгК – удельная теплоёмкость льда.

$$\Delta S_1 = 10^{-2} \cdot 2{,}1 \cdot 10^3 \ln(273/253) = 1{,}60 \text{ Дж/К}.$$

При плавлении льда $\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{m\lambda}{T_0},$

где λ=0,33 МДж/кг – удельная теплота плавления.

$$\Delta S_2 = 10^{-2} \cdot 0{,}33 \cdot 10^6 / 273 = 12{,}09 \text{ Дж/К}.$$

При нагревании воды от T_0 до $T_п$

$$\Delta S_3 = \int_{T_0}^{T_п} \frac{mC_B dT}{T} = mC_B \ln\frac{T_п}{T_0},$$

где C_B= 4,19 кДж/кгК – удельная теплоёмкость воды.

$$\Delta S_3 = 10^{-2} \cdot 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot \ln(373/273) = 13{,}08 \text{ Дж/К}.$$

При испарении воды при температуре $T_п$

$$\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_ï} = \frac{mr}{T_ï},$$

где r = 2,26 МДж/кг удельная теплота парообразования.

$$\Delta S_4 = 10^{-2} \cdot 2{,}26 \cdot 10^6 / 373 = 60{,}6 \text{ Дж/К}.$$

Общее изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = 87{,}37 \text{ Дж/К}.$$

Длина свободного пробега и число столкновений молекул

Ж - 4

Найти среднее число столкновений Z в единицу времени молекулы азота и среднюю длину λ свободного пробега молекулы при давлении P=53,33 кПа и температуре t = 27^{0}C.

Решение

Среднее число столкновений молекулы в единицу времени определяется формулой

$$Z = \sqrt{2}\pi\sigma^2 n \prec V \succ,$$

где σ - диаметр молекулы (находится по таблице, $\sigma = 3\cdot10^{-10}$ м); n – число молекул в единице объёма, $n = P/kT$; $<V>= (8RT/\pi\mu)^{1/2}$ - средняя скорость.

Подставляя в формулу для Z значения n и V, а так же учитывая, что $R=kN_0$, где $N_0=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$– число Авогадро, получим

$$Z = 4\sigma^2 P\sqrt{\frac{\pi N_0}{kT\mu}}.$$

Итак,

$$Z = 4\cdot 9\cdot 10^{-20}\cdot 53{,}33\cdot 10^3\sqrt{\frac{\pi\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300\cdot 28\cdot 10^{-3}}} = 2{,}5\cdot 10^9\,c^{-1}.$$

Средняя длина свободного пробега молекулы

$$\lambda = \frac{V}{Z} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 P} = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300}{\sqrt{2}\cdot 3{,}14\cdot(3\cdot 10^{-10})^2 53{,}33\cdot 10^3} = 1{,}9\cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Ж - 5

Найти показатель политропы n процесса, совершаемого идеальным газом, при котором остаётся неизменным коэффициент:
а) диффузии D=const; б) вязкости η =const; в) теплопроводности f=const.

Решение

Для политропического процесса

$$PV^n = \text{const},$$

где P - давление газа; V - его объём; n – показатель политропы.

а) Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}\prec v \succ \lambda,$$

где $\prec v \succ = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$ - средняя скорость молекул;

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ - средняя длина свободного пробега молекулы;

d – диаметр молекулы;

n – концентрация молекул.

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории выразим n – концентрацию молекул, затем, подставив n формулу для λ – длины свободного пробега и используя формулу для средней скорости молекул, получим выражение для коэффициента диффузии

$$P = nkT \Rightarrow n = \frac{P}{kT} \Rightarrow \lambda = \frac{kT}{\pi d^2 P\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{3} \prec v \succ \lambda = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P}, \text{откуда}$$

$$D = \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{\pi m_0}} \cdot \frac{k}{\pi d^2}\right) \cdot \frac{T^{\frac{3}{2}}}{P} \text{ или } D = A \cdot \frac{T^{\frac{3}{2}}}{P},$$

где через А обозначена группа постоянных величин в скобке.

Выразим температуру Т из уравнения Менделеева - Клапейрона:

$PV = \nu RT \qquad \Rightarrow T = \dfrac{PV}{\nu R}$ и, подставив её в выражение для коэффициента диффузии, получим

$$D = A \cdot \frac{1}{P}\left(\frac{PV}{\nu R}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{A}{(\nu R)^{\frac{3}{2}}}\right] \cdot P^{\frac{1}{2}} \cdot V^{\frac{3}{2}}.$$

Поскольку по условию $D = const$, то

$$D^2 = \left[\frac{A}{(\nu R)^{\frac{3}{2}}}\right]^2 \cdot PV^3 \quad \text{или} \quad PV^3 = const,$$

следовательно, показатель политропы в данном процессе $n = 3$.

б) Коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{1}{3} \prec v \succ \lambda\rho \text{, где } \rho = m_0 \cdot n \text{ - плотность газа.}$$

Выполняя действия, аналогичные предыдущим, получим

$$\eta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \cdot m_0 n = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{km_0}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi d^2} \cdot T^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{\frac{km_0}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi d^2}\right] \cdot \left(\frac{PV}{\nu R}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

Возведем η в квадрат

$$\eta^2 = \left\{\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{km_0}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi d^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu R}\right\} PV .$$

Так как по условию $\eta = const$, то $PV = const$, следовательно, показатель политропы в данном процессе $n = 1$.

в) Коэффициент теплопроводности

$$f = \eta \cdot C_V ,$$

где C_V - молярная теплоёмкость при постоянном объёме.

$C_V = \frac{i}{2} \cdot R$, где i - число степеней свободы.

так как в C_V не входят ни P, ни T, ни V, то $C_V = \frac{i}{2} \cdot R = const.$

Тогда такие же вычисления, что и в пункте б), дадут тот же результат, т.е.

$$PV = const,$$

следовательно, показатель политропы в данном процессе $n = 1$.