Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИЕиС
_________ И.Ю.Мезин
«___»___________2022 г

Программа

вступительного экзамена в аспирантуру по направлению подготовки/специальности

1.1 Математика и механика 1.1.6 Вычислительная математика

Магнитогорск – 2022

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по направлению подготовки 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования.

1. Правила проведения вступительного испытания

Вступительное испытание проводится по спецдисциплине и позволяет оценить компетенции, необходимые для дальнейшего успешного обучения по направлению подготовки/специальности

1.2 Компьютерные науки и информатика (1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ).

Вступительное испытание проводятся в письменной форме на русском языке по билетам, содержащим три вопроса.

Продолжительность вступительного испытания 1,5 часа.

Во время проведения вступительных испытаний запрещается иметь при себе и использовать средства связи.

Результаты объявляются на официальном сайте и на информационном стенде не позднее 3 рабочих дней со дня проведения вступительного испытания

2. Дисциплины, включенные в программу вступительного испытания

2.1. Дополнительные главы функционального анализа
2.2. Спектральная теория дифференциальных операторов
2.3. Обратные задачи спектрального анализа
2.4. Дополнительные главы уравнений математической физики
2.5. Дополнительные главы комплексного анализа
2.6. Вариационные методы математической физики
2.7. Математическое моделирование

3. Содержание учебных дисциплин

Раздел 1

Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о существовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

Функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Интеграл по контуру. Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл типа Коши и его свойства. Формулы Сохоцкого. Принцип максимума, теорема Лиувилля. Ряды аналитических функций, теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема единственности. Ряд

Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема Сохоцкого. Вычеты и их свойства.

Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Сравнение топологий. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфные отображения. Способы задания топологий. Индуцированная топология и фактор-топология. Сходимость в топологических пространствах. Компактные топологические пространства и их свойства.

Раздел 2

Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. Локально компактные пространства и их свойства. Компактные расширения локально компактных пространств. Связные пространства и их свойства.

Раздел 3

Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовой прямой (числовой плоскости), измеримые функции. Измеримые по Борелю функции. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере и ее связь со сходимостью почти всюду, интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование сходящихся рядов. Теорема Фату. Произведение мер. Теорема Фубини.

Заряды (обобщенные меры). Теорема Хана. Неопределенный интеграл Лебега. Теорема Радона – Никодима. Понятие σ-конечной меры. Определенный интеграл по σ-конечной мере.

Раздел 4

Теорема Бэра о категориях. Линейное нормированное пространство. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Банахово пространство линейных ограниченных операторов L(E,F). Сопряженное пространство. Теорема Банаха – Хана для полунорм. Принцип равномерной ограниченности. Понятие топологического линейного пространства. Слабая топология в линейном нормированом пространстве. Абстрактное гильбертово пространство. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала. Ортонормированные системы. Ряды Фурье. Существование полных ортонормированных систем. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Обратимые линейные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха об обратном операторе. Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Замкнутый оператор. Регулярные точки и спектр линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра. Ограниченность, замкнутость, не пустота спектра. Свойства спектра вполне непрерывного оператора. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства спектра самосопряженных операторов. Существование ненулевых собственных значений у вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Принцип сжатых отображений и его применение к доказательству существования и единственности решения дифференциального уравнения и интегрального уравнения Фредгольма с малым параметром. Относительно компактные множества, критерий Хаусдорфа и Фреше. Теорема Арчела.

Раздел 5

Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма в пространствах L2(a,b) и C(a,b). Случай вырожденного ядра.

Уравнение Фредгольма в абстрактном гильбертовом пространстве. Теория Гильберта – Шмидта. Приложение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром. Нелинейный анализ. Непрерывность и дифференцируемость оператора. Производная Фреше и ее свойства. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшие задачи вариационного исчисления и уравнение Эйлера-Лагранжа.

Раздел 6

Разложение единиц (проекторные меры). Операторные интегралы Стилтьеса. Спектральное разложение самосопряженных операторов. Интегральное представление группы унитарных операторов. Функции от самосопряженного оператора. Оператор дифференцирования.

Раздел 7

Полиномы наилучшего равномерного приближения. Теоремы Чебышева и Бореля. Полиномы Чебышева первого рода. Прямые теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Джексона и их обобщения (периодический и непериодический случаи). Обратные теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Бернштейна и Зигмунда.

Суммы Фурье, Фейера, Вале - Пуссена, Бернштейна – Рогозинского и их важнейшие свойства. Наилучшие приближения в нормированных пространствах. Положительные операторы и функционалы. Приложения в конструктивной теории функций. Алгебраическое и тригонометрическое интерполирование. Положительные и отрицательные результаты. Аппроксимация в среднем интерполяционными полиномами. Аппроксимация и интерполяция сплайнами. Теоремы типа Джексона. Экстремальные свойства сплайнов. Квадратурные формулы. Экстремальные задачи теории квадратур. Теорема Банаха – Штейнгауза и ее приложения к конструктивной теории функций.

