**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова

**УТВЕРЖДАЮ:**
Директор
И.Ю. Мезин

«29» сентября 2018г.

# ПРОГРАММА

вступительного испытания по спецдисциплине
направление подготовки: 01.06.01 Математика механика
направленность программы: Математическое моделирование

Магнитогорск – 2018г.

Программа содержит перечень вопросов по дисциплинам базовой и вариативной части направления подготовки магистратуры 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Составители: зав.каф. ПМ и И, д.ф.-м.н., профессор

_______________________ /С.И. Кадченко

Программа рассмотрена и рекомендована к изданию методической *комиссией Института естествознания и стандартизации « 29 » октября 2018 г., протокол № 2.*

Председатель ____________________ / И.Ю. Мезин

Заведующий кафедрой _________________ /С.И. Кадченко

1. **Дисциплины, включенные в программу вступительного испытания по спецдисциплине в аспирантуру**

   1.1. Дополнительные главы функционального анализа

   1.2. Спектральная теория дифференциальных операторов

   1.3. Обратные задачи спектрального анализа

   1.4. Дополнительные главы уравнений математической физики

   1.5. Дополнительные главы комплексного анализа

   1.6. Вариационные методы математической физики

   1.7. Математическое моделирование

2. **Содержание учебных дисциплин**

2.1. ***Дополнительные главы функционального анализа***

**Раздел 1.** Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о существовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

**Раздел 2.** Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Компактные топологические пространства и их свойства. Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовой прямой (числовой плоскости), измеримые функции. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере и ее связь со сходимостью почти всюду, интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование сходящихся рядов.

**Раздел 3.** Теорема Бэра о категориях. Линейное нормированное пространство. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Банахово пространство линейных ограниченных операторов. Сопряженное пространство. Теорема Банаха – Хана для полунорм.

**Раздел 4.** Принцип равномерной ограниченности. Понятие топологического линейного пространства. Слабая топология в линейном нормированом пространстве. Абстрактное гильбертово пространство. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала.

**Раздел 5.** Ортонормированные системы. Ряды Фурье. Существование полных ортонормированных систем. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Обратимые линейные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха об обратном операторе.

**Раздел 6.** Принцип сжатых отображений и его применение к доказательству существования и единственности решения дифференциального уравнения и интегрального уравнения Фредгольма с малым параметром. Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма в пространствах L2(a,b) и C(a,b). Случай вырожденного ядра. Уравнение Фредгольма в абстрактном гильбертовом пространстве. Теория Гильберта – Шмидта. Приложение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром.

**Раздел 7.** Нелинейный анализ. Непрерывность и дифференцируемость оператора. Производная Фреше и ее свойства. Интегральное представление группы унитарных операторов. Функции от самосопряженного оператора. Оператор дифференцирования.

**Раздел 8.** Полиномы наилучшего равномерного приближения. Теоремы Чебышева и Бореля. Полиномы Чебышева первого рода. Прямые теоремы конструктивной теории функций. Суммы Фурье, Фейера, Вале - Пуссена, Бернштейна – Рогозинского и их важнейшие свойства. Наилучшие приближения в нормированных пространствах. Положительные операторы и функционалы. Приложения в конструктивной теории функций. Алгебраическое и тригонометрическое интерполирование. Положительные и отрицательные результаты. Аппроксимация в среднем интерполяционными полиномами. Аппроксимация и интерполяция сплайнами. Экстремальные свойства сплайнов. Квадратурные формулы.

Литература для подготовки


1. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика.: Учебное пособие. – 5-е издание, стериотип. – М.: Физматлит, 2005. – 296 с. – ISNB 5-9221-0092-0.
2. Иосида К. Функциональный анализ. - М. ЛКИ, 2007.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М. Наука, 1976.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М, Наука, 1965.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – СПб.: Лань, 1999.
6. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2009.
7. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М. Наука, 1967.
8. Канторович Л. В. Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. - М.: Наука, 1954.
9. Эдвардс Р. Функциональный анализ. - М. Мир, 1969.
10. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл Лебега. – М.: Факториал Пресс, 2002.
11. Российская государственная библиотека www.rsl.ru


2.2. ***Спектральная теория дифференциальных операторов***

**Раздел 1.** Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Замкнутый оператор.

**Раздел 2.** Регулярные точки и спектр линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра. Ограниченность, замкнутость, не пустота спектра. Свойства спектра вполне непрерывного оператора.

**Раздел 3.** Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства спектра самосопряженных операторов. Существование ненулевых собственных значений у вполне непрерывного самосопряженного оператора.

**Раздел 4.** Разложение единиц (проекторные меры). Операторные интегралы Стилтьеса. Спектральное разложение самосопряженных операторов.

**Раздел 5.** Дискретные операторы.

**Раздел 6.** Численные методы вычисления спектра операторов. Процесс Рица. Метод Галеркина. Метод Леверрье. Спектральный след. Методы Крылова и Данилевского.

**Раздел 7.** Оператор Штурма-Лиувилля. Свойства оператора.

Литература для подготовки


1. Иосида К. Функциональный анализ. - М. ЛКИ, 2007.
2. Садовничий В.А. Теория операторов. М., Дрофа, 2004 г.
3. Элварс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х томах.- М.: Мир,1985.
4. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1967.
5. Шефер Х. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1971.
6. «Math.ru» www.math.ru


2.3. ***Обратные задачи спектрального анализа***

**Раздел 1.** Постановка обратных краевых задач. Решение внутренней и внешней задачи. О числе решений внешней задачи. Особые точки контура. Однолистная разрешимость обратных краевых задач.

**Раздел 2.** Обратные задачи спектрального анализа для линейного дискретного самосопряженного дискретного оператора в гильбертовом пространстве.

Литература для подготовки


1. Седов А.И. Обратные задачи спектрального анализа. Метод следов : монография / Магнитогорск : [Изд-во МаГУ], 2012. - 113 с.

2. Обратные задачи в приложения: 100-летию академика А. Н. Тихонова - Бирск : БирГСПА, 2006. - 295 с., 8 с. ил. - на тит. л.: 100-летию академика
3. Радыно Я. В. Лекции о спектральной теореме : Курс лекций - Минск : Изд-во БГУ, 2002. - 138 с.
4. Российская государственная библиотека www.rsl.ru

2.4. ***Дополнительные главы уравнений математической физики***

**Раздел 1.** Задача Коши для волнового уравнения. Распространение волн в пространстве.

**Раздел 2.** Задача Коши для уравнения теплопроводности. Тепловой потенциал. Поверхностный тепловой потенциал. Решение задачи Коши.

**Раздел 3.** Краевые задачи для эллиптических уравнений. Задача на собственные значения. Задача Штурма-Лиувилля. Гармонические функции. Сферические функции.

Литература для подготовки

1. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М: Наука, 2004.
2. Рид, М. Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1982.
3. Ладыженская , О.А. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций / О.А. Ладыженская. - СПб.: Наука, 1994.
4. «Math.ru» www.math.ru

2.5. ***Дополнительные главы комплексного анализа***

**Раздел 1.** Функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Интеграл по контуру. Теорема Коши. Формула Коши.

**Раздел 2.** Степенные ряды, теорема единственности. Ряд Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема. Вычеты и их свойства.

**Раздел 3.** Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолистность, круговое сохранение симметричных точек).

**Раздел 4.** Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точки ветвления. Общее понятия о римановых поверхностях.

Литература для подготовки

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – СПб.: Лань, 1999.
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1967.
3. Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1984.
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1972.
5. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1968.
6. «Math.ru» www.math.ru

2.6. ***Вариационные методы математической физики***

**Раздел 1.** Необходимое условие экстремума функционала. Простейшие задачи вариационного исчисления и уравнение Эйлера-Лагранжа.

**Раздел 2.** Задача о брахистохроне. Задача с подвижными границами.

Литература для подготовки

1. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения : справ. рук. - СПб. [и др.]

: Лань, 2005. - 191 с.

2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций : учебник для вузов / Мазаева Н. П. - М. : Дашков и К, 2007. - 396 с.
3. Научная электронная библиотека: http://elibrary.ru/defaultx.asp

2.7. ***Математическое моделирование***

**Раздел 1.** Основные понятия о модели и моделировании. Общие понятия математической модели. Основные свойства и требования. Математическая модель полета реактивного снаряда в гравитационном поле земли.

**Раздел 2.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели. Модель сражения двух армий. Логистичекая модель роста населения. Математическая модель эксплуатации рыбных ресурсов. Математическая модель многоступенчатого управления.

**Раздел 3.** Математические модели на основе краевых задач. Математические модели на основе начально-краевых задач.

Литература для подготовки

1. Арнольд, В.И. Мягкие и жесткие математические модели / В.И. Арнольд. - М.: МЦНМО. - 2008. – 32 с.
2. Тарасевич, Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование / Ю.Ю. Тарасевич. – М.: УРСС. - 2004, – 152 с.
3. Ашихмен, В.Н. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие / В.Н. Ашихмен, М.Б. Гитман, И.Э. Келлер и др.; Под ред. П.В. Трусова.- М.: Университетская книга, Догос. - 2007. – 440 с.
4. Самарский, А.А. Математическое моделирование / А.П. Михайлов. – М.: Наука. - 1997. – 316 с.
5. Краснощеков, П.С. Принципы построения моделей / А.А. Петров. - М.: МГУ. - 1983. – 411 с.
6. Научная электронная библиотека: http://elibrary.ru/defaultx.asp

## 3. Шкала оценивания вступительного испытания (один вопрос)

| Балл | Характеристика ответа |
|---|---|
| **5** | 1. Ответы на поставленные вопросы в билете излагаются логично, последовательно и не требуют дополнительных пояснений.<br>2. Демонстрируются глубокие знания дисциплины.<br>3. Делаются обоснованные выводы.<br>4. Ответ самостоятельный, при ответе использованы знания, приобретённые ранее.<br>5. Сформированы навыки исследовательской деятельности. |
| **4** | 1. Ответы на поставленные вопросы в билете излагаются систематизировано и последовательно.<br>2. Демонстрируется умение анализировать материал, однако не все выводы носят аргументированный и доказательный характер.<br>3. Материал излагается уверенно, в основном правильно даны все определения и понятия.<br>4. Допущены небольшие неточности при выводах и использовании терминов.<br>5. Продемонстрированы навыки исследова- |

| | |
|---|---|
| | тельской деятельности. |
| **3** | 1. Допускаются нарушения в последовательности изложения при ответе.<br>2. Демонстрируются поверхностные знания дисциплин.<br>3. Имеются затруднения с выводами.<br>4. Определения и понятия даны не чётко.<br>5. Навыки исследовательской деятельности представлены слабо. |
| **2** | 1. Материал излагается непоследовательно, сбивчиво, не представляет определенной системы знаний по дисциплине.<br>2. Допущены грубые ошибки в определениях и понятиях.<br>3. Отсутствуют навыки исследовательской деятельности. |

## 4. Пример экзаменационного билета

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. (35 баллов)
2. Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. (35 баллов)
3. Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовой прямой, измеримые функции. Сходимость почти всюду. (30 баллов)

Программу вступительного испытания по спецдисциплине
по направлению подготовки: 01.06.01 Математика механика
направленности программы: 01.01.01. Вещественный, комплексный и
функциональный анализ разработал:

*доктор физико-математических наук,*

*профессор кафедры прикладной математики*

*и информатики* С.И. Кадченко