

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова



**УТВЕРЖДАЮ:**  
Директор  
И.Ю. Мезин

«24» сентября 2019г.


**ПРОГРАММА**

вступительного испытания по спецдисциплине  
направление подготовки: 01.06.01 Математика механика  
направленность программы: Математическое моделирование

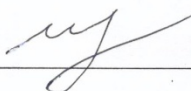
Магнитогорск – 2019 г.

Программа содержит перечень вопросов по спец. дисциплине аспирантуры направление подготовки 01.06.01 Математика и механика. Направленность программы: Математическое моделирование.


Составители: зав. каф. ПМ и И, д.ф.-м.н., профессор

 /С.И. Кадченко

Программа рассмотрена и рекомендована к изданию методической комиссией *Института естествознания и стандартизации* « 24 » сентября 2019 г., протокол № 1.

Председатель  / И.Ю. Мезин

Заведующий кафедрой

 /С.И. Кадченко

## 1. Дисциплины, включенные в программу вступительного испытания по спецдисциплине в аспирантуру

- 1.1. Дополнительные главы функционального анализа
- 1.2. Спектральная теория дифференциальных операторов
- 1.3. Обратные задачи спектрального анализа
- 1.4. Дополнительные главы уравнений математической физики
- 1.5. Дополнительные главы комплексного анализа
- 1.6. Вариационные методы математической физики
- 1.7. Математическое моделирование

## 2. Содержание учебных дисциплин

### 2.1. *Дополнительные главы функционального анализа*

**Раздел 1.** Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о существовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

**Раздел 2.** Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Компактные топологические пространства и их свойства. Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовой прямой (числовой плоскости), измеримые функции. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере и ее связь со сходимостью почти всюду, интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование сходящихся рядов.

**Раздел 3.** Теорема Бэра о категориях. Линейное нормированное пространство. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Банахово пространство линейных ограниченных операторов. Сопряженное пространство. Теорема Банаха – Хана для полунорм.

**Раздел 4.** Принцип равномерной ограниченности. Понятие топологического линейного пространства. Слабая топология в линейном нормированном пространстве. Абстрактное гильбертово пространство. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала.

**Раздел 5.** Ортонормированные системы. Ряды Фурье. Существование полных ортонормированных систем. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Обратимые линейные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха об обратном операторе.

**Раздел 6.** Принцип сжатых отображений и его применение к доказательству существования и единственности решения дифференциального уравнения и интегрального уравнения Фредгольма с малым параметром. Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма в пространствах  $L_2(a,b)$  и  $C(a,b)$ . Случай вырожденного ядра. Уравнение Фредгольма в абстрактном гильбертовом пространстве. Теория Гильберта – Шмидта. Приложение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром.

**Раздел 7.** Нелинейный анализ. Непрерывность и дифференцируемость оператора. Производная Фреше и ее свойства. Интегральное представление группы унитарных операторов. Функции от самосопряженного оператора. Оператор дифференцирования.

**Раздел 8.** Полиномы наилучшего равномерного приближения. Теоремы Чебышева и Бореля. Полиномы Чебышева первого рода. Прямые теоремы конструктивной теории функций. Суммы Фурье, Фейера, Вале - Пуассена, Бернштейна – Рогозинского и их важнейшие свойства. Наилучшие приближения в нормированных пространствах. Положительные операторы и функционалы. Приложения в конструктивной теории функций. Алгебраическое и тригонометрическое интерполирование. Положительные и отрицательные результаты. Аппроксимация в среднем интерполяционными полиномами. Аппроксимация и интерполяция сплайнами. Экстремальные свойства сплайнов. Квадратурные формулы.

#### Литература для подготовки

1. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика.: Учебное пособие. – 5-е издание, стереотип. – М.: Физматлит, 2005. – 296 с. – ISBN 5-9221-0092-0.
2. Иосида К. Функциональный анализ. - М. ЛКИ, 2007.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М. Наука, 1976.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М, Наука, 1965.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – СПб.: Лань, 1999.
6. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2009.
7. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М. Наука, 1967.
8. Канторович Л. В. Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. - М.: Наука, 1954.
9. Эдвардс Р. Функциональный анализ. - М. Мир, 1969.
10. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл Лебега. – М.: Факториал Пресс, 2002.
11. Российская государственная библиотека [www.rsl.ru](http://www.rsl.ru)

### 2.2. *Спектральная теория дифференциальных операторов*

**Раздел 1.** Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Замкнутый оператор.

**Раздел 2.** Регулярные точки и спектр линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра. Ограниченность, замкнутость, не пустота спектра. Свойства спектра вполне непрерывного оператора.

**Раздел 3.** Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства спектра самосопряженных операторов. Существование ненулевых собственных значений у вполне непрерывного самосопряженного оператора.

**Раздел 4.** Разложение единиц (проекторные меры). Операторные интегралы Стильтьеса. Спектральное разложение самосопряженных операторов.

**Раздел 5.** Дискретные операторы.

**Раздел 6.** Численные методы вычисления спектра операторов. Процесс Рица. Метод Галеркина. Метод Леверрье. Спектральный след. Методы Крылова и Данилевского.

**Раздел 7.** Оператор Штурма-Лиувилля. Свойства оператора.

#### Литература для подготовки

1. Иосида К. Функциональный анализ. - М. ЛКИ, 2007.
2. Садовничий В.А. Теория операторов. М., Дрофа, 2004 г.
3. Элварс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х томах.- М.: Мир,1985.
4. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1967.
5. Шефер Х. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1971.
6. «Math.ru» [www.math.ru](http://www.math.ru)

### 2.3. *Обратные задачи спектрального анализа*

**Раздел 1.** Постановка обратных краевых задач. Решение внутренней и внешней задачи. О числе решений внешней задачи. Особые точки контура. Однолистная разрешимость обратных краевых задач.

**Раздел 2.** Обратные задачи спектрального анализа для линейного дискретного самосопряженного дискретного оператора в гильбертовом пространстве.

#### Литература для подготовки

1. Седов А.И. Обратные задачи спектрального анализа. Метод следов : монография / Магнитогорск : [Изд-во МаГУ], 2012. - 113 с.

2. Обратные задачи в приложениях: 100-летию академика А. Н. Тихонова - Бирск : БирГСПА, 2006. - 295 с., 8 с. ил. - на тит. л.: 100-летию академика
3. Радыно Я. В. Лекции о спектральной теореме : Курс лекций - Минск : Изд-во БГУ, 2002. - 138 с.
4. Российская государственная библиотека [www.rsl.ru](http://www.rsl.ru)

#### **2.4. *Дополнительные главы уравнений математической физики***

**Раздел 1.** Задача Коши для волнового уравнения. Распространение волн в пространстве.

**Раздел 2.** Задача Коши для уравнения теплопроводности. Тепловой потенциал. Поверхностный тепловой потенциал. Решение задачи Коши.

**Раздел 3.** Краевые задачи для эллиптических уравнений. Задача на собственные значения. Задача Штурма-Лиувилля. Гармонические функции. Сферические функции.

Литература для подготовки

1. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М: Наука, 2004.
2. Рид, М. Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1982.
3. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций / О.А. Ладыженская. - СПб.: Наука, 1994.
4. «Math.ru» [www.math.ru](http://www.math.ru)

#### **2.5. *Дополнительные главы комплексного анализа***

**Раздел 1.** Функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Интеграл по контуру. Теорема Коши. Формула Коши.

**Раздел 2.** Степенные ряды, теорема единственности. Ряд Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема. Вычеты и их свойства.

**Раздел 3.** Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолиственность, круговое сохранение симметричных точек).

**Раздел 4.** Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точки ветвления. Общие понятия о римановых поверхностях.

Литература для подготовки

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – СПб.: Лань, 1999.
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1967.
3. Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1984.
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1972.
5. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1968.
6. «Math.ru» [www.math.ru](http://www.math.ru)

#### **2.6. *Вариационные методы математической физики***

**Раздел 1.** Необходимое условие экстремума функционала. Простейшие задачи вариационного исчисления и уравнение Эйлера-Лагранжа.

**Раздел 2.** Задача о брахистохроне. Задача с подвижными границами.

Литература для подготовки

1. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения : справ. рук. - СПб. [и др.]

: Лань, 2005. - 191 с.

2. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций : учебник для вузов / Мазаева Н. П. - М. : Дашков и К, 2007. - 396 с.
3. Научная электронная библиотека: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>

## 2.7. Математическое моделирование

**Раздел 1.** Основные понятия о модели и моделировании. Общие понятия математической модели. Основные свойства и требования. Математическая модель полета реактивного снаряда в гравитационном поле земли.

**Раздел 2.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели. Модель сражения двух армий. Логистическая модель роста населения. Математическая модель эксплуатации рыбных ресурсов. Математическая модель многоступенчатого управления.

**Раздел 3.** Математические модели на основе краевых задач. Математические модели на основе начально-краевых задач.

Литература для подготовки

1. Арнольд, В.И. Мягкие и жесткие математические модели / В.И. Арнольд. - М.: МЦНМО. - 2008. – 32 с.
2. Тарасевич, Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование / Ю.Ю. Тарасевич. – М.: УРСС. - 2004, – 152 с.
3. Ашихмен, В.Н. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие / В.Н. Ашихмен, М.Б. Гитман, И.Э. Келлер и др.; Под ред. П.В. Трусова.- М.: Университетская книга, Догос. - 2007. – 440 с.
4. Самарский, А.А. Математическое моделирование / А.П. Михайлов. – М.: Наука. - 1997. – 316 с.
5. Краснощеков, П.С. Принципы построения моделей / А.А. Петров. - М.: МГУ. - 1983. – 411 с.
6. Научная электронная библиотека: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>

## 3. Шкала оценивания вступительного испытания (один вопрос)

Балл	Характеристика ответа
5	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Ответы на поставленные вопросы в билете излагаются логично, последовательно и не требуют дополнительных пояснений.</li><li>2. Демонстрируются глубокие знания дисциплины.</li><li>3. Делаются обоснованные выводы.</li><li>4. Ответ самостоятельный, при ответе использованы знания, приобретённые ранее.</li><li>5. Сформированы навыки исследовательской деятельности.</li></ol>
4	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Ответы на поставленные вопросы в билете излагаются систематизировано и последовательно.</li><li>2. Демонстрируется умение анализировать материал, однако не все выводы носят аргументированный и доказательный характер.</li><li>3. Материал излагается уверенно, в основном правильно даны все определения и понятия.</li><li>4. Допущены небольшие неточности при выводах и использовании терминов.</li><li>5. Продемонстрированы навыки исследова-</li></ol>

	тельской деятельности.
3	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Допускаются нарушения в последовательности изложения при ответе.</li> <li>2. Демонстрируются поверхностные знания дисциплин.</li> <li>3. Имеются затруднения с выводами.</li> <li>4. Определения и понятия даны не чётко.</li> <li>5. Навыки исследовательской деятельности представлены слабо.</li> </ol>
2	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Материал излагается непоследовательно, сбивчиво, не представляет определенной системы знаний по дисциплине.</li> <li>2. Допущены грубые ошибки в определениях и понятиях.</li> <li>3. Отсутствуют навыки исследовательской деятельности.</li> </ol>

#### 4. Пример экзаменационного билета

##### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. (35 баллов)
2. Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. (35 баллов)
3. Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовой прямой, измеримые функции. Сходимость почти всюду. (30 баллов)