Раздел 8

Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолистность, круговое сохранение симметричных точек). Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема

Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точки ветвления. Общее понятия о римановых поверхностях.

Раздел 9

Связь ядер Коши и Шварца. Формула Гильберта. Регуляризующий множитель для задачи Гильберта. Задача Гильберта с разрывными коэффициентами в полуплоскости. Смешанная краевая задача. Задача Дирихле и ее видоизменения для плоскости со щелями. Задача Римана в односвязной и многосвязной областях. Постановка обратных краевых задач. Решение внутренней и внешней задачи. О числе решений внешней задачи. Особые точки контура. Однолистная разрешимость обратных краевых задач.

4. Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение

Основная литература

1. Голубев Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. - М.: Наука, 1987.
2. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл Лебега. – М.: Факториал Пресс, 2002.
3. Ефимов А.В. Математический анализ. Специальные разделы, ч.1,2. - М., 1980.
4. Иосида К. Функциональный анализ. - М. ЛКИ, 2007.
5. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. Изд. 2. – М.: АФЦ, 1999.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М. Наука, 1976.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989.
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.1,2. - М., 1981.
9. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М, Наука, 1965.
10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – СПб.: Лань, 1999.
11. Садовничий В.А. Теория операторов. М., Дрофа, 2004 г.
12. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2009.
13. Элварс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х томах.- М.: Мир,1985.

Дополнительная литература

1. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М. Наука, 1967.
2. Канторович Л. В. Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. - М.: Наука, 1954.
3. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1967.

4. Шефер Х. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1971.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. - М. Мир, 1969.

Список интернет-ресурсов

1. Научная электронная библиотека: http://elibrary.ru/defaultx.asp
2. Электронно-библиотечная система «Лань» http://e.lanbook.com/private/
3. Электронно-библиотечная система «ibooks» http://ibooks.ru/
4. Электронно-библиотечная система «znanium/com» http://infra-m.ru/live/
5. Библиотека Московского центра непрерывного математического образования http://ilib.mccme.ru
6. «MathNet» www.math-net.ru
7. «Math.ru» www.math.ru
8. Российская государственная библиотека www.rsl.ru
9. Российская национальная библиотека www.nlr.ru

5. Шкала оценивания вступительного испытания (один вопрос)

Уровень знаний поступающего оценивается экзаменационной комиссией по пятибалльной системе:

Балл	Критерии
5	1. Ответы на поставленные вопросы в билете излагаются логично, последовательно и не требуют дополнительных пояснений. 2. Демонстрируются глубокие знания дисциплин специальности. 3. Делаются обоснованные выводы. 4. Ответ самостоятельный, при ответе использованы знания, приобретённые ранее. 5. Продемонстрированы сформированы навыки исследовательской деятельности.
4	1. Ответы на поставленные вопросы в билете излагаются систематизировано и последовательно. 2. Демонстрируется умение анализировать материал, однако не все выводы носят аргументированный и доказательный характер. 3. Материал излагается уверенно, в основном правильно даны все определения и понятия. 4. Допущены небольшие неточности при выводах и использовании терминов. 5. Продемонстрирована склонность и начальные навыки к исследовательской деятельности.
3	1. Допускаются нарушения в последовательности изложения при ответе. 2. Демонстрируются поверхностные знания дисциплин специальности.

	3. Имеются затруднения с выводами. 4. Определения и понятия даны нечётко. 5. Склонность и навыки исследовательской деятельности представлены слабо.
2	1. Материал излагается непоследовательно, сбивчиво, не представляет определенной системы знаний по дисциплине. 2. Не даны ответы на дополнительные вопросы комиссии. 3. Допущены грубые ошибки в определениях и понятиях. 4. Отсутствуют склонность и навыки исследовательской деятельности.

6. Пример экзаменационного билета

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова

УТВЕРЖДАЮ:
Руководитель ООП
__________ Кадченко С.И.

«_._» ___________ 20__ г.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1

вступительного испытания в аспирантуру

Направление подготовки/специальность: 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

1. Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теоремы Фредгольма. Интегральное уравнение Интегральное уравнение Фредгольма в пространствах $L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.

2. Геометрический смысл дифференцируемости функций комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции.

3. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$

Разработано: проф. кафедры ПМ и ВТ_____________/Кадченко С.И./

1. (5 баллов)
2. (5 баллов)

3. (5 баллов)

Программа вступительного экзамена составлена:

Профессор кафедрой ПМиИ, доктор физ.-мат. наук Кадченко С.И